فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۴۱ تا ۵۰

گراف‌های هم انرژی

ایوان گوتمن، علی‌رضا اشرفی و غلامحسین فتح‌تبار فیروزجایی

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. هر مقدار ویژهٔ ماتریس مجاورت G، یک مقدار ویژهٔ G نامیده می‌شود. انرژی یک گراف G به‌صورت مجموع قدرمطلق‌های مقادیر ویژهٔ آن تعریف می‌شود. دو گراف با انرژی‌های یکسان، هم‌انرژی نامیده می‌شوند. این مقاله به توصیفی تاریخی و شرحی از نتایج جدید در زمینهٔ انرژی گراف می‌پردازد.

کلمات کلیدی: گراف‌های متناهی، مقادیر ویژه، انرژی گراف، گراف‌های هم‌انرژی.

رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا (MSC 2000): 05C60.

۱. مقدمه

امروزه، بخش مهمی از نظریهٔ جبری گراف به مطالعهٔ طیف ماتریس مجاورت آن که به طیف گراف نیز معروف است، اختصاص دارد. منظور از طیف یک گراف، طیف ماتریس‌هایی است که به‌شکل یکتا ساختمان گراف را نمایش می‌دهند. طیف چندین نوع از این قبیل ماتریس‌ها با جزئیات لازم مطالعه شده‌اند. به‌عنوان مثال طیف ماتریس مجاورت، ماتریس لاپلاسی و ماتریس فاصله در مراجع [۵ − ۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این مقاله، نگاه خود را به طیف ماتریس مجاورت معطوف می‌کنیم. فرض کنید G گرافی با رئوس $v_۱$، $v_۲$، … ، v_n باشد. ماتریس مجاورت G که با نماد $A(G)$ نشان داده می‌شود، ماتریسی از مرتبهٔ $n \times n$ است که ij ـ امین درایهٔ آن تعداد یال‌های بین v_i و v_j است. اگر برای بردار n ـ بعدی ناصفر C_i و یک عدد λ_i، تساوی $A(G)C_i = \lambda_i C_i$ برقرار باشد، آنگاه C_i بردار ویژهٔ ماتریس $A(G)$ نظیر مقدار ویژهٔ λ_i نامیده می‌شود. در نظریهٔ طیفی گراف، C_i بردار ویژه و λ_i مقدار ویژهٔ گراف G نامیده می‌شود. قضیهٔ معروفی در جبرخطی بیان می‌کند که هر ماتریس متقارن حقیقی، دارای پایه‌ای مرکب از n بردار ویژه است. به‌زبان جبرخطی، چنین ماتریس‌هایی قطری‌پذیرند. اگر G گرافی n ـ رأسی باشد، ماتریس مجاورت آن، ماتریسی از مرتبهٔ $n \times n$ است و لذا n بردار ویژهٔ مستقل خطی دارد. فرض کنیم اعداد $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، … ، λ_n

مقادیر ویژهٔ G باشند. این مقادیر را طیف گراف G می‌نامند. اگر دو گراف n ــ رأسی طیف یکسان داشته باشند، هم‌طیف نامیده می‌شوند. چون $A(G)$ متقارن و حقیقی است، مقادیر ویژهٔ گراف G همگی حقیقی هستند ولی نیازی نیست متمایز باشند. مرسوم است که این مقادیر را به‌شکل $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_۲ \geq \lambda_۱$ در نظر می‌گیرند. چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس مجاورت G، به‌شکل $\phi(G, \lambda) = \det(\lambda I_n - A(G))$ تعریف می‌شود که در آن، I_n ماتریس همانی از مرتبهٔ $n \times n$ است. $\phi(G, \lambda)$ را چندجمله‌ای مشخصهٔ گراف G می‌نامیم. از جبرخطی می‌دانیم که هر مقادیر ویژه ریشهٔ چندجمله‌ای مشخصه است. خوانندهٔ علاقه‌مند برای مطالعهٔ بیشتر در خصوص این مفاهیم می‌تواند به [٦] مراجعه کند.

۲. انرژی یک گراف

مفهوم انرژی یک گراف اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط ایوان گوتمن[1] یکی از نویسندگان مقالهٔ حاضر ارائه شد [۷].

تعریف ۱.۲ فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی ساده با n رأس باشد. انرژی گراف G که با $E(G)$ نشان داده می‌شود، به‌صورت مجموع قدرمطلق‌های مقادیر ویژهٔ آن تعریف می‌شود:

$$E = E(G) = \sum_{i=۱}^{n} |\lambda_i|. \qquad (۱.۲)$$

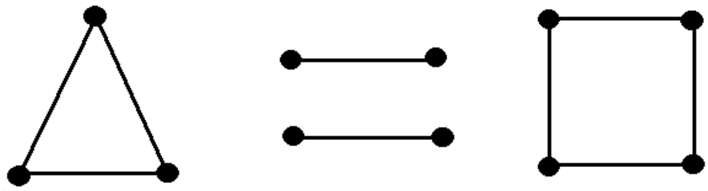
انگیزهٔ این تعریف مفاهیمی در علم شیمی بوده است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود. یک مولکول با اتم‌های $x_۱$، $x_۲$، ... ، x_n را در نظر بگیرید. این اتم‌ها را رئوس یک گراف G در نظر می‌گیریم. اگر بین این اتم‌ها پیوند کووالانسی موجود باشد، آن دو رأس را مجاور در نظر می‌گیریم. گراف حاصل از این طریق را گراف مولکولی می‌نامند. اگر G یک گراف مولکولی باشد، $E(G)$ برابر انرژی π ــ الکترون آن مولکول خواهد بود که از نظریهٔ هوکل محاسبه می‌شود. برای جزئیات بیشتر، مراجع [۸، ۹] را ببینید. در مرجع [۱۰] می‌توان مسائل زیادی در خصوص انرژی گراف پیدا کرد. مطالعهٔ انرژی گراف در ریاضیات و شیمی بخش بسیار فعالی را تشکیل می‌دهد. در این مقاله، یکی از جنبه‌های این نظریه را مورد بررسی قرار می‌دهیم، یعنی گراف‌های هم‌انرژی که اول بار در سال ۲۰۰۴ در مراجع [۱۱، ۱۲] به‌طور مستقل مورد توجه قرار گرفتند.

تعریف ۲.۲ فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف n رأسی باشند. $G_۱$ و $G_۲$ هم‌انرژی نامیده می‌شوند هرگاه $E(G_۱) = E(G_۲)$.

بدیهی است که اگر دو گراف هم‌طیف باشند، هم‌انرژی نیز خواهند بود. بنابراین ما به گراف‌های هم‌انرژی و غیر هم‌طیف علاقه‌مند هستیم. ساختن گراف‌های هم‌انرژی غیر هم‌طیف کاری ساده است. به‌عنوان مثال فرض کنید G دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ... ، λ_n باشد. G' را از روی G

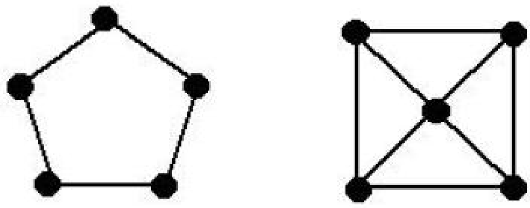
1) Gutman

با اضافه کردن یک رأس تنها می‌سازیم. به‌وضوح طیف G' دارای مقادیر ویژهٔ ۰، λ_1، λ_2، $\ldots$ ، λ_n است و لذا $E(G) = E(G')$.



شکل ۱.۲. گراف‌های هم‌انرژی و بدون رأس تنها

حتی اگر بخواهیم رئوس تنها وجود نداشته باشند، باز هم می‌توان به‌آسانی گراف‌های هم‌انرژی ساخت. در شکل ۱.۲، سه گراف هم‌انرژی و بدون رأس تنها ارائه شده است. با مراجعه به شکل، می‌توان دید که طیف‌های این گراف‌ها به‌ترتیب مجموعه‌های $\{2, -1, -1\}$، $\{1, 1, -1, -1\}$ و $\{2, 0, 0, -2\}$ هستند. از این محاسبات نتیجه می‌شود که این گراف‌ها دو به‌دو غیر هم‌طیف با انرژی ۴ هستند.



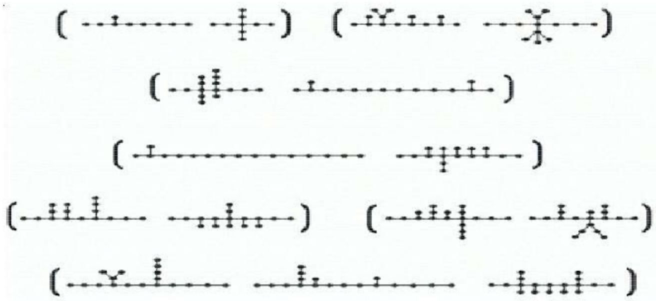
شکل ۲.۲. زوج گراف‌های غیر هم‌طیف و همبند هم‌انرژی با تعداد مساوی رأس

مثال فوق ما را به‌سوی دو محدودیت راهنمایی می‌کند: یکی این‌که تعداد رئوس گراف‌ها یکسان و دیگر این‌که هر دو همبند باشند. یافتن زوج گراف‌های غیر هم‌طیف و همبند با تعداد مساوی رأس نیز کار سختی نیست. کوچکترین چنین زوج‌هایی در شکل ۲.۲ نشان داده شده است. طیف‌های این دو زوج عبارتند از:

$$\left\{2, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\},$$
$$\{0, \quad 0, \quad 1+\sqrt{5}, \quad -\sqrt{5}, \quad -2\}.$$

با محاسباتی ساده، می‌توان دید که انرژی این گراف‌ها برابر $2 + 2\sqrt{5}$ است. گراف‌های این شکل تعداد متفاوتی یال دارند. بنابراین محدودیت بعدی تعداد یال‌هاست. فرض کنیم دو گراف داده

شده، همبند، غیر هم‌طیف و دارای تعداد مساوی رأس و یال و نیز هم‌انرژی باشند. بخش بعد به مطالعهٔ چنین گراف‌هایی اختصاص دارد.



شکل ۳.۲: زوج درخت‌های غیر هم‌طیف و هم‌انرژی

۳. درخت‌های هم‌انرژی

برانکوف [۱۱] توانست با جستجوی کامپیوتری، درخت‌های غیر هم‌طیف و هم‌انرژی با تعداد کمی رأس و یال بسازد. او با محاسباتی عددی، زوج‌هایی از درخت‌های با طیف متفاوت به‌دست آورد که مقادیر انرژی آن‌ها در اولین رقم اعشاری‌شان یکسان بودند. اگرچه این خاصیت برای هم‌انرژی بودن کافی نیست و نهایتاً باید فهرست به‌دست آمده را اصلاح کرد. برای مثال فرض کنید $T_۱$ و $T_۲$ اولین دو درخت در شکل ۳.۲ باشند. روش‌هایی استاندارد وجود دارند که به‌کمک آن‌ها می‌توان چندجمله‌ای مشخصهٔ یک درخت را محاسبه نمود. با استفاده از این روش‌ها و محاسبات دستی، می‌توان ثابت کرد

$$\begin{aligned}\phi(T_۱,\lambda) &= \lambda^۹ - ۸\lambda^۷ + ۲۰\lambda^۵ - ۱۷\lambda^۳ + ۴\lambda\\ \phi(T_۲,\lambda) &= \lambda^۹ - ۸\lambda^۷ + ۱۸\lambda^۵ - ۱۶\lambda^۳ + ۵\lambda.\end{aligned}$$

با توجه به این محاسبات، $T_۱$ و $T_۲$ هم‌طیف نیستند. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}\phi(T_۱,\lambda) &= \lambda(\lambda^۲ - ۱)(\lambda^۲ - ۴)(\lambda^۴ - ۳\lambda^۲)\\ \phi(T_۲,\lambda) &= \lambda(\lambda^۲ - ۱)^۳(\lambda^۲ - ۵).\end{aligned}$$

از این تجزیه‌ها می‌توان طیف درخت‌های $T_۱$ و $T_۲$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{array}{l}\{۰,\ ۱,\ -۱,\ ۲,\ -۲,\ \sqrt{\frac{\sqrt{۵}+۳}{۲}},\ \sqrt{\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}},\ -\sqrt{\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}},\ -\sqrt{\frac{\sqrt{۵}+۳}{۲}}\}\\ \{۰,\ ۱,\ ۱,\ ۱,\ -۱,\ -۱,\ -۱,\ +\sqrt{۵},\ -\sqrt{۵}\}\end{array}.$$

حال محاسباتی ساده نشان می‌دهد که مجموع قدرمطلق‌های این مقادیر ویژه برابر $۲\sqrt{۵} + ۶$ است.

درخت T را شیمیایی گویند هرگاه درجهٔ هر رأس آن حداکثر ۴ باشد. علت این موضوع ظرفیت اتم کربن است که برابر ۴ می‌باشد و این حداکثر ظرفیتی است که این اتم می‌تواند اختیار کند. در شکل ۳.۲ همهٔ زوج‌های هم‌انرژی و یک سه‌تایی غیر هم‌طیف از درخت‌های شیمیایی با حداکثر ۱۸ رأس ارائه شده است [۱۱]. دومین و سومین درخت شیمیایی در ردیف ۳ تایی دارای ۱۸ رأس بوده و هم‌طیف هستند اما طیف آن‌ها متفاوت از درخت اول است. درخت‌های ۹ رأسی $T_۱$ و $T_۲$ کوچکترین زوج از درخت‌های شیمیایی هم‌انرژی را تشکیل می‌دهند. برای مقادیر بزرگتر n، زوج‌ها و ۳ تایی‌های دیگری از درخت‌های هم‌طیف کشف شده‌اند (شکل ۳.۲ را ببینید). نشان دادن این‌که این درخت‌ها حقیقتاً هم‌انرژی هستند مسألهٔ ملال‌آور است. به‌خاطر بیاورید که در مثال بالا توانستیم مقادیر ویژهٔ گراف را به‌وسیلهٔ رادیکال‌ها بیان کنیم و توجه کنید در حالت کلی چنین چیزی امکان‌پذیر نخواهد بود. بنابراین بررسی این‌که چه زمان دو درخت هم‌انرژی هستند مسأله‌ای جبری است که الگوریتم‌های مناسبی برای آن‌ها پیدا نشده است. تاکنون هیچ روش جامعی برای ساختن زوج درخت‌های هم‌انرژی ارائه نشده است.

فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف باشند. ضرب تانسوری $G_۱$ و $G_۲$ که با نماد $G_۱ \otimes G_۲$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن $V(G_۱) \times V(G_۲)$ است و دو رأس (a, b) و (c, d) در آن مجاورند هرگاه $ac \in E(G_۱)$ و $bd \in E(G_۲)$.

بالاکریشنان در [۱۲] نشان داد که برای هر دو گراف $G_۱$ و $G_۲$

$$E(G_۱ \bigotimes G_۲) = E(G_۱)(E(G_۲). \qquad (۲.۳)$$

این نتیجه قبلاً در مرجع [۱۴] به اثبات رسیده بود. فرمول (۲.۳) مستقیماً از رابطهٔ (۱.۲) با به‌خاطر آوردن این که مقادیر ویژهٔ $G_۱ \otimes G_۲$ حاصل‌ضرب مقادیر ویژهٔ $G_۱$ در مقادیر ویژهٔ $G_۲$ است، به‌دست می‌آید [۱]. به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۲.۳) می‌توان تعداد زیادی از زوج گراف‌های هم‌انرژی ساخت. اگر G_a و G_b دو زوج باشند، آنگاه برای هر گراف G زوج $G \otimes G_a$ و $G \otimes G_b$ نیز هم‌انرژی خواهند بود. نتیجهٔ دیگری از این نوع، قبلاً به‌وسیلهٔ ایندولال و ویجی‌کومار در [۱۵] به‌دست آمده بود. فرض کنیم $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف دلخواه باشند. حاصل ضرب دکارتی $G_۱$ و $G_۲$ که با نماد $G_۱ \odot G_۲$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $G_۱ \odot G_۲ = V(G_۱) \times V(G_۲)$ و

$$E(G_۱ \bigodot G_۲) = \{(a, b)(c, d) | (a = c, bd \in E(G_۲)) \ or \ (b = d, ac \in E(G_۱))\}.$$

به‌سادگی می‌توان دید که $G_۱ \odot G_۲$ در حد یکریختی، دارای خواص جابجایی و شرکت‌پذیری است. به‌علاوه $G_۱ \odot G_۲$ همبند است اگر و تنها اگر $G_۱$ و $G_۲$ همبند باشند. برای مطالعهٔ بیشتر، [۱۳] را ببینید. فرض کنید l و k اعداد طبیعی داده شده‌ای باشند چنان‌که $l \geq ۲k$ و K_l معرف گراف کامل روی l رأس باشد. همچنین فرض کنید G گرافی n ـ رأسی باشد که طیف آن در بازهٔ $[-k, k]$

قرار دارد. در این صورت

$$E((k_l)^k \bigodot G) = ۲nk(l-۱)^k. \qquad (۳.۳)$$

چون طرف راست معادلهٔ (۳.۳) تنها به پارامترهای n و k و l بستگی دارد، لذا برای گراف‌های هم‌انرژی G_a و G_b، زوج‌های $(k_l)^k \odot G_a$ و $(k_l)^k \odot G$ هم‌انرژی هستند.

در ادامه، اتصال دو گراف و انرژی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنیم G و H دو گراف با رئوس مجزا باشند. اتصال G و H گرافی است که با $G\nabla H$ نشان داده می‌شود و مجموعهٔ رئوس آن اجتماع رئوس G و H است و دو رأس a و b در $G\nabla H$ مجاورند اگر و تنها اگر هر دو به‌عنوان دو رأس G مجاور باشند یا هر دو به‌عنوان دو راس H مجاور باشند و یا یکی در G و دیگری در H باشد. رامان و والیکار در مرجع [۱۶] ثابت کردند

$$E(G\nabla H) = E(G_۱) + E(G_۲) + \sqrt{(r_۱+r_۲)^۲ + ۴(n_۱n_۲ - r_۱r_۲)} - (r_۱+r_۲) \qquad (۴.۳)$$

توجه کنید که در رابطهٔ (۴.۳) گراف‌های G و H منظم فرض شده‌اند. حالت خاصی از این نتیجه به‌طور مستقل به‌وسیلهٔ لیو در [۱۷] به‌دست آمده بود. به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۴.۳) می‌توان زوج‌هایی از گراف‌های هم‌انرژی با n رأس برای $n \geq ۹$ ساخت.

۴. گراف خطی هم‌انرژی

در این بخش، نتایج مقالات [۲۱ − ۱۸] را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم. فرض کنیم $L(G)$ معرف گراف یالیِ گراف G باشد. این گراف بدین صورت تعریف می‌شود که رئوس $L(G)$ همان یال‌های G بوده و دو رأس $L(G)$ مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر در G، رأس مشترک داشته باشند. اگر $n \geq k \geq ۱$، آنگاه k ـ امین گراف خطی مکرر G به‌صورت $L^k(G) = L(L^{k-۱}(G))$ تعریف می‌شود که در آن $L^\circ(G) = G$ و $L^۱(G) = L(G)$. گراف یالی یک گراف منظم G از مرتبهٔ $n_\circ$ و از درجهٔ $r_\circ$ گرافی منظم از مرتبهٔ $\frac{n_\circ r_\circ}{۲}$ و از درجهٔ $r_۱ = ۲r_\circ - ۲$ خواهد بود. در نتیجه، مرتبه و درجهٔ $L^k(G)$ عبارتند از $r_k = ۲r_{k-۱} - ۲$ و $n_k = \frac{۱}{۲}r_{k-۱}n_{k-۱}$ که n_i و r_i مرتبهٔ و درجهٔ گراف $L^i(G)$ را نشان می‌دهند. بنابراین

$$r_k = ۲^k r_\circ - ۲^{k+۱} + ۲ \qquad (۵.۴)$$

$$n_k = \frac{n_\circ}{۲^k}\prod_{i=\circ}^{k-۱} r_i = \frac{n_\circ}{۲^k}\prod_{i=\circ}^{k-۱}(۲^i r_\circ - ۲^{i+۱} + ۲) \qquad (۶.۴)$$

اگر $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ... ، λ_n مقایر ویژهٔ یک گراف منظم G از مرتبهٔ n و از درجهٔ r باشند، آنگاه بنابر نتایج [۱]، مقادیر ویژهٔ $L(G)$ عبارتند از

$$\begin{pmatrix} \lambda_۱ + r - ۲ & \ldots & \lambda_n + r - ۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & n(r-۲)/۲ \end{pmatrix} \qquad (۷.۴)$$

که مقادیر سطر دوم معرف مرتبهٔ تکرار مقدار ویژهٔ متناظر می‌باشد. با توجه به این واقعیت که $L(G)$ گرافی منظم از مرتبهٔ $\frac{nr}{۲}$ و از درجهٔ $۲r-۲$ است و با استفاده از معادلهٔ (۷.۴)، مقادیر ویژهٔ $L^{۲}(G)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} \lambda_۱+۳r-۶ & \dots & \lambda_n+۳r-۶ & ۲r-۶ & -۲ \\ ۱ & \dots & ۱ & n(r-۲)/۲ & nr(r-۲)/۲ \end{pmatrix} \qquad (۸.۴)$$

فرض کنید $\lambda_۱=r$، $\lambda_۲$، ... ، λ_n مقادیر ویژهٔ گراف r ـ منظم G باشند. در این صورت، مقادیر ویژهٔ $\overline{G}$ عبارتند از

$$\begin{pmatrix} \lambda_۲-۱ & \dots & \lambda_n-۱ & n-r-۱ \\ ۱ & \dots & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \qquad (۹.۴)$$

با استفادهٔ مجدد از معادلات (۸.۴) و (۹.۴)، مقادیر ویژهٔ گراف $\bar{L}^{۲}(G)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} \lambda_۱-۳r+۵ & \dots & \lambda_n-۳r+۵ & ۲r+۵ & ۱ & \frac{nr(r-۱)}{۲}-۴r+۵ \\ ۱ & \dots & ۱ & \frac{n(r-۲)}{۲} & \frac{n(r-۲)}{۲} & ۱ \end{pmatrix} \qquad (۱۰.۴)$$

قضیه ۱.۴ فرض کنید G گراف r ـ منظم با $r \geq ۳$ و از مرتبهٔ n باشد. در این صورت تنها مقدار ویژهٔ منفی $L^{۲}(G)$ عبارت است از -۲ با مرتبهٔ تکرار $\frac{nr(r-۲)}{۲}$. به‌علاوه در بین مقادیر ویژهٔ مثبت $L^{۲}(\bar{G})$، یکی برابر درجهٔ $L^{۲}(\bar{G})$ و باقی مقادیر برابر یک هستند.

برهان. همهٔ مقادیر ویژهٔ G در شرط $-r \leq \lambda_i \leq r$ برای $i=۱,۲,\dots,n$ صدق می کنند. بنابراین اگر $r \geq ۳$، آنگاه $\lambda_i+۳r-۶ \geq ۰$، $۳r-۶ \geq ۰$، $-\lambda_i-۳r+۵ \leq ۰$ و $-۳r+۵ \leq ۰$. اکنون نتیجهٔ مورد نظر از معادلات (۸.۴) و (۱۰.۴) به‌دست می‌آید. □

تبصره ۲.۴ فرض کنید $k \geq ۲$. -۲ تنها مقدار ویژهٔ $L^k(G)$ است در حالی‌که در بین مقادیر ویژهٔ مثبت $L^k(\bar{G})$، یکی معادل با درجهٔ $L^k(\bar{G})$ و دیگر مقادیر برابر یک هستند.

قضیه ۳.۴ اگر G گرافی r ـ منظم با $r \geq ۳$ باشد، آنگاه

$$E(L^{۲}(G)) = nr(r-۲), \qquad (۱۱.۴)$$
$$E(\bar{L}^{۲}(G)) = (nr-۴)(۲r-۳)-۲. \qquad (۱۲.۴)$$

برهان. چون $\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i=۰$، می‌توان دید $E(G)=۲\sum_{+}\lambda_i=-۲\sum_{-}\lambda_i$ که در آن $\sum_{+}$ و $\sum_{-}$ جمع روی مقادیر ویژهٔ مثبت و منفی هستند. بدین ترتیب معادلهٔ (۱۱.۴) بی درنگ از قضیهٔ

۱.۴ به‌دست می‌آید. مشابهاً از معادلهٔ (۱۰.۴) نتیجه می‌شود که

$$E(\bar{L}^{۲}(G)) = ۲[(\frac{nr(r-۱)}{۲} - ۴r + ۵) + \frac{nr(r-۲)}{۲}] = ۲nr^{۲} - ۳nr - ۸r + ۱۰$$

که مستقیماً ما را به معادلهٔ (۱۲.۴) رهنمون می‌شود. □

از قضیهٔ ۳.۴ می‌دانیم که انرژی دومین گراف یالی یک گراف منظم G از درجهٔ بزرگتر از ۲ به‌طور کامل به‌وسیلهٔ مقادیر n و r تعیین می‌شود.

لم ۴.۴ فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف منظم از درجه و مرتبهٔ یکسان باشند. در این صورت برای هر $k \geq ۲$ گراف های $L^k(G_۱)$ و $L^k(G_۲)$ از مرتبهٔ یکسان و تعداد مساوی از یال‌ها برخوردارند. به‌علاوه $L^k(G_۱)$ و $L^k(G_۲)$ هم‌طیف هستند اگر و تنها اگر $G_۱$ و $G_۲$ چنین باشند.

برهان. عبارت اول از معادلات (۱۱.۴) و (۱۲.۴) و این واقعیت که تعداد یال‌های $L^k(G)$ مساوی با تعداد رأس‌های $L^{k+۱}(G)$ است، به‌دست می‌آید. عبارت دوم از (۷.۴) به‌دست می‌آید. فقط کافی است به دفعات کافی، قضیه اعمال شود. □

با ترکیب لم ۴.۴ و قضیهٔ ۳.۴ می‌توان به قضیهٔ زیر رسید.

قضیه ۵.۴ فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف منظم غیر هم‌طیف از یک مرتبه و درجهٔ $r \geq ۳$ باشند. در این صورت برای هر $k \geq ۲$، گراف خطی تکراری $L^k(G_۱)$ و $L^k(G_۲)$ تشکیل زوج گراف‌های هم‌انرژی غیر هم‌طیف از درجه و اندازهٔ مساوی می دهند. اگر به‌علاوه $G_۱$ و $G_۲$ همبند انتخاب شوند، آنگاه $L^k(G_۱)$ و $L^k(G_۲)$ نیز چنین خواهند بود.

حال ساختن خانوادهٔ بزرگ گراف‌های هم‌انرژی صادق در شرایط داده شده در قضیهٔ ۵.۴ آسان است. برای مثال، ۲، ۵، ۱۹ و ۸۵ گراف همبند منظم از درجهٔ ۳ و مرتبهٔ ٦، ۸، ۱۰ و ۱۲ به‌ترتیب وجود دارند [۱] که هیچ دوتای آن‌ها هم‌طیف نیستند. گراف‌های خطی تکراری از مرتبهٔ ۲ و بالاتر تشکیل خانواده‌ای شامل ۲، ۵، ۱۹ و ۸۵ ... گراف هم‌انرژی می‌دهند.

مراجع

[1] D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs- Theory and Application*, Academic Press, New York, 1980; 2nd revised ed. Barth, Heidelberg, 1995.

[2] D. M. Cvetkovic, M. Doob, I. Gutman, A. Torgasev, *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[3] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*, American Math. Soc., Providence, 1997.

[4] Y. Colin de Verdiere, *Spectres de Graphes*, Soc. Math. France, Paris, 1998.

[5] C. D. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1969.

[7] I. Gutman, *The energy of a graph*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forschungsz. Graz **103** (1978) 1-22.

[8] I. Gutman, O. E. Polansky, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[9] I. Gutman, "Topology and stability of conjugated hydrocarbons. The dependence of total π - electron energy on molecular topology", *J. Serb. Chem. Soc.*, **70** (2005), 441-456.

[10] I. Gutman, "The energy of a graph: Old and new results", in: *Algebraic Combinatorics and Applications*, A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 2001, 196-211.

[11] V. Brankov, D. Stevanovic, I. Gutman, "Equienergetic chemical trees", *J. Serb. Chem. Soc.*, **69** (2004), 549-553.

[12] R. Balakrishnan, "The energy of a graph", *Lin. Algebra Appl.*, **387** (2004), 287-295.

[13] W. Imrich, S. Klavzar, *Product Graphs-Structure and Recognition*, Wiley, New York, 2000.

[14] D. Stevanovic, "Energy and NEPS of graphs", *Lin. Multilin. Algebra*, **53** (2005), 67-74.

[15] G. Indulal, A. Vijayakumar, "Energies of some non-regular graphs", *J. Math. Chem.*, in press.

[16] S. Ramane, H. B. Walikar, "Construction of equienergetic graphs", *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **57** (2007), 203-210.

[17] J. Liu, B. Liu, "On a pair of equienergetic graphs", *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, in press.

[18] H. S. Ramane, H. B. Walikar, S. B. Rao, B. D. Acharya, P. R. Hampiholi, S. R. Jog, I. Gutman, "Equienergetic graphs", *Kragujevac J. Math.*, **26** (2004), 5-13.

[19] H. S. Ramane, I. Gutman, H. B. Walikar, S. B. Halkarni, "Another class of equienergetic graphs", *Kragujevac J. Math.*, **26** (2004), 15-18.

[20] H. S. Ramane, H. B. Walikar, S. B. Rao, B. D. Acharya, P. R. Hampiholi, S. R. Jog, I. Gutman, "Spectra and energies of iterated line graphs of regular graphs", *Appl. Math. Lett.*, **18** (2005), 679-682.

[21] H. S. Ramane, I. Gutman, H. B. Walikar, S. B. Halkarni, "Equienergetic complement graphs", *Kragujevac J. Sci.*, **27** (2005), 67-74.

ایوان گوتمن، دانشگاه کراگوجواک (صربستان) gutman@kg.ac.rs
علی‌رضا اشرفی، دانشگاه کاشان ـ گروه ریاضی ashrafi@kashanu.ac.ir
غلامحسین فتح‌تبار فیروزجایی، دانشگاه کاشان ـ گروه ریاضی fathtabar@kashanu.ac.ir