فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۳۱ تا ۴۰

مروری بر مهتری‌های عادی و تعمیم‌یافته و بررسی ساختار نگهدارنده‌های خطی آن‌ها

علی آرمندنژاد

چکیده

در این مقاله، مفهوم مهتری[1] در گونه‌های مختلف برداری، ماتریسی، چندگانه و تعمیم‌یافته بررسی می‌شود. فرض کنیم $\mathbf{M}_{nm}$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times m$ با درایه‌های حقیقی باشد. هر یک از انواع مهتری‌های ذکر شده، یک رابطه روی $\mathbf{M}_{nm}$ تعریف می‌نماید. فرض کنید $\sim$ یک رابطه روی $\mathbf{M}_{nm}$ باشد. تبدیل خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ را نگهدارنده (متناظراً، نگهدارندهٔ قوی) $\sim$ می‌نامند هرگاه $TX \sim TY$ اگر (و فقط اگر) $X \sim Y$. در ادامه، ساختار نگهدارنده‌های خطی بعضی از انواع مهتری‌ها را مشخص نموده و مقاله را با ذکر چند مسألهٔ حل نشده به پایان می‌رسانیم.

واژه‌های کلیدی: مهتری، ماتریس‌های‌تصادفی، ماتریس‌های تصادفی تعمیم‌یافته، مهتری تعمیم‌یافته، نگهدارندهٔ خطی.

رده‌بندی موضوعی (MSC2000): 15A03,15A04,15A51.

مقدمه

مهتری برداری، یکی از موضوعات جالب و کاربردی در شاخه‌های متعددی از ریاضیات و آمار است که بیشتر در حوزهٔ جبرخطی و کاربردهای آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. علی‌رغم این‌که این مفهوم، نسبتاً قدیمی است، همچنان یک زمینهٔ فعال پژوهشی باقی مانده و اخیراً مقالات پژوهشی فراوانی در این موضوع چاپ شده است [۳،۴،۵،۶،۱۲،۱۳،۱۴].

1) majorization

وقتی گفته می‌شود بردار y مهترِ بردار x است، در واقع نشانگر نوعی از تسلط مؤلفه‌های بردار y بر مؤلفه‌های بردار x است و یا به‌طور دقیق‌تر، پراکندگی مؤلفه‌های x از y کمتر است.

تعریف ۱.۱ ([۹، ۱۷]) فرض کنیم $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}$. برای هر $x, y \in D$ گوییم بردار y مهترِ بردار x است اگر برای هر $k = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i$ و همچنین $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$. حال برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ فرض کنیم $x_\downarrow$ و $y_\downarrow$ به‌ترتیب، تجدید آرایش‌هایی از x و y در $\mathbb{R}^n$ باشند که از مرتب کردن نزولی مؤلفه‌های x و y به‌دست آمده‌اند. بنابراین $x_\downarrow, y_\downarrow \in D$. می‌گوییم بردار y مهترِ بردار x است و با نماد $x \prec y$ نشان می‌دهیم هرگاه بردار $y_\downarrow$ مهترِ بردار $x_\downarrow$ باشد.

تاکنون تعمیم‌های گوناگونی از مهتری برداری معرفی گردیده است. اولین آن‌ها، مهتری چندگانه است که مارشال و الکین در کتابی جامع [۱۷] به معرفی آن پرداخته‌اند. در واقع، قضیهٔ زیر، الهام‌بخش تعریف مهتری چندگانه بوده است. قبل از بیان این قضیه، نیاز به یادآوری ماتریس‌های تصادفی داریم.

تعریف ۲.۱ ([۹، ۱۷]) الف) ماتریس مربعی نامنفی R تصادفی سطری است هرگاه مجموع درایه‌های روی هر سطر آن برابر با یک شود. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های تصادفی سطری از مرتبهٔ n را با $\mathbf{R}_n$ نشان می‌دهیم.
ب) ماتریس مربعی نامنفی D تصادفی دوگانه است هرگاه D و D^t تصادفی سطری باشند. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های تصادفی دوگانه از مرتبهٔ n را با $\mathbf{D}_n$ نشان می‌دهیم.
ج) ماتریس تصادفی دوگانه P یک جایگشت است هرگاه درایه‌های آن ۰ یا ۱ باشند. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های جایگشت از مرتبهٔ n را با $\mathbf{P}_n$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱ (هاردی، لیتلوود و پولیا [۹، ۱۷]) فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$. بردار y مهتر بردار x است اگر و تنها اگر ماتریس تصادفی دوگانهٔ D یافت شود به‌طوری که $x = Dy$.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، می‌توان در قضیهٔ قبل به‌جای بردارهای x و y ماتریس‌های A و B را جایگزین نمود و عملاً مفهوم مهتری برداری را به‌صورت زیر به مهتری ماتریسی تعمیم داد.

تعریف ۴.۱ ([۱۷]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times m$ باشند. گوییم B مهتر چندگانهٔ A است و آن را با نماد $A \prec_m B$ نشان می‌دهیم هرگاه ماتریس $D \in \mathbf{D}_n$ یافت شود به‌طوری که $A = DB$.

در سال ۱۹۹۹ داهل [۱۱] تعمیمی از تعریف قبل ارائه کرد و نوعی دیگر از مهتری ماتریسی را به‌صورت زیر معرفی نمود:

تعریف ۵.۱ ([۱۱]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times m$ باشند. گوییم B مهتر ماتریسی A از راست است و با نماد $A \prec_r B$ نشان می‌دهیم هرگاه ماتریس $R \in \mathbf{R}_m$ یافت شود که $A = BR$.

پیدا کردن ساختار نگهدارنده‌های خطی یک رابطهٔ خاص، جزو مسائلی است که از سال‌های نسبتاً دور، همواره مورد علاقهٔ ریاضی‌دانان بوده است. برخی از انواع این مسائل، به‌صورت‌های گوناگون مطرح گردیده و به آن‌ها پاسخ داده شده است. به‌عنوان مثال، در سال ۱۹۵۹ ساختار همهٔ تبدیل‌های خطی $T : M_n \to M_n$ که نگهدارنده معکوس‌پذیری هستند مشخص گردید (X معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر TX معکوس‌پذیر باشد). در واقع، مارکوس [۱۶] نشان داد که چنین تبدیل‌های خطی باید به‌صورت $X \mapsto AXB$ یا $X \mapsto AX^tB$ باشند که در آن A و B ماتریس‌هایی معکوس‌پذیرند.

تعریف ۶.۱ ([۷، ۱۵]) در حالت کلی، فرض کنید T و $\sim$ به‌ترتیب یک عملگر خطی و یک رابطه روی $\mathbf{M}_{nm}$ باشند. گوییم T نگهدار خطی (متناظراً، نگهدار خطی قوی) $\sim$ است، اگر $X \sim Y$ نتیجه دهد $TX \sim TY$ (متناظراً، و برعکس).

با توجه به این‌که هر یک از انواع مهتری ماتریسی، یک رابطه روی $\mathbf{M}_{nm}$ است، تعداد زیادی مسأله در مورد ساختار نگهدارنده‌های خطی این روابط، قابل طرح و بررسی می‌باشند.

این مقاله، شامل دو بخش است. در بخش اول، همهٔ حالت‌های مهتری ماتریسی و ساختار نگهدارنده‌های خطی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش دوم، مهتری‌های تعمیم‌یافته و ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی آن‌ها ارائه گردیده است.

۲. مهتری‌های ماتریسی و نگهدارنده‌های خطی آن‌ها

در این بخش، تعریف انواع مختلف مهتری ماتریسی همراه با ساختار نگهدارنده‌های خطی این روابط که طی سال‌های اخیر شناخته شده، بیان گردیده است. در سرتاسر این مقاله، منظور از $\mathbf{J}$ ماتریسی مربعی با درایه‌های ۱، e برداری با مؤلفه‌های ۱ و e_i برداری است که مؤلفهٔ iـام آن ۱ و بقیهٔ مؤلفه‌هایش صفر می‌باشند (مرتبهٔ $\mathbf{J}$، e و e_i بستگی به مورد استفادهٔ آن‌ها دارد).

علاوه بر تعریف‌های ۴.۱ و ۵.۱، تعمیم‌های دیگری نیز از مهتری موجود است که همهٔ آن‌ها را در تعریف زیر خلاصه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ ([۹،۱۱،۱۵،۱۷]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times m$ باشند. انواع مهتری ماتریسی عبارتند از:

الف) مهتری ماتریسی چپ: $A \prec_l B \Leftrightarrow \exists\ R \in \mathbf{R}_n \ni A = RB$

ب) مهتری ماتریسی راست: $A \prec_r B \Leftrightarrow \exists\ R \in \mathbf{R}_m \ni A = BR$

ج) مهتری جهتی: $A \prec_d B \Leftrightarrow Ax \prec Bx, \forall x \in \mathbb{R}^m$

د) مهتری چندگانه: $A \prec_m B \Leftrightarrow \exists\ D \in \mathbf{D}_n \ni A = DB$

همان‌طور که پیش از این گفتیم، مهتری برداری، حالت خاص $m = ۱$ در مهتری چندگانه روی $\mathbf{M}_{nm}$ است. در سال ۱۹۸۹ آندو [۲] در مقاله‌ای اساسی که دربارهٔ مهتری نوشت، نشان داد که

نگهدارنده‌های مهتری برداری به‌صورت زیر می‌باشند (برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، منظور از $\overline{x}$ میانگین مؤلفه‌های x است).

قضیه ۲.۲ ([۲]) فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد. آنگاه T نگهدارندهٔ خطی $\prec$ است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:
الف) بردار $a \in \mathbb{R}^n$ یافت شود چنان‌که

$$Tx = n\overline{x}a, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

ب) ماتریس جایگشت $P \in \mathbf{P}_n$ و اسکالرهای α و β یافت شوند، به‌طوری که

$$Tx = \alpha Px + \beta \mathbf{J}x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

با توجه به این‌که مهتری چندگانه، تعمیم مهتری برداری است، این سؤال به‌طور طبیعی مطرح گردید که ساختار نگهدارنده‌های خطی مهتری چندگانه به چه شکل است؟ در سال ۲۰۰۰، مؤلفان [۷] در راستای پاسخ به این سؤال، قضیهٔ زیر را اثبات نمودند اما نتوانستند ساختار نگهدارنده‌های $\prec_m$ را روی $\mathbf{M}_{nm}$ به‌طور واضح مشخص نمایند.

در قضیهٔ زیر، برای هر $X \in \mathbf{M}_{nm}$ منظور از $D(X)$، ماتریسی قطری در $\mathbf{M}_n$ است که درایهٔ (i,i) آن، مجموع درایه‌های سطر i–ام X می‌باشد. منظور از $\mathbf{M}_n(۰,۱)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ است که درایه‌های آن‌ها، ۰ یا ۱ می‌باشند. برای هر $i = ۱,\ldots,n$، D_i ماتریسی مربعی است که درایهٔ (i,i) آن ۱ و بقیهٔ درایه‌هایش ۰ است.

قضیه ۳.۲ ([۷]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی است. آنگاه شرایط زیر معادل‌اند:

الف) T نگهدارنده خطی مهتری چندگانه است.
ب) یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:
(۱) ماتریس‌های $G \in \mathbf{M}_n(۰,۱)$ و $H_۱,\ldots,H_m \in \mathbf{M}_{nm}$ یافت می‌شوند به‌طوری که

$$T(X) = \sum_{i=۱}^{m} D_i G D(X) H_i, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm};$$

(۲) ماتریس‌های $B, C \in \mathbf{M}_n$ و جایگشت $P \in \mathbf{P}_m$ یافت می‌شوند چنان‌که

$$T(X) = BXP + CD(X)\mathbf{J}, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

در سال ۲۰۰۱، لی و پون [۱۵] ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_m$ و $\prec_d$ را به‌طور کامل و روشن روی $\mathbf{M}_{nm}$ به‌صورت زیر مشخص نمودند. منظور از $X = [X_۱ \mid \cdots \mid X_m]$ ماتریسی $n \times m$ است که ستون i–ام آن X_i می‌باشد. یکی از روش‌های مهمی که در اثبات قضیهٔ زیر و قضایای بعدی مورد استفاده قرار گرفته این است که برای هر تبدیل خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$، تبدیل‌های خطی

$T_i^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، $i, j = 1, \ldots, m$، وجود دارند به‌قسمی که

$$T(X) = [\sum_{j=1}^{m} T_i^j(X_j) \mid \cdots \mid \sum_{j=1}^{m} T_m^j(X_j)]$$

که در آن X_j، ستون j–ام ماتریس X می‌باشد. در واقع $T_i^j = E^j \circ T \circ E_i$ که در آن

$$E^j : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbb{R}^n, \qquad E_i : \mathbb{R}^n \to \mathbf{M}_{nm}$$

$$A \mapsto Ae_j, \qquad x \mapsto xe_i^t.$$

حال اگر T یک نگهدارندهٔ خطی $\sim$ باشد، آنگاه به‌سادگی دیده می‌شود که T_i^j نیز یک نگهدارندهٔ خطی $\sim$ است.

قضیه ۴.۲ ([۱۵]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{n,m} \to \mathbf{M}_{n,m}$ یک تبدیل خطی است. آنگاه شرایط زیر معادل‌اند:

الف) T نگهدارندهٔ $\prec_d$ است؛

ب) T نگهدارندهٔ $\prec_m$ است؛

ج) یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

(۱) ماتریس‌های $A_1, \ldots, A_k \in \mathbf{M}_{nm}$ یافت می‌شوند چنان‌که

$$TX = n\sum_{j=1}^{k} \overline{X}_j A_j, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm};$$

(۲) ماتریس‌های $R, S \in \mathbf{M}_m$ و جایگشت $P \in \mathbf{P}_n$ یافت می‌شوند به‌طوری که

$$TX = PXR + \mathbf{J}XS, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

اگر $\sim$ هر یک از انواع مهتری باشد که در بالا به آن اشاره کردیم، به‌آسانی می‌توان نشان داد که نگهدارنده‌های خطی قوی $\sim$ معکوس‌پذیرند. با یافتن ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_m$ در قضیهٔ، قبل پیدا کردن ساختار نگهدارنده‌های خطی قویِ این مفهوم، کار چندان سختی نیست و تنها از این مطلب استفاده می‌شود که تبدیل خطی $X \mapsto PXR + \mathbf{J}XS$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $R(R + nS)$ معکوس‌پذیر باشد [۵، ۱۲].

قضیه ۵.۲ ([۱۲]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی است. T نگهدارندهٔ قویِ $\prec_m$ است اگر و تنها اگر ماتریس‌های $R, S \in \mathbf{M}_m$ و $P \in \mathbf{P}_n$ یافت شوند چنان‌که $R(R + nS)$ معکوس‌پذیر باشد و

$$TX = PXR + \mathbf{J}XS, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

در مورد مهتری چندگانه، مفهوم راست و چپ را مطرح نکردیم و در واقع، چیزی هم از دست ندادیم چرا که با یک عمل ترانهاده، این مفاهیم قابل تبدیل به یکدیگرند؛ یعنی، اگر مهتری چندگانهٔ راست و چپ را به‌ترتیب با $\prec_{rm}$ و $\prec_{lm}$ نشان دهیم، آنگاه $A \prec_{rm} B$ اگر و فقط اگر $A^t \prec_{lm} B^t$. همچنین برای به‌دست آوردن نگهدارنده‌های خطی $\prec_{rm}$ کافی است تبدیل خطی $X \mapsto [T(X^t)]^t$ را همراه با قضایای فوق به‌کار بندیم. داستان پیدا کردن نگهدارنده‌های خطی $\prec_r$ و $\prec_l$، یک داستان طولانی است که بیش از یک دهه، افراد گوناگونی را به خود مشغول ساخت و سرانجام، پس از کش و قوس‌های فراوان، در سال ۲۰۰۸ به پایان رسید. در مورد $\prec_r$ و $\prec_l$ ابتدا، کار بر روی پیدا نمودن نگهدارنده‌های خطی روی $\mathbf{M}_n$ متمرکز شد و قضایای زیر اثبات گردیدند.

قضیه ۶.۲ ([۸]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_n \to \mathbf{M}_n$ یک عملگر خطی باشد که $T(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}^+)) \subset \mathbf{M}_n(\mathbb{R}^+)$، $T(I) = I$ و T نگهدارندهٔ قوی $\prec_r$ است. جایگشت $P \in \mathbf{P}_n$ یافت می‌شود چنان‌که

$$T(X) = P^t X P, \quad \forall\ X \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}^+).$$

قضیه ۷.۲ ([۸]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_n \to \mathbf{M}_n$ یک عملگر خطی است که نگهدارندهٔ قوی $\prec_r$ می‌باشد. ماتریس جایگشت $P \in \mathbf{P}_n$ و ماتریس معکوس‌پذیر $M \in \mathbf{M}_n$ یافت می‌شوند چنان‌که

$$T(X) = MXP, \quad \forall\ X \in span(\mathbf{R}_n).$$

کار پیدا کردن ساختار نگهدارنده‌های خطی و نگهدارنده‌های خطی قوی $\prec_r$ و $\prec_l$، توسط محمدحسنی و رجبعلی‌پور به‌صورت زیر تکمیل گردید.

قضیه ۸.۲ ([۱۲]) فرض کنید $S, T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ دو تبدیل خطی باشند. S و T به‌ترتیب نگهدارندهٔ قوی $\prec_r$ و $\prec_l$ می‌باشند اگر و فقط اگر جایگشت‌های $Q \in \mathbf{P}_n$ و $P \in \mathbf{P}_m$ و ماتریس‌های معکوس‌پذیر $M \in \mathbf{M}_n$ و $L \in \mathbf{M}_m$ یافت شوند چنان‌که

$$SX = MXP, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}, \qquad TX = QXL, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

در قضیهٔ زیر منظور از $X = [x_{ij}] = [X_1/\cdots/X_n] \in \mathbf{M}_{nm}$، ماتریسی است که X_i، سطر i–ام آن می‌باشد و $\overline{X} = [\overline{X}_1/\overline{X}_2/\cdots/\overline{X}_n] \in \mathbb{R}^n$ که در آن

$$\overline{X}_i = m^{-1}(x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im})$$

برای هر $i = 1, \ldots, n$.

قضیه ۹.۲ ([۱۳]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی باشد. T نگهدارنده $\prec_r$ است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

الف) ماتریس $\mathcal{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}_m)$ وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$T(X) = \mathcal{A}\overline{X}, \qquad \forall X \in \mathbf{M}_{nm};$$

ب) ماتریس‌های $L \in \mathbf{M}_n$ و $Q \in \mathbf{P}_m$ و اسکالرهای $c, d \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به‌قسمی که $Q \neq I$، $c \neq d$، $cd \geq 0$ و $T(X) = LX(cI + dQ)$ برای هر $X \in \mathbf{M}_{nm}$. علاوه بر این، اگر $m \geq 3$، آنگاه $cd = 0$ و همچنین $cI + dQ$ مضرب غیرصفری از یک ماتریس $P \in \mathbf{P}_m$ است.

ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_l$ تا حدود زیادی شبیه به ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_r$ است، اما نمی‌توان هیچ‌کدام را از روی دیگری به‌دست آورد. اثبات‌هایی که در حالت راست وجود دارد کمی دشوارتر از حالت چپ می‌باشد و تکنیک‌های استفاده شده در اثبات‌ها متفاوت‌اند.

قضیه ۲.۱۰ ([۱۴]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک تبدیل خطی باشد. آنگاه T نگهدارندهٔ $\prec_l$ است است اگر و فقط اگر ماتریس های $P \in \mathbf{P}_n$ و $L \in \mathbf{M}_m$ و اسکالرهای $a, b \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به‌قسمی که $P \neq I$، $a \neq b$، $ab \leq 0$ و $T(X) = (aI + bP)XL$ برای هر $X \in \mathbf{M}_{nm}$. علاوه بر این، اگر $n \neq 2$، آنگاه $ab = 0$.

۳. مهتری‌های تعمیم‌یافتهٔ ماتریسی و نگهدارنده‌های خطی آن‌ها

در سال ۲۰۰۶، سالمی و نویسنده، با توجه به ماتریس‌های تصادفی تعمیم‌یافته، مفهوم مهتری تعمیم‌یافته را برای ماتریس ها تعریف نمودند [۴، ۵]. ماتریس‌های تصادفی تعمیم‌یافته برای اولین بار، به‌صورت زیر معرفی گردیدند.

تعریف ۳.۱ ([۱۰]) الف) ماتریس مربعی مختلط R را تصادفی سطری تعمیم‌یافته یا به‌اختصار g ـ سطری تصادفی گوییم هرگاه مجموع درایه‌های هر سطرآن برابر با یک شود. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های g ـ سطری تصادفی $n \times n$ را با $\mathbf{GR}_n$ نشان می‌دهیم.

ب) ماتریس مربعی مختلط D را تصادفی دوگانهٔ تعمیم‌یافته یا به‌اختصار g ـ دوگانهٔ تصادفی گوییم هرگاه D و D^t ماتریس‌های g ـ سطری تصادفی باشند. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های g ـ دوگانهٔ تصادفی $n \times n$ را با $\mathbf{GD}_n$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲ ([۳، ۴، ۵]) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times m$ باشند. انواع مهتری تعمیم‌یافته به‌صورت زیر است:

الف) مهتری ماتریسی چپ تعمیم‌یافته: $A \prec_{lg} B \Leftrightarrow \exists\ R \in \mathbf{GR}_n \ni A = RB$

ب) مهتری ماتریسی راست تعمیم‌یافته: $A \prec_{rg} B \Leftrightarrow \exists\ R \in \mathbf{GR}_m \ni A = BR$

ج) مهتری چندگانه تعمیم‌یافته: $A \prec_{gm} B \Leftrightarrow \exists\ D \in \mathbf{GD}_n \ni A = DB$

با معرفی مهتری تعمیم‌یافته، دریچه‌ای رو به تعداد زیادی مسأله باز شد که به برخی از آن‌ها پاسخ داده شده و تعداد زیادی هنوز بدون جواب باقی مانده‌اند. ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی

مهتری‌های تعمیم‌یافته به‌طور کامل مشخص گردیده‌اند، اما ساختار نگهدارنده‌های خطی هیچ‌یک از انواع مهتری تعمیم‌یافته هنوز مشخص نگردیده و به‌عنوان مسائل حل نشده، مبارز می‌طلبند. نکتهٔ جالبی که وجود دارد این است که می‌توان ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی مهتری را از روی ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی مهتری تعمیم‌یافته به‌دست آورد.

در سال ۲۰۰۶، در [۵] قضیهٔ زیر اثبات گردید که تا حدود زیادی ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_{gm}$ را مشخص نمود، اما نتوانست آن‌ها را به‌طور کامل تعیین نماید (قضیه دو طرفه نیست).

قضیه ۳.۳ ([۵]) فرض کنید $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک نگهدارندهٔ خطی $\prec_{gm}$ باشد. آنگاه یکی از شرایط زیر برقرار است:

الف) ماتریس‌های $A_1, \dots, A_m \in \mathbf{M}_{nm}$ یافت می‌شوند چنان‌که

$$T(X) = n \sum_{j=1}^{m} \overline{X}_j A_j, \qquad \forall X = [X_1|\cdots|X_m] \in \mathbf{M}_{nm};$$

ب) ماتریس $S \in \mathbf{M}_m$، ماتریس‌های معکوس‌پذیر $A_1, \dots, A_m \in \mathbf{GD}_n$ و بردارهای $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^m$ یافت می‌شوند به‌طوری که

$$T(X) = [A_1 X a_1 \mid \cdots \mid A_m X a_m] + \mathbf{J}XS, \qquad \forall X = [X_1|\cdots|X_m] \in \mathbf{M}_{nm}.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که شکل عملگر T قضیهٔ ۳.۳ (ب) ممکن است قابل تبدیل به‌شکل عملگر T در قضیهٔ ۴.۲ (ج ـ۲) نباشد.

مثال ۴.۳ ([۵]) عملگر خطی $T : \mathbf{M}_{3,2} \to \mathbf{M}_{3,2}$ که در آن $TX = [Xe_1 \mid PXe_1]$ و $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ یک نگهدارندهٔ خطی $\prec_{gm}$ است که قابل تبدیل به‌شکل عملگر T در قضیهٔ ۴.۲ (ج ـ۲) نیست.

ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی $\prec_{gm}$ که در قضیهٔ زیر کاملاً مشخص شده‌اند تا حدودی شبیه به نگهدارنده‌های خطی قوی $\prec_m$ است.

قضیه ۵.۳ ([۵]) عملگر خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ نگهدارندهٔ خطی قوی $\prec_{gm}$ است اگر و تنها اگر ماتریس‌های $S \in \mathbf{M}_m$، $R \in \mathbf{M}_n$ و $D \in \mathbf{GD}_n$ یافت شوند به‌طوری که $R(R+nS)D$ معکوس‌پذیر است و

$$TX = DXR + \mathbf{J}XS, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

در مورد نگهدارنده‌های خطی $\prec_{rg}$ و $\prec_{lg}$ هنوز هیچ مطلبی ثابت نشده است، اما ساختار نگهدارنده‌های خطی قوی آن‌ها در [۳،۴،۶] به‌صورت زیر به‌دست آمده است.

قضیه ۶.۳ ([۳]) تبدیل خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک نگهدارندهٔ خطی قوی $\prec_{rg}$ است اگر و تنها اگر ماتریس‌های معکوس‌پذیر $M \in \mathbf{M}_m$ و $R \in \mathbf{GR}_m$ یافت شوند چنان‌که

$$TX = MXR, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

قضیه ۷.۳ ([۴، ۶]) تبدیل خطی $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{nm}$ یک نگهدارندهٔ خطی قوی $\prec_{lg}$ است اگر و تنها اگر ماتریس‌های معکوس‌پذیر $M \in \mathbf{M}_m$ و $R \in \mathbf{GR}_n$ یافت شوند چنان‌که

$$TX = RXM, \quad \forall X \in \mathbf{M}_{nm}.$$

علی‌رغم این‌که به نظر می‌رسد بتوان نگهدارنده‌های خطی قوی $\prec_{gr}$ و $\prec_{gl}$ را از روی یکدیگر به‌دست آورد، اما این کار عملی نیست و این نتایج چندان ارتباطی با هم ندارند. لازم به ذکر است که اصولاً، کار در مهتری‌های راست نسبت به مهتری‌های چپ، دشوارتر است.

در پایان، چند مسألهٔ باز را مطرح می‌نماییم.

۱ — ساختار نگهدارنده‌های خطی $\prec_{gr}$، $\prec_{gl}$، $\prec_{gm}$ چگونه است؟

۲ — اگر $T : \mathbf{M}_{nm} \to \mathbf{M}_{pq}$ یک تبدیل خطی و $\sim$ یکی از روابط مهتری یا مهتری تعمیم‌یافته باشد، شرایط لازم و کافی برای این‌که T نگهدارندهٔ $\sim$ باشد، چیست؟

مراجع

[1] A. Armandnejad and H. Heydari, Linear functions preserving gd-majorization from $M_{n,m}$ to $M_{n,k}$ Bull. Iranian Math. Soc. (to appear).

[2] T. Ando, “Majorization and inequalities in matrix theory”, *Linear Algebra Appl.*, **199** (1978), 17-67.

[3] T. Ando, “Majorization, Doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues”, *Linear Algebra Appl.*, **118** (1989), 163-248.

[4] A. Armandnejad, “Right gw-majorization on $\mathbf{M}_{n,m}$”, *Bull. of Iranian Math. Soc.*, 35(2) (2009), 59-66.

[5] A. Armandnejad and A. Salemi, “Strong linear preservers of gw-majorization on M_n”, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, **5**(2) (2007), 165-168.

[6] A. Armandnejad and A. Salemi, "The structure of linear preservers of gs-majorization", *Bull. of Iranian Math. Soc.*, **32**(2) (2006), 31-42.

[7] A. Armandnejad and A. Salemi, "On linear preservers of lgw-majorization on $M_{n,m}$, Bull. Malaysian Math. Soc. (to appear).

[8] L. B. Beasley and S. G. Lee, "Liner operators preserving multivariate majorization", *Linear Algebra Appl.*, **304** (2000), 141-156.

[9] L. B. Beasley, S. G. Lee and Y. H. Lee, "A characterization of strong preservers of matrix majorization", *Linear Algebra Appl.*, **367** (2003), 341-346.

[10] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[11] H. Chiang and C.K. Li, "Generalized doubly stochastic matrices and linear preservers", *Linear and Multilinear Algebra,* **53** (2005), 1-11.

[12] G. Dahl, "Matrix majorization", *Linear Algebra Appl.*, **288** (1999), 53-73.

[13] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, "The structure of linear operators strongly preserving majorizations of matrices", *Electronic Journal of Linear Algebra*, **15** (2006), 260-268.

[14] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, "On linear preservers of (right) matrix majorization", *Linear Algebra Appl.*, **423** (2007), 255-261.

[15] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, "Linear preservers of matrix majorization", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **32**(4) (2006), 475-482.

[16] C. K. Li and E. Poon, "Linear operators preserving directional majorization", *Linear Algebra Appl.*, **325** (2001), 141-146.

[17] M. Marcus, "All linear operators leaving the unitary group invariant", *Duke Math. J.*, **26** (1959), 155-163.

[18] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, 1972.

علی آرمندنژاد

گروه ریاضی، دانشگاه ولی‌عصر (عج)، رفسنجان

armandnejad@mail.vru.ac.ir