فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۹ (بهار ۱۳۹۱) صص. ۳۹ تا ۶۵

نظریهٔ گره

سید محمدباقر کاشانی

چکیده

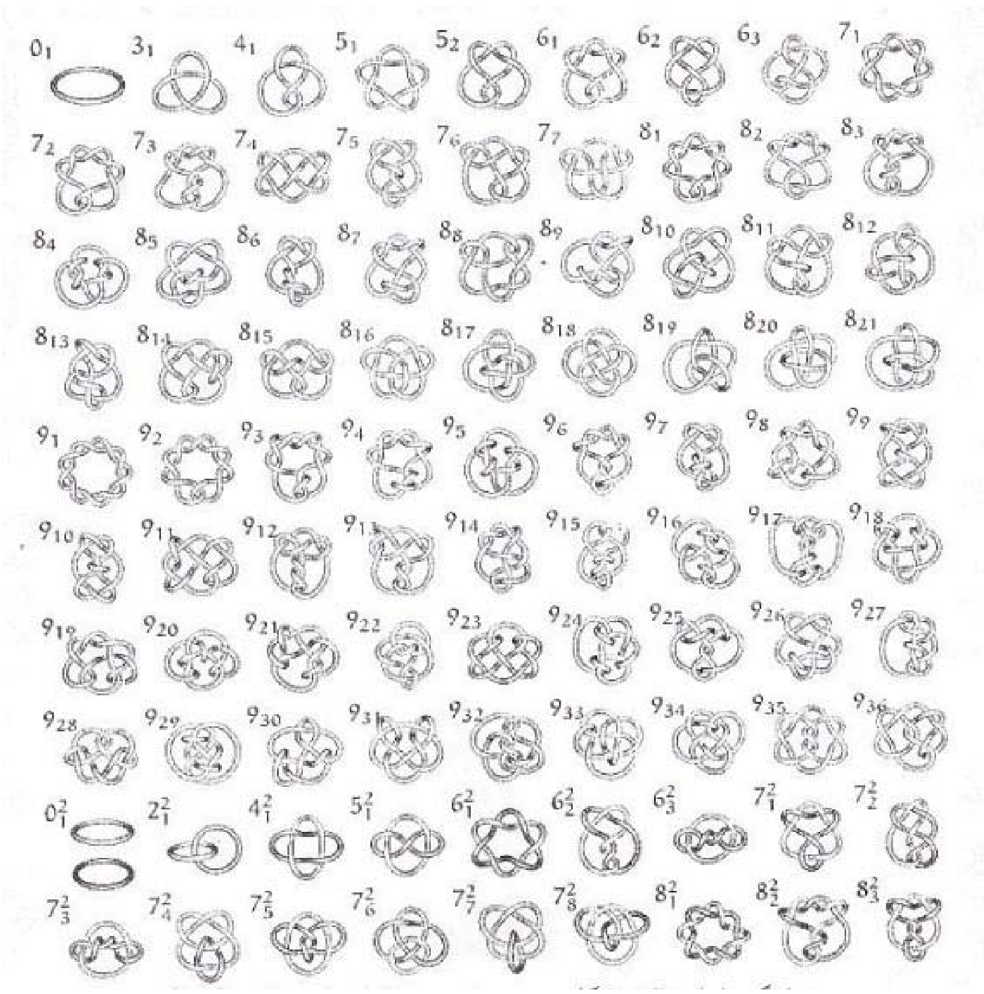
در این مقالهٔ توصیفی، «نظریهٔ گره» به‌طور ساده معرفی و به برخی از کاربردها و ارتباط‌های آن در (با) شاخه‌های دیگر ریاضی و علوم (مانند فیزیک، شیمی و زیست‌شناسی) اشاره می‌شود.

۱. مقدمه

نظریهٔ گره شاخه‌ای از ریاضیات (در واقع توپولوژی) است که بیش از صد سال قدمت دارد و برخی از هیجان‌انگیزترین نتیجه‌های آن در پنجاه سال اخیر بیان و اثبات شده است. نظریهٔ گره امروزه یکی از فعال‌ترین شاخه‌های ریاضی است. این نظریه، ارتباط دوسویه‌ای با شاخه‌های دیگر ریاضی مانند توپولوژی جبری، خمینه‌های سه‌بعدی، نظریهٔ گراف و ... دارد. همچنین دارای کاربردهای مهمی در زیست‌شناسی، شیمی، فیزیک و سایر زمینه‌ها است؛ به ویژه در پژوهش‌های DNA و سنتز مولکولی جدید از این نظریه استفاده می‌شود. این نظریه، اثرگذاری مهمی بر مکانیک آماری و نظریهٔ میدان کوانتمی داشته است. یک مزیت بزرگ این نظریه این است که بسیاری از بخش‌های آن را می‌توان به زبان ساده و بدون استفاده از ریاضیات پیچیده بیان کرد، مسائل باز زیادی در این نظریه وجود دارد که به‌آسانی قابل بیان هستند و برای کار تحقیقاتی سریع می‌توان سراغ آن‌ها رفت. در حالی که این نظریه ملهَم از گره‌هایی است که در زندگی روزمره با آن‌ها برخورد می‌کنیم مانند گره ریسمان و ... . فرق گره ریاضی با گره معمولی این است که دو سر گره ریاضی به هم چسبیده‌اند که از باز شدن آن جلوگیری می‌کند. به بیان دقیق ریاضی، یک گره عبارت است از یک نشانندهٔ (هموار) از دایرهٔ $S^۱$ به فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ (یا معادلاً کرهٔ سه‌بعدی $S^۳$). دو گره ریاضی هم‌ارزند اگر به‌وسیلهٔ یک تغییر شکل $\mathbb{R}^۳$ (یا $S^۳$) (دقیقاً یعنی وابرسانی جهت‌نگه‌دار فضا ($\mathbb{R}^۳$ یا $S^۳$)) بتوان یکی را بر دیگری منطبق (تصویر) کرد.

گره‌ها به روش‌های گوناگون توصیف می‌شوند. یک توصیف غالب عبارت است از به‌کار بردن

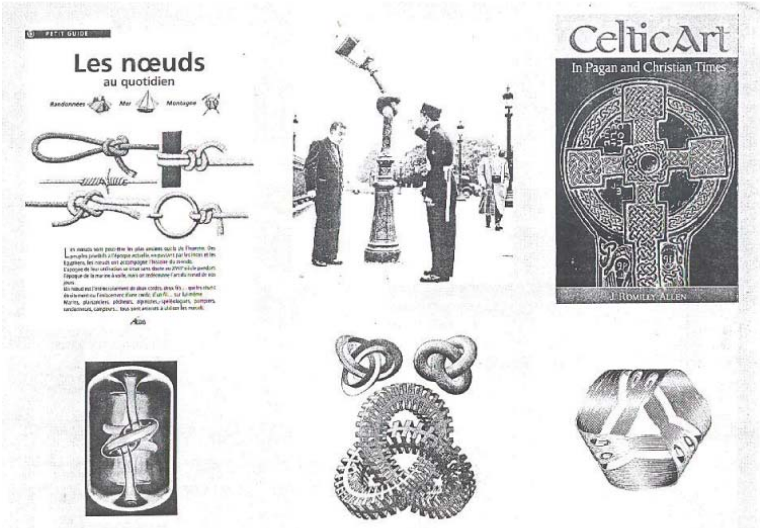
نمودار صفحه‌ای[1] که دیاگرام گرهی[2] نامیده می‌شود. با توجه به وجود توصیف‌های گوناگون برای یک گره، یک مسألهٔ بنیادی در نظریهٔ گره عبارت است از تعیین این که چه موقع دو توصیف، یک گره را نشان می‌دهند. در عمل، گره‌ها با به‌کار بردن ناوردای گره[3] از هم تمیز داده می‌شوند.

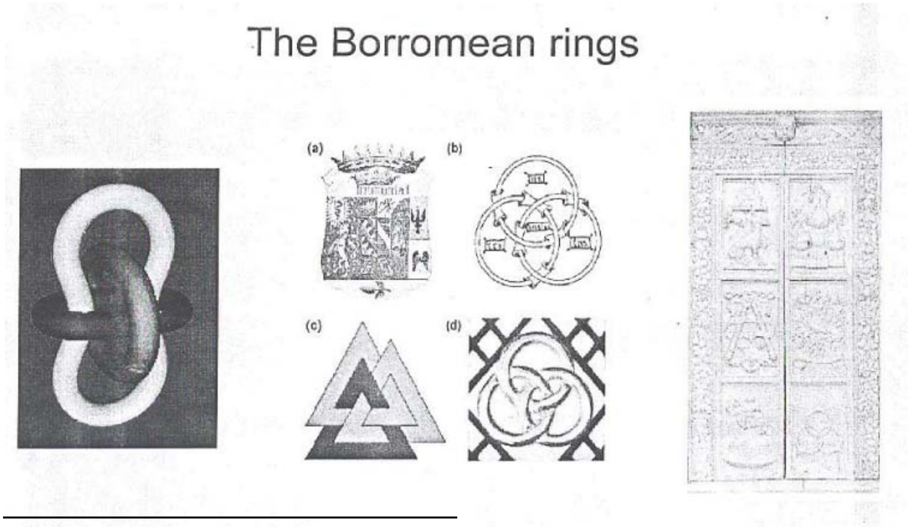


جدول گره‌ها با حداکثر ۹ گذر و پیوندهای دو مؤلفه‌ای با حداکثر ۸ گذر،
تهیه شده به‌وسیلهٔ Publishor Perish Press, 1976, D. Rolfsen

1) plane diagram 2) knot diagram 3) knot invariant

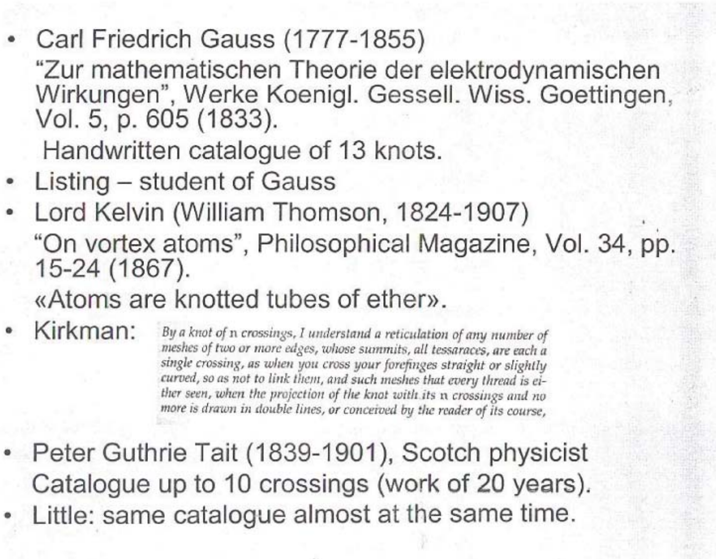
ناوردای گره، یک شیء ریاضی (عدد،...) است که مستقل از توصیف‌های مختلف گره است. ناورداهای مهم شامل عدد بی‌گرهی[۲]، عدد پُل،......، چندجمله‌ای‌های گره، گروه‌های گره، ناورداهای هذلولوی و ... هستند. محرک اصلی برای پایه‌گذاران نظریهٔ گره این بوده‌است که جدولی از گره‌ها و پیوندها (پیوند عبارت است از اجتماع مجزای چند گره که با هم درگیرند) تهیه کنند.





1) unknotting

از آغاز ظهور نظریهٔ گره در قرن نوزدهم تاکنون بیش از شش میلیون گره و پیوند شناسایی و در جدول گره‌ها ظاهر شده‌است. از مفهوم (اولیه) گره گسترش‌های گوناگونی توسط توپولوژی‌دان‌ها معرفی و مطالعه شده است. مثلاً گره‌ها را می‌توان در فضاهای سه‌بعدی دیگر (به جز $\mathbb{R}^3$ و S^3) در نظر گرفت. همچنین می‌توان اشیاء دیگری به جز دایره را در نظر گرفت.



- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
  "Zur mathematischen Theorie der elektrodynamischen Wirkungen", Werke Koenigl. Gessell. Wiss. Goettingen, Vol. 5, p. 605 (1833).
  Handwritten catalogue of 13 knots.
- Listing – student of Gauss
- Lord Kelvin (William Thomson, 1824-1907)
  "On vortex atoms", Philosophical Magazine, Vol. 34, pp. 15-24 (1867).
  «Atoms are knotted tubes of ether».
- Kirkman: *By a knot of n crossings, I understand a reticulation of any number of meshes of two or more edges, whose summits, all tessaraces, are each a single crossing, as when you cross your forefinges straight or slightly curved, so as not to link them, and such meshes that every thread is either seen, when the projection of the knot with its n crossings and no more is drawn in double lines, or conceived by the reader of its course,*
- Peter Guthrie Tait (1839-1901), Scotch physicist
  Catalogue up to 10 crossings (work of 20 years).
- Little: same catalogue almost at the same time.

گره‌های با بعد بالاتر عبارت است از نشاندن کره‌های n ـ بعدی S^n $(n \geq ۲)$ در فضای اقلیدسی m ـ بعدی (یاکرهٔ m ـ بعدی S^m)، $m \geq n + ۲$. در این مقالهٔ توصیفی که اقتباس و تلخیصی است از مرجع‌های [2، 5، 7] و نیز الگوگرفته از مرجع [1] می‌باشد، سعی می‌شود به بیان سادهٔ مفاهیم اولیهٔ این نظریه پرداخته شود، چنان‌که خوانندهٔ علاقه‌مند ضمن آشنا شدن با این نظریه، بتواند به انجام تحقیق در این زمینه و حل مسأله‌های باز بپردازد. فهرست مرجع‌های مقاله و مرجع‌های آن‌ها نیز نیاز خوانندگان علاقه‌مند برای پژوهش در این زمینه را تا اندازهٔ زیادی برطرف می‌کند.

۲. تاریخچه

باستان‌شناسان کشف کرده‌اند که گره‌زدن به دوران قبل از تاریخ باز می‌گردد. علاوه بر کاربردهای آن برای ثبت اطلاعات و گره‌زدن اشیاء به یکدیگر، گره به‌خاطر رمزهای معنوی و زیبایی‌شناسی نیز مورد علاقه بشر بوده‌است. گره‌ها به صورت‌های گوناگون در کارهای هنری چینی با قدمت چند قرن قبل از میلاد ظاهر شده‌است. مثالی از کاربرد گره به‌مثابهٔ یک رمز معنوی عبارت است از گره بی‌پایان در بودیسم. حلقه‌های برومییَن[1] در فرهنگ‌های مختلف ظاهر شده و غالباً نمایانگر قدرت

1) Borromean rings

در اثر وحدت بوده است.
مطالعهٔ ریاضی گره‌ها با کارهای گاوس در قرن نوزدهم آغاز شد که انتگرال ارتباط را تعریف کرد. در دههٔ ۱۸۶۰ نظریهٔ لُرد کِلوین مبنی بر این که اتم‌ها گره‌هایی در اِتِر هستند، منجر به ابداع اولین جدول گرهی توسط T. P. Tait شد. تهیهٔ جدول گره‌ها، اولین نظریه‌پردازان گره را ترغیب می‌کرد ولی سرانجام نظریهٔ گره بخشی از شاخهٔ نوظهور توپولوژی شد. این توپولوژی‌دان‌ها در اوایل قرن بیستم، ماکس دن، و. جی. الکساندر و دیگران گره‌ها را از دیدگاه گروه گرهی و ناورداهایی از نظریهٔ مانَستگی مانند چندجمله‌ای الکساندر مطالعه می‌کردند. این رویکردِ غالب به نظریهٔ گره بود تا این که عبور از موانع متعدد، موضوع را بسیار دگرگون کرد.

در اواخر دههٔ ۱۹۷۰، ویلیام تِرستُن با ارائهٔ قضیهٔ هذلولوی‌سازی، هندسهٔ هذلولوی را برای مطالعهٔ گره‌ها معرفی کرد: در این زمینه نشان داده شد که بسیاری از گره‌ها، گره‌های هذلولوی هستند (یعنی فضای مکملشان در $\mathbb{R}^3$ (یا S^3) یک ساختار هندسی (متریک ریمانی) با خمیدگی برشی ثابت منفی می‌پذیرد) که به این ترتیب، کاربرد هندسه را در تعریف ناورداهای قوی و جدید گره ممکن ساخت. کشف چندجمله‌ای جونز در سال ۱۹۸۴ و متعاقب تحقیقات ادوارد ویتن و ماکسیم کونتسویچ و دیگران، ارتباط بین نظریهٔ گره و روش‌های ریاضی در مکانیک آماری و نظریهٔ میدان کوانتمی کشف و آشکار شد. از آن زمان با به‌کاربردن ابزارهای پیچیده‌ای مانند گروه‌های کوانتمی و نظریهٔ مانستگی (همولوژی) فلور[1]، ناورداهای زیادی برای گره‌ها ابداع شده است. در آخرین دهه‌های قرن بیستم، دانشمندان به مطالعهٔ گره‌های فیزیکی برای شناخت پدیده‌های گره‌دار در DNA و پلیمرها علاقه‌مند شدند. نظریهٔ گره را می‌توان برای تعیین این که یک ملکول تقارن آینه‌ای دارد یا نه، به‌کار برد. گیره‌ها[2] (رشته‌هایی با دو سر تثبیت شده در فضا) به‌طور مؤثر در مطالعهٔ عمل توپوایزومراس[3] بر DNA به‌کار رفته است. نظریهٔ گره از طریق محاسبهٔ توپولوژیکی کوانتمی، نقشی مهم در ساخت کامپیوترهای کوانتمی داشته است.

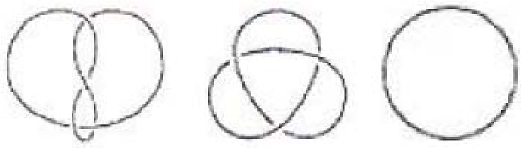
اکنون با اقتباس و استفاده (از) و تلخیص مرجع‌های [1، 2، 5، 7] به ارائهٔ مفهوم‌های اولیهٔ نظریهٔ گره به زبان ساده می‌پردازیم. شکل‌های مقاله از مرجع‌های [1، 2، 5] برداشته شده است.

۳. گره و کاربردهایش

گره عبارت است از یک نشانندهٔ (هموار) از دایرهٔ S^1 به فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ (یا کرهٔ سه‌بعدی S^3).

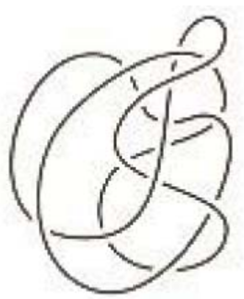
---

1) Floer homology 2) tangles 3) topoisomeras



شکل ۱: گره بدیهی   گره سه‌پره   گره شکل 8

ساده‌ترین گره، عبارت است از نشاندن استاندارد S^1 در $\mathbb{R}^3$ (یا S^3) که به آن گره بدیهی یا بی‌گره[1] می‌گویند. گره بعدی ساده عبارت است از گره سه‌پرّه[2] (تصویر میانی از شکل ۱). چگونه می‌توان دریافت که این‌ها گره‌های متفاوت‌اند؟ به این سؤال در تعریف ۳ می‌پردازیم. از یک گره تصویرهای متفاوتی وجود دارد، در شکل ۲، تصویر نااستاندارد گره سه‌پرّه آورده شده است.



شکل نااستاندارد گره سه‌پره

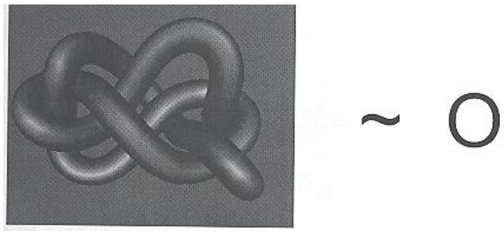
یک **پیوند**[3] با k مؤلفه عبارت است از یک نشانندهٔ هموار از k نسخهٔ مجزای S^1 در $\mathbb{R}^3$ (یا S^3).

شکل ۲: پیوند بدیهی   پیوند نابدیهی

بنابراین گره عبارت است از پیوند یک مؤلفه‌ای.

دو گره از **یک نوع** یا **هم‌ارز**[4] نامیده می‌شوند اگر یک همانسانی جهت‌نگه‌دار h از فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ (یا S^3) به خودش موجود باشد که یکی را به روی دیگری تصویر کند.

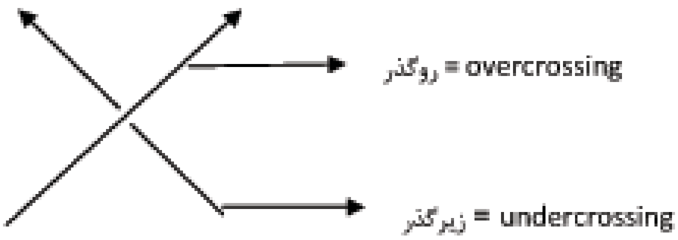
1) unknot   2) trefoil   3) Link   4) isotopic



شکل ۳: دو گرهٔ هم‌ارز

هم‌ارزی پیوندها نیز مشابه هم‌ارزی گره‌ها تعریف می‌شود.
یک سؤال باز در این زمینه این است که برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید که قادر باشد تشخیص دهد یک گره داده شده گره بدیهی است یا نه.

نمودار یک گره عبارت است از افکنشی از گره بر صفحه، با تعداد باپایان نقطه‌های دوگانه (گذر)= crossing، با اطلاعات اضافی زیر=under یا رو=over ، مطابق شکل ۴.



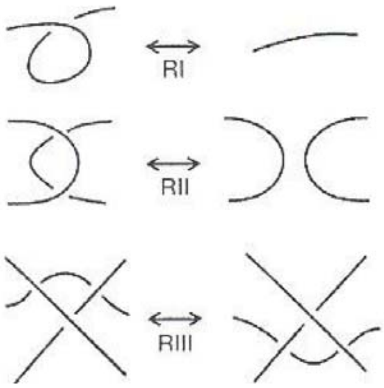
شکل ۴

در واقع، مکان‌هایی که گره در تصویر (افکنش) خودش را قطع می‌کند، گذر نامیده می‌شود. مثلاً گره شکل ۸ یک گره ۴ ــ گذر است، زیرا یک افکنش با چهار گذر برای آن وجود دارد و هیچ افکنشی با کمتر از چهار گذر، وجود ندارد.

در سال ۱۹۲۷، در حالی که J. W. الکساندر و B. G. بریگز و به‌طور مستقل کورت راید مایستر بر صورت نموداری گره‌ها مطالعه می‌کردند، نشان دادند که دو نمودار متعلق به یک گره می‌توانند به‌وسیلهٔ دنباله‌ای باپایان از حرکت‌های سه‌گانهٔ ذیل به هم تبدیل شوند. این عمل‌ها اکنون **حرکت‌های راید مایستر**[1] نامیده می‌شود. در واقع قضیهٔ ذیل توسط آن‌ها به اثبات رسیده است.

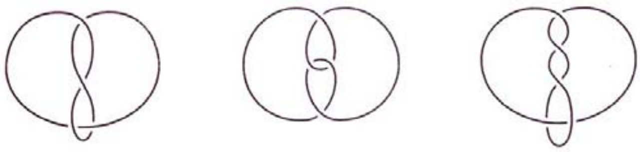
۵. قضیه (راید مایستر) دو گره هم‌ارزند اگر و تنها اگر هر دو نمودار آنها توسط تعدادی باپایان از حرکت‌های شکل ٦ به هم تبدیل شوند.

1) Reidemeister moves



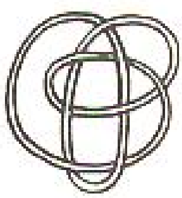
شکل ۵: حرکت‌های سه‌گانهٔ رایدمایستر (RI,RII,RIII)

یک گره جهت‌دار k، **وارون‌پذیر** (یا achiral) نامیده می‌شود اگر با خودش همراه با جهت مخالف (یعنی تصویر آینه‌ای آن) k- هم‌ارز باشد. در غیر این صورت، chiral نامیده می‌شود.



در شکل ۱.۵ سه افکنش هم ارز از گره شکل 8 دیده می‌شود.

برای مثال، گره $8_{۱۷}$ وارون‌پذیر نیست، گره سه‌پره وارون‌پذیر نیست. گره شکل 8 وارون‌پذیر است.



شکل ٦: گرهٔ $8_{۱۷}$

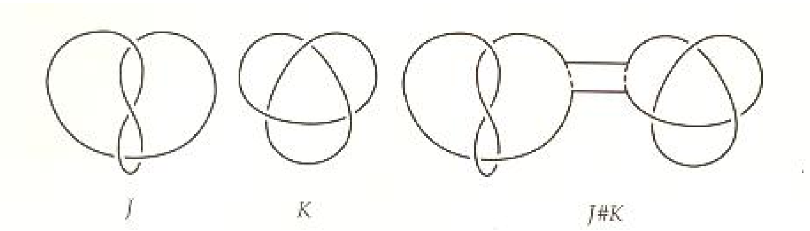
گره **متناوب** گرهی است با افکنشی که اگر گره را در یک جهت تثبیت شده طی کنیم، گذرهای افکنش یک در میان روگذر و زیرگذر باشند. برای مثال، گره سه‌پره در شکل (b .۷) متناوب است.

شکل ۷: گره سه‌پره (b) بی‌گره (a)

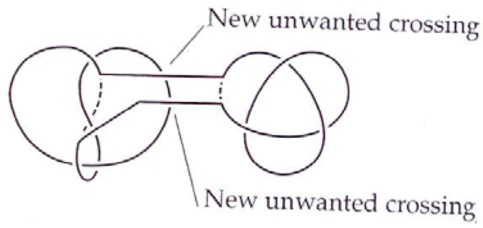
۴. عمل جمع (ترکیب) گره‌ها

دو گره را می‌توان با برش دادنِ هر دو و وصل کردن قسمت‌های باقیمانده از دو گره به یکدیگر، با هم جمع کرد. این عمل، **جمع گره‌ها)** (knot sum) نام دارد که جمع همبند یا ترکیب دو گره نیز نامیده می‌شود. عمل (جمع) به‌صورت دقیق چنین تعریف می‌شود:

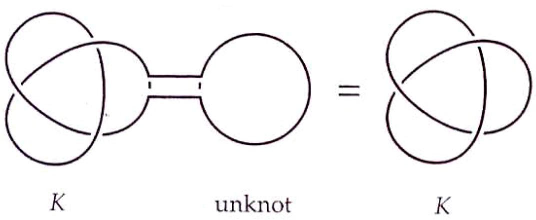
دیاگرام مسطح هریک از دو گره را در نظر گیرید و فرض کنید این دیاگرام‌ها متمایزند. مستطیلی در صفحه بیابید که یک زوج از ضلع‌های روبرو(ی آن) کمان‌هایی در امتداد هر گره باشد، در حالی‌که بقیهٔ مستطیل از گره‌ها مجزاست. گرهٔ جدیدی با حذف اولین زوج از ضلع‌های روبرو و چسباندن زوج دیگر از ضلع‌های روبرو به گره‌ها بسازید. گره حاصل جمع دو گره اولیه است.



شکل ۸. ترکیب دو گرهٔ K و J



شکل ۹: ترکیب دو گره K و J نیست.

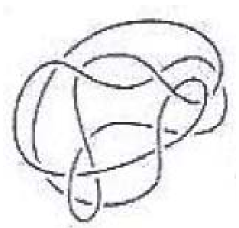


شکل ۱۰: ترکیب گره K با بی‌گره برابراست با K

بسته به این که چگونه این کار انجام شود، دو گره مختلف (ولی نه بیشتر) به‌دست می‌آید. این ابهام در (تعریف) جمع دو گره با فرض جهت بر گره‌ها، برطرف می‌شود، یعنی داشتن یک جهت مرجح حرکت در امتداد گره و الزام به این که جهت خم‌های گره‌ها در جمع با جهت مرزی مستطیل سازگار باشد.

عمل جمع گره‌های جهت‌دار، **جابه‌جایی و انجمنی** است. همچنین هر گره را می‌توان با در نظر گرفتن این عمل به عامل‌های اول آن تجزیه کرد که به این ترتیب، گره اول یا مرکب (مانند عددهای اول یا مرکب) قابل تعریف است.

اگر یک گره به‌صورت جمع (ترکیب) دو گره نابدیهی قابل بیان نباشد، آن را **گره اول** نامند. یک گره **مرکب** نامیده می‌شود اگر بتوان آن را به‌صورت جمع (ترکیب) دو گره نابدیهی بیان کرد. گره‌های موجود در ترکیب یک گره، **گره‌های عامل** آن نامیده می‌شوند. برای مثال، گره‌های (نابدیهی) سه‌پره و شکل 8، اول‌اند و گره شکل ۱۱ مرکب است اگرچه این مطلب بدیهی نیست.



شکل ۱۱: یک گره مرکب

۵. به جدول درآوردن گره‌ها

نظریهٔ گره در اواخر قرن نوزدهم مطرح شد. قبل از این تاریخ گاوس (۱۷۷۷ — ۱۸۵۵) به مطالعهٔ آن‌ها پرداخته بود، ولی نظریهٔ لُرد کلوین مبنی بر این که اتم‌ها حلقه‌هایی گره خورده در اتر هستند باعث ایجاد علاقه جدی به مشخص کردن گره‌ها شد.

اولین تلاش برای به جدول درآوردن گره‌ها در دههٔ ۱۸۸۰ به‌وسیلهٔ کرکمن[1] انجام شد. بعداً ایده‌های او توسط تِیت[2]، فیزیکدان اسکاتلندی، برای فهرست کردن همهٔ گره‌های متناوب با حداکثر ۱۰ گذر به‌کار رفت. در سال ۱۸۹۹، سی. ان. لیتل[3] جدول شامل ۴۳ گره نامتناوب با حداکثر ۱۰ گذر را منتشر کرد. از نقطه‌نظر تاریخی، به جدول درآوردن گره‌ها (بدون توجه به (و اثبات) این که آیا گره‌های حاضر در یک جدول واقعاً متفاوتند یا نه) از آغاز مطرح شدن نظریه به‌طور پیوسته ادامه داشته است تا این‌که در سال ۱۹۳۲، رایدمایستر[4] رده‌بندی دقیقی از گره‌ها با حداکثر ۹ گذر را ارائه داد. در سال ۱۹۶۹، کانوی[5] همهٔ گره‌های اول با حداکثر ۱۱ گذر و همهٔ پیوندهای اول تجزیه‌ناپذیر[6] با حداکثر ۱۰ گذر را مشخص کرد. جدول تعداد گره‌های اول با حداکثر ۱۶ گذر به شرح ذیل است (c =تعداد گذر و k =تعداد گره).

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	c
1,388,705	253293	46972	9988	2176	552	165	49	21	7	3	2	1	1	k

اگرچه برای دنبالهٔ ردیف 2 (تعداد گره‌ها) کران بالایی و پایینی شناخته شده است ولی ثابت نشده است که این دنباله اکیداً صعودی است.

جدول گره‌های با حداکثر ۹ گذر و پیوندهای ۲ ـ مؤلفه‌ای با حداکثر ۸ گذر و پیوندهای ۳ ـ مؤلفه‌ای با حداکثر ۷ گذر را با استفاده از مرجع [1] در ابتدای مقاله (ص ۲) آورده‌ایم. سنت است که گره‌ها برحسب تعداد نقطه‌های تقاطع (گذر) دسته‌بندی می‌شوند. جدول گره‌ها عموماً شامل گره‌های اول است و فقط یک نمونه از گره و تصویر آینه‌ای آن در جدول ظاهر می‌شود (حتی اگر آن دو (گره و تصویر آینه‌ای‌شان) متفاوت باشند).

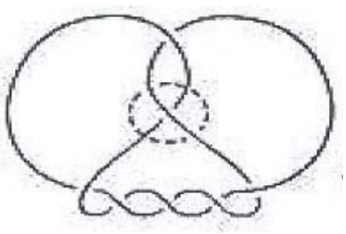
همچنان که از جدول گره‌ها دیده می‌شود، تعداد گره‌های نابدیهی با افزایش عدد گذر سریعاً افزایش می‌یابد که جدول‌بندی را از نظر محاسباتی مشکل می‌کند. تاکنون تلاش‌ها برای به جدول درآوردن بیش از شش میلیون گره و حلقه به ثمر رسیده است.

۶. ناورداهای گره‌ها

در این بخش، ناورداهای چندی برای گره‌ها معرفی می‌شود. مبحث را ابتدا با یک ناوردای خیلی شهودی به نام **عدد بی‌گرهی** آغاز می‌کنیم.

گوییم گره k دارای عدد **بی‌گرهی** n است اگر افکنشی از گره موجود باشد چنان‌که تغییر n گذر (از روگذر به زیرگذر)، گره را به گره بدیهی تبدیل کند و هیچ افکنشی از گره موجود نباشد که با کمتر از n تغییر در گذرهایش بتوان آن را به گره بدیهی تبدیل کرد. این عدد را با $u(k)$ نمایش می‌دهند.

1) Kirkman 2) Tait 3) C. N. Little 4) Reidemeister 5) J. H. Conway 6) nonsplitable



شکل ۱۲: گرهٔ $۷_۲$ بی‌گره می‌شود.

برای مثال، $u($گره بدیهی$) = ۰$ و گره بدیهی تنها گرهی است که عدد بی‌گرهی آن برابر صفر است، $u(۷_۲) = ۱$، $u($گره سه پره$) = ۱$، $u(۷_۴) = ۲$.

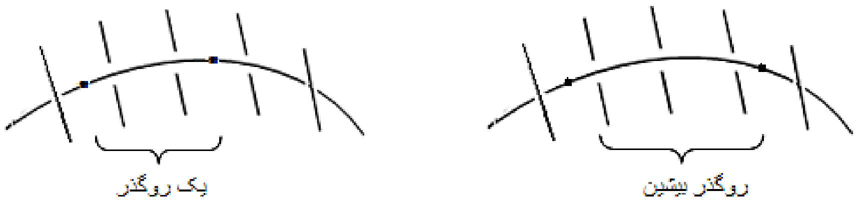
تمرین: عدد بی‌گرهی را برای گره شکل 8 بیابید.

سؤال (باز): حدسیهٔ قدیمی $u(k_۱ \sharp k_۲) = u(k_۱) + u(k_۲)$ را اثبات یا نقض کنید. توجه کنید که همواره داریم $u(k_۱ \sharp k_۲) \leq u(k_۱) + u(k_۲)$. یک نتیجه از شارلمان بیان می‌کند که حدسیه در حالت $u(k_۱ \sharp k_۲) = ۱$ درست است. شاید شما بتوانید آن را برای حالت $u(k_۱ \sharp k_۲) = ۲$ ثابت کنید. همچنین ثابت شده است که هر گره با عدد گرهی ۱ اول است، به عبارت دیگر $u(k_۱ \sharp k_۲) \geq ۲$ برای گره‌های نابدیهی $k_۱$ و $k_۲$.

اگرچه نتیجه‌های کمی دربارهٔ عدد بی‌گرهی به دست آمده است. تحقیقات اخیر دربارهٔ همولوژی فلوئر[1] منجر به موفقیت‌هایی در این زمینه شده است؛ از جمله رده‌بندی همهٔ گره‌ها با حداکثر ۹ گذر و با عدد بی‌گرهی ۱ و همهٔ گره‌های متناوب با حداکثر ۱۰ گذر و عدد بی‌گرهی ۱.

۱.۶. عدد پُل[2]

فرض کنید افکنش یک گره بر صفحه داده شده است. مقصود از یک **روگذر**[3] (شکل ۱۴ سمت چپ) زیرقطعه‌ای از گره است که شامل حداقل یک روگذر باشد و شامل هیچ زیرگذری نباشد. **روگذر بیشین** عبارت است از روگذری که نمی‌تواند طولانی‌تر شود و همچنان روگذر باقی بماند (شکل ۱۳ سمت راست).



1) Floer homology 2) Bridge number 3) overpass

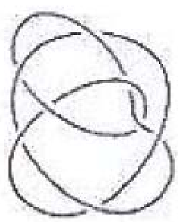
عدد پل برای یک **افکنش** داده شدهٔ گره k عبارت است از تعداد روگذرهای بیشین درآن افکنش. **عدد پل گره** k که با $b(k)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از کمترین عدد پل نسبت به همهٔ افکنش‌های k.

تمرین: نشان دهید اگر یک گره دارای عدد پُل برابر ۱، باشد، آن گره بدیهی است.

رابطهٔ عدد پل ترکیب (جمع) دو گره k_1 و k_2 با عددهای پل k_1 و k_2 عبارت است از:

قضیه. ۱ – $b(k_1 \sharp k_2) = b(k_1) + b(k_2) - 1$.

گره‌های با عدد پل برابر ۲، گره‌های ۲ ــ پل (۲ ــ پلی) نامیده می‌شوند. این گره‌ها، گره‌های گویا نیز نام دارند. گره‌های سه‌پره و شکل 8 از جملهٔ این گره‌هایند. این خانواده از گره‌ها (گره‌های ۲ ــ پلی) بسیار شناخته‌اند. آن‌ها زیرکلاسی از گره‌های متناوب‌اند و غالباً هر ویژگی گره‌ها که مورد سؤال باشد، ابتدا برای این خانواده بررسی می‌شود. گره‌های ۲ ــ پل توسط زایفر[1] رده‌بندی شده است. ثابت شده است تعداد گره‌های با ۲ پل و n گذر دست کم $\frac{2^{n-2}-1}{3}$ است. چون گره‌های با ۲ پل اول‌اند، در نتیجه تعداد گره‌های اول متمایز با n گذر دست کم $\frac{2^{n-2}-1}{3}$ است. شکل ۱۴ (گره 8_{10}) عبارت است از یک گره با سه پل.



شکل ۱۴: گره 8_{10} یک گرهٔ سه پل است.

۲.۶. عدد گذر[2]

عدد گذر گره k که با $c(k)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از کوچکترین تعداد گذرها نسبت به همهٔ افکنش‌های گره k. در حالت کلی تعیین عدد گذر بسیار سخت است.

تمرین: نشان دهید اگر گره‌های k_1 و k_2 متناوب باشند، $k_1 \sharp k_2$ نیز چنین است و بنابراین $c(k_1 \sharp k_2) = c(k_1) + c(k_2)$.

سؤال (باز): نشان دهید (یا مثال نقض ارائه دهید) که عدد گذر یک گره مرکب، برابر جمع عددهای گذر گره‌های عامل آن است، یعنی $c(k_1 \sharp k_2) = c(k_1) + c(k_2)$.

1) H. Seifert 2) crossing number

این سؤال مدت ۱۲۵ سال (تا سال ۲۰۰۸) است همچنان حل نشده باقی مانده است. البته برای رسته‌هایی از گره‌ها فرمول به‌صورت مثبت ثابت شده است. در حالت کلی برای گره‌های نابدیهی k_1 و k_2 فرمول ذیل برقرار است:

$$\frac{c(k_1)+c(k_2)}{152} \le c(k_1\sharp k_2) \le c(k_1)+c(k_2).$$

دیگر ناوردای عددی گره‌ها عبارت است از طول ریسمان[1]. فرض کنید k یک گره نشانده‌شده در فضا باشد. برای هر $x \in k$، فرض کنید $D(x,R)$ قرص مسطح با شعاع R به مرکز x در صفحهٔ عمود بر k باشد. قرار دهید

$$\bar{R} = \sup\{R : D(x,R)\cap D(y,R)=\emptyset, \quad \forall x,y\in k(x\neq y)\}$$

طول ریسمان k که با $L(k)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از (طول کمان k) $\times(1/\bar{R})=L(k)$. طول ریسمان $[k]$ (کلاس هم‌ارزی k متشکل از همهٔ صورت‌های نشانده شدهٔ k در فضا) که با $L[k]$ نمایش داده می‌شود عبارت است از کمینهٔ $L(k)$ نسبت به همهٔ عضوهای $[k]$). عدد میله‌ای[2] (یالی) کمترین تعداد یال‌ها برای تشکیل یک مثلث‌بندی نشانده شده از گره در فضای سه‌بعدی است. این عدد به‌ویژه مورد علاقهٔ زیست‌شیمی‌دان‌هاست که به ساختن مولکول گره‌دار از اتم‌ها یا چند مولکول دیگر علاقه‌مند هستند. عدد میله‌ای برای گره بدیهی برابر سه است، زیرا یک مثلث، مثلث‌بندی مطلوب را به‌دست می‌دهد.

۳.۶. ناورداهای چندجمله‌ای

اولین چندجمله‌ای که به گره‌ها و پیوندها متناظر شد، منسوب به جی. الکساندر است که در حدود سال ۱۹۲۸ معرفی شد. این ناوردای چندجمله‌ای برای تمایز بین گره‌ها و پیوندها بسیار مفید بود. ریاضیدانان برای مدت ۵۸ سال بعد از الکساندر، همچنان از چندجمله‌ای او در تمایز گره‌ها استفاده می‌کردند. در سال ۱۹۶۹، کانوی، روشی موسوم به رابطهٔ skein برای محاسبهٔ چندجمله‌ای الکساندر برای یک پیوند یافت.

در سال ۱۹۸۴، و. جونز[3] ریاضیدان نیوزلندی، چندجمله‌ای جدیدی برای گره‌ها و پیوندها یافت. چندجمله‌ای او حاصل تلاش‌هایش بر جبرهای عملگرها بود، شاخه‌ای که تا آن زمان با نظریهٔ گره‌ها بی‌ارتباط بود. کشف جونز هیجان عظیمی در بین نظریه‌دان‌های گره ایجاد کرد. درست چهار ماه پس از این که جونز چندجمله‌ای جدیدش را معرفی کرد، کشف چندجمله‌ای Homfly اعلام شد. Homfly حرف‌های ابتدای نام ریاضیدان‌هایی است که این چندجمله‌ای را کشف کرده‌اند. این چندجمله‌ای توسط این ریاضی‌دانان در حالی‌که در چهار گروه مختلف مستقلاً کار می‌کردند، کشف شد.

1) rope length 2) stick 3) V. Jones

توصیف چندجمله‌ای جونز: برای این کار ابتدا چندجمله‌ای موسوم به چندجمله‌ای کروشه وابسته به گره‌ها توصیف می‌شود. اگر $<K>$ نمایانگر چندجمله‌ای گره باشد، آن‌گاه

قانون ۱: $<O>=1$، $O=$ گره بدیهی

قانون ۲: $<$  $>= A<)(>+B<\asymp>$

$<$  $>= A<\asymp>+B<)(>$

قانون ۳: $<L\cup O>=C<L>$

برای این که چندجمله‌ای برای گره‌ها (پیوندها) ناوردا باشد یعنی بستگی به افکنش خاص نداشته باشد، چندجمله‌ای باید با اعمال حرکت‌های رایدمایستر بر گره بدون تغییر باقی بماند بنابراین باید داشته باشیم:

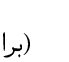
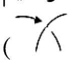
قانون ۱: $<O>=1$

قانون ۲: $<$  $>= A<)(>+A^{-1}<\asymp>$

$<$  $>= A<\asymp>+A^{-1}<)(>$

قانون ۳: $<L\cup O>=(-A^{2}-A^{-2})<L>$

اکنون چندجمله‌ای دارای تنها متغیر A می‌باشد.

حال فرض کنید افکنش گره یا پیوند L را جهت‌دار کنیم، در هر گذر حسب قرارداد علامت ۱+ (برای روگذر ) و علامت ۱− را (برای زیرگذر ) در نظر گیرید، جمع جبری این ۱± ها را پیچ[1] نامند و آن را با w(L) نمایش می‌دهند. حال قرار دهید $X(L)=(-A^{3})^{-w(L)}<L>$ چندجمله‌ای جونز L از X(L) با قرار دادن $t^{-\frac{1}{4}}$ به جای A به دست می‌آید.

تمرین: چندجمله‌ای جونز را برای گره سه پره پیدا کنید.

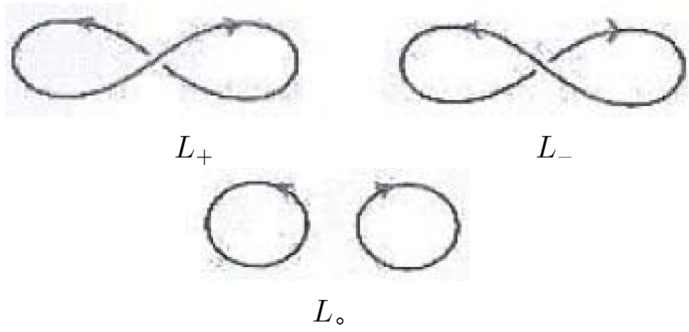
سؤال (حل نشده): آیا یک گره نابدیهی وجود دارد که چندجمله‌ای جونز آن برابر ۱ باشد؟

قانون‌های محاسبه چندجمله‌ای Homfly:

قانون ۱: $P(O)=1$

قانون ۲: اگر L_+، L_- و $L_\circ$ سه پیوند جهت‌دار باشند که با هم برابرند، مگر در نقطهٔ گذر مطابق شکل ۱۵، آن‌گاه $\ell P(L_+)+\ell^{-1}P(L_-)+mP(L_\circ)=0$.

1) writhe



شکل ۱۵: سه پیوند جهت دار

تمرین: چندجمله‌ای جونز و Homfly برای گره سه پره (شکل ۱۶) را بیابید.

شکل ۱۶: گرهٔ سه پره

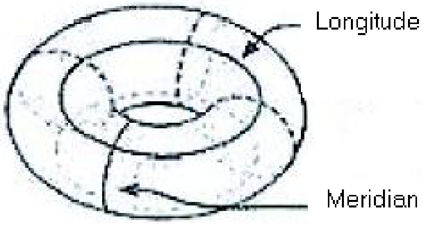
در حالت کلی چندجمله‌ای Homfly مانند چندجمله‌ای الکساندر قابل محاسبه است. آنچه برای محاسبه نیاز است یک درخت تحلیل‌برنده[1] است ولی محاسبه عملاً زیاد و کند است. بیشتر کامپیوترهای موجود فقط برای محاسبه چندجمله‌ای‌های گره‌ها و پیوندهای ساده کافی‌اند.

۷. انواع گره‌ها

۱.۷. گره چنبره‌ای

خمی (گرهی) که یک بار دایرهٔ کوچکتر یک چنبره را دور می‌زند، خم نصف‌النهاری[2] نامیده می‌شود.
خمی (گرهی) که یک بار دایرهٔ بزرگتر یک چنبره را دور می‌زند، خم طولی[3] نامیده می‌شود.
گره چنبره‌ای عبارت است از گرهی نابدیهی که بر یک چنبرهٔ بی‌گره (بدون داشتن روگذر یا زیرگذر) واقع شده باشد.

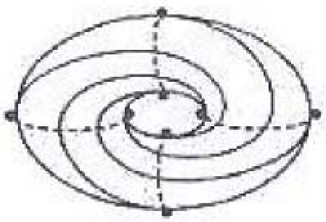
1) resolving 2) meridian 3) longitudinal



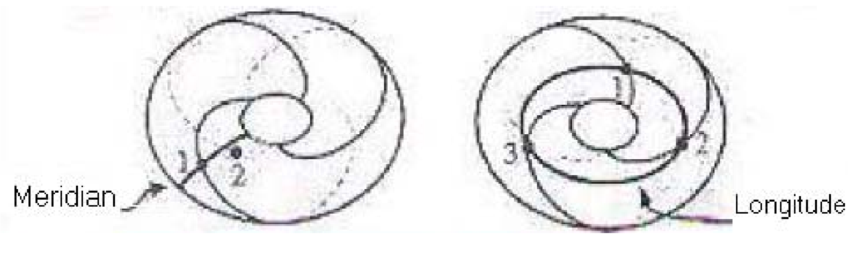
شکل ۱۷: مدار و نصف‌النهار بر چنبره

گره سه‌پره در شکل ۱۷ سمت چپ، سه بار دایره کوچکتر (به‌صورت نصف‌النهاری) و دو بار دایرهٔ بزرگتر چنبره را (به‌طور طولی) دور می‌زند، بنابراین گره سه‌پره یک (۳, ۲)–گره چنبره‌ای نامیده می‌شود.

هر گره چنبره‌ای، یعنی گرهی نابدیهی که بر یک چنبره بی‌گره (بدون داشتن روگذر یا زیرگذر) واقع شده است، یک (p, q)– گره چنبره‌ای است برای عددهای صحیح و مثبت و نسبت به هم اول p و q. هر (p, q) ــ گره چنبره‌ای یک (q, p) ــ گره چنبره‌ای نیز هست. (p, q) ــ گره چنبره‌ای را با $T_{p,q}$ نشان می‌دهند. گره‌های چنبره‌ای نسبتاً ساده‌اند و اطلاعات زیادی دربارهٔ آن‌ها وجود دارد، مثلاً قضیهٔ ذیل.



شکل ۱۸: (۴, ۳)– گره چنبره‌ای



شکل ۱۹: (۳, ۲)– گره چنبره‌ای سه پره

قضیه. برای $p < q$ داریم

1- $c(T_{p,q}) = (p-1)q$

2- $b(T_{p,q}) = p$

3- $u(T_{p,q}) = (p-1)(q-1)/2$

4- $s(T_{p,q}) = 2q \quad for \quad 2 \leq p < q < 2p \ , \ s = stick\ number$

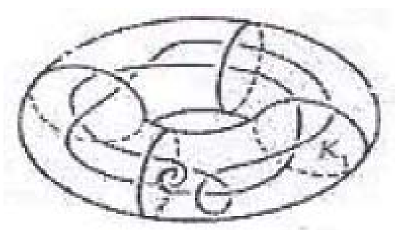
5- $s(T_{p,2p+1}) = 4p \ , \ for\ p \geq 2$

6- $c(K_1 \sharp K_2) = c(K_1) + c(K_2)$ K_1 و K_2 گره‌های چنبره‌ای باشند

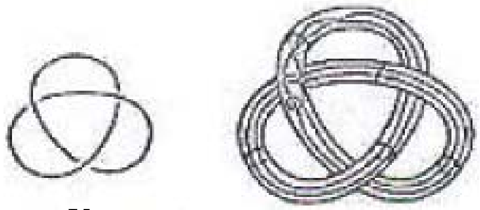
قابل ذکر است که **عدد** stick برای تعداد زیادی از گره‌های چنبره‌ای شناخته شده است. مفهوم گره چنبره‌ای را می‌توان چنین گسترش داد. چنان‌که گفته شد، گره چنبره‌ای عبارت است از یک گره نابدیهی که می‌تواند بر سطح یک چنبره استاندارد نشانده شده در $\mathbb{R}^3$ (چنبرهٔ بدون گره) بدون روگذر یا زیرگذر قرار گیرد. مسلماً گره‌هایی وجود دارد که بر سطح چنبرهٔ بدون گره قرار نمی‌گیرد ولی بر سطح یک رویه با گوناهای بالاتر (بیشتر از) (گونهٔ چنبره=۱) قرار می‌گیرند. به‌طور کلی یک گره K گره n ـ **نشاندنی** نامیده می‌شود اگر بتوان آن را بر یک رویهٔ با گونای n که در $\mathbb{R}^3$ استاندارد نشانده شده است بدون هیچ گذر قرار داد ولی K را نتوان بر هیچ رویهٔ با گونای کمتر از n (بدون گذر) قرار داد.

۲.۷. گره ماهواره‌ای

نوع دیگری از گره که اخیراً بسیار اهمیت یافته است، گره ماهواره‌ای است. فرض کنید K_1 یک گره در درون چنبرهٔ توپر بی‌گره باشد (شکل ۲۰). چنبرهٔ توپر را به‌شکل یک گره دیگر K_2 گره می‌زنیم (شکل ۲۱). این عمل گره K_1 را به گره دیگر K_3 درون چنبرهٔ توپر گره خورده شده تبدیل می‌کند. گره K_3 را**ماهواره‌ای** نامند. گره K_2 گره همکار برای گره K_3 نامیده می‌شود. همیشه فرض می‌شود K_2 نابدیهی است. همچنین همواره فرض می‌شود گره K_1 هر قرص نصف‌النهاری در چنبرهٔ توپر را قطع می‌کند. شکل‌های ۱۷ تا ۱۹ را نیز ببینید.



شکل ۲۰: یک گرهٔ K_1 توی یک چنبرهٔ صلب

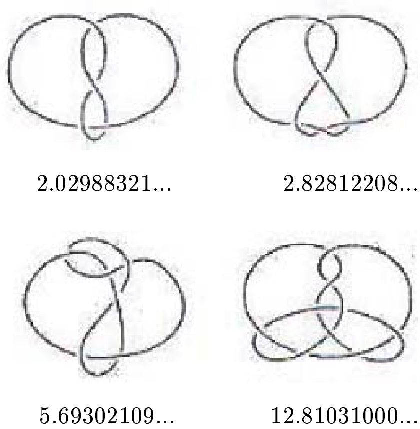


$K_۲$

شکل ۲۱: گره چنبرهٔ صلب شبیه $K_۲$

۳.۷. گره هذلولوی

تا سال ۱۹۷۷ هنوز گره موسوم به «گره هذلولوی» شناخته شده نبود، ولی امروزه مشخص شده است که بیشتر (تقریباً همهٔ) گره‌های اول، گره‌های هذلولوی‌اند. تا این سال هیچ‌کس نمی‌دانست که فضای مکمل یک گره می‌تواند یک فضای هذلولوی باشد. تا آن که ویلیام ترستن که دربارهٔ خمینه‌های سه‌بعدی تحقیق می‌کرد، پس از ملاقات و مذاکره با رابرت ریلی[1] که در انگلستان دربارهٔ رسالهٔ دکتریش تحقیق می‌کرد، این مفهوم را ابداع و ارائه نمود. بنابر تعریف، **گره هذلولوی** گرهی است که فضای مکملش یک متریک ریمانی با خمیدگی برشی ثابت ۱ − می‌پذیرد. **حجم هذلولوی** یک گره هذلولوی عبارت است از **حجم (با متریک هذلولوی) فضای هذلولوی مکمل گره** توجه کنید که این حجم یک عدد متناهی و یک ناوردای گره(های) هذلولوی است. در شکل ۲۲ حجم چند گره هذلولوی ثبت شده است. **یک گره، یا چنبره‌ای است یا ماهواره‌ای یا هذلولوی.**



شکل ۲۲: حجم گره‌های هذلولوی

1) R. Riley

۴.۷. گره‌های متناوب و تقریباً متناوب

گره متناوب گرهی است با افکنشی که اگر آن را در یک جهت طی کنیم، گذرهای آن یک در میان روگذر و زیرگذر باشد. برای مثال، گره‌های شکل 8 و سه‌پره و گره‌های اول با حداکثر ۷ گذر و گره‌های با ۲ ـ پُل متناوب‌اند. اطلاعات پایین دربارهٔ گره‌های متناوب قابل ذکر است.

نشان داده شده است که با افزایش تعداد گذر (در گره)، نسبت گره‌هایی که متناوب‌اند (به گره‌های نامتناوب) به صفر میل می‌کند. مثلاً همین که به گره‌های با ۱۳ گذر می‌رسیم، تعداد گره‌های اول نامتناوب (با ۱۳ گذر) بیشتر از تعداد گره‌های اول متناوب با ۱۳ گذر است.

افکنش یک گره یا پیوند، تحویلی[1] است اگر تعداد گذرهای آن قابل تقلیل نباشد.
یکی از مهمترین نتیجه‌ها دربارهٔ گره‌ها و پیوندهای متناوب که در سال ۱۹۸۸ ثابت شده، این است که

قضیه. عدد گذر یک گره یا پیوند متناوب در هر افکنش تحویلی آن تحقق می‌یابد. هر افکنش نامتناوب آن گره یا پیوند دارای تعداد گذرهای بیشتری است.

این قضیه، گزاره‌ای بسیار قوی است به این معنی که به‌آسانی می‌توان عدد گذر گره‌های متناوب را به‌دست آورد. نتیجه‌ای از این قضیه این است که اگر $k_۱$ و $k_۲$ گره‌های متناوب باشند، آن‌گاه

$$C(K_۱\sharp K_۲) = C(k_۱) + C(k_۲).$$

نتیجهٔ اخیر به این صورت از قضیه به‌دست می‌آید که به‌آسانی دیده می‌شود ترکیب دو گره متناوب، خود یک گره متناوب است. هر دو افکنش متناوب تحویلی یک گره با هم مرتبط‌اند. با به‌کار بردن این حقیقت، تعداد گره‌های اول متناوب با حداکثر ۲۲ گذر محاسبه شده است. این عدد عبارت است از ۴,۹۷۶,۰۱۶,۴۸۵ !

یک افکنش یک گره یا پیوند،**افکنش تقریباً متناوب** نامیده می‌شود اگر یک تغییر در گذر(های) آن افکنش، افکنش را به یک افکنش متناوب تبدیل کند. این نوع گره نسبت به نوع‌های قبلی خیلی جدیدتر است (فقط از سال ۱۹۹۱ معرفی و شناخته شده است). پیشرفت، زمان مفید بودن این مفهوم (نوع جدید گره) را نشان می‌دهد.

یک پیوند، **تقریباً متناوب** نامیده می‌شود اگر دارای یک افکنش تقریباً متناوب باشد و دارای افکنش متناوب نباشد. مثلاً گره $8_{۱۹}$ در شکل ۲۳ یک گره تقریباً متناوب است.

در سال ۱۹۹۰، آدامز و شش دانشجویش ثابت کردند که هر گره اول، تقریباً متناوب یا چنبره‌ای یا هذلولوی است.

1) reductive

شکل ۲۳: گرهٔ 8_{19}، تقریباً متناوب است.

۸. کاربردها: زیست‌شناسی، شیمی و فیزیک

چنان‌که قبلاً بیان شد، بسیاری از انگیزه‌های اولیه در نظریهٔ گره به‌خاطر کاربردهایش در شیمی بوده است. با وجود این، تا دههٔ ۱۹۸۰، کاربردها در شیمی به‌درستی ظاهر نشد. در این بخش می‌خواهیم به کاربردهایی از نظریهٔ گره در مبحث DNA اشاره کنیم.

DNA، ملکولی (یا گروهی از ملکول‌ها) است که مسئول کددار کردن[1] همهٔ اطلاعات ژنتیکی و توارث[2] در موجودات جاندار می‌باشد. اطلاعات ذخیره شده در DNA همهٔ ویژگی‌های[3] موروثی را مشخص می‌کند، مانند رنگ چشم و استعداد انتقال بیماری‌های موروثی. به این دلیل DNA غالباً برنامهٔ کار (یا دقیق‌تر، کتاب دستورالعمل برای حیات نامیده می‌شود.

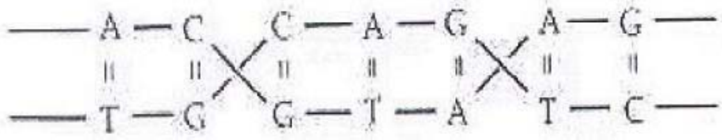
در دههٔ ۱۹۵۰، تشخیص داده شد که کد ژنتیکی در ساختمان حلزون دوگانهٔ DNA ظاهر می‌شود. ساختار DNA توسط کریک[4] و واتسن[5] مبتنی بر تصویرهای زیبای اشعهٔ ایکس (X-Ray) شناخته شد. اسید دی‌اکسی‌ریبونوکلیک[6] که به‌طور مخفف DNA خوانده می‌شود، گروهی از ملکول‌هاست متشکل از زوج‌هایی از رشته‌هایی طولانی از ملکول‌ها که رشته‌ها همانند نردبان تابدار[7] با «پله‌هایی» به هم محکم متصل شده است. همچنین رشته‌ها، مارپیچ‌وار دور یکدیگر پیچیده و حلزون دوگانه‌ای را تشکیل داده‌اند. رشته‌های ملکولی، متناوباً از ملکول‌های شکر و فسفات تشکیل شده است. هر مولکول شکر به یکی از چهار پایهٔ ذیل مطابق شکل ۲۵ بسته شده است. پایه‌ها عبارت است از:

A= آدنین =Adenine و T= تیامین =Thyamine

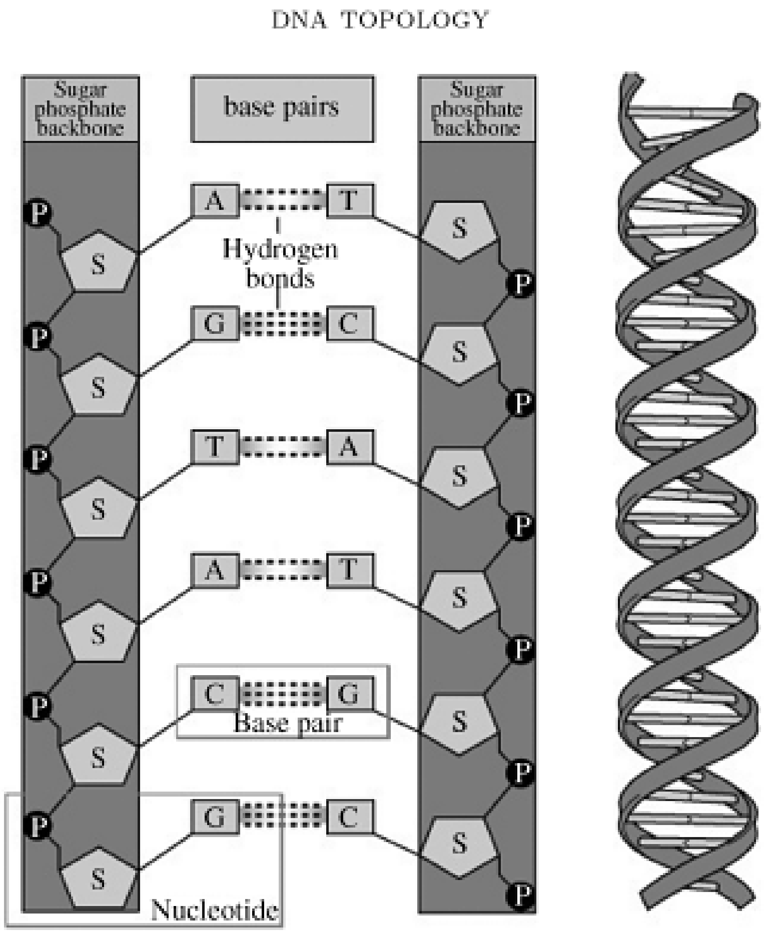
C= سیتوزین =Cytosine و G= گوامین =Guamine

---

1) encoding 2) instructions 3) traits 4) F. Crick 5) J. Watson 6) Deoxiribonucleic
7) twisted



شکل ۲۴. حلزون دوگانهٔ DNA



شکل ۲۵. ساختار اولیه و ثانویه DNA

طول DNA برحسب این زوج پایه‌ها (bp) اندازه‌گیری می‌شود. مثلاً DNA ژنوم انسان تقریباً دارای سه میلیون زوج پایه است، در حالی‌که ژنوم معمول‌ترین باکتری‌ها (E.cobi)، تقریباً دارای ۴٫۴ میلیون زوج پایه است.

پله‌های نردبان DNA متشکل از اتم‌های هیدروژن است که پایه‌ها را (دو به دو) به هم وصل می‌کنند (شکل قبلی را ببینید). A به T و C به G وصل می‌شود. توجه کنید که وقتی از رشتهٔ بالایی به رشتهٔ پایینی می‌آییم پایه‌ها مشابهاً تکرار می‌شود، با این قاعده که همواره A به T و C به G تبدیل می‌شود. دنبالهٔ Aها، Tها، Cها و Gها همچنان که در امتداد یک رشته به پایین حرکت می‌کنیم، عبارت است از کد ژنتیکی که نقشهٔ حیات را به‌دست می‌دهد، یعنی همهٔ اطلاعات موروثی و دستورالعمل‌های کدداده شده برای همهٔ فرآیندهای سلولی. ساختار حلزونی DNA نیز متضمن نتیجه‌های حیاتی عمیقی است. مثلاً باز کردن حلزون دوگانه بسیار مشکل‌تر از باز کردن یک نردبان مستقیم می‌باشد. این مشکل در رسیدن به زوج پایهٔ اتصال‌ها[1] منجر به تغییرات تصادفی کمتری در دنبالهٔ DNA می‌شود. بنابراین کد ژنتیکی را نگهداری می‌کند.

ملکول DNA شامل میلیون‌ها اتم مرتب شده است که همگی در هستهٔ (بسیار کوچک) یک سلول جای گرفته‌اند. در حقیقت اگر هستهٔ یک سلول را به اندازهٔ یک توپ بسکتبال فرض کنیم، DNA موجود در آن به اندازهٔ ۲۰۰ کیلومتر تور ماهیگیری است و این تور، مانند یک رشتهٔ به دقت گلوله شده در درون توپ بسکتبال (هستهٔ سلول) جای نگرفته است، بلکه مانند توده‌ای در هم تنیده (پیچیده) است.

برای انجام عملیات مختلف حیاتی مانند تکثیر[2]، نسخه‌برداری[3] و ترکیب مجدد، DNA باید مورد استفاده قرار گیرد. این‌ها فرآیندهایی به‌ترتیب برای تولید مجدد یک ملکول DNA، تکثیر[4] قطعه‌هایی از DNA و تغییر دادن (اصلاح کردن) ملکول‌های DNA می‌باشد. هر سه فرآیند مذکور برای حیات ضروری است. گره (خوردن‌ها) و در هم تنیدن‌ها در ملکول‌های DNA انجام این فرآیندها را مشکل می‌سازد. برای انجام این مکانیسم‌های حیاتی باید نوعی تشکیل ماهرانه توده‌های در هم تنیدهٔ ملکول‌های DNA صورت گیرد.

طبیعت برای حل این مسأله آنزیم‌هایی به نام توپوایزومراس[5] آماده کرده و به‌کار می‌برد. این آنزیم‌ها به‌صورت توپولوژیکی، DNA را ماهرانه دستکاری می‌کنند. به‌صورت بسیار فشرده به زبان ریاضی می‌توان گفت DNA (و فرآیندهای مذکور دربارهٔ آن) چیزی جز پیوندها (و عمل‌های ریاضی بر آن‌ها) نیست. از این روست که برای مطالعهٔ DNA و اعمال حیاتی آن‌ها، نظریهٔ گره و پیوند قویاً به‌کار می‌رود، برای اطلاعات بیشتر مرجع‌های [2 و 5] را ببینید.

---

1) rungs 2) replication 3) transcription 4) coping 5) topoisomerase

۹. مکانیک آماری و نظریهٔ گره

تا سال‌های اخیر، مکانیک آماری و نظریهٔ گره با هم ارتباطی نداشتند تا این که جونز در خلال کشف ناوردای جدیدش برای گره‌ها به‌نام چندجمله‌ای جونز، ارتباط این دو شاخه از علم را آشکار و برقرار نمود. امروزه این ارتباط یک موضوع پژوهشی بسیار فعال است.

در مکانیک آماری، با سیستم‌هایی متشکل از ذرات بسیار ریز سروکار داریم و به‌جای مطالعهٔ مشخصه‌های هر ذره به‌طور جداگانه، رفتار جمعی را مطالعه می‌کنیم. مثلاً می‌توانیم انرژی میانگین سیستم (موسوم به حرارت) را اندازه‌گیری کنیم. در این مطالعه، به کمیت‌هایی علاقه‌مندیم که به تعداد ذرات (با فرض این‌که تعداد ذرات به اندازهٔ کافی زیاد است) بستگی ندارند، مثلاً با نصف کردن یک قطعه مکعب یخ به دو نیمه، دمای دو قطعهٔ حاصل تغییر نمی‌کند.

با وجود این، حتی هنگامی که فقط رفتار میانگین سیستم را بررسی می‌کنیم، پدیده‌های عجیبی می‌تواند اتفاق افتد. یک مثال، تغییر فازاست هنگامی که یک سیستم متشکل از ذرات گاز به مایع تبدیل می‌شود یااز مایع به جامد تبدیل می‌شود یا برعکس. چنین تغییری برای یک ملکول در یک زمان اتفاق نمی‌افتد، بلکه برای همهٔ سیستم در یک فاصلهٔ زمانی کوتاه صورت می‌گیرد. مثلاً هنگامی که دمای مناسب فراهم می‌شود، ناگهان مایع یخ می‌بندد. یک مثال دیگر، عبارت است از آهن‌ربا شدن (کردن). هنگامی که یک قطعهٔ فلزی در یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد، محورهای مغناطیسی ملکول‌ها در یک امتداد قرار می‌گیرد و این باعث آهن‌ربا شدن قطعه فلزی می‌شود، حتی هنگامی که میدان مغناطیسی از بین رود، قطعه فلز آهن‌ربا باقی می‌ماند.

از نظر ریاضی، مدل‌بندی این سیستم‌ها یکی از مشکل‌ترین مسائل در فیزیک (بوده) است. مدل‌های ریاضی گوناگونی (از جمله مدل آیزینگ که توسط ای. آیزینگ در سال ۱۹۲۵ ابداع شد) برای مطالعه این سیستم‌ها به‌کار می‌رود. این مدل برای سیستم‌هایی که در آن‌ها، فقط ذره‌های نزدیک به هم با هم اندرکنش دارند، به‌خوبی به‌کار می‌رود. در این مدل، برای توصیف سیستم از یک گراف استفاده می‌شود. هر ذرهٔ سیستم یک رأس گراف است و ضلع‌های گراف اندرکنش بین دو ذرهٔ مجاور را نشان می‌دهد. فقط دو ذره‌ای که با یک ضلع به هم وصل شده‌اند، با هم اندرکنش دارند. یک گراف خاص، یعنی مشبکه که در آن رأس‌ها و ضلع‌ها نمونه‌ای منظم و تکراری در فضا تولید می‌کنند، زیاد به کار می‌رود. گراف دیگری که زیاد استفاده می‌شود گراف تخت است، یعنی گرافی که در یک صفحه واقع می‌شود بدون این‌که اضلاع همدیگر را قطع کنند. در مدل آیزینگ، هر ذره دارای دو حالت ± 1 است (در مثال مغناطیسی شدن حالت $+1$ زمانی به ذره نسبت داده می‌شود که محور مغناطیس وابسته به آن ذره به سمت بالا باشد و حالت -1 زمانی است که آن محور به سمت پایین باشد). هر حالت سیستم عبارت است از انتخابی از حالت برای هر یک از ذره‌های سیستم. بنابراین بیان سیستم با یک گراف علامتدار (هر رأس دارای علامت ± 1 است) آغاز می‌شود. به هر حالت سیستم یک عدد نسبت داده می‌شود و به این ترتیب، تابع افراز برای هر سیستم

مطرح می‌شود. آشکار است که هرچه تعداد ذره‌های سیستم بیشتر باشد، تعداد حالت‌های ممکن سیستم بیشتر می‌شود.

یک روش برای آسان (عملی) کردن مدل‌بندی سیستم‌های با تعداد ذرات زیاد، عبارت است از به‌کار بردن معادلهٔ یانگ ــ باکستر[1] یا رابطهٔ ستاره ــ مثلث. این رابطه به‌صورت استقرایی، رأس‌های گراف را تقلیل می‌دهد و در نتیجه باعث ساده‌شدن مسأله می‌شود. ورود مبحث گره در این نظریه از آن روست که هر افکنش گره، یک گراف تخت علامتدار است.

همچنان که در مدل آیزینگ از مطرح شدن نگاشت تابع افراز سخن به میان آمد، در هریک از مدل‌های به‌کار رفته، یک نگاشت افراز ظاهر می‌شود که نسبت به حرکت‌های رایدمایستر ناورداست و این نگاشت افراز یک ناوردای گره یا پیوند متناظر با سیستم (و مدل به‌کار رفته) می‌باشد. بنابراین همان‌گونه که در بالا نیز اشاره شد، از این طریق نظریهٔ گره در مکانیک آماری ظاهر و به‌کار برده می‌شود.

۱۰. گره‌ها و خمینه‌های سه‌بعدی

در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ دو ریاضیدان به نام‌های ریموند لیکوریش[2] و اندرو والاس[3] به‌طور مستقل و با روش‌های کاملاً متفاوت ثابت کردند **هر خمینهٔ سه‌بعدی همبند و فشرده از اعمال «جراحی دِن»[4] بر یک پیوند در S^3 به‌دست می‌آید.** این مطلب رابط اساسی بین گره‌ها و پیوندها و خمینه‌های سه‌بعدی است. بنابراین اگر بتوانیم گره‌ها و پیوندها و جراحی‌های دن بر آن‌ها را درک کنیم، می‌توانیم همهٔ خمینه‌های سه‌بعدی فشرده را شناسایی کنیم.

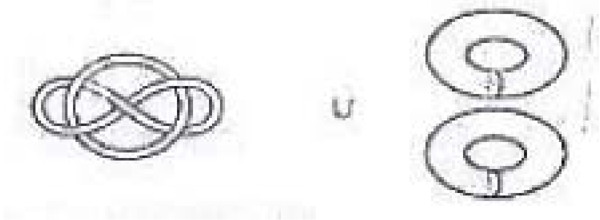
فرض کنید $k \subset S^3$ یک گره باشد، **بیرون گره** k [5] عبارت است از مکمل (در S^3) یک چنبرهٔ توپر (صلب) باز (در S^3) حول k (مانند k گره زده شده). این چنبرهٔ صلب باز دقیقاً عبارت است از همسایگی تیوبی k در S^3.

حال گره $k \subset S^3$ را در نظر بگیرید و یک همسایگی تیوبی آن را از S^3 خارج کنید (باقیمانده در واقع بیرون گره است). آن‌گاه یک چنبرهٔ صلب (گره زده شده مانند k) را به بیرون گره بچسبانید (مطابق شکل پایین) بدین صورت که خم نصف‌النهاریش[6] به یک (p,q) ــ خم واقع بر چنبرهٔ مرزی بیرون گره برده شود. این عمل، **جراحی دن** نامیده می‌شود. فضای حاصل از این عمل، یک خمینهٔ سه‌بعدی بدون مرز است. اگر جراحی دن را بر گره بدیهی اعمال کنیم، در واقع دو چنبرهٔ توپر را در امتداد مرزهایشان به هم می‌چسبانیم. آنچه از این عمل در حالت کلی به‌دست می‌آید، عبارت است از فضای عدسی که حالت خاص آن کرهٔ S^3 است. جراحی دن را می‌توان بر یک پیوند در S^3 نیز اعمال کرد. شکل‌های ۲۶ و ۲۷ نمایانگر اعمال جراحی دن بر یک گره و بر یک پیوند است.

---

1) Yang-Baxter equation 2) Raymond Lickorish 3) Andrew Wallace 4) Dehn surgery
5) Knot exterior of k 6) meridian curve

شکل ۲۶. چسباندن خم نصف النهاری چنبرهٔ توپر به $(p,q)-$ خم

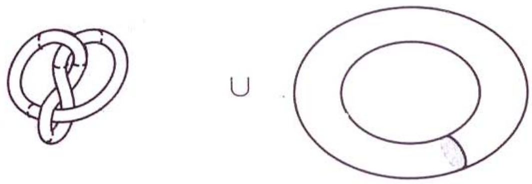


شکل ۲۷. جراحی دن بر یک پیوند در S^3

۱۱. گره زدن در بعدهای بالاتر

گسترش طبیعی نظریهٔ گره در فضای سه‌بعدی عبارت است از مطالعهٔ کرهٔ دوبعدی S^2 («گره زده شده») در فضای چهاربعدی (یک فضای دو بعدی در فضای چهاربعدی (S^4 یا $\mathbb{R}^4$) همانسان با S^2). توجه کنید که هر گره (فضای یک‌بعدی همانسان با S^1) در فضای چهاربعدی با گره بدیهی هم‌ارز است، از اینروست که در اولین گسترش، گره‌های دوبعدی در فضای چهاربعدی مطالعه می‌شوند. به‌طور استقرایی، می‌توان گره‌های nبعدی را در فضای $(n+2)$بعدی در نظر گرفت و مطالعه کرد.

تشکر: مؤلّف از آقای فیروز پاشائی به‌خاطر تهیهٔ صورت تایپی اولیهٔ مقاله و ویراستار ارشد مجله برای ویرایش، و سرکار خانم صمدیان برای آماده‌سازی صورت نهایی آن، سپاسگزار است.



شکل ۲۸. چسباندن چنبرهٔ تو پُر به بیرون یک گره

کتابنامه

[1] *Introductory Lectures of Knot Theory*, Eds: L. H. Kauffman et al World Sci, The Abdus Salam ICTP., 2012.

[2] Applications of knot Theory; Proc. Symposia in Applied Math.,Vol. 66, AMS short course, AMS., 2009.

[3] knot plot (Authar R. Scharein), http://www.knotplot.com

[4] Morwen, Thistlewaite's webpage.

[5] C. Adams, The Knot Book, W. H. Freeman, Ny (2004).

[6] L. H. Kauffman, Knots and Physics, World scientific, 2001.

[7] K. Murasugi, Knot Theory & its Applications, Birkhauser, 1996.

[8] E. Flapan, When Topology meets Chemistry, CUP (2000).

[9] J. Baez & J. P. Muniain, Gauge Fields, Knots and Gravity, series on knots and everything, Vol. 4, World scientific, 2008.

گردآوری و تألیف: سید محمدباقر کاشانی،
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس
kashanim@modares.ac.ir