فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۱۰۷ تا ۱۱۱

تکنیک تبدیل لاپلاس برای محاسبه سریهای نامتناهی

جیمز. پی. لسکو، وندی. دی. اسمیت

مترجم: سعید علیخانی

افتیمو در مقاله‌ای در همین مجله[۱] [۲]، نشان داد که چگونه می‌توان تبدیل لاپلاس را به عنوان ابزاری برای محاسبه‌ی سری‌های نامتناهی به کار برد. در این مقاله این روش را مورد بررسی و کاربرد این تکنیک را بیشتر شرح می‌دهیم.

تکنیک افتیمو: افتیمو در مجلهٔ مذکور فرمول‌هایی برای سری‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} \qquad a,b \in \{-1,-2,\ldots\} \tag{1}$$

یافته است. او همان روش را برای محاسبهٔ سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(n)}{P(n)}$، که در آن P و Q چندجمله‌ای‌هایی هستند که $deg(P) - deg(Q) = 2$ و P قابل تجزیه به عامل‌های خطی بدون ریشه‌های $\{1,2,3,\ldots\}$ می‌باشند، به کار می‌برد.

تکنیک افتیمو برای سری‌های نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ که جملهٔ عمومی آن یعنی u_n را، بتوان به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس $u_n = \int_0^{\infty} e^{-nx} f(x)dx$ نوشت، به کار می رود. در این حالت تمام جمعوندها (به هر تعدادی که باشند)، به صورت انتگرال نوشته خواهد شد. این مرحله ممکن است خوشایند نباشد، اما با تعویض ترتیب سیگما و انتگرال (البته با بررسی شرایط) به یک سری هندسی که به صورت ساده‌ای قابل محاسبه است، تبدیل می‌شود. تساوی‌های زیر، مراحل فوق را به سادگی بیان می‌کند:

*) James P. Lesko and Wendy D. Smith

۱) منظور مجله‌ی “Mathematics Magazine”, Vol. 76, No. 5 (Dec 2003) و اصل مقاله “A Laplace Transform Technique for Evaluating Infinite Series” می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-nx} f(x)dx \stackrel{?}{=} \int_{0}^{\infty} f(x) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx = \int_{0}^{\infty} f(x)(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}})dx$$

اگر این انتگرال به آسانی قابل محاسبه باشد، مجموع را یافته‌ایم.
برای شرح این روش، سری (۱) را با فرض $a \neq b$ در نظر می‌گیریم. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $-1 < a < b$. جمله‌ی nاُم را (با استفاده از تجزیه‌ی کسرها) می‌توان به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس زیر نوشت، که می‌تواند نقطه‌ی شروعی برای مراحل فوق باشد، نوشت.

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \int_{0}^{\infty} e^{-nx}(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a})dx$$

اکنون باید برای تعویض ترتیب سیگما و انتگرال دلیل بیاوریم. از آنجا که همه انتگرال‌ده‌ها برای $0 < x < \infty$ نامنفی‌اند، با به کاربردن قضیه‌ی همگرایی یکنوا (برای مثال، [۳] ص ۴۹ را ببینید) برای تعویض ترتیب سیگما و انتگرال، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-nx}(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a})dx \\ &\stackrel{M.C.T}{=} \int_{0}^{\infty} (\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_{0}^{\infty} (e^{-ax}-e^{-bx})(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}})dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_{0}^{1} \frac{u^a-u^b}{1-u}du.\end{aligned} \tag{2}$$

که در آن $u = e^{-x}$.
به عنوان مثال اول، قرار دهید $a = 0$ و $b = \frac{1}{2}$؛ در این صورت از (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\frac{1}{2})} = 2\int_{0}^{1} \frac{1-u^{\frac{1}{2}}}{1-u}du = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{1+u^{\frac{1}{2}}}du = 4(1-ln2)$$

برای مثال دوم، قرار دهید $a = 0$ و b را عددی صحیح مثبت در نظر بگیرید، در این صورت از (۲)، تساوی سری تلسکوپی نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} &= \frac{1}{b}\int_{0}^{1} \frac{1-u^b}{1-u}du = \frac{1}{b}\int_{0}^{1}(1+u+u^2+\cdots+u^{b-1})du \\ &= \frac{1}{b}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{b}).\end{aligned}$$

خواننده‌ی علاقمند را برای مشاهده‌ی کاربردهای این روش در مورد سری‌های دیگر، به مقاله‌ی افتیمو [۲] ارجاع می‌دهیم.

یک روش کلی‌تر: روش افتیمو را می‌توان به سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ که در اینجا بهتر است فقط v_n به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس نوشته شود، تعمیم داد. مجدداً سری را می‌توان به صورت مجموع انتگرال‌ها نوشت، منتها این بار یک عامل u_n قبل از هر انتگرال وجود دارد. اگر ترتیب مجموع و انتگرال را بتوان عوض کرد (دوباره با

بررسی درستی شرایط)، لازم است مجموع صریح سری $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-nx}$ را پیدا کنیم. اگر همهٔ شرایط مناسب باشد، خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \int_0^{\infty} e^{-nx} f(x)dx \stackrel{?}{=}$$
$$\int_0^{\infty} f(x)(\sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-nx})dx = \int_0^{\infty} f(x)h(x)dx.$$

به عنوان مثال، سری زیر را به ازای $r \in [-1, 1)$، $a > 0$ و $b \geq 0$ در نظر بگیرید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} \qquad (3)$$

توجه کنید که کسر $\frac{1}{an+b}$ را می‌توان به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس $\int_0^{\infty} e^{-nx}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})$ نوشت.
هرگاه $r \neq -1$، مجموع‌های جزئی $\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})$ از بالا کراندارند، چرا که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r^n e^{-nx}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})| = \frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x}(\frac{|r|e^{-x}}{1-|r|e^{-x}})$$

که در آن

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x}(\frac{|r|e^{-x}}{1-|r|e^{-x}})dx \leq \frac{1}{a}\int_0^{\infty}(\frac{|r|e^{-x}}{1-|r|e^{-x}})dx < \infty$$

حال با به کار بردن قضیه‌ی همگرایی تسلطی لبگ (مجدداً [۳ ص ۵۳] را ببینید) برای تعویض ترتیب سیگما و انتگرال خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} r^n e^{-nx}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})dx \\ &\stackrel{D.C.T}{=} \int_0^{\infty}(\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}x})\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx}dx \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{b}{a}x}(\frac{re^{-x}}{1-re^{-x}})dx = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{ru^{\frac{b}{a}}}{1-ru}du\end{aligned}$$

ما این فرمول را برای $r \in (-1, 1)$ به دست آورده‌ایم، اما از آنجا که سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b}$ و (۴) به ازای $r = -1$ همگرا هستند بنا بر قضیه‌ی آبل (به عنوان مثال [۱ ص ۲۷۹] را ببینید) باید با هم برابر باشند.
دو مثال پیشنهادی زیر را در نظر می‌گیریم . هرگاه $a = 1$ و $b = 0$، از (۴) خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = \int_0^1 \frac{r}{1-ru}du = \ln(\frac{1}{1-r}).$$

و برای $r = -1, a = 1$ و $b = \frac{1}{2}$ از (۴) خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} = -\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u}du = \frac{\pi}{2} - 2.$$

به عنوان یک مثال دیگر برای این تکنیک، سری

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)}$، که $r \in [-1, 1]$ و $b > a > -1$

را در نظر بگیرید. ما اکنون می‌دانیم که چگونه $\frac{1}{(n+a)(n+b)}$ را می‌توان به صورت انتگرال تبدیل لاپلاس نوشت. هرگاه $r \in (-1, 1)$، تخمین مجموعه‌ای جزیی شبیه آنهایی است که قبلاً بررسی شد و بررسی جزئیات آن به خواننده واگذار می‌شود. با به کار بردن قضیه همگرایی تسلطی لبگ برای تعویض سیگما وانتگرال خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-nx} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}\right) dx \\ &\overset{D.C.T}{=} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}\right) \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_0^{\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \left(\frac{re^{-x}}{1-re^{-x}}\right) dx \\ &= \frac{r}{b-a} \int_0^1 \frac{u^a - u^b}{1-ru} du \qquad (5) \end{aligned}$$

این استدلال برای $r \in (-1, 1)$ کار می کند، اما از آنجا که سری و (۵) هر دو به ازای $r = \pm 1$ وجود دارند، مانند قبل بنا بر قضیه آبل برای $r = \pm 1$ مساوی هستند. بنابراین برای مثال، به ازای $a = 0$ و $b = 1$، از (۵) خواهیم داشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(n+1)} = r \int_0^1 \frac{1-u}{1-ru} du = 1 + \left(\frac{1-r}{r}\right) \ln(1-r).$$

نکتهٔ آخر. قصد ما ارائهٔ این پیشنهاد که فرمول‌های سری‌های بحث شده در این مقاله جدید هستند، نبود، چرا که راه‌های متعددی برای محاسبه‌ی آنها وجود دارند. هدف ما ارائه روشی برای محاسبه‌ی این سری‌ها می‌باشد. امیدواریم این روش را به جعبه ابزارتان برای سری‌ها اضافه کنید.

تمرین: لذت ببرید!

۱—فرض کنید $b \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. مراحل زیر را طی کنید تا به اثباتی برای اتحاد سری‌های تلسکوپی برسید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{b}\right)$$

(i) از انتگرال تبدیل لاپلاس $\frac{1}{n+b} = \int_0^{\infty} e^{-nx}(e^{-bx}) dx$ استفاده کنید و نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} = \int_0^1 u^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-u}\right) du.$$

(ii) نشان دهید که $\int_0^1 u^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-u}\right) du = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{b}\right)$.

۲— با استفاده از روش‌های توصیف شده در این مقاله، مقدارهای دقیق سری‌های زیر را بیابید. پاسخ‌های خود را با کامپیوتر بررسی کنید!

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 4^n}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n(n+k)}$ ، که $k \in \{1, 2, \ldots\}$

مراجع

[1] R. C. Buck, Advanced Calculus, 3rd ed. , McGraw-Hill, New York, 1978.

[2] C. Efthimiou, Finding exact value for infinite sums, Mathematics Magazine 72 (1999), 45-51.

[3] G. Folland, Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. John Wiley , Sons, New York, 1984.

مترجم: سعید علیخانی
دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد
پست الکترونیک : alikhani@yazduni.ac.ir

James P. Lesko
Grace College
Winona Lake, Indiana 46590
leskojp@grace.edu
Wendy D. Smith
Bowling Green state university
Bowling Green, OH 43403
wendey@bgnet.bgsu.edu