فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۹ (بهار ۱۳۹۱) صص. ۱ تا ۲۲

هندسه و توپولوژی در بعدهای ۳ و ۴ از دیدگاه نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن (۱)

حامد فرهادپور

تقدیم به استاد گرامی دکتر احمد شفیعی ده‌آباد

چکیده

این مقالهٔ دو قسمتی که قسمت دوم آن در شمارهٔ بعدی به چاپ خواهد رسید کوششی است برای بیان بخشی از تاریخچه، کاربردها و چشم‌اندازهای نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های سه و چهار بعدی.

۱. انقلابی در ریاضیات

در پاییز سال ۱۹۹۴، ناتان زایبرگ[1] و ادوارد ویتن[2] انقلابی در ریاضیات به پا کردند. آن‌ها ضمن کار بر روی نظریه‌های پیمانه‌ای فرامتقارن[3]، به یک سری معادلات دیفرانسیل پاره‌ای دست یافتند که طبق روال فیزیک‌دانان باید همان نتایج نظریهٔ دانلدسن[4] را به ارمغان می‌آورد. قبلاً ویتن نشان داده بود که نظریهٔ دانلدسن مدلی به‌صورت نظریهٔ میدان کوانتومی[5] دارد. در واقع زایبرگ و ویتن با شمردن جواب‌های این معادلات روی یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار مثل X، به نگاشت $SW_X : \mathrm{Spin}^c(X) \to \mathbb{Z}$ رسیدند که یک ناوردای دیفرانسیلی برای خمینه‌های ۴ ـ بعدی به‌دست می‌دهد. دو مزیت ویژهٔ نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن نسبت به نظریهٔ دانلدسن باعث شد که در همان بدو

1) Natan Seiberg 2) Edward Witten 3) Supper Symmetric Gauge Theories 4) Simon Donaldson 5) Quantum Field Theory

پیدایش مورد اقبال بزرگان ریاضی قرار گیرد: یکی این‌که گروه پیمانه‌ای[۱] در این نظریه، یعنی $U(1)$ بر خلاف گروه‌های پیمانه‌ای در نظریهٔ دانلدسن یعنی $SU(2)$ و $SO(3)$، گروهی است آبلی و این خاصیت، تحلیل‌های مورد نیاز را به‌نحو قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر می‌کند. دوم این‌که فضای پیمانه‌ای[۲] جواب‌های این معادلات نیز بر خلاف فضای پیمانه‌ای در نظریهٔ دانلدسن فشرده است و این ویژگی از بروز بسیاری از مشکلات تکنیکی جلوگیری می‌کند. این دو خاصیت برای اهل فن، آن قدر بااهمیت است که ویتن این نظریه را رویکردی ساده به نظریهٔ دانلدسن می‌نامد و تاوبز[۳] عقیده دارد که کار با این نظریه دست‌کم هزار برابر ساده‌تر از کار با نظریهٔ دانلدسن است. در فاصلهٔ زمانی چند ماه، به‌کمک این نظریه، اثبات‌هایی کوتاه‌تر و ساده‌تر از نتایج پیشرفتهٔ دانلدسن، به‌ویژه مشهورترین قضیهٔ وی راجع به قطری‌شدن ماتریس فرم تقاطعی که در ادامهٔ مطلب به آن اشاره شده است، ارائه شد.

لازم به ذکر است که خاستگاه فیزیکی نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن، مقالات [49] و [50] و شروع ریاضی آن در مقاله مشهور ویتن [62] با عنوان Monopoles and Four Manifolds است. در واقع ویتن در این مقاله به بیان و شرح معادلات و ناورداها و ویژگی‌های بنیادی آن‌ها روی خمینه‌های ۴ ـ بعدی و ارتباط آن با نظریهٔ دانلدسن می‌پردازد. در مدت کوتاهی پس از شروع نظریه، پیشرفت‌های نسبتاً چشمگیری در مطالعهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی حاصل شد. برخی از انگاره‌های کلاسیک مانند انگارهٔ توم[۴] و تعمیم‌های آن، جواب داده شد و برای بعضی ازانگاره‌ها که قبلاً اثبات شده بود، مانند انگارهٔ وان دون[۵] برهان‌های ساده‌تری ارائه گردید. دیری نپایید که تاوبز، این نظریه را روی خمینه‌های همتافته[۶] مورد مطالعه قرار داد ([54]، [55] و [56]). وی علاوه بر محاسبهٔ ناورداها، آن‌ها را به‌صورت شمردن خم‌های شبه‌هولومورف[۷] نیز تعبیر کرد ([57]، [58] و [59]).

امروزه کاربردهای این نظریه، طیف وسیعی از دیگر حوزه‌های ریاضی و فیزیک مانند هندسهٔ جبری، هندسهٔ کهلری[۸]، هندسهٔ مختلط، هندسهٔ ریمانی، هندسه و توپولوژی همتافته و سایا[۹]، توپولوژی دیفرانسیل، نظریهٔ ریسمان[۱۰]، نظریهٔ M و حتی نظریهٔ پرلمان[۱۱] (که منجر به اثبات انگارهٔ هندسی‌سازی ترستن[۱۲] و به‌دنبال آن انگارهٔ توپولوژیک پوانکاره در حالت ۳ ـ بعدی شد) را در بر می‌گیرد. اخیراً نیز تاوبز با مطالعهٔ معادلات زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های سایای ۳ ـ بعدی تکلیف انگارهٔ ونشتین[۱۳] را یکسره کرد. انگاره‌ای وسوسه‌انگیز که به‌مدت تقریباً سی سال ریاضیدانان را درگیر خود کرده بود ([60] و [61]).

بیان معادلات و ناورداهای زایبرگ ـ ویتن و ویژگی‌های بنیادی آن‌ها نیاز به پیش‌نیازهای تکنیکی از هندسهٔ اسپینی[۱۴]، کلاس‌های مشخصه[۱۵] و آنالیز سرتاسری[۱۶] دارد که خارج از حوصلهٔ

---

1) Gauge Group 2) Moduli Space 3) Clifford Henry Taubes 4) Rene Thom
5) A. Van de Ven 6) Symplectic 7) Psedu-Holomorphic Curves 8) Kahler 9) Contact
10) String Theory 11) G. Preleman 12) Thurstone's Geometrization Conjecture
13) Alan Weinstein 14) Spin Geometry 15) Characteristic Classes 16) Global Analysis

این مقاله است، خواننده علاقه‌مند می‌تواند به مراجع پایان مقاله به‌ویژه [5]، [19]، [20]، [25]، [32]، [47]، [63] و [64] مراجعه کند

۲. بعد چهارم

می‌توان گفت تا سال ۱۹۸۱ میلادی برخلاف ابعاد دیگر، هیچ پیشرفت چشمگیری در شناخت خمینه‌های ۴ ـ بعدی صورت نگرفته بود اگرچه این خمینه‌ها کاربردهای کلیدی خود را دست‌کم در نظریهٔ نسبیت به اثبات رسانده بودند. تا این‌که در این سال، فریدمن[1] یک رده‌بندی کامل از خمینه‌های ۴ ـ بعدی توپولوژیک همبند ساده ارائه داد [10]. اما خیلی زود دانلدسن نشان داد که خمینه‌های ۴ ـ بعدی هموار دارای جهانی بکرتر می‌باشند و هندسهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی بسیار پیچیده‌تر از توپولوژی آن‌ها است [4].

پیش از فریدمن، در سال ۱۹۵۲ رخلین[2] نشان داده بود اگر خمینهٔ هموار X دارای فرم تقاطعی[3] زوج باشد، نشان[4] آن همواره مضربی از عدد ۱۶ خواهد بود [14]. همچنین میلنور نشان داد که به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ وایتهد[5] دو خمینهٔ توپولوژیک ۴ ـ بعدی هم‌ارز هوموتوپیک هستند اگر و تنها اگر دارای یک فرم تقاطعی باشند. حال فرم مثبت معین داده شده توسط ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$E_{۸} := \begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}_{۸\times ۸}$$

$E_{۸}$ دارای نشان ۸ است و بنابر قضیهٔ رخلین، نمی‌تواند نشان دهندهٔ فرم تقاطعی هیچ خمینهٔ هموار ۴ ـ بعدی باشد. از طرف دیگر بر اساس دیاگرام دینکین[6]، می‌توان یک خمینهٔ توپولوژیک ۴ ـ بعدی موسوم به خمینهٔ $E_{۸}$ ارائه داد به‌طوری که فرم تقاطعی آن $E_{۸}$ باشد. به زبان ساده، خمینهٔ ۴ ـ بعدی توپولوژیکی وجود دارد که دارای هیچ ساختار هموار نمی‌باشد.

فریدمن [10] نشان داده است که خمینه‌های توپولوژیک ۴ ـ بعدی همبند ساده و بسته را می‌توان

1) Michael H. Freedman 2) V.A. Rochlin 3) Intersection Form 4) Signature
5) G. W. Whitehead 6) Dynkin

در حد همسانریختی به‌کمک فرم تقاطعی رده‌بندی کرد:

- برای یک فرم تقاطعی زوج دقیقاً یک ردهٔ همسانریختی از خمینه‌های ۴ـبعدی وجود دارد.
- برای یک فرم تقاطعی فرد دقیقاً دو رده وجود دارد که به‌کمک ناورداهای کربی ـ سای‌بنمن [1] از یکدیگر متمایز می‌شوند و حداکثر یکی از آن‌ها دارای نمایش هموار است.

اثبات انگارهٔ توپولوژیک پوانکاره در بعد ۴، نتیجه‌ای از کار فریدمن است، زیرا طبق مطالب اخیر، $H_2(M) = 0$ ایجاب می‌کند که M با S^4 همسانریخت باشد. کارهای فریدمن به چند حالت خاص دیگر (که در آن‌ها، گروه بنیادی غیربدیهی، اما هنوز به اندازهٔ کافی ساده است) نیز تعمیم داده شده است. اما در حالتی که گروه بنیادی بزرگ باشد، عملاً چیز زیادی در دست نیست. این نکته نیز قابل توجه است که به‌ازای هر گروه دارای نمایش متناهی [2] مثل G، یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار X وجود دارد به‌طوری که $\pi_1(X) = G$ و حتی گامف [3] نشان داده است که این خمینه را می‌توان همتافته [4] انتخاب کرد [13].

رده‌بندی خمینه‌های توپولوژیک به مسألهٔ رده‌بندی فرم‌های دوخطی متقارن تک ـ مدولار [5] تبدیل می‌شود. این مطلب نمونه‌ای قابل تأمل راجع به گذر از توپولوژی به جبر است. میلنور و هوس مولر [6] در [34] نشان دادند که فرم‌های نامعین را می‌توان به‌کمک رتبه و نشان و زوجیت [7] رده‌بندی کرد. در حد یکریختی، فرم‌های تقاطعی به این شرح هستند:

- اگر فرم نامعین و فرد باشد، به‌صورت $n[1] \oplus m[-1]$ است.
- اگر فرم نامعین و زوج باشد، به‌صورت $\pm 2nE_8 \oplus kH$ است (که در اینجا $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).
- اگر فرم معین باشد، تعداد زیادی حالت وجود دارد. از هر رتبه تعداد باپایان فرم وجود دارد که این تعداد نیز به‌سرعت رشد می‌کنند. برای نمونه، بیش از 10^{50} فرم معین متمایز از رتبهٔ ۴۰ وجود دارند. بنابراین رده‌بندی این حالت در عمل ناامید کننده است.

توجه کنید که طبق قضایای فریدمن، ردهٔ همسانریختی یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی جهت‌دار و بسته و همبند ساده توسط دو عدد صحیح (b_2, τ) یعنی دومین عدد بتی، نشان خمینه و همچنین زوجیت آن معین می‌شود.

از طرف دیگر، دانلدسن در [4] نشان داده است که فرم تقاطعی یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار در صورت معین بودن، به‌صورت یک ماتریس قطری با درایه‌های اصلی ۱ و ۱− است. در واقع دانلدسن این مطلب مهم را نیز نشان داده است که خمینهٔ توپولوژیک ۴ ـ بعدی ممکن است دارای تعداد نامتناهی ساختار هموار باشد. به‌زبان دیگر، فرم تقاطعی این قابلیت را ندارد که بین ساختارهای

1) Kirby-Siebenmann 2) Finitely Represented 3) R. E. Gompf 4) Symplectic
5) Unimodular 6) D. Husemoller 7) Parity

هموار تمایز ایجاد کند. به همین دلیل، برای تمایز گذاردن بین ساختارهای غیرهمسانریخت، باید چاره‌ای دیگر اندیشید. دانلدسن باالهام از کارهای تاوبز در رابطه با نظریهٔ اینستانتون[1]ها، نظریهٔ جدیدی بنا نهاد که به نظریهٔ دانلدسن شهرت یافت. به‌طور دقیق‌تر، وی با شمردن هموستارهایی مثل A روی یک کلاف با گروه ساختاری $SU(۲)$ یا $SO(۳)$ که جزء خودگان آن‌ها یعنی F_A^+ صفر می‌شود، یک ناوردای دیفرانسیلی موسوم به چندجمله‌ای دانلدسن برای خمینه‌های ۴ ـ بعدی هموار به‌دست آورد. او به همراه کرونهایمر[2] بسیار کوشیده‌اند تا تصویر روشنی از این نظریه را به جهان ریاضی و فیزیک عرضه کنند. شرح کامل ماجرا در [6] آمده است. نظریهٔ دانلدسن که از سنگین‌ترین نظریه‌های ریاضی به‌شمار می‌رود به مدت ۱۲ سال (از ۱۹۸۲ تا ۱۹۹۴) هندسه‌دانان را مشغول خود ساخت، اما علی‌رغم کارهای سنگین در این زمینه، پیشرفت‌های محدودی در شناخت خمینه‌های ۴ ـ بعدی هموار به ارمغان آمده است.

سرانجام با روی کار آمدن نظریهٔ بدیع زایبرگ ـ ویتن، پیشرفت‌های بیشتری در زمینهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی به‌وجود آمد. همچنین اکثر نتایج نظریهٔ دانلدسن به‌طور ساده‌تری اثبات شد. از جملهٔ این موارد می‌توان به مسألهٔ ساختارهای هموار ناهم‌ارز[3] در توپولوژی دیفرانسیل اشاره کرد. آغاز مطالعهٔ معنادار این مسأله به میلنور باز می‌گردد. او بود که نشان داد دقیقاً ۲۷ ساختار هموار ناهم‌ارز روی $S^۷$ وجود دارد. در بعد چهارم هیچ پیشرفتی در این زمینه حاصل نشد تا این‌که دانلدسن و تاوبز به این مسأله علاقه نشان دادند.

۳. ساختارهای هموار ناهم‌ارز

در توپولوژی هندسی، مویس[4] نشان داده است که هر خمینهٔ توپولوژیک با بعد کمتر یا مساوی ۳ دقیقاً یک ساختار هموار دارد. همچنین اسمیل[5] با استفاده از h ـ هم مرزی نشان داده است که در بعدهای بزرگتر یا مساوی ۵، هر خمینهٔ توپولوژیک یا اصلاً دارای ساختار هموار نیست یا این که حداکثر دارای تعداد متناهی ساختار هموار است. در بعد چهارم، وضع کاملاً متفاوت و شگفت‌انگیز است حتی برای فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۴$. بر خلاف دیگر ابعاد که $\mathbb{R}^n(n \neq ۴)$ها تنها دارای یک ساختار هموار می‌باشند، تاوبز نشان داده است که $\mathbb{R}^۴$ دارای تعداد ناشمارا ساختار اگزاتیک است. اگرچه چیگر[6] در [3] به‌کمک هندسهٔ ریمانی پیشرفته نشان داده است که هر خمینهٔ ۴ ـ بعدی فشرده حداکثر دارای تعداد شمارای نامتناهی ساختار هموار است، تاکنون هیچ موردی از خمینه‌های هموار ۴ ـ بعدی و فشرده با تعداد متناهی ساختار هموار ارائه نشده است. دو خمینهٔ هموار X و Y را نسبت به هم اگزاتیک گویند هرگاه همسانریخت بوده ولی وابرریخت نباشند. همچنین دو ساختار دیفرانسیل‌پذیر $S_۱$ و $S_۲$ روی خمینهٔ X را اگزاتیک گویند هرگاه نگاشت همانی $I_X : (X, S_۱) \to (X, S_۱)$ هموار نباشد.

1) Instanton 2) Peter Kronheimer 3) Exotic 4) E. Moise 5) Stephen Smale
6) Jeff Cheeger

پیداکردن ساختار اگزاتیک روی یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی همبند ساده و بسته با $b_۲$ کوچک یکی از مسائل جذاب و سابقه‌دار در توپولوژی دیفرانسیل می‌باشد. در این خصوص، **انگارهٔ هموار پوانکاره** را داریم که حاکی است اگر X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار بسته و هم‌ارز هموتوپی با $S^۴$ باشد، آن‌گاه لزوماً X با $S^۴$ و ابرریخت است.

اولین ساختار هموار ناهم‌ارز روی رویهٔ گویای $\mathbb{CP}^۲\#_n\overline{\mathbb{CP}^۲}$ وقتی در اواخر دههٔ هشتاد میلادی پیدا شد که دانلدسن نشان داد رویه‌ای موسوم به دولگاچف[1] با $\mathbb{CP}^۲\#_۹\overline{\mathbb{CP}^۲}$ همسانریخت است ولی وابرریخت نیست [6]. او برای این کار از ناورداهای خویش استفاده کرده است. خیلی زود فرایدمن[2] و مورگان[3]، اکنک[4] و وان‌دون در [38] با استفاده از نظریهٔ دانلدسن به معرفی خانواده‌ای نامتناهی از ساختارهای هموار ناهم‌ارز روی رویهٔ $\mathbb{CP}^۲\#_۹\overline{\mathbb{CP}^۲}$ پرداختند. کمی بعد، کاتشیک[5] در [18] و اکنک و وان‌دون در [39] با به‌کار بردن نظریهٔ پیمانه‌ای $SO(۳)$، یک ساختار هموار ناهم‌ارز روی $\mathbb{CP}^۲\#_۸\overline{\mathbb{CP}^۲}$ پیدا کردند که این بار رویه‌ای موسوم به بارلو[6] ظاهر گردید. پانزده سال گذشت و از ساختارهای هموار ناهم‌ارز خبری نشد تا این که پارک[7] در سال ۲۰۰۴ یک ساختارهموار ناهم‌ارز همتافته روی $\mathbb{CP}^۲\#_۷\overline{\mathbb{CP}^۲}$ بنا کرد [41]. این بار از نتایج تاوبز در هندسهٔ همتافته استفاده شد. علاوه بر این، پارک با استفاده از این مطالب، سومین ساختار هموار ناهم‌ارز را روی $\mathbb{CP}^۲\#_۸\overline{\mathbb{CP}^۲}$ معرفی کرد. همچنین در اینجا بود که ارتباط بین وجود ساختارهای همتافته و ساختارهای هموار ناهم‌ارز آشکار گردید. به‌دنبال آن، تحقیقات فینتاشل[8]، استرن[9]، پارک، اشتیپشیتز[10] و سابو[11] نشان داد که تعداد نامتناهی ساختارهموار ناهم‌ارز روی $\mathbb{CP}^۲\#_n\overline{\mathbb{CP}^۲}$ $(n = ۵, ٦, ۷, ۸)$ وجود دارد ([9]، [42]، [43] و [52]). در سال ۲۰۰٦ فینتاشل، دوگ پارک[12] و استرن [9] وجود یک خانواده نامتناهی از ساختارهای هموار ناهم‌ارز روی $\mathbb{CP}^۲\#_۳\overline{\mathbb{CP}^۲}$ را نشان دادند و سرانجام در سال ۲۰۰۷، اخمدوف[13] و دوگ پارک [1] و اسکات بالدریج[14] و پال کرک[15] [2] یکی از این ساختارهای هموار ناهم‌ارز را ارائه کردند. تاکنون مورد دیگری از ساختارهای هموار ناهم‌ارز اعلام نشده است.

از دیگر کاربردهای درخشان نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن، اثبات انگاره‌ای سابقه‌دار از رنه توم ریاضیدان و فیلسوف شهیر فرانسوی (۲۰۰۲–۱۹۲۳) و تعمیم‌های آن توسط کرونهایمر، مروکا، فینتاشل، استرن، مورگان، اژواج، سابو و تاوبز می‌باشد.

۴. مسألهٔ کمینه شدن گونه‌ها و انگارهٔ توم

اگرچه مطالعهٔ هندسه و توپولوژی رویه‌ها نسبتاً آسان است و به زمان گاوس برمی‌گردد، اما مسائل مربوط به نشاندن آن‌ها در خمینه‌های با بعد بالاتر بسیار مشکل‌اند.

1) Dolgachev 2) R. Friedman 3) John W. Morgan 4) C. Okonek 5) D. Kotschik 6) Barlow 7) Jongil. Park 8) R. Fintushel 9) R. Stern 10) A. Stipsicz 11) Zoltan. Szabo 12) Doug Park 13) A. Akhmedov 14) Scott. Baldridge 15) Paul Kirk

بررسی معنادار این موضوعات اساساً در حوزهٔ توپولوژی هندسی قرار می‌گیرد و با کارهای ویتنی[۱]، توم و میلنور شروع شده و تاکنون ادامه دارد. در این قسمت به بیان یکی از مسائل کمینه‌شدن گونه[۲]ها که نقش بسزای آن در مطالعهٔ خمینه‌های ۴ ـ بعدی به تجربه ثابت شده است، می پردازیم. برای این منظور، فرض کنید X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار فشرده و جهت‌پذیر باشد، گروه همولوژی $H_۲(X,\mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید و ردهٔ همولوژی $\alpha \in H_۲(X,\mathbb{Z})$ را اختیار کنید. طیف وسیعی از رویه‌های دو بعدی در X با گونه‌های مختلف و همچنین ساختارهای هندسی مختلف می‌توانند نمایندهٔ این ردهٔ همولوژی باشند. این امر واقعیتی از نظریهٔ کوبوردیسم توم است. حال فرض کنید Σ چنین نماینده‌ای با گونهٔ g باشد. با چسباندن دستوارهٔ[۳] مناسب کوچکی می‌توان به نمایندهٔ دیگری چون Σ با گونهٔ بزرگتر رسید. بنابراین نمی‌توان کران بالایی برای این گونه‌ها متصور شد، اما دلیلی ندارد که از کران پایین این گونه‌ها نپرسیم. در واقع هدف، پیدا کردن مقادیر تابع زیر است:

$$\begin{cases} MG : H_۲(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}\cup\{۰\} \\ MG(\alpha) := \min\{g \mid \text{همولوژی گونه رویه‌ای است که رده}\ \alpha\ \text{را نشان می‌دهد.}\} \end{cases}$$

حال توجه خود را به صفحهٔ تصویری مختلط، یعنی $X = \mathbb{CP}^۲$ معطوف می‌کنیم. یک خم جبری Σ را در آن اختیار کنید و توجه داشته باشید که چنین خمی همواره وجود دارد و دارای درجه است. به‌زبان ساده، درجهٔ Σ تعداد دفعاتی است که خم، خط تصویری را قطع می‌کند. در توپولوژی جبری راه دیگری برای محاسبهٔ درجه وجود دارد: یک خم جبری نشانده شده در $\mathbb{CP}^۲$ را می‌توان به‌صورت نشانندهٔ هلومورف $i : \Sigma \to \mathbb{CP}^۲$ تعبیر کرد که در آن Σ یک رویهٔ ریمانی فشرده است. در این صورت درجهٔ خم جبری، عدد صحیح d است که

$$i_*(H_۲(\Sigma,\mathbb{Z})\ \text{کلاس بنیادی در}\ ) = d.(H_۲(\mathbb{CP}^۲,\mathbb{Z})\ \text{مولد})$$

در هندسهٔ جبری نشان داده می‌شود که گونهٔ یک خم جبری نشانده شده در $\mathbb{CP}^۲$ با درجهٔ d را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$g = \frac{(d-۱)(d-۲)}{۲}$$

توم عقیده داشت که اگر یک رویه و یک خم جبری در $H_۲(\mathbb{CP}^۲,\mathbb{Z})$ هم‌رده باشند، گونهٔ خم جبری کمتر از گونهٔ رویه دیگر است:

انگارهٔ توم: فرض کنید Σ یک رویهٔ هموار جهت‌دار نشانده شده در $\mathbb{CP}^۲$ با گونهٔ g باشد به‌طوری که ردهٔ همولوژی نمایش داده شده توسط آن با ردهٔ همولوژی یک خم جبری Σ' از درجهٔ d یکسان باشد، در این صورت: $g \geq \frac{(d-۱)(d-۲)}{۲} = g(\Sigma')$.

1) H. Whitney 2) Genus 3) Handle Attachment

تلاش‌های زیادی برای اثبات این انگاره صورت گرفت که تنها منجر به اثبات آن در حالت‌های $d = ۱, ۲, ۳, ۴, ٦$ و به‌دست آوردن نامساوی‌های ضعیف‌تر شد. مثلاً کرور[1] و میلنور آن را در حالت $d = ۳$ اثبات کردند [17]. لازم به ذکر است که مورگان انگارهٔ توم را به خمینه‌های ۴ ـ بعدی مختلط تعمیم داده است.

در کنگرهٔ جهانی ریاضیات سال ۱۹۸٦، کرونهایمر با استفاده از نظریهٔ دانلدسن برنامه‌ای را برای حمله به این مسأله در حالت کلی تدوین کرد. به‌طور دقیق‌تر، وی به مطالعهٔ معادلات اینستانتون روی $X - \Sigma$ با در نظر گرفتن تکینگی‌های احتمالی روی Σ پرداخت. این برنامه در سال‌های بعد توسط وی و مروکا[2] دنبال و منجر به نتایجی قابل قبول در حالت $b^+(X) \geq ۲$ گردید، مثلاً وقتی که $X = K_۳$. اما با توجه به این‌که $b^+(\mathbb{CP}^۲) = ۱$، نتایج آن‌ها برای انگارهٔ اصلی توم کارآمد نبود. شرح مبسوطی از این ماجراها شامل رهیافت‌ها و چالش‌ها در [21] و [22] و [24] آمده است.

هنوز چند ماهی از تولد نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن سپری نشده بود که راه باز شد و کرونهایمر و مروکا به‌کمک این نظریه به اثباتی برای انگارهٔ توم نایل شدند [23]. همچنین به‌موازات آن‌ها، فینتاشل و استرن نیز انگاره را در حالت خاص کره‌های ایمرسیون مجدداً به‌کمک نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن اثبات نمودند [7]. از طرف دیگر مورگان، سابو، کرونهایمر و مروکا با به‌دست آوردن یک فرمول ضربی[3] برای ناورداهای زایبرگ ـ ویتن، انگارهٔ تعمیم یافتهٔ توم را در حالتی که ردهٔ همولوژی دارای عدد تقاطعی[4] نامنفی باشد به اثبات رساندند [35]. سرانجام سابو انگاره را در کلی‌ترین حالت روی خمینه‌های همتافته و بدون در نظر گرفتن شرط اضافی روی عدد خودتقاطعی اثبات کرد [40]. در سال ۲۰۰۷ میلادی، کرونهایمر و مروکا و اژواچ[5] و سابو به‌پاس تلاش‌های مستمرشان در پیشبرد هندسه و توپولوژی به دریافت جایزهٔ وبلن[6] نایل آمدند. از دیگر کاربردهای نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن، مهار نسبی انگارهٔ لجام گسیختهٔ $\frac{۱۱}{۸}$ است: در سال ۱۹۸۲، انگاره‌ای موسوم به $\frac{۱۱}{۸}$ توسط ماتسوموتو[7] در [33] ارائه شد. صورت این انگاره چنین است:

انگارهٔ $\frac{۱۱}{۸}$: فرض کنید X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی اسپینی، همبند ساده و بسته باشد، در این صورت

$$\frac{b_۲(X)}{|\tau(X)|} \geq \frac{۱۱}{۸}$$

که در اینجا $b_۲(X)$ و $\tau(X)$ به‌ترتیب دومین عدد بتی X و نشان X را نمایش می‌دهند.

با توجه به این که برای رویهٔ $K_۳$ داریم $\frac{b_۲(K_۳)}{|\tau(K_۳)|} = \frac{۱۱}{۸}$، کران $\frac{۱۱}{۸}$ قابل تعویض با عدد بزرگتری نمی‌باشد. دانلدسن در چند حالت خاص به این انگاره پاسخ مثبت داده است. کرونهایمر نیز نتایج وی را تا حدی توسعه داده است. اما بیشترین پیشرفت‌ها در زمینهٔ اثبات این انگاره، از آن فاروتا[8] است. وی در [12] رابطهٔ $\frac{b_۲(X)}{|\tau(X)|} \geq \frac{۱۰}{۸}$ را با استفاده از معادلات زایبرگ ـ ویتن روی X به اثبات

1) M. Kervaire 2) Tomasz Mrowka 3) Product Formula 4) Self-Intersection Number
5) Peter Ozsvath 6) O. Veblen 7) Y. Matsumoto 8) M. Furuta

رسانیده است. پس از آن، تا زمان نگارش این مقاله، پیشرفت عمدهٔ دیگری در زمینه اثبات این انگاره صورت نگرفته است.
خالی از لطف نیست که بدانیم اثبات یا رد انگارهٔ $\frac{11}{8}$ چه نقشی در توپولوژی دیفرانسیل خمینه‌های ۴ ــ بعدی دارد. برای این منظور، فرض کنید X یک خمینهٔ ۴ ــ بعدی هموار، همبند ساده، بسته و جهت‌دار باشد. در این صورت با توجه به کارهای دانلدسن دو حالت تمیز می‌دهیم:

- **حالت اول:** اگر Q_X فرد باشد، آن‌گاه دارای نمایشی به‌صورت زیر است:

$$Q_X \simeq n[1] \oplus m[-1]$$

- **حالت دوم:** اگر Q_X زوج باشد، آن‌گاه یا Q_X بدیهی است، یعنی $H_2(X) = 0$ و یا این‌که دارای نمایشی به‌صورت زیر است:

$$Q_X \simeq \pm 2nE_8 \oplus kH \quad n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

پرسشی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا این نمایش‌ها مصداق واقعی پیدا می‌کند یا نه؟ توجه کنید که حالت اول به‌وسیلهٔ $X = (\#_n \mathbb{CP}^2)\#(\#_k \overline{\mathbb{CP}^2})$ محقق می‌شود. برای بررسی حالت دوم، سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

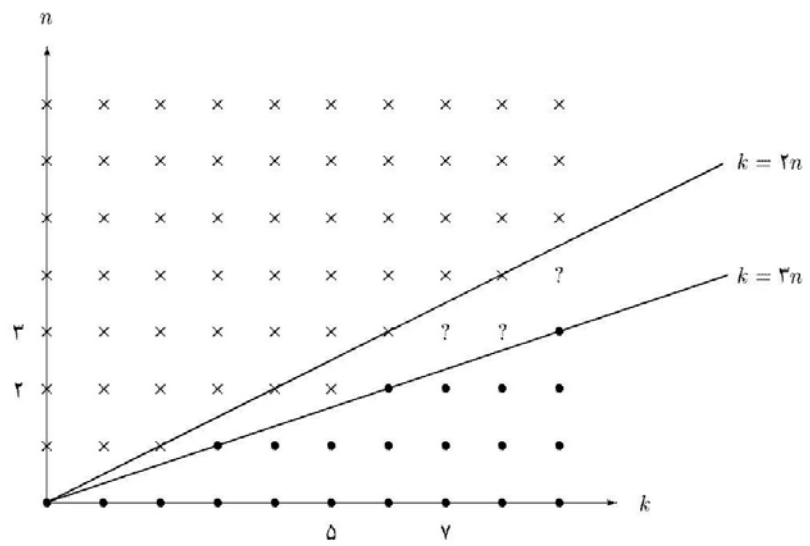
- (الف) $k \geq 3n$. در این حالت فرم‌های $\pm 2nE_8 \oplus kH$ توسط خمینه‌های $X = (\#_n K_3)\#(\#_{k-3n} S^2 \times S^2)$ با توجه به روابط $Q_{S^2 \times S^2} = H$ و $Q_{K_3} = -2E_8 \oplus 3H$ محقق می‌شوند.
- (ب) $k \leq 2n$. همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، فاروتا در راستای اثبات انگارهٔ $\frac{11}{8}$ با استفاده از نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن نشان داد که اگر X یک خمینهٔ ۴ ــ بعدی هموار همبند ساده باشد، داریم $\frac{b_2(X)}{|\tau(X)|} > \frac{10}{8}$. حال فرض کنید فرم $\pm 2nE_8 \oplus kH$ توسط چنین خمینه‌ای محقق شود، بنابراین

$$\frac{b_2(X)}{|\tau(X)|} = \frac{16n + 2k}{16n} > \frac{10}{8}$$

یا معادلاً $k > 2n$. با توجه به این مطلب، در حالت $k \leq 2n$ فرم $\pm 2nE_8 \oplus kH$ توسط هیچ خمینهٔ ۴ ــ بعدی محقق نمی‌شود.

- (پ) $2n < k < 3n$. این حالت از بقیه پیچیده‌تر است. فقط برای $(k, n) = (5, 2)$ می‌دانیم که فرم $\pm 2nE_8 \oplus kH$ توسط هیچ خمینهٔ هموار ۴ ــ بعدی محقق نمی‌شود. پروژه‌ای هم به رهبری استرن برای بررسی $(k, n) = (7, 3)$ شروع شده است. نکتهٔ قابل تأمل این است که در صورت درست بودن انگارهٔ $\frac{11}{8}$، به‌راحتی می‌توان نشان داد که این حالت برای هیچ خمینهٔ هموار ۴ ــ بعدی محقق نمی‌شود.

خلاصهٔ این مطالب را می‌توان در نموداری به‌صورت زیر نمایش داد. توجه کنید که علامت • حالاتی را نشان می‌دهد که فرم $\pm ۲nE_۸ \oplus kH$ می‌تواند توسط خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار محقق شود و علامت × حالاتی را نشان می‌دهد که این امر رخ نمی‌دهد. همچنین علامت ? مواردی را نشان می‌دهد که امید است با اثبات یا رد انگارهٔ $\frac{۱۱}{۸}$ جواب داده شود.



۵. جغرافیا و گیاه‌شناسی همتافته

فرض کنید زوج $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ داده شده است. می‌خواهیم بدانیم آیا خمینهٔ ۴ ـ بعدی بسته و همبند ساده‌ای چون X با یک ساختار هموار یا همتافته و یا مختلط یافت می‌شود به‌طوری که $(b_۲(X), \tau(X)) = (m,n)$ ؟ مطالعه روی چنین سؤالاتی در مورد رویه‌های مختلط توسط پرسون[1] در اوایل دههٔ هشتاد میلادی صورت گرفت [44]. در واقع، وی دو دستهٔ کلی از مسائل را تحت عناوین جغرافیای[2] مختلط و گیاه‌شناسی[3] مختلط مطرح کرد. به‌طور دقیق‌تر:

- **(جغرافیا)** همهٔ زوج‌های $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را پیدا کنید به گونه‌ای که متناظر با آن‌ها خمینه‌های ۴ ـ بعدی مختلط بستهٔ همبند ساده X چنان یافت شود که

$$(c_۱^۲(X), c_۲(X)) = (۳\tau(X) + ۲\chi(X), \chi(X)) = (m,n)$$

در اینجا $c_۱$ و $c_۲$ و χ به‌ترتیب اولین و دومین کلاس چرن و شاخص اویلر X را نشان می‌دهند.

---

1) P. Persson 2) Geography 3) Botany

- **(گیاه‌شناسی)** با تثبیت زوج $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، همهٔ خمینه‌های ۴ ــ بعدی مختلط بستهٔ همبند ساده X را پیدا کنید به‌طوری که

$$(c_1^2(X), c_2(X)) = (m,n).$$

پیشرفت‌های صورت گرفته در این زمینه در [9]، [14] و [51] آمده است. طبق رده‌بندی کدیرا، خمینه‌های ۴ ــ بعدی مختلط با شرایط مذکور، همتافته نیز هستند. تعمیم این مسائل به حالت همتافته به‌صورت زیر انجام می شود:

- **(جغرافیای همتافته)** همهٔ زوج‌های $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ را پیدا کنید به گونه‌ای که متناظر با آن‌ها، خمینه‌های ۴ ــ بعدی همتافتهٔ بستهٔ همبند ساده X چنان یافت شود که

$$(b^2(X), \tau(X)) = (m,n).$$

- **(گیاه‌شناسی همتافته)** با تثبیت زوج $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، همهٔ خمینه‌های ۴ ــ بعدی همتافتهٔ بستهٔ همبند ساده X را پیدا کنید به‌طوری که

$$(b^2(X), \tau(X)) = (m,n).$$

گذار از هندسهٔ مختلط به هندسهٔ همتافته، همواره کار سختی بوده است و جغرافیا و گیاه‌شناسی همتافته نیز از این قاعده مستثنی نیستند. از مهم‌ترین ابزارهایی که تاکنون برای مطالعهٔ این سؤالات به‌کار رفته است می‌توان به این موارد اشاره کرد: نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن، جراحی گامف[1]، مدادهای لفشتز[2]، پوشش‌های شعبه‌دارشدهٔ همتافته[3]. به‌عنوان نمونه داریم [51]:

قضیه: اگر X یک خمینهٔ ۴ ــ بعدی مختلط بستهٔ همبند ساده و جهت‌پذیر باشد، آن‌گاه $c_1^2(X)=0$ یا $c_1^2(X)>0$ و $2\chi(X)-6\le c_1^2(X)\le 9\chi(X)$.

حال مجموعهٔ

$$D=\{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid m>0,\ 2n-6\le m\le 9n\}$$

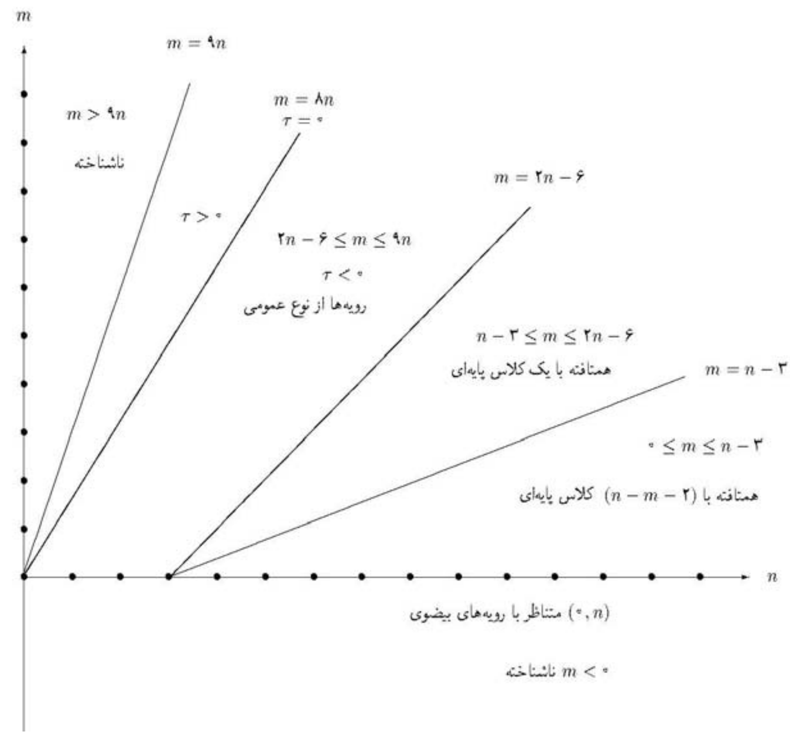
را در نظر بگیرید. اگرچه جغرافیا و گیاه‌شناسی این ناحیه کاملاً مشخص نشده است، اما اکثر نقاط D متناظر با رویه‌های بیضوی از نوع عمومی[4] هستند. برای نقاط خارج از D نیز نتایجی توسط اشتیپشیتز به دست آمده است [51].

1) Gompf Surgery 2) Lefschets Pencils 3) Symplectic Branched Covers
4) General Type

قضیه: متناظر با هر زوج $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ که $0 \leq m \leq 2n - 6$، خمینهٔ تحویل‌ناپذیری چون X وجود دارد به طوری که $(c_1^2(X), \chi(X)) = (m,n)$.

از مسائل باز در این زمینه، تعمیم یا رد نامساوی بوگومولو ـ میااکا ـ یائو[1] برای حالت همتافته است. طبق این نامساوی، برای هر رویهٔ مختلط X داریم $c_1^2(X) \leq 9\chi(X)$. خلاصهٔ تحقیقات در زمینهٔ جغرافیا و گیاه‌شناسی خمینه‌های ۴ ـ بعدی در شکل ۱ـ۱ آمده است (مرجع [9] را ببینید).

ردهٔ همولوژی دوبعدی $c \in H_2(X,\mathbb{Z})$ را یک کلاس پایه‌ای X گویند هرگاه ناورداهای زایبرگ ـ ویتن متناظر با آن ناصفر باشند.



شکل ۱: خلاصه تحقیقات در زمینه جغرافیا و گیاه‌شناسی خمینه‌های ۴ ـ بعدی [9]

۶. گذار از دیوار در بعد چهار

فرض می‌کنیم X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار و بسته باشد. دو حالت زیر را تمیز می‌دهیم: اول این‌که $b_2^+(X) > 1$. در این حالت، ناوردای زایبرگ ـ ویتن به متریک ریمانی روی X بستگی

1) Bogomolov-Miyaoka-Yau

ندارد. حالت دوم این که $b_2^+(X) = 0, 1$. در این حالت بستگی شدیدی بین متریک ریمانی روی X و ناوردای زایبرگ ــ ویتن وجود دارد. برای بررسی این وابستگی، نیاز به مفاهیمی چون ساختارهای حجره‌ای[1] و گذار از دیوار[2] و شارش طیفی[3] داریم. در این حالت، فضای متریک‌های ریمانی روی X یعنی $\mathfrak{Met}(X)$ را به‌طور مشخص، به حجره‌هایی تقسیم می‌کنند و فضای بین دو حجره را دیوار می‌نامند، مقدار ناوردا با گذار از دیوار، طبق فرمول‌های معینی موسوم به فرمول‌های گذار از دیوار، یک واحد کم یا زیاد می‌شود. بحث دقیقی از این مفاهیم در [31]، [36]، [37] و [47] آمده است.

۷. نظریهٔ چسباندن

چه در نظریهٔ دانلدسن و چه در نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن مسألهٔ‌ای کلی به این صورت مطرح می‌شود: فرض کنید خمینهٔ ۴ ــ بعدی X از چسباندن[4] دو خمینهٔ ۴ ــ بعدی X_1 و X_2 توسط خمینهٔ ۳ ــ بعدی M حاصل شده باشد. هدف، به‌دست آوردن اطلاعاتی راجع به X است در صورتی که اطلاعات مشابهی برای X_1 و X_2 در دست باشد. مثلاً می‌خواهیم بدانیم ناوردای زایبرگ ــ ویتن X چه ارتباط با ناوردای زایبرگ ــ ویتن X_1 و X_2 دارد. اولین تلاش برای مطالعهٔ این مسأله توسط ویتن در [62] صورت گرفته است. به‌ویژه وقتی که چسباندن به‌وسیلهٔ کرهٔ ۳ ــ بعدی صورت گرفته باشد، حاصل کار همان جمع همبند است که در این حالت قضایای صفر[5] به‌دست می‌آیند. بیان دقیق این مفاهیم نیاز به تعریف خمینه‌های با انتهای استوانه‌ای[6] و تعمیم معادلات و ناورداهای زایبرگ ــ ویتن روی این خمینه‌ها و ... دارد. شرحی از این ماجرا و همچنین کارهای انجام شده در این زمینه در [36]، [46] و [47] آمده است.

۸. کاربردها در هندسه کی‌لری

هندسهٔ کی‌لری در قلب هندسهٔ ریمانی، هندسهٔ مختلط و هندسهٔ همتافته قرار دارد، بنابراین از بدو پیدایش، مورد توجه اهالی هر یک از این سه حوزه قرار داشته است. بزرگانی چون وایل[7]، کدیرا[8]، کلابی[9]، یائو و گروموف در این زمینه به تحقیق پرداخته اند. نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن نیز با این هندسه بسیار سازگار است. به‌کمک این نظریه، بسیاری از کارهای قبلی در این زمینه به‌طور ساده‌تری اثبات و در برخی موارد نیز بهبود بخشیده شد. ویتن، تیان[10]، یائو، کرونهایمر، مروکا، موریسون[11]، فرایدمن، مورگان و لی برون[12] رهبری نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن را در این زمینه و زمینه‌های مرتبط به عهده دارند.

1) Chamber Structure 2) Wall-Crossing 3) Spectral Flow 4) Gluing 5) Vanishing Theorems 6) Manifolds With Cylindrical End 7) H. Weyl 8) K. Kodaira 9) Calabi 10) Gang Tian 11) Morison 12) Claude LeBrun

رده‌بندی رویه‌های کی‌لری توسط انریکو[1] و کدیرا صورت گرفت. کلید فهم این رده‌بندی، کلاف کانونیک و بُعد کدیرا است. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید X یک رویهٔ کی‌لری باشد. به این رویه، یک کلاف برداری $K_X = \bigwedge^{2,0} T^*X$ موسوم به کلاف کانونیک و عدد $Kod(X) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ موسوم به بُعد کدیرا نظیر می‌شود:

$$Kod(X) = \limsup_{m\to\infty} \frac{\log \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))}{\log m}$$

که در اینجا $\mathcal{O}_X(mK_X)$، شیف مقاطع هلومورف کلاف $K_X^{\otimes^m}$ و $H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ فضای مقاطع هلومورف سرتاسری $K_X^{\otimes^m}$ را نشان می‌دهد.

رویهٔ کی‌لری X را

- مینیمال گویند هرگاه نتوان هیچ کرهٔ هلومورف با عدد تقاطعی -1 در آن نشاند.
- خط‌کشی شده گویند هرگاه فضای تام یک S^2 ـ کلاف اصلی روی یک رویهٔ ریمانی باشد.
- بیضوی گویند هرگاه نگاشت هلومورف $f : X \to \mathbb{C}P^1$ با تارهای چنبره‌ای موجود باشد.

حال می‌توان رده‌بندی کدیرا و انریکو از رویه‌های کی‌لری را بیان کرد: اگر X یک رویه کی‌لری مینیمال باشد، آن‌گاه $Kod(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$. علاوه بر این

- $Kod(X) = -\infty$ اگر و تنها اگر $X = \mathbb{C}P^2$ یا X یک رویه خط‌کشی شده باشد.
- $Kod(X) = 0$ اگر و تنها اگر X توسط T^4 یا K_3 به‌طور متناهی پوشیده شود. در این حالت $c_1(K_X)$ تابدار است.
- اگر $Kod(X) = 1$، آن‌گاه X بیضوی است. همچنین $c_1(K_X)$ تابدار نیست و داریم $c_1(K_X).c_1(K_X) = 0$.
- اگر $Kod(X) = 2$، آن‌گاه $c_1(K_X) \cdot c_1(K_X) > 0$. چنین رویه‌هایی را از نوع کلی می‌نامند.

وان دون عقیده داشت که بُعد کدیرا برای رویه‌های کی‌لری ناوردایی است هموار، یعنی بُعد کدیرای دو رویهٔ کی‌لریِ وابرریخت، یکی است. این انگاره، سرانجام توسط فرایدمن و کین[1] با استفاده از معادلات اینستانتون اثبات گردید [11]. کمی بعد نیز کرونهایمر به‌کمک نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن اثبات ساده‌تری ارائه داد.

ویتن در [62] به بررسی معادلات زایبرگ ـ ویتن روی رویه‌های کی‌لری پرداخته و نشان داده است که در این حالت، معادلات همواره دارای جواب می‌باشند.

قضیه (ویتن): اگر X یک رویهٔ کی‌لری با شرط $b^+(X) > 1$ باشد، آن‌گاه ناوردای زایبرگ ـ ویتن X متناظر با ساختار $Spin^c$ ذاتی برابر ± 1 می‌باشد.

---

1) Enriques 2) Z. Qin

لازم به ذکر است که ویتن حالت $b^+(X) = 1$ را نیز به‌کمک فرمول‌های گذار از دیوار بررسی کرده است. علاوه بر این، ویتن نشان داده است که ناوردای زایبرگ ــ ویتن رویه‌های کی‌لری در حالتی که بُعد فضای پیمانه‌ای ناصفر است، متحد با صفر می‌باشد و این مطلب را در حالت کلی به‌صورت انگاره‌ای بیان کرده است. وی همچنین نشان داد که وجود جواب برای معادلات زایبرگ ــ ویتن، مانعی برای وجود متریک‌های ریمانی با خمیدگی عددی مثبت است.

همچنین لی برون در [26] با توجه به ارتباط بین معادلات زایبرگ ــ ویتن و خمیدگی عددی مثبت و همچنین با استفاده از رده‌بندی انریکو و کدیرا، قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه: فرض کنید X یک رویه کی‌لری می‌نیمال باشد. در این صورت سه گزاره زیر هم ارزند:

الف. X با $\mathbb{C}P^2$ یا یک رویه خط‌کشی شده وابرریخت است.

ب. X دارای یک متریک کی‌لری با خمیدگی عددی مثبت است.

ج. X دارای متریک ریمانی با خمیدگی عددی مثبت است.

۹. انگارهٔ ویتن

ویتن با توجه به شواهد و قرائن فیزیکی عقیده دارد که نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن و نظریهٔ دانلدسن با یکدیگر هم‌ارز هستند. بیان این هم‌ارزی علاوه بر نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن به پیش‌نیازهایی تکنیکی از نظریهٔ دانلدسن نیز احتیاج دارد و خارج از حوصلهٔ این بحث است. بدیهی است که تلاش برای اثبات این هم‌ارزی نیازمند تسلط کافی به هر دو نظریه است. پیسریجاچ[1] و تیورین[2] برنامه‌ای را برای اثبات این هم‌ارزی ترتیب داده‌اند [45]. پس از مدتی به ریاضیاتی بسیار سنگین نیاز پیدا شد. بنابراین پاول فیهان[3] و توماس لنز[4] نیز به این برنامه پیوستند و برنامه‌ای جدید را ترتیب دادند. در این برنامه، ایده‌هایی از جمله تعمیم نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن به گروه‌های پیمانه‌ای ناآبلی و بررسی عمیق‌تر ارتباط بین نظریهٔ یانگ ــ میلز و توپولوژی لحاظ شده است. پس از یک دهه کارهای سنگین انجام گرفته در راستای اهداف این برنامه، انگارهٔ ویتن توسط فیهان و لنز اثبات شد. توضیحات بیشتر راجع به این برنامه‌ها در [16] و [32] آمده است. همچنین واجیاک[5] رویکرد دیگری را در راستای اثبات این انگاره در پیش گرفته است.

۱۰. انگارهٔ نوع ساده

تمام کارهای انجام شده در زمینهٔ محاسبهٔ ناوردای زایبرگ ــ ویتن روی خمینه‌های ۴ ــ بعدی مؤید این مطلب است که در حالتی که بعد فضای پیمانه‌ای ناصفر است، ناوردای زایبرگ ــ ویتن صفر است. به‌عنوان نمونه، این مطلب روی خمینه‌های کی‌لری توسط ویتن و روی خمینه‌های همتافته توسط تاوبز تأیید گردیده است. این‌که این مطلب در حالت کلی درست است یا نه به انگارهٔ

1) V. Pidstrigatch 2) A. Tyurin 3) Paul M. N. Feehan 4) Thomas G. Leness
5) A. Vajiac

نوع ساده[1] شهرت یافته است. به جرأت می‌توان گفت که این انگاره در حال حاضر مهم‌ترین و البته سخت‌ترین انگاره در نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن است.

۱۱. انگارهٔ مینیمال

یک خمینهٔ هموار را تحویل‌ناپذیر گویند هرگاه نتوان آن را به‌صورت جمع همبند تعدادی خمینهٔ هموار نوشت مگر این‌که یکی از جمعوندها یک کره هموتوپی[2] باشد. منظور از کرهٔ هموتوپی خمینه‌ای است هم‌ارز هموتوپیک با کره. یک رویکرد طبیعی برای مطالعهٔ بهتر خمینه‌های ۴ ـ بعدی این است که در ابتدا به مطالعهٔ خمینه‌های تحویل‌ناپذیر بپردازیم. انگاره‌ای در این زمینه وجود داشت که به توم نسبت داده می‌شد، اگرچه وی خود را از این انگاره مبری می‌دانست:

هر خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار و همبند ساده را می‌توان به‌صورت جمع همبند تعدادی رویهٔ مختلط نوشت.

این انگاره توسط گامف و مروکا نقض شد. مثال‌های نقض آن‌ها و مثال‌های نقض دیگر، دارای ساختار همتافته بودند. این نکته و همچنین این مطلب که خمینه‌های تحویل‌پذیر دارای ناوردای زایبرگ ـ ویتن صفر می‌باشند، با توجه به ناصفر بودن ناوردای زایبرگ ـ ویتن برای خمینه‌های همتافته این انگاره را به تاوبز القا کرد که خمینه‌های همتافته عناصر ساختمانی خمینه‌های ۴ ـ بعدی همبند ساده هستند. این انگاره به انگارهٔ مینیمال شهرت یافت:
انگاره مینیمال: هر خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار همبند ساده را می‌توان به‌صورت جمع همبند تعدادی خمینهٔ همتافته نوشت.

چندی بعد سابو با ساختن یک خمینهٔ تحویل‌ناپذیر و غیرهمتافته، این انگاره را رد کرد [53]. کمی بعد از سابو، خانواده‌ای از این مثال‌های نقض توسط فینتاشل و استرن ارایه شد [8]. توضیحات بیشتر راجع به انگارهٔ مینیمال در مقالهٔ توصیفی [19] آمده است. برخلاف انگارهٔ هندسی‌سازی ترستن که توسط پرلمان اثبات شد و تجزیه‌ای از خمینه‌های ۳ ـ بعدی فشرده به اجزای شناخته شده‌تر را پیش روی ما می‌نهد، تاکنون هیچ انگاره‌ای در راستای شناسایی خمینه‌های ۴ ـ بعدی فشرده و هموار دوام نیافته است؛ به‌جز عقیده‌ای مبهم مبتنی بر این‌که چنین خمینه‌ای دارای تعداد نامتناهی ساختار هموار غیروابرریخت است. این عقیده به انگارهٔ وحشی[3] شهرت یافته است.

۱۲. کاربردها در هندسهٔ ریمانی

کاربردهای نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن در هندسهٔ ریمانی بسیار وسیع‌تر از آن است که بتوان در این نوشتار به آن پرداخت. درخشان‌ترین دستاوردها در این حوزه از آنِ لی برون است. شرح این ماجراها در مراجع [26]، [27]، [28]، [29]، [30] و [48] آمده است.

1) Simple Type 2) Homotopy Sphere 3) Wild Conjecture

یکی از موضوعات مورد علاقه در هندسهٔ ریمان بررسی ارتباط بین خمیدگی و توپولوژی یک خمینهٔ ریمانی است. خمینهٔ ریمانی (X, g) را در نظر بگیرید. شاید ساده‌ترین خمیدگی، خمیدگی عددی وابسته به متریک ریمانی g، یعنی $S_g : M \to \mathbb{R}$ باشد. طبیعی است که این سؤال را مطرح کنیم: کدام خمینه‌های فشرده و همبند ساده دارای متریک ریمانی با خمیدگی عددی مثبت هستند؟ لیشنروویچ[1] یک مانع ساده برای این مطلب پیدا کرد: اگر X یک خمینهٔ اسپینی ۴ ــ بعدی، فشرده، جهت‌دار و مجهز به متریک ریمانی با خمیدگی عددی مثبت باشد، آن‌گاه $\tau(X) = 0$.

گروموف[2] و لاوسن[3] با استفاده از کارهای لیشنروویچ، نظریهٔ جراحی و هم‌مرزی اسپینی، موفق به ارائهٔ توصیفی کامل از خمینه‌های فشرده و همبند ساده با خمیدگی عددی مثبت در ابعاد بزرگ‌تر یا مساوی ۵ شدند [15]. در واقع ایشان این امر مهم را نشان دادند که در بعدهای بالا، وجود متریک با خمیدگی عددی مثبت بیشتر به توپولوژی خمینه مربوط است تا هندسهٔ آن. ولی در بعد چهارم، اوضاع وارونه است. به‌عنوان نمونه، ویتن [62] نشان داد اگر X یک خمینهٔ ۴ ــ بعدی فشرده با خمیدگی عددی مثبت باشد، آن‌گاه ناورداهای زایبرگ ــ ویتن آن صفرند، یعنی $SW_X \equiv 0$. این، یک مانع برای وجود متریک‌های با خمیدگی عددی مثبت ارائه می‌دهد که به ساختار هموار X بستگی دارد و نه فقط به توپولوژی آن. با توجه به این مطلب، می‌توان نشان داد که تعداد زیادی از خمینه‌های ۴ ــ بعدی فشرده شامل همهٔ رویه‌های جبری فشرده، متریک با خمیدگی عددی مثبت نمی‌پذیرند. بنابراین با توجه به نتایج ویتن در هندسهٔ کی‌لری و در حالت کلی‌تر نتایج تاوبز در هندسهٔ همتافته، می‌توان نشان داد که خمینه‌های همتافته دارای متریک با خمیدگی عددی مثبت نیستند.

مراجع

[1] A. Akhmedov and D. Park, *Exotic smooth structures on small 4-manifolds*, preprint(2007), math.GT/0701664.

[2] S. Baldridge and P. Kirk, *A symplectic manifold homeomorphic but not diffeomorphic to* $\mathbb{CP}^2\#_3\overline{\mathbb{CP}^2}$, preprint(2007), math.GT/0702211.

[3] J. Cheeger, "Finiteness theorems for Riemannian manifolds", *Amer. J. Math*, **92**(1970), 61-74.

[4] S. K. Donaldson, "An application of gauge theory to four-dimensional topology", *J. differential Geom.*, **18**(1983), no. 2, 279-315.

[5] S. K. Donaldson, "The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology", *Bull. AMS*, **33**(1996), no. 1, 45-70.

1) A. Lichnerowicz 2) Michael Gromov 3) H. B. Lawson

[6] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford Science Publications, NewYork, 1990.

[7] R. Fintushel and R. Stern, "Immersed spheres in 4-manifolds and the immersed Thom conjecture", *Turkish J. of Math.*, **19**(1995), 145-157.

[8] R. Fintushel and R. Stern, "Knots, links, and 4-manifolds". *Invent. Math.*, **134**(1998), 363-400.

[9] R. Fintushel and R. Stern, *Six lectures on four 4-manifolds*, preprint(2007), math.GT/0610700.

[10] M. Freedman, "On the topology of 4-manifolds", *J. differential Geom.*, **17**(1982), 357-454.

[11] R. Friedman and Z. Qin, "The smooth invariance of the Kodaira dimension of a complex surface", *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 369-376.

[12] M. Furuta, "The Monopole Equations and the 11/8 conjecture", *Math. Res. Letters*, **8**(2001), 279-291.

[13] R. E. Gompf, "A new construction of symplectic manifolds", *Ann. of Math.*, **142** (1995), 527-595.

[14] R. E. Gompf and A. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics (20), Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[15] M. Gromov and H. B. Lawson, "The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature", *Ann. of Math.*, **111**(1980), 423-434.

[16] K. Iga, "What do topologists want from Seiberg-Witten theory?" *International Journal of Modern Physics, A.*, **17**(2002), no. 30, 4463-4514.

[17] M. Kervaire and J. Milnor, "On 2-spheres in 4-manifolds", *Proc. Nat. Acad. Science, USA.*, **47**(1961), 1651-1657.

[18] D. Kotschick, "On manifolds homeomorphic to $\mathbb{CP}^{2} \#_{8} \overline{\mathbb{CP}^{2}}$", *Invent. Math.*, **95**(1989), 591-600.

[19] D. Kotschick. *The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifold (after C. H. Taubes)*, Seminaire Bourbaki, No. 812, 4, 195-220, 1997 .

[20] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Monopoles and Three-Manifolds*, Cambridge University Press, 2007.

[21] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "Gauge theory for embedded surfaces I", *Topology*, 32(1993), no. 4, 773-826.

[22] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "Gauge theory for embedded surfaces II", *Topology*, **34**(1995), no. 1, 37-97.

[23] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "The genus of embedded surfaces in the projective plane", *Math. Res. Lett.*, **1**(1994), 797-808.

[24] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "Embedded surfaces and the structurer of Donaldson's polynomial invariants", *J. differential Geom.*, **41**(1995), 573-.

[25] B. Lawson and M. Michelson, *Spin geometry*, Princeton University Press, 1989.

[26] C. LeBrun, "On the scalar curvature of complex surfaces", *Geom. Funct. Anal.*, **5**(1995), 619-628.

[27] C. LeBrun, "Einstein metrics and Mostow rigidity", *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 1-8.

[28] C. LeBrun, "Polarized 4-manifolds, extremal kahler metrics, and Seiberg-Witten theory", *Math. Res. Lett.*, 2(1995), 653-662.

[29] C. LeBrun, "Four-manifolds without Einstein metrics", *Math. Res. Lett.*, **2** (1996), 133-147.

[30] C. LeBrun, "Yambe constants and the Seiberg-witten perturbed equations", *Comm. An. Geom.*, **5**(1997), 535-553.

[31] T. J. Li and A. Liu, "General wall crossing formula", *Math. Res. Lett.*, **2** (1995),797-810.

[32] M. Marcolli, *Seiberg-Witten gauge theory*, Texts and Readings in Mathem vol. 17, Hindustan Book Agency, New Delhi, 1999.

[33] Y. Matsumoto, "On the bounding genus of homology 3-spheres", *J. Fac Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **29**(1982), 287-318.

[34] J. W. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[35] J. W. Morgan, Z. Szabo and C. H. Taubes, "A product formula for the Seiberg-Witten invariants and the generalized Thom conjecture", *J. differential Geom.*, **44**(1996), 706-788.

[36] L. I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten Theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 28, Amer. Math. Soc., 2000.

[37] C. Okonek and A. Teleman, "Seiberg-Witten invariants for manifolds with $b_+ =$ ۱, and the universal wall crossing formula", *Int. J. Math.*, **7**(1996), 811-832.

[38] C. Okonek and A. Van deVen, "Stable bundles and differentiable structures on certain elliptic surfaces", *Invent. Math.*, **86**(1986), 357-370.

[39] C. Okonek and A. Van de Ven, " -type-invariants associated to PU(2)- bundles and the differentiable structure of Barlow's surface", *Invent. Math.*, **95**(1989), 601-614.

[40] P. Ozsvath and Z. Szabo, "The symplectic Thom conjecture",*Ann. of Math.*, **151**(2000), 93-124.

[41] J. Park, "Non-complex symplectic 4-manifolds with $b_۲^+ =$ ۱", *Bull. London Math. Soc.*, **36**(2004), 231-240.

[42] J. Park, "Simply connected symplectic 4-manifolds with $b_۲^+ =$ ۱ and $c_۱^۲ =$ ۲", *Invent. Math.*, **159**(2005), 657-667.

[43] J. Park, A. Stipsicz and Z. Szabo, "Exotic smooth structures on $\mathbb{CP}^۲ \#_۵ \overline{\mathbb{CP}^۲}$", *Math. Res. Lett.*, **12**(2005), 701-712.

[44] U. Persson, "Chern invariants of surfaces of general type", *Compositio Mathematica*, **43**(1981) 3-58.

[45] V. Pidstrigatch and A. Tyurin, *Localisation of the Doanldson's invariants along Seiberg-Witten classes*, dg-ga/9507004.

[46] P. Safari, *A gluing theorem for Seiberg-Witten moduli spaces.* Ph.D thesis, Columbia Univerity, 2000.

[47] D. A. Salamon, *Spin Geometry and Seiberg-Witten invariants*, to appear in Birkhauser-Verlag.

[48] A. Sambusetti, *Einstein manifolds, volume rigidity and Seiberg Witten theory*, Seminaire de theorie spectrale et geometrie, Grenoble, **17**(1999), 163-184.

[49] N. Seiberg and E. Witten, "Electro-magnetic duality, monopole condensation and connementin N = 2 supersymmetric Yang-Mills theory", *Nucl. Phys. B*, **426**(1994), 19-52.

[50] N. Seiberg and E. Witten, "Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N = 2 supersymmetric QCD", *Nucl. Phys. B*, **431**(1994), 485-550.

[51] A. Stipsicz, "The geography problem of 4-manifolds with various structures", *Acta Math. Hungar.*, **7**(2000), 267-278.

[52] A. Stipsicz and Z. Szabo, "An exotic smooth structure on $\mathbb{CP}^{۲}\#_{۶}\overline{\mathbb{CP}^{۲}}$", *Geom. Topol.*, **9**(2005), 813-832.

[53] Z. Szabo, "Simply connected irreducible 4-manifolds with no symplectic structures", *Invent. Math.*, **132**(1998), 457-466.

[54] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms", *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 809-822.

[55] C. H. Taubes, "More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten in variants", *Math. Res. Letters*, **2**(1995), 9-13.

[57] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten and the Gromov invariants", *Math. Res. Letters*, 221(1995).

[58] C. H. Taubes, "SW $\Rightarrow$ Gr: from the Seiberg-Witten equations to pseudo holomorphic curves", *J. Amer. Math. Soc.*, **9**(1996), 845-918.

[59] C. H. Taubes, "Gr $\Rightarrow$ SW: from pseudo-holomorphic curves to Seiberg-Witten solutions", *J. Diff. Geom.*, 51(1999) 203-334.

[60] C. H. Taubes, "Gr = SW : Counting curves and connections", *J. Diff. Geom.*, **52**(1999), 453-609.

[61] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture", *Geometry and Topology*, **11**(2007), 2117-2202.

[62] C. H. Taubes. *The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture II: More closed integral curves for the Reeb vector field*, Preprint(2007), arxiv. Math/0702366 V2.

[63] E. Witten, "Monopoles and four-manifolds", *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 769-796.

[۶۴] پدرام صفری، نظریه زایبرگ ـ ویتن چیست؟ نشر ریاضی، سال ۱۲، شماره ۱ و ۲، صفحه ۱۱ـ۴.

[۶۵] سید محمد باقر کاشانی، خمینه های چهاربعدی، نشر ریاضی، سال ۶، شماره ۱ و ۲، صص ۸ ـ ۱۲.

حامد فرهادپور
پژوهشگاه دانشهای بنیادی، پژوهشکده ریاضیات
hfarhadpour@ipm.ir