فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۵ (پاییز ۱۳۸۹) صص. ۵۱ تا ۶۰

فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش

احسان سیاوشی

مقدمه

ریاضیات در طول تاریخ از نظر اکثر فلاسفه و دانشمندان، بهشتی برین برای متفکر به‌حساب می‌آمده است. نظام اصل‌موضوعی که اولین بار اقلیدس برای ارائهٔ هندسه‌اش به‌کار برد، نمونهٔ کامل خردورزی و اقناع‌کننده‌ترین روش عقلی بود، به‌طوری که متفکران سایر حوزه‌های اندیشه به آن رشک می‌بردند. چنان‌که مثلاً اسپینوزا در کتاب «اخلاق» و نیوتن در «اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی» به‌تقلید از اقلیدس، نظراتشان را در قالب دستگاه‌های اصل‌موضوعی بیان کردند. ایمانوئل کانت، فیلسوف عصر روشنگری، معارف ریاضی را حقایق پیشینی می‌دانست و حتی راسل و کارنپ با او در این مورد هم عقیده بودند. اما چنان‌که در این مقاله هم خواهیم دید، چنین برداشتی از معرفت ریاضی از سوی برخی از برجسته‌ترین فیلسوفان و ریاضی‌دانان معاصر، به انحاء مختلف مورد تردید قرار گرفته است. ایمره لاکاتوش از آن جمله است.

۱. ایمره لاکاتوش (۱۹۲۲—۱۹۷۴)

ایمره لاکاتوش نام جعلی ایمره لیپزیتس[۱] است که در سال ۱۹۲۲ در یک خانوادهٔ یهودی اهل مجارستان متولد شد. او دو بار تغییر نام داد، یک بار برای خلاصی از اردوگاه‌های کار اجباری نازی از اسم تیبور مولنار[۲] استفاده کرد و بار دیگر پس از حملهٔ روس‌ها در سال ۱۹۴۵، اسمش را به ایمره لاکاتوش تغییر داد.

لاکاتوش قبل از اشغال مجارستان توسط نازی‌ها، ریاضیات، فلسفه و فیزیک خوانده بود. بعد از جنگ، تحصیلاتش را در دانشگاه اتووش[۳] ادامه داد و در عین‌حال در جناح چپ نیز فعال بود.

1) Imre Lipssitz   2) Tibor Molnar   3) Eötvös

در سال ۱۹۴۷ به‌عنوان مسئول اصلاحات در آموزش عالی انتخاب شد و سه سال بعد، به اتهام اقدام برای براندازی دستگیر شد و سه سال در زندان و یک سال را در انفرادی به‌سر برد. پس از آزادی، به دانشگاه بازگشت و زیر نظر آلفرد رنی[۱]، روی نظریهٔ احتمال و نظریهٔ اندازه کار کرد. در همین زمان، کتاب معروف «چگونه مسأله را حل کنیم؟»[۲] اثر جورج پولیا[۳] را به مجارستانی ترجمه کرد. پس از سرکوب انقلاب توسط ارتش شوروی، مجارستان را به‌سوی وین ترک نمود. در سال ۱۹۵۷ یک بورس تحصیلی از کینگز کالج لندن به‌دست آورد و تز دکترایش را که بعدها با عنوان «برهان‌ها و ردها» منتشر شد، نوشت. کار روی حدس دکارت ــ اویلر پیشنهاد پولیا به لاکاتوش بود. بعدها در ۱۹٦۰ لاکاتوش در مدرسهٔ اقتصاد لندن زیر نظر کارل پوپر مشغول به‌کار شد و در سال ۱۹٦۹ به‌عنوان استاد منطق در همان‌جا انتخاب گردید. او در دوم فوریهٔ ۱۹۷۴ در سن ۵۱ سالگی درگذشت [۱].

فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش عمدتاً از دو منبع الهام می‌گیرد: یکی از استادش پوپر و دیگری از جورج پولیا و آموزه‌هایش در باب فلسفه و آموزش ریاضی. کارل ریموند پوپر فیلسوفی بود که با انتشار کتاب «منطق اکتشاف علمی» [۱۳] در سال ۱۹۳۴، مدعی شد که گزاره‌های علمی قابل اثبات نیستند بلکه صرفاً قابل رد و ابطال‌اند. فرضیه‌های علمی هیچگاه اثبات نمی‌شوند. آن‌ها صرفاً حدس‌هایی هستند که چون از کورهٔ آزمون‌هاموفق بیرون آمدند، موقتاً پذیرفته می‌شوند. فلسفهٔ علم لاکاتوش اوج مکتب پوپری است. لاکاتوش در «روش‌شناسی برنامه‌های پژوهشی» [۲] سعی کرده است با عرضهٔ ابطال‌گرایی پیشرفتهٔ خود، انتقادات وارد بر ابطال‌گرایی پوپری را رفع کند.

کتاب «برهان‌ها و ردها» اغلب به‌عنوان تلاشی برای به‌کاربستن ابطال‌گرایی پوپری در قلمروی ریاضیات تلقی شده است. گویی همان‌طور که استاد علیه اثبات گرایی در علوم‌تجربی شورید تا نشان دهد که نظریات علمی قابل اثبات نیستند بلکه تنها قابل رد و ابطالند، شاگرد هم کوشیده است تا در تلقی سنتی از اثبات یقین‌آور ریاضی رخنه کند و نقش حدس‌ها و ردها را در ریاضیات نشان دهد. لاکاتوش اصطلاح ابطال‌پذیری[۴] را در فلسفهٔ ریاضی خود از پوپر اخذ می‌کند.

جورج پولیا هم ریاضیدانی است که خصوصاً به‌خاطر نظراتش دربارهٔ آموزش ریاضی مورد توجه است. او نظراتش را در کتاب «ریاضیات و استدلال‌های اقناعی» [۳] آورده است. پولیا با روش متداول آموزش ریاضی که تحت تأثیر صورتگرایی مکتب بورباکی[۵] قرار دارد شدیداً مخالف است. نویسندگان این مکتب ریاضیات را به‌صورت دستگاه‌های خشک صوری و انتزاعی به خواننده معرفی می‌کردند؛ در مقابل، پولیا روشی موسوم به روش اکتشافی[٦] را ارائه می‌کند. در این روش به حدس‌های ریاضی، برهان‌های غیرصوری، استدلال‌های اقناعی و ... میدان داده می‌شود. لاکاتوش در فلسفهٔ ریاضی خود اصطلاح اکتشافی را هم از پولیا وام می‌گیرد.

1) Alfred Renyi 2) How to Solve It? 3) George Polya 4) Fallibilism 5) Bourbaki
6) Heuristic

۲. منطق اکتشاف ریاضی

«برهان‌ها و ردها: منطق اکتشاف ریاضی» [۴] اسم کتاب معروف لاکاتوش دربارهٔ فلسفهٔ ریاضی است. عنوان کتاب، تأثیر پوپر را نشان می‌دهد. ادعای لاکاتوش در این کتاب این است که اکتشاف ریاضی روندی دیالکتیکی دارد. به عبارت دیگر، اکتشاف ریاضی با حرکت یکراست از اصول به سمت قضایا حاصل نمی‌شود بلکه فرایندی است که با آزمون و خطا راه خود را می‌یابد. لفظ دیالکتیک یادآور نام سقراط است. این یادآوری بی‌مورد نیست. محاورهٔ منون [۱۴] گفتگویی بین سقراط و یک برده‌ی امّی با نام منون است دربارهٔ این سؤال که «اندازهٔ وتر یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین که طول هر ساق آن یک باشد، چقدر است؟» منون مکرراً پاسخ‌های غلطی می‌دهد. اما سقراط به روش دیالکتیکی خود و با وانمایی نقایص آن پاسخ‌ها، در طی گفتگو منون را به کشف قضیهٔ فیثاغورس رهنمون می‌شود. این همان روشی است که لاکاتوش در «برهان‌ها و ردها» به‌کار می‌بندد تا طی دیالکتیکی بین معلم و شاگردان (که با حروف الفبای یونانی نامیده می‌شوند) به اثبات حدس اویلر بپردازند. از سوی دیگر، منطق غیردیالکتیکی خود را با روابط بین گزاره‌ها مشغول می‌کند در حالی که منطق دیالکتیکی متوجهٔ بسط و گسترش مفاهیم است. همان‌طور که افلاطون با بحث دیالکتیکی دربارهٔ عدالت به مفهوم عدالت و تعریف جدیدی از آن می‌رسد، نگاهی به تاریخ ریاضیات و بسط مفاهیمی چون پیوستگی، همگرایی، میل کردن و ... از زمان نیوتن و لایب‌نیتز تا توپولوژی معاصر، اتفاق مشابهی را نشان می‌دهد.

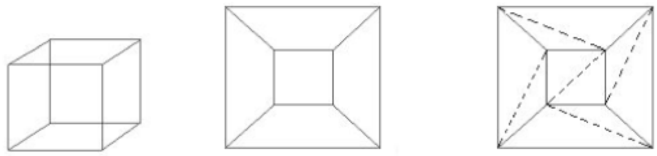
برهان‌های ریاضی عمدتاً در آغاز، غلط یا ناقص هستند. به‌تدریج مفروضات نهفته و استدلال های آن‌ها مورد نقد قرار می‌گیرند. در صورتی که راه حلی برای رفع این انتقادات وجود داشته باشد برهان تکامل می‌یابد، واگرنه برهان اصلاح یا به‌کلی کنار گذاشته می‌شود. این خلاصه‌ای از تبیین لاکاتوش برای منطق اکتشاف ریاضی بود. او با ذکر دو مثال از موضع خود دفاع می‌کند: حدس دکارت ــ اویلر و قضیهٔ پیوستگی کُشی.

الف) حدس دکارت ــ اویلر

فرض کنید V تعداد رئوس، E تعداد یال‌ها و F تعداد وجوه یک چندوجهی باشند. در این صورت بنابر حدس دکارت ــ اویلر، $V - E + F = ۲$. لاکاتوش در [۴] به‌شیوهٔ بحث بین معلم و شاگردان، به اثبات این حدس می‌پردازد. نخست معلم ادعا می‌کند برهانی برای این حدس دارد.

معلم:«من یک برهان دارم. برهان من بر اساس تجربهٔ ذهنی زیر است. مرحلهٔ اول: تصور کنید چندوجهی مورد نظر توخالی است و سطح آن نیز از لاستیک نازکی ساخته شده است. اگر یکی از وجوه آن را ببُریم، بقیهٔ وجوه را می‌توانیم بکشیم و روی تخته سیاه پهن کنیم بدون آن‌که پاره شود. البته وجه‌ها و اضلاع تغییر شکل می‌یابند اما E و V ثابت می‌مانند ولی از F یکی کم می‌شود (همان وجهی که روی تخته سیاه باز کردیم). بنابراین فرمول $V - E + F = ۲$ برای چندوجهی اصلی

درست است تنها اگر فرمول $V - E + F = ۱$ برای این شبکهٔ مسطح درست باشد (شکل ۱).

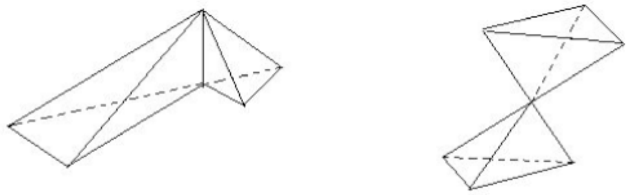


مرحلهٔ دوم: شبکهٔ مسطح را مثلث‌بندی می‌کنیم. با رسم هر قطر از یک چندضلعی، یکی به E و یکی به F اضافه می‌شود. بنابراین مقدار $V - E + F$ ثابت می‌ماند. پس در شبکهٔ مثلث‌بندی شده، هنوز رابطهٔ $V - E + F = ۱$ برقرار است.

مرحلهٔ سوم: حالا از شبکهٔ مذکور یکی یکی مثلث‌ها را برمی‌داریم. برای حذف یک مثلث، یا یکی از یال‌های شبکه را برمی‌داریم که در این صورت یک وجه و یک یال کم می‌شود یا دو یال بر می‌داریم که در این صورت، دو یال، یک وجه و یک رأس کم می‌شود. بنابراین رابطهٔ $V - E + F = ۱$ همچنان برقرار می‌ماند. در پایان، تنها یک مثلث باقی خواهد ماند که به‌وضوح رابطهٔ $V - E + F = ۱$ برای آن برقرار است. پس ما حدسمان را به اثبات رساندیم.»

این استدلال دلتا را قانع می‌کند اما آلفا، بتا و گاما قانع نمی‌شوند. هر یک از اینان یکی از مراحل سه‌گانهٔ معلمشان را مورد تردید قرار می‌دهند و معلم نقص برهانش را می‌پذیرد.

به نظر می‌رسد برای اثبات این حدس به مفروضات بیشتری نیاز داریم. در ادامهٔ گفتگو، شاگردان چند مثال نقض برای حدس اویلر می‌آورند (شکل ۲).



همان‌طور که می‌بینیم لاکاتوش به ریاضی‌دانان پیشنهاد می‌کند دو کار متناقض را با هم انجام دهند: حدس‌ها را اثبات کنند و سپس در رد آنان بکوشند. از نظر او نه اثبات‌ها برهان قاطع هستند و نه مثال‌های نقض به‌کلی قضیه را منتفی می‌کنند [۵]. این رویکردی تکاملی به نحوهٔ کسب معرفت ریاضی است. به این معنی که ما به حقایق ریاضی توسط سلسله‌ای از برهان‌ها و ردهای پیاپی و به‌تدریج دست می‌یابیم.

گفتگو ادامه می‌یابد. آن‌ها می‌کوشند برای ایرادات بیان شده راه حل‌هایی بیابند. نخست دلتا که از استدلال معلم قانع شده بود، می‌گوید:

دلتا: «اما چرا باید مثال نقض را بپذیریم؟ ما حدسمان را اثبات کرده‌ایم و حالا تبدیل به یک قضیه شده است. البته من می‌پذیرم که قضیهٔ ما با این مثال‌های نقض در تقابل است و یکی باید کنار گذاشته شود، اما چرا باید قضیه را کنار گذاشت؟ در حالی که اثبات شده است!»

گاما: «چرا که نه؟ چندوجهی یک جسم صلب است که رویه‌هایش به‌شکل چندضلعی مسطح هستند و مثال‌های نقض ما این ویژگی را دارند.»

در اینجا معلم سعی می‌کند بحث را به تعریف چندوجهی بکشد. سه تعریف از چندوجهی ارائه می‌دهند. هربار سعی می‌شود نقایص تعریف پیشین برطرف شود و از مثال‌های نقض اجتناب کنند. در نهایت، آن‌ها به این نتیجه می‌رسند که قضیهٔ اویلر را برای حالتی که چندوجهی مذکور ساده باشد، یعنی اولاً حفره نداشته باشد و ثانیاً بتوان سطح آن را به‌گونه‌ای دگردیس کرد که به کره تبدیل شود، اثبات کرده‌اند [۵، ۱۵].

ب) قضیهٔ پیوستگی کُشی

در ضمیمهٔ [۴] و نیز در [٦]، لاکاتوش به قضیهٔ پیوستگی کُشی می‌پردازد. این مثال نسبت به مثال قبل این برتری را دارد که نمونه‌ای واقعی است. کُشی که در استوار ساختن پایه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال سهم بسزایی دارد، قضیهٔ نادرست زیر را اثبات کرد.

فرض کنید سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ برای هر x به $f(x)$ همگرا و هر f_n پیوسته باشد، آنگاه f پیوسته است.

این قضیه غلط است و امروزه مثال‌های نقض زیادی برای آن می‌شناسیم. یکی از این مثال‌ها سری فوریهٔ زیر است که در سال ۱۸۰۷ منتشر شد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

در سال ۱۸۴۷ زایدل[1] که متوجه این مثال نقض بود، به بررسی مجدد قضیهٔ کُشی پرداخت و فرض پنهان در اثبات کُشی را که موجب اشکال شده بود، یافت. کُشی از شرط همگرایی نقطه‌ای استفاده کرده بود در حالی‌که برای اثبات این قضیه باید از شرطی قوی‌تر که امروزه آن را به اسم «همگرایی یکنواخت» می‌شناسیم استفاده کرد. به این ترتیب، تکمیل یک برهان به کشف یک مفهوم جدید منتهی شد [١٦].

1) Seidel

۳. رویکرد تجربی به ریاضیات

همان‌طور که پیش از این هم اشاره شد، برخی از فلاسفهٔ معاصر علم به دلایل مختلف از نوعی تجربه‌گرایی در فلسفهٔ ریاضی طرفداری کرده‌اند. اینان ریاضیات را بیش از پیش به فیزیک نزدیک می‌بینند، منکر پیشینی بودن معرفت ریاضی هستند، از رویکرد اکتشافی و حدس‌های ابطال‌پذیر ریاضی سخن می‌گویند و در پرتوی قضیهٔ ناتمامیت گودل، ریاضیات را فارغ از دستگاه‌های اصل موضوعی دارای هویتی مستقل می‌دانند. حتی برخی مانند هیلاری پاتنم [۲] به‌دنبال ریاضیاتی بدون اصول موضوع هستند [۷].

باید توجه داشت که مراد همهٔ این فلاسفه از ریاضیات تجربی یکسان نیست. لاکاتوش ریاضیات را دانشی تجربی می‌داند اما مقصود او کاملاً با آنچه کواین از این اصطلاح در ذهن دارد، متفاوت است.

ویلارد ون اورمن کواین [۳] از یک سو تمایز سنتی ترکیبی ــ تحلیلی گزاره‌ها را انکار کرد و از سوی دیگر قائل به کلگرایی [۴] شد [۸، ۹]. نتیجهٔ چنین موضعی این است که ریاضیات و منطق را نیز به همان معنایی که فیزیک را علمی تجربی می‌دانیم، دانشی تجربی به‌حساب آوریم. به عبارت دیگر، یک آزمایش در جهان فیزیکی (مثلاً در ذرات بنیادی) می‌تواند ریاضیات ما را تغییر دهد. اما منظور لاکاتوش از ریاضیات تجربی این است که حدس‌های ریاضی را می‌توان به محک تجربه گذاشت، اما نه تجربهٔ فیزیکی، بلکه تجربه و آزمایش ذهنی.

لاکاتوش [۱۰] نقل قول‌های متعددی از فیلسوفان و ریاضی‌دانان معاصر آورده است تا تغییر جهت به سمت تجربه‌گرایی در ریاضیات را نشان دهد. بعضی از آن‌ها را در ادامه می‌آوریم. دو نقل قول اول از راسل و کارنپ است که بیشتر به منطق‌گرایی [۵] معروفند، اما این نقل قول‌ها نشان می‌دهند که بعدها به سمت تجربه‌گرایی متمایل شده‌اند.

راسل (۱۹۲۴):

«منطق (و ریاضیات) کاملاً مانند معادلات ماکسول در الکترودینامیک هستند: اعتقاد به هر دوی آن‌ها تنها به‌خاطر مشاهدهٔ صدق نتایج منطقی‌شان است.»

کارنپ (۱۹۶۳):

«یک نظریه در فیزیک را مادامی که پیش‌بینی‌های مفیدی می‌کند می‌پذیریم و به محض این‌که چنین نکند آن را اصلاح یا ترک می‌کنیم. این همان اتفاقی است که برای نظریه‌های ریاضی در گذشته رخ داده است. جایی که اکتشاف یک تناقض، منتهی به اصلاحاتی در دیدگاه‌های ریاضی مقبول شده است.»

---

1) Hillary Putnam 3) Willard Van Orman Quine 4) Holism 5) Logicism

برخی دیگر از این قبیل اظهارات تحت تاثیر قضیهٔ ناتمامیت گودل ابراز شده‌اند. گودل ثابت کرد اگر حساب سازگار باشد، آنگاه ناتمام است. این قضیه امیدهای بلند هیلبرت را به یأس تبدیل نمود.

وایل (۱۹۴۹):

> «هیچ هیلبرتی قادر نخواهد بود ما را برای همیشه نسبت به سازگاری مطمئن سازد. باید رضایت دهیم که یک دستگاه اصل موضوعی ریاضی هم تاکنون از کورهٔ آزمایش‌های مفصل ما موفق بیرون نیامده است. یک ریاضیات واقع‌بینانه باید مانند فیزیک شاخه‌ای از ساختار نظری جهان واقعی باشد و مانند فیزیک برای توسعهٔ مبانی خود با احتیاط گام بردارد.»

گودل در مقالهٔ معروف خود «فرضیهٔ پیوستار کانتور چیست؟» ادراک ما از اشیاء ریاضی را با ادراکمان از اشیاء فیزیکی چنین مقایسه می‌کند:

> «از اشیاء نظریهٔ مجموعه‌ها هم چیزی شبیه ادراک داریم و این واقعیت نشان می‌دهد که اصول، خود را بر ما تحمیل می‌کنند. من هیچ دلیلی نمی‌بینم که به این نوع ادراک، یعنی شهود ریاضی، اطمینان کمتری داشته باشم تا به ادراک حسی که به ساختن نظریه‌های فیزیکی و امید بستن به این که در آینده با آن‌ها سازگار درآیند، ترغیبمان می‌کند.»[۱۵]

از آنجا که نظریات علمی دارای ابطال‌گرهایی بالقوه هستند، لازم است لاکاتوش برای تأکید بر شباهت بین روش‌های اکتشاف در علوم تجربی با ریاضیات، ابطال‌گرهای بالقوهٔ ریاضی را معرفی کند. اولین ابطال‌گر، تناقض است که در این مورد با ریاضیات سنتی هم‌داستان است. نوع دیگر ابطال‌گر، مثال‌های نقض هستند که غالباً به تجدید نظر در تعاریف منجر می‌شود. نوع آخر ابطال‌گرها وقتی پیش می‌آیند که در صدد اصل‌موضوعی کردن بخشی از ریاضیات هستیم و بعد معلوم می‌شود دستگاه ارائه شده، انتظارات مورد نظر را برآورده نمی‌کند. لاکاتوش سه مثال از نظریه‌های صوری ابطال شده ارائه می‌کند: ۱. صوری‌سازی نظریهٔ خمینه‌ها (مانیفلدها) توسط ریمان که به‌وسیلهٔ نوار موبیوس ابطال شد. ۲. ساختار اصل موضوعی کولموگروف برای نظریهٔ احتمالات که در چهارچوب آن گزاره‌ای شهودی مانند «همهٔ اعداد طبیعی احتمال وقوع برابر دارند» را نمی‌توان صوری کرد. ۳. نظر گودل دربارهٔ این‌که دستگاه صوری زرملو ــ فرانکل (ZF) و دستگاه‌های مشابه آن، تعبیر درستی از نظریهٔ مجموعه‌ها نمی‌باشند، زیرا در چهارچوب آن‌ها نمی‌توان فرضیهٔ پیوستار کانتور را نفی کرد [۱۱].

لاکاتوش با صورتگراها در مورد این که ریاضیات را صرفاً مجموعه‌ای از دستگاه‌های صوری بدانیم مخالف است. او می‌گوید یک برهان نباید لزوماً صوری باشد. یک نمونه از برهان غیرصوری همان استدلال معلم برای حدس دکارت ــ اویلر است. نمونهٔ دیگر، قضیهٔ زیر است:

اگر حدس گلدباخ در نظام اصل موضوعی نظریهٔ اعداد (اصول پئانو) تصمیم‌ناپذیر باشد، آنگاه این حدس در تعبیر ریاضی مینیمال ما صحیح خواهد بود.

برهان: اگر حدس گلدباخ تصمیم‌ناپذیر باشد، آنگاه در برخی تعبیرهای دستگاه اصل موضوعی پئانو صحیح و در برخی از آن‌ها غلط است. از طرفی، یک تعبیر مینیمال از این نظریه وجود دارد که جزٔ همهٔ تعبیرهای دستگاه پئانو است. اگر در این تعبیر حدس گلدباخ غلط باشد، آنگاه در همهٔ تعبیرها غلط خواهد بود و لذا تصمیم‌پذیر خواهد شد. بنابراین این حدس در تعبیر مینیمال صحیح است [۱۲].

لاکاتوش مدعی است که استدلال فوق را هر ریاضی‌دانی می‌پذیرد در حالی‌که نمی‌توان آن را به‌زبان صوری برگرداند. یک صورتگرا احتمالاً نباید چنین برهان‌هایی را بپذیرد. از سوی دیگر، لاکاتوش ادعا می‌کند که اثباتی ممکن است کاملاً صوری باشد اما هیچ‌کس را قانع نکند. او برای حدس اویلر، برهان دیگری می‌آورد. برهانی صوری به این ترتیب: دستگاهی صوری بسازید که فقط شامل یک اصل موضوع باشد. این اصل را A بنامید. این دستگاه تنها یک قاعدهٔ استنتاج دارد: همهٔ اصول موضوعه، قضیه هستند. حال A را قضیهٔ اویلر تعبیر کنید. از نظر لاکاتوش این برهان دقیقترین اصول صورتگرایی را رعایت می‌کند اما آیا صورتگرا آن را می‌پذیرد؟! [۱۱]

نتیجه‌گیری و نقد

۱. اگر رویدادهایی را که در دهه‌های اخیر در فلسفهٔ ریاضی و فلسفهٔ علوم طبیعی رخ داده است مرور کنیم، در می‌یابیم که این دو به هم نزدیکتر شده‌اند. یعنی مثلاً فیزیک انتزاعی‌تر و ریاضیات تجربی‌تر ملاحظه شده‌اند.

مشاهده مسبوق به نظریه است. مفهوم مشاهده از عینیت محض فاصله گرفته و جنبه‌های ذهنی و انتزاعی آن بیش از پیش آشکار شده است. از سوی دیگر، خود اشیاء مورد بحث در فیزیک نظیر پوزیترون، کوارک، ریسمان و ... موجوداتی انتزاعی هستند که دیگر به مفهوم سنتی «مشاهده‌پذیر» نیستند و از لحاظ دسترس‌پذیری دست‌کمی از اشیاء ریاضی ندارند. مکانیک موجی تماماً بر پایهٔ تابعی موسوم به ψ است که به خودی خود هیچ نمود فیزیکی ندارد و کاملاً یک شیء ریاضی است.

همان‌طور که در این مقاله هم دیدیم، در فلسفهٔ ریاضی، نوعی تلقی تجربه‌گرایانه رواج یافته است. شهود ریاضی اهمیت یافته و بر صورتگرایی صِرف چیره شده است. نقل‌قولی که از گودل آوردیم موید همین نکته است. از اشیاء ریاضی نیز ادراکی مانند ادراک حسی داریم.

۲. فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش محل بحث بوده است. مثلاً ففرمن ده نقد بر آن وارد کرده است [۱۶]. تصور می‌کنم اگر بناست فلسفهٔ یک علم توضیحی از نحوهٔ تکامل و پیشرفت آن ارائه کند، چنان‌که ظاهراً لاکاتوش چنین قصدی دارد (به هر حال او مدعی «منطق اکتشاف ریاضی» است)، آنگاه باید دید که این فلسفه چگونه کشف هندسه‌های نااقلیدسی را توضیح خواهد داد. با استناد به شواهد تاریخی که از [۱۸] می‌آورم می‌خواهم نشان دهم در این‌که فلسفهٔ لاکاتوش در این مورد موفق باشد، می‌توان تردید کرد.

تلاش‌های مکرر ریاضیدانان در طول بیش از دو هزار سال برای اثبات اصل پنجم به‌وسیلهٔ سایر اصول، ناکام ماند. تا این‌که ساکری (۱۶۶۷—۱۷۳۳) و لامبرت (۱۷۲۸—۱۷۷۷) تصمیم گرفتند با برهان خلف عمل کنند. آن‌ها نقیض اصل توازی را به سایر اصول افزودند و کوشیدند تناقضی به‌دست آورند. این دو اگرچه هرگز تناقضی نیافتند، اما قادر نبودند این نتیجه را بپذیرند. در واقع آن‌ها بدون آن‌که خود بدانند هندسهٔ نااقلیدسی را کشف کرده بودند. بنابراین آن‌ها هیچ شهود پیش‌صوری از آنچه به‌دست می‌آوردند، نداشتند. چنین نبود که حدس زده باشند هندسهٔ دیگری ممکن است و آنگاه در صدد اثبات آن برآیند. حتی برای گاوس هم مسأله از این قرار بود: «همهٔ تلاش‌های من برای یافتن یک تناقض یا ناسازگاری در این هندسهٔ نااقلیدسی به شکست انجامیده است.»

لاکاتوش می‌گوید یک شاخه از ریاضیات ابتدا به‌وسیلهٔ برهان‌های نادقیق و غیرصوری ساخته می‌شود و در مرحلهٔ بعد، در جستجوی صوری‌کردن آن به‌وسیلهٔ یک دستگاه اصل موضوعی بر می‌آییم. اما به نظر می‌رسد کشف هندسه‌های نااقلیدسی چنین الگویی ندارد. هندسهٔ نااقلیدسی در مقابل سرسختی و انکار کاشفانش، سال‌ها پس از این که کشف شد، سرانجام پذیرش خود را به همه تحمیل کرد.

۳. باید توجه داشت که فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش بیشتر روش‌شناسی است تا یک فلسفهٔ ریاضی تمام‌عیار، زیرا در آن، مسائل هستی‌شناختی ریاضی، ماهیت این اشیاء و مسائلی از این دست، بسیار کمرنگ هستند و در انتقادهای او به صورتگرایی خلاصه می‌شوند.

۴. نتیجهٔ آخر این‌که ریاضیات و فلسفه به یکدیگر وابسته‌اند. چنان‌که فرگه گفته است: «فیلسوفی که ریاضیات نداند نیمی از یک فیلسوف است و ریاضی‌دانی هم که فلسفه نداند نیمی از یک ریاضی‌دان.»

تشکر و سپاس:

از استادانم آقایان دکتر محمد اردشیر از دانشکدهٔ ریاضی و دکتر امیر احسان کرباسی‌زاده از گروه فلسفهٔ علم دانشگاه صنعتی شریف به‌خاطر خواندن مقاله، بحث‌ها و راهنمایی‌های ارزشمندشان سپاسگزارم و برای ایشان آرزوی بهروزی می‌کنم.

مراجع

[1] Larvor, Brendan, *Lakatos: An Introduction*, Routledge, London, 1998.

[2] Lakatos, Imre, *Falsification and Methodology of Scientific Research Programs*, Cambridge University Press, 1978.

[3] Polya, George, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University press, 1990.

[4] Lakatos, Imre, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1979.

[5] Brown, Robert, *Philosophy of Mathematics*, Routledge, London, 1999.

[6] Lakatos, Imre, *Cauchy and the Continuum, (Philosophical Papers)*, Cambridge University Press, 1978.

[7] P. Benacerraf and H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1983.

[8] Quine, Willard. O, *Two Dogmas of Empiricism*, in: "From a Logical Point of View", Harvard University Press, 1953.

[9] Quine, Willard. O, *Methods of Logic*, Routledge and Kegan Paul, (1974).

[10] Lakatos, Imre, *A Renaissanse of Empricism in the Recent Philosophy of Mathematics?, (Philosophical Papers)*, Cambridge University Press, 1978.

[11] Lakatos, Imre, *What Does a Mathematical Proof Prove?, (Philosophical Papers)*, Cambridge University Press, 1978.

[12] Lakatos, Imre, *Infinite Regress and Foundations of Mathematics, (Philosophical Papers)*, Cambridge University Press, 1978.

[۱۳] پوپر، کارل، منطق اکتشاف علمی، سید حسین کمالی، علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۷۰.

[۱۴] افلاطون، دورهٔ کامل آثار افلاطون (جلد اول)، محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی، تهران، ۱۳۶۷.

[۱۵] لاکاتوش، ایمره، اثبات ریاضی چیست؟ (دیدگاه‌ها و برهان‌ها، شاپور اعتماد، نشر مرکز، تهران، ۱۳۷۵.

[۱۶] اردشیر، محمد، نقد ففرمن بر فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی،شمارهٔ ۲۷، تهران، پاییز ۱۳۸۰.

[۱۷] گودل، کرت، مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟، ضیاً موحد، نشر ریاضی، مرکز نشر دانشگاهی، سال دوم شمارهٔ ۱، تهران، ۱۳۶۸.

[۱۸] گرینبرگ، ماروین، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، م. ه. شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.

احسان سیاوشی

دانشگاه ملایر، گروه ریاضی

پست الکترونیک: siavashi.e@gmail.com