فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۰ (پاییز ۱۳۹۱) صص. ۱ تا ۲۶

هندسه و توپولوژی در بعدهای ۳ و ۴ از دیدگاه نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن (۲)

حامد فرهادپور

تقدیم به استاد گرامی دکتر احمد شفیعی ده‌آباد

چکیده

در این مقاله، به‌دنبال قسمت اول آن که در شمارهٔ قبل به چاپ رسید، به بیان تاریخچه، کاربردها و چشم‌اندازهای نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن روی خمینه‌های ۳ و ۴ ــ بعدی می‌پردازیم. به‌ویژه، تأکید بیشتری بر کارهای خیره کنندهٔ تاوبز در هندسه و توپولوژی خمینه‌های همتافته و سایا یعنی هم‌ارزی ناوردای زایبرگ ــ ویتن و ناوردای گروموف روی خمینه‌های همتافته و همچنین اثبات انگارهٔ ونشتین توسط وی داریم.

۱. متریک‌های اینشتینی

به هر خمینهٔ ریمانی (X,g) یک عملگر خمیدگی R_g و به این عملگر، یک تانسور موسوم به تانسور ریچی نظیر می‌شود. در واقع، برای هر $u,v\in TX$، $Ric_g(u,v):=TraceR_g(u,.,v,.)$. اگر $u\in TX$ یک بردار یکه باشد، $Ric_g(u,u)$ را با $Ric_g(u)$ نمایش داده و به آن خمیدگی ریچی X در راستای بردار u گویند. متریک ریمانی g روی خمینهٔ هموار X را متریک اینشتینی گویند هرگاه $\lambda\in\mathbb{R}$ یافت شود که $Ric_g=\lambda g$ و علامت λ را علامت متریک اینشتینی می‌نامند. انحنای ریچی و متریک‌های اینشتینی به‌طور کاملاً طبیعی در هندسهٔ ریمانی و نظریهٔ گرانش ظاهر می‌شوند و یائو[1] برای اثبات انگارهٔ کالابی[2]، به مطالعهٔ آن‌ها در هندسهٔ مختلط پرداخت. بررسی این متریک‌ها

1) S. T. Yau 2) E. Calabi

در بعد ۴ بسیار پیچیده‌تر از دیگر ابعاد است.

همان‌طور که در قسمت قبل این مقاله ذکر شد، پس از پیدایش نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن، پیشرفت‌های جدیدی در زمینهٔ متریک‌های اینشتینی به‌ویژه مسألهٔ وجود و رده‌بندی آن‌ها در بعد ۴ توسط لی‌برون صورت گرفت. به‌عنوان نمونه، وی در [27] به اثبات قضیهٔ زیر پرداخته است:

قضیه خمینهٔ ۴ ـ بعدی هذلولوی مختلط بستهٔ $(X, g_\circ)$ را در نظر بگیرید. در این صورت هر متریک اینشتینی روی X با $g_\circ$ هموتتیک[1] است. همچنین توجه کنید که خمینهٔ ریمانی $(X, g_\circ)$ را یک خمینهٔ هذلولوی حقیقی گویند هرگاه انحنای مقطعی آن همواره برابر با -۱ باشد: $K(g_\circ) \equiv -۱$. همچنین منظور از خمینهٔ هذلولوی مختلط، یک خارج‌قسمت منظم[2] از فضای هذلولوی مختلط $H^n(\mathbb{C}) = \frac{U(n+۱)}{U(۱)\times U(n)}$ است. علاوه بر این‌ها، لی برون در [26] قضیهٔ عمیق زیر را نیز اثبات کرده است:

قضیه فرض کنید X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی هموار با شرط $b_۲^+(X) \geq ۲$ باشد و یک ساختار Spin^c روی X مثل $c = (\rho, S)$ یافت شود چنان‌که $SW_X(c) \neq ۰$. در این صورت، با قرار دادن $L := \det(S)$ موارد زیر را داریم:

الف) برای هر متریک g روی X داریم

$$\int_X S_g^۲ d\text{vol} \geq ۳۲\pi^۲ c_۱^+(L)^۲.$$

ب) با فرض $c_۱^+(L) \neq ۰$، تساوی

$$\int_X S_g^۲ d\text{vol} = ۳۲\pi^۲ c_۱^+(L)^۲$$

برقرار است اگر و تنها اگر ساختار مختلط J روی X چنان یافت شود که

- ساختار Spin^c القایی از J همان ساختار فرض قضیه باشد؛
- g یک متریک با انحنای اسکالر ثابت باشد که با توجه به J کی‌لری است.

پ) تساوی $\int_X S_g^۲ d\text{vol} = ۳۲\pi^۲ c_۱(L)^۲$ برقرار است اگر و تنها اگر g علاوه بر دو شرط قسمت (ب)، اینشتینی نیز باشد.

تذکر $c_۱^+(L)$ تصویر $c_۱(L)$ روی فضای دوفرمی‌های هارمونیک و خود دوگان یعنی $\mathcal{H}^{\in,+}(\mathcal{X})$ را نشان می‌دهد.

لی‌برون در [27] نشان داده است که تعداد زیادی از خمینه‌های هموار ۴ ـ بعدی دارای متریک

---

1) Homotetic 2) Regular Quotient

اینشتینی نیستند. مدتی بعد سامبوستی[1] با پیدا کردن یک مانع برای وجود چنین متریک‌هایی نشان داد که اکثر خمینه‌های ۴ ـ بعدی متریک اینشتینی نمی‌پذیرند [52]. توضیحات بیشتر راجع به این مباحث در [24]، [25]، [26]، [27]، [28] و [51] آمده است.

۲. ناورداهای یامابه

در سال ۱۹۶۰ یامابه[2] در راستای مطالعهٔ متریک‌های اینشتینی به یک ناوردای دیفرانسیلی روی خمینه‌های ریمانی دست یافت که بعدها توسط کوبایاشی دنبال و به ناوردای یامابه مشهور گردید. فرض می‌کنیم M یک خمینهٔ n ـ بعدی $(n \geq ۳)$ فشرده باشد و تابعگون انحنای اسکالر کلی نرمال شده[3] را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \mathfrak{S} : \mathfrak{Met}(M) \to \mathbb{R} \\ \mathfrak{S}(g) = vol(g)^{\frac{(۲-n)}{۲}} \int_M s_g dvol \end{cases}$$

که در اینجا $\mathfrak{Met}$ فضای همه متریک‌های ریمانی روی M را نشان می‌دهد. بسه[4] نشان داد که متریک‌های اینشتینی روی M دقیقاً همان نقاط بحرانی تابعگون $\mathfrak{S}$ هستند [3]. به‌کمک این تابعگون می‌توان ناوردای دیفرانسیلی حقیقی ـ مقدار یامابه را به خمینهٔ M وابسته کرد:

$$\mathcal{Y}(M) := \sup_{\Upsilon} \inf_{g \in \Upsilon} \mathfrak{S}(g),$$

که در اینجا sup روی همهٔ کلاس‌های همدیس[5] متریک‌های ریمانی گرفته شده است:

$$\Upsilon = [h] = \{uh | u : M \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{R}^+\}.$$

پتیان[6] در سال ۲۰۰۰ نشان داد که اگر M یک خمینهٔ ریمانی همبند ساده با بعد حداقل ۵ باشد، آن‌گاه $\mathcal{Y}(M) \geq ۰$ [48]. با کمی تلاش می‌توان ثابت کرد که $\mathcal{Y}(M) > ۰$ اگر و تنها اگر M دارای متریک با انحنای اسکالر مثبت باشد. بنابراین با توجه به کار پتیان می‌توان گفت در ابعاد بزرگتر یا مساوی ۵ همهٔ خمینه‌های هموار همبند ساده لزوماً دارای متریک ریمانی با خمیدگی اسکالر مثبت هستند. بعد چهارم، در اینجا نیز ساز مخالف می‌زند. به‌عنوان نمونه، لی‌برون در [28] با استفاده از معادلات زایبرگ ـ ویتن نشان داد که تعداد زیادی از خمینه‌های ۴ ـ بعدی همبند ساده وجود دارند که ناوردای یامابهٔ آن‌ها منفی است. علاوه بر این، وی با استفاده از قضایای تاوبز در هندسهٔ

1) A. Sumbusetti 2) H. Yamabe 3) Normalized total scalar curvature 4) A. Besse
5) Conformal 6) J. Petean

همتافته ثابت کرد که خمینه‌های ۴ ـ بعدی مانند M با شرط $\mathcal{Y}(M) < ۰$ وجود دارند که دارای فضای پوششی متناهی $\tilde{M}$ با شرط $\mathcal{Y}(\tilde{M}) > ۰$ می‌باشند.

۳. $\overline{\lambda}$ ـ ناورداهای پرلمان

پرلمان هنگام مطالعاتش روی شار ریچی[1] به ناوردایی دیفرانسیلی برای خمینه‌های هموار موسوم به $\overline{\lambda}$ ـ ناوردا دست یافت. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید که X یک خمینهٔ هموار فشردهٔ n ـ بعدی ($n \geq ۳$) باشد. متریک ریمانی g روی X را اختیار کرده و عملگر بیضوی $S_g + ۴\Delta_g$ را در نظر می‌گیریم که در اینجا $\Delta_g = d^*d$ عملگر لاپلاس ـ بلترامی[2] وابسته به g را نمایش می‌دهد. کمترین مقدار ویژهٔ عملگر $S_g + ۴\Delta_g$ را با λ_g نمایش می‌دهیم. با کمی زحمت می‌توان نشان داد که λ_g برحسب معادلات ریلی[3] به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda_g = \inf_u \frac{\displaystyle\int_X (S_g u^۲ + ۴|\Delta u|^۲) d\mathrm{vol}}{\displaystyle\int_X u^۲ d\mathrm{vol}},$$

که در اینجا inf روی همهٔ توابع حقیقی هموار u روی X گرفته شده است. پرلمان نشان داد که کمیت $\lambda_g v_g^{\frac{۲}{n}}$ تحت شارش ریچی پایاست. در اینجا v_g حجم کلی (X, g) است. این امر، وی را به تعریف ناوردای دیفرانسیلی زیر موسوم به $\overline{\lambda}$ ـ ناورداهای پرلمان رهنمون ساخت:

$$\overline{\lambda} := \sup_g \lambda_g v_g^{\frac{۲}{n}},$$

که sup روی همهٔ متریک‌های ریمانی هموار g روی X گرفته شده است. آکوتاگاوا[4]، ایشیدا[5] و لی‌برون به بررسی ارتباط ناورداهای پرلمان و ناورداهای یامابه پرداخته‌اند و ثابت کردند که:

قضیه: فرض کنید X یک خمینهٔ هموار فشرده n ـ بعدی ($n \geq ۳$) باشد. در این صورت

$$\overline{\lambda}(X) = \begin{cases} \mathcal{Y}(\mathcal{X}), & \mathcal{Y}(X) \leq ۰ \\ +\infty, & \mathcal{Y}(X) > ۰. \end{cases}$$

۴. نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های ۳ ـ بعدی

کرونهایمر و مروکا علاوه بر اثبات انگارهٔ توم، نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن را بر خمینه‌های ۳ ـ بعدی اعمال کردند. برای بررسی این نظریه برای خمینهٔ ۳ ـ بعدی M، کافی است به بررسی معادلات

1) Ricci Flow   2) Laplace-Beltrami   3) Raleigh   4) K. Akutagawa   5) M. Ishida

زایبرگ ــ ویتن روی خمینه‌های ۴ ــ بعدی $M \times S^1$ یا $M \times \mathbb{R}$ بپردازیم. آن‌ها همچنین نشان دادند که جواب‌های این معادلات موسوم به تک‌قطبی‌ها را می‌توان به‌صورت نقاط بحرانی یک تابعگون به‌نام تابعگون چرن ــ سایمونز ــ دیراک تعبیر کرد. این خاصیت که در بعد ۴ روی نمی‌دهد، کرونهایمر و مروکا را به‌سوی نوعی همولوژیِ فلور موسوم به زایبرگ ــ ویتن رهنمون شد. مشابه حالت ۴ ــ بعدی، آن‌ها به معرفی ناورداهای زایبرگ ــ ویتن روی خمینه‌های ۳ ــ بعدی پرداختند. برای خمینهٔ ۳ ــ بعدی M این ناوردا به‌صورت نگاشت $SW_M : \mathrm{Spin}^c(M) \to \mathbb{Z}$ تعریف می‌شود. دیری نپایید که بسیاری از تحقیقات در توپولوژی در ابعاد پایین به این قسمت معطوف شد. شرح مفصلی از این ماجراها در کتاب [21] آمده است.

۵. ناورداهای کسون ــ والکر و انگاره کرونهایمر

در سال ۱۹۸۵، کسون[1] یک ناوردا برای خمینه‌های ۳ ــ بعدی با همولوژی کروی ارائه داد. شرح جالبی از این مطلب در [53] آمده است. هفت سال بعد، یکی از دانشجویان دکتری وی به نام والکر[2] این ناوردا را به خمینه‌های ۳ ــ بعدی با همولوژی کروی گویا تعمیم داد. حاصل کار را ناوردای کسون ــ والکر می‌نامند. همچنین بر اساس کارهای یوهان لیم[3] برای مطالعهٔ ناورداهای زایبرگ ــ ویتن، تعریف این ناوردا به همهٔ خمینه‌های ۳ ــ بعدی قابل توسیع است ([29]). نکتهٔ مهمی که در مورد ناوردای زایبرگ ــ ویتن $SW_M : \mathrm{Spin}^c(M) \to \mathbb{Z}$ باید به آن توجه شود، این است که در حالت $b_1(M) \geq 2$، مقدار این ناوردا به ساختار ریمانی خمینهٔ M و همچنین جملهٔ اختلالی موجود در معادلهٔ خمیدگی بستگی ندارد. اما در حالت $b_1(M) = 0, 1$ ارتباط عمیقی بین ساختار ریمانی روی M و مقدار ناوردا وجود دارد. در این حالات به کمک فرمول‌های گذر از دیوار[4]، مقدار ناوردا قابل محاسبه است ([30]).

کرونهایمر بر اساس محاسبهٔ ناوردای زایبرگ ــ ویتن و ناوردای کسون برای کلاسی از خمینه‌های ۳ ــ بعدی با همولوژی کروی موسوم به خمینه‌های بریسکورن[5]، متوجه مساوی بودن این دو ناوردا در این حالت شد و انگارهٔ خویش را به‌صورت زیر بیان کرد:

انگارهٔ کرونهایمر ناوردای زایبرگ ــ ویتن برای خمینه‌های ۳ ــ بعدی با همولوژی کروی با ناوردای کسون یکی است.

لیم ([29]) به این انگاره جواب مثبت داد. در واقع، او به‌کمک ایده‌های تاوبز در مورد ارتباط ناوردای کسون با نظریهٔ پیمانه‌ها و همچنین کارهای منگ و تاوبز در ارتباط با ناوردای

1) A. Casson 2) K. Walker 3) Y. Lim 4) Wall-crossing formula 5) Brieskorn

زایبرگ ـ ویتن و تاب میلنور [38]، نشان داد که ناوردای زایبرگ ـ ویتن در دو اصل که ناوردای کسون را به‌صورت یکتا مشخص می‌کنند، صدق می‌کند. بد نیست توجه کنید که کمی قبل از لیم، ویمین شن[1] تساوی این دو ناوردا را به پیمانهٔ ۲ ارائه داده بود ([6]).

٦. فرمول‌های گذر از دیوار

همان‌طور که در قسمت قبل بیان شد، ناوردای زایبرگ ـ ویتن در حالتی که $b_1(M) = 0, 1$ باشد به متریک ریمانی روی M بستگی دارد. مشابه حالت ۴ ـ بعدی فضای متریک‌های ریمانی روی M را می‌توان به‌صورت حجره[2]هایی افراز کرد. با گذر از دیوار و رفتن از حجره‌ای به حجره دیگر، مقدار ناوردا تغییر می‌کند. فرمول‌هایی که مقدار این تغییر را به‌دست می‌دهند به فرمول‌های گذر از دیوار مشهور هستند و به‌دست آوردن آن‌ها مستلزم استفاده از مفهوم شارش طیفی است. لیم در [30] این فرمول‌ها را در هر دو حالت $b_1 = 0$ و $b_1 = 1$ به‌دست آورده است.

کمی بعد، نیکولاس[3] با به‌دست آوردن ناوردای زایبرگ ـ ویتن برای یک کلاس از خمینه‌های با همولوژی کروی گویا[4] موسوم به فضاهای عدسی، متوجه شد که مقدار این ناوردا را می‌توان به کمک دو ناوردای کسون ـ والکر و تاب رایدماستر[5] به‌دست آورد ([45]). او درست بودن تعمیم این مطلب به خمینه‌های ۳ ـ بعدی با همولوژی کروی گویا را به‌صورت پرسشی مطرح کرد و چندی بعد به اثبات آن پرداخت ([46]). جزئیات بیشتر راجع به این مطالب در [41]، [42] و [43] آمده است. به‌موازات وی، ماتیلده مارکولی[6] و بای لینگ ونگ[7] در [36] به بررسی ارتباط بین ناوردای زایبرگ ـ ویتن و ناوردای کسون ـ والکر پرداختند.

۷. کاربردها در هندسهٔ سایا

کرونهایمر و مروکا در [22] به تعریف معادلات و ناوردای زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های ۴ ـ بعدی مرزدار و فشرده پرداختند که مرز آن‌ها یک خمینهٔ ۳ ـ بعدی سایا است. توجه کنید که ناوردای تعریف شده در این حالت، مقادیر خود را در یک گروه همولوژی موسوم به گروه زایبرگ ـ ویتن فلور همولوژی اتخاذ می‌کند. آن‌ها در این مقاله به بررسی ارتباط بین نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن و کارهای الیاشبرگ[8] و ترستن در رابطه با ساختارهای سایای تایت[9] و برگ‌بندی[10]

1) Weimin Chen 2) Chamber 3) Liviu I. Nicolaesco 4) Rational homology sphere
5) K. Reidemeister 6) Matilde Marcoli 7) Bai-Ling Wang 8) Yakov Eliashberg
9) Tight 10) Foliation

خمینه‌های سایا و همچنین نرم ترستن و رویه‌های نشانده شده در خمینه‌های ۳ ـ بعدی پرداخته‌اند. به‌عنوان نمونه، یکی از قضایای آن‌ها را بیان می‌کنیم. قبل از آن، توجه کنید که خمینهٔ سایای (M,ξ) را به‌طور همتافته پرشدنی گویند هرگاه خمینهٔ همتافته‌ای چون (X,ω) و وابرریختی $\varphi : M \to \partial X$ چنان یافت شود که $\varphi^*(\omega)|_\xi$ همواره مثبت باشد. کرونهایمر و مروکا با توسعه کارهای تاوبز به روی خمینه‌های همتافتهٔ مرزدار، قضیهٔ زیر را ثابت کردند:

قضیه فرض کنید M یک خمینهٔ جهت‌دار ۳ ـ بعدی باشد. در این صورت، حداکثر تعداد متناهی کلاس هموتوپی از ساختارهای سایا روی M وجود دارد به‌طوری که هر کلاس حداقل دارای یک ساختار سایای به‌طور همتافته پرشدنی باشد.

لیسکا[1] و ماتیک[2] در [32] به‌کمک بررسی خمیدگیِ عددی روی خمینهٔ مرزدار X به محاسبهٔ ناوردای زایبرگ ـ ویتن روی X پرداختند. در واقع، آن‌ها نشان دادند ناوردای زایبرگ ـ ویتن روی خمینهٔ ۴ ـ بعدی X با مرز سایا در دو حالت زیر صفر است:

- یکی از مؤلفه‌های همبندی ∂X دارای متریک با خمیدگی عددی مثبت باشد.
- $b_۲(X) = ۰$.

علاوه بر این، لیسکا به‌کمک نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن اولین مثال از خمینه‌های سایای ۳ ـ بعدی بدون ساختار به‌طور همتافته پرشدنی را ارائه داد ([31]).

۸. رویه‌های نشانده‌شده در خمینه‌های ۳ ـ بعدی و نرم ترستن

مشابه حالت ۴ ـ بعدی می‌توان مسألهٔ بررسی رویه‌ها در خمینه‌های ۳ ـ بعدی را نیز مطرح کرد. یکی از ابزارهای مهم در مطالعهٔ این دسته از مسائل، مفهومی به نام نرم ترستن است ([63]). کرونهایمر و مروکا با استفاده از معادلات زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های سایا، کران‌هایی برای نرم ترستن به‌دست آوردند ([23]). قبل از هر چیز، بهتر است به تعریف این نرم بپردازیم.

تعریف فرض کنید M یک خمینه ۳ ـ بعدی فشرده و جهت‌دار باشد و ردهٔ همولوژی $\sigma \in H_۲(M,\mathbb{Z})$ را اختیار کنید. نرم ترستن σ را با $||\sigma||$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$||\,.\,|| : H_۲(M,\mathbb{Z}) \to [۰,+\infty)$$
$$||\sigma|| := \min_S\{\textstyle\sum_{S_\alpha} ۲g(S_\alpha) - ۲\}.$$

در اینجا min روی همهٔ رویه‌های نشانده شده در M که ردهٔ σ را نمایش می‌دهند، گرفته شده است.

1) P. Lisca 2) G. Matic

S_αها نیز مؤلفه‌های S با گونهٔ حداقل یک را نشان می‌دهند. همچنین نرم ترستن دوگان[1] را روی $\alpha \in H^2(M,\mathbb{Z})$ با $||\alpha||^*$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$||\,.\,||^* : H^2(M,\mathbb{Z}) \to [0,+\infty)$$

$$||\alpha||^* := \sup_S \{\frac{<\alpha,[S]>}{2g(S)-2}\}$$

که در آن، sup روی همهٔ رویه‌های S همبند جهت‌دار نشانده شده در M گرفته شده است. با استفاده از روش‌های کرونهایمر و مروکا در اثبات انگارهٔ توم به‌کمک معادلات زایبرگ ـ ویتن، نتایج زیر توسط دیوید اکلی[2] به‌دست آمده است ([2]).

- اگر E یک کلاف خطی مختلط روی M باشد و ناورداهای زایبرگ ـ ویتن متناظر با آن ناصفر باشند، آن‌گاه برای هر $\sigma \in H_2(M,\mathbb{Z})$ داریم

$$||\sigma|| \geq \langle c_1(E),\sigma\rangle.$$

حتی می‌توان با شرط ضعیفتری نیز این نتیجه را به‌دست آورد.

- اگر E یک کلاف خطی مختلط با پایهٔ M باشد و معادلات زایبرگ ـ ویتن متناظر با آن دارای جواب باشند، در این صورت برای هر $\sigma \in H_2(M,\mathbb{Z})$ داریم

$$||\sigma|| \geq \langle c_1(E),\sigma\rangle.$$

این کران‌ها نقش مهمی در توپولوژی هندسی به‌ویژه در مطالعهٔ خمینه‌های سه بعدی با توجه به رویه‌های نشانده شده در آن‌ها بازی می‌کنند. کاربردهایی از این نرم در مراجع مذکور آمده است.

علاوه بر نرم ترستن، نرم دیگری موسوم به نرم الکساندر[3] نیز روی $H^2(M,\mathbb{Z})$ قابل تعریف است. مک‌مولن با روش‌های کاملاً هندسی نشان داده است که نرم الکساندر همواره کوچک‌تر از نرم ترستن است. استفان ویدوسی[4] نیز با توجه به کار تاوبز و منگ راجع به ارتباط بین ناوردای زایبرگ ـ ویتن و تاب میلنور، اثبات دیگری برای این نامساوی ارائه داده است ([44]).

۹. تاب میلنور

مفهوم تاب برای یک همبافت سادکی در دههٔ ۳۰ میلادی توسط فرانز[5] و رایدماستر برای مطالعهٔ فضاهای عدسی معرفی شد. فضاهای عدسی $L(p,q)$ که با ثابت نگاه‌داشتن p و تغییر q به‌دست می‌آیند، همگی دارای گروه‌های بنیادی و همولوژی یکسان می‌باشند. اگرچه همسانریخت

---

1) Dual Turstun norm 2) D. Auckly 3) Alexander 4) S. Vidussi 5) W. Franz

و حتی هم‌ارز هموتوپی نیستند. به‌کمک تاب می‌توان فضاهای لنز هم‌ارز هموتوپی ولی غیرهمسانریخت را از هم تمییز داد. علاوه بر این، می‌توان آن‌ها را با تقریب همسانریختی رده‌بندی کرد ([42]). این‌که تاب واقعاً چیست یا حتی چگونه محاسبه می‌شود، در [42] و [64] آمده است. از دیدگاه جبری، تاب تعمیمی از مفهوم دترمینان است. از دیگر زمینه‌هایی که تاب به‌طور طبیعی و عمده در آن‌ها ظاهر می‌شود، می‌توان به گروه‌های وایتهد و نظریهٔ جبری K اشاره کرد. شرح مبسوطی از این موارد نیز به قلم میلنور در [39] آمده است. با توجه به این که نوعی از تاب موسوم به R ـ تاب یا تاب میلنور را نیز خود وی معرفی کرده است. جالب است بدانیم که منگ و تاوبز پرده از ارتباطی عمیق بین تاب میلنور و ناوردای زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های ۳ ـ بعدی برداشتند. در واقع این دو با تعبیری مناسب یکی هستند [38]. این امر توجه توپولوژی‌دان‌ها را دوباره به مفهوم تاب معطوف کرد. به‌ویژه، ولادیمیر تورائف[1] که از دیرباز نیز به مطالعهٔ ارتباط چندجمله‌ای‌های الکساندر و تاب در نظریهٔ گره پرداخته بود ([64]). دانلدسن نیز به بررسی کارهای منگ و تاوبز از دیدگاه نظریه‌های میدان کوانتومی پرداخته است ([8]).

۱۰. همولوژی فلور

در نظریهٔ مورس می‌توان با مطالعهٔ نقاط بحرانی توابع مورس روی خمینه‌ها، به نتایج توپولوژیکی دست یافت. مثلاً می‌توان با انتساب یک همبافت زنجیری[2] به یک تابع مورس و محاسبهٔ گروه‌های همولوژی حاصل، به همان همولوژی معمولی خمینه رسید. دو رویکرد عمده به نظریهٔ مورس وجود دارد. یکی چسباندن دستواره[3] که در کتاب میلنور آمده است و دیگری مطالعهٔ شار گرادیان تابع مورس. روش اول اگرچه هندسی‌تر است اما قابل توسیع به خمینه‌های باناخ نامتناهی ـ بُعد نیست، اما روش دوم چنین قابلیتی را داراست. حاصل کار را معمولاً نظریهٔ مورس بی‌نهایت بعدی می‌نامند. نابغهٔ جوان، فلور[4]، برای اثبات انگارهٔ آرنولد و مطالعهٔ نظریهٔ اینستانتون متوجه این امر شد که جواب‌های معادلات اینستانتون در نظریهٔ دانلدسن را می‌توان به‌صورت نقاط بحرانی یک تابعگون روی فضای حالت تعبیر کرد. این امر، فلور را به خلق اثری ماندگار موسوم به همولوژیِ فلور روی خمینه‌های همبند ساده رهنمون گردید ([13]).

به‌دنبال وی، تاوبز به بیان نظریه در حالت کلی پرداخت. شرحی از این ماجرا به روایت دانلدسن در [9] آمده است. صرفنظر از جزئیات تکنیکی، تقریباً بناکردن همهٔ انواع همولوژی فلور دارای شمای کلی به‌صورت زیر هستند:

- **گام اول**: پیش از هر چیز احتیاج به یک فضای توپولوژیک S از اشیائی است که همولوژی

1) V. G. Turaev 2) Chain Complex 3) Handle Attachment 4) A. Floer

فلور آن‌ها قرار است تعریف شود، به همراه یک رابطهٔ هم‌ارزی روی S که هر کلاس هم‌ارزیِ آن، همبند مسیری باشد. همچنین یک کلاف تاری $\tilde{S} \overset{\Pi}{\to} S$ که تارهای آن همگی انقباض‌پذیرند و می‌توانند در صورت لزوم، ساختارهای کمکی را که در تعریف گروه همولوژی نیاز می‌شوندارائه دهند.

- **گام دوم:** به عنصر کلی X در یک کلاس هم‌ارزی در S و $\tilde{X} \in \Pi^{-1}(X)$، یک همبافت زنجیری آزاد مثل $(CF_*(\tilde{X}), \partial)$ نسبت داده می‌شود. این هبافت زنجیری به‌طور طبیعی $\mathbb{Z}/2$ ــ مدرج است. ولی در برخی موارد دارای یک همبافت $\mathbb{Z}$ ــ مدرج نیز هستیم. همولوژی وابسته به این همبافت را همولوژی فلور نامیده و با $HF_*(\tilde{X})$ نمایش می‌دهیم.
- **گام سوم:** برای تعریف دیفرانسیل در این همبافت، نیاز به یک جهت سراسری داریم که توسط یک جهت $O_{\mathfrak{p}}$ روی هر مولد $\mathfrak{p}$ از همبافت معین می‌شود. تعویض جهت $O_{\mathfrak{p}}$ باعث می‌شود که تمام ضرایب وابسته به $\mathfrak{p}$ که در تعریف دیفرانسیل ظاهر شده اند، تغییر علامت دهند. این امر باعث می‌شود که همولوژی حاصل، مستقل از انتخاب جهت سراسری باشد. با توجه به این مطلب، اگر همبافت زنجیری را دوباره توسط مولدهای $(\mathfrak{p}, O_{\mathfrak{p}})$ با رابطهٔ $(\mathfrak{p}, O_{\mathfrak{p}}) \sim -(\mathfrak{p}, O_{\mathfrak{p}})$ تعریف کنیم، می‌توان از انتخاب جهت سراسری نیز صرفنظر کرد.

حال فرض کنیم X_0 و X_1 دو شیء هم‌ارز کلی در S باشند و $\tilde{X}_i \in \Pi^{-1}(X_i)$ را انتخاب کرده‌ایم و فرض کنید $\Upsilon := \{X_t | t \in [0, 1]\}$ خمی‌از اشیاء هم‌ارز در $\tilde{S}$ باشد که X_0 را به X_1 وصل می‌کند. در این صورت، یک ترفیع نوعی از Υ در $\tilde{S}$ مثل $\tilde{\Upsilon}$ یافت می‌شود که $\tilde{X}_0$ را به $\tilde{X}_1$ وصل کرده و یک نگاشت زنجیری به‌صورت $\Phi(\tilde{\Upsilon}) : CF_*(\tilde{X}_0) \to CF_*(\tilde{X}_1)$ القا می‌کند که به نگاشت امتداد[1] موسوم و دارای سه خاصیت زیر است:

هموتوپی: دو خم هموتوپ $\tilde{\Upsilon}_0$ و $\tilde{\Upsilon}_1$ با نگاشت‌های زنجیری $\Phi(\tilde{\Upsilon}_0)$ و $\Phi(\tilde{\Upsilon}_1)$ یک هموتوپی زنجیری به‌صورت زیر القا می‌کنند:

$$\begin{aligned} K : \quad & CF_*(\tilde{X}_0) \to CF_{*+1}(\tilde{X}_1) \\ & \partial K + K\partial = \Phi(\tilde{\Upsilon}_0) - \Phi(\tilde{\Upsilon}_1) \end{aligned}$$

الحاق: اگر انتهای $\tilde{\Upsilon}_1$ و ابتدای $\tilde{\Upsilon}_0$ منطبق باشند، آن‌گاه $\Phi(\tilde{\Upsilon}_2\tilde{\Upsilon}_1)$ با $\Phi(\tilde{\Upsilon}_2)\Phi(\tilde{\Upsilon}_1)$ هموتوپ زنجیری است.

ثابت: اگر $\tilde{\Upsilon}$ خم ثابت باشد، آن‌گاه $\Phi(\tilde{\Upsilon})$ نگاشت همانی است. با توجه به این سه خاصیت، دیده می‌شود که اگر X_0 و X_1 هم‌ارز باشند، $HF_*(\tilde{X}_0)$ با $HF_*(\tilde{X}_1)$ یکسان است.

---

1) Continuation

این یکسانی در حالت کلی، طبیعی نیست اما با توجه به انقباض‌پذیری $\Pi^{-1}(X)$، می‌توان نشان داد که $HF_*(\tilde{X})$ تنها به X بستگی دارد. به همین دلیل، معمولاً آن را با $HF_*(X)$ نمایش می‌دهند.

به‌عنوان نمونه، می‌توان از همولوژی‌های فلور زیر یاد کرد:

- زایبرگ ـ ویتن فلور همولوژی؛
- هیگارد فلور همولوژی[1]؛
- فلور همولوژی گرهی[2]؛
- همولوژی سایای نشانده شده[3].

لازم به ذکر است که زایبرگ ـ ویتن فلور همولوژی در راستای کارهای کرونهایمر و مروکا، مارکولی و ونگ روی نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن، به‌وجود آمده است ([21] و [35]). هیگارد فلور همولوژی، توسط اژواچ و سابو معرفی گردیده است ([47]). همچنین همولوژی سایای نشانده‌شده را هاچینگ[4] در راستای کارهای مشترک با سالیوان[5] معرفی کرده است که در واقع، نسخه‌ای از همولوژی سایاست ([17]). انجام محاسبات در این سه همولوژی این انگاره را قوت بخشیده است که این سه همولوژی با هم یکسان هستند و بخشی از تحقیقات جاری در توپولوژی با بعدهای پایین روی این انگاره متمرکز شده است.

۱۱. همولوژی سایا

همولوژی سایا[6] در واقع بخشی از شاهکار الیاشبرگ، گیونتال[7] و هافر[8] یعنی نظریهٔ میدان همتافته[9] است [12]. در ادامه، فرض کنیم (M,ξ) نشان دهندهٔ یک خمینهٔ فشرده و جهت‌پذیر M با بعد $2n+1$ و مجهز به ساختار سایای ξ است. یکی از مسائل توپولوژی سایا تمییز دادن بین ساختارهای سایای روی خمینهٔ M است. به‌طور کلاسیک تعدادی ناوردا به ξ وابسته می‌شوند که بیشتر آن‌ها توپولوژیک هستند. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{T}=\{J:\xi\to\xi|J^{2}=-I, d\alpha(J.,J.)=d\alpha(.,.), d\alpha(.,J.)>0\}$$

که α فرم سایای وابسته به ξ است. $\mathcal{T}$ فضای ساختارهای تقریباً مختلط سازگار روی ξ را نشان می‌دهد. می‌توان نشان داد که این فضا ناتهی و انقباض‌پذیر است. کلاس چرن وابسته به کلاف

1) Heegaard Floer Homology 2) Knot Floer Homology 3) ECH (Embeded Contact Homology) 4) M. Hutchings 5) M. Sullivan 6) Contact Homology 7) Alexander. Givental 8) Helmut H. W. Hofer 9) Symplectic Field Theory

مختلط (ξ, J) یعنی $c(\xi)$ یکی از این ناورداهای توپولوژیک است. حال T^3 را اختیار کنید و روی آن ساختارهای سایای $\xi_n = \ker(\cos n\theta dx + \sin n\theta dy)$ را در نظر بگیرید. به‌کمک ناورداهای کلاسیک نمی‌توان این ساختارها را از هم تمییز دارد. مثلاً کلاس چرن همهٔ این ساختارها متحد با صفر است. این مسأله نیاز به ابزارهای پیشرفته‌تری دارد. مثلاً کاندا[1] در [18] یکی نبودن این ساختارها را نشان داده است. همولوژی سایا نیز به‌خوبی از عهدهٔ چنین کارهایی بر می‌آید. برای تعریف همبافت و دیفرانسیل در همولوژی سایا نیاز به مفاهیمی از دینامیک ریب، اندیس کونلی ـ زندر[2] و خم‌های تمامریخت در همتافته‌سازی M و ... وجود دارد که شرح آن‌ها در این مقال نمی‌گنجد. خم‌های شبه‌تمامریخت، اول بار توسط گروموف معرفی شده‌اند ([15]). ساخت فضای پیمانه‌ای از این خم‌ها در [49] آمده است. اما بررسی این خم‌ها به‌علت پیچیدگی رفتار آن‌ها به مدتی بعد موکول شد یعنی تا زمانی که هافر برای اثبات انگارهٔ ونشتین روی S^3 به مطالعهٔ آن‌ها پرداخت ([16]).

به‌عنوان چند کاربرد از همولوژی سایا، یادآور می‌شویم که آستیلووسکی[3] در [65] نشان داده است که روی S^{4k+1} بی‌نهایت ساختار سایای متمایز وجود دارد. همچنین بورخیوس[4] نشان داد که T^5 و $S^{2k+1} \times T^2$ نیز چنین هستند. توجه کنید که محاسبهٔ گروه‌های همولوژی سایا پیچیدگی‌هایی نیز دارد. بورخیوس در رسالهٔ دکتری خود با دیدگاه نظریهٔ مورس ـ بت[5] به این مسأله پرداخته است.

۱۲. هندسه و توپولوژی همتافته

بعد از این‌که هندسهٔ همتافته و به‌معنای توسعه‌یافته‌ترش، هندسهٔ پواسون، نقش خود را در مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی و نظریهٔ کوانتش[6] نشان داد، تحقیقات روی توپولوژی همتافته متمرکز شد. دو سؤال عمده در این زمینه مطرح می‌شود:

۱ ـ وجود ساختارهای همتافته: آیا یک خمینهٔ هموار مثل X دارای ساختار همتافته می‌باشد یا نه؟

۲ ـ یکتایی ساختار همتافته: یک خمینهٔ همتافته مثل (X, ω) دارای چند ساختار همتافته دیگر با تقریب همتافتریختی[7] است؟

سؤال اول بیشتر به نظریهٔ موانع[8] مربوط می‌شود. مثلاً به‌طور کلاسیک دو مانع توپولوژیک ابتدایی

1) Y. Kanda 2) Conley-Zehnder Index 3) I. Ustilovsky 4) F. Bourgeios 5) Morse-Bott

6) Quantization 7) Symplectomorphism 8) Obstruction Theory

جهت‌پذیری X و بدیهی نبودن $H^{2}(X,\mathbb{R})$ وجود دارند. در مورد سوال دوم، داربو نشان داده است که از بررسی خواص موضعی X نمی‌توان ساختارهای همتافته را از هم تمییز داد، چراکه همهٔ ساختارهای همتافته موضعاً یکی هستند. بنابراین برای مطالعهٔ این مسأله، باید به جستجوی حقایق سراسری بپردازیم. گروموف، دانلدسن، تاوبز، فلور، مک‌داف ، سالامون [1]، تیان [2] و روآن از جمله افرادی هستند که به‌طور عمیق به تحقیق در توپولوژی همتافته پرداخته و دارای اندیشه‌های پیشرو در این زمینه‌اند. تا قبل از سال ۱۹۸۵، به غیر از اثبات انگارهٔ آرنولد در چند حالت خاص، پیشرفت عمده‌ای در این زمینه به‌وجود نیامد تا این‌که در این سال، گروموف با معرفی خم‌های شبه‌تمامریخت [3]، ناوردایی را برای خمینه‌های همتافته معرفی کرد. وی در [15] به معرفی این ناوردا و همچنین تعدادی از کاربردهای آن در توپولوژی همتافته پرداخته است. آنالیز بیضوی ازابزارهای اساسی گروموف در بناکردن این نظریه است. گام اساسی بعدی توسط فلور و در راستای اثبات انگارهٔ آرنولد برداشته شد. متأسفانه مرگ زودهنگامِ فلور به وی مجال ادامه و تکمیل کارهایش را نداد. اما امروزه کارایی نظریهٔ فلور نه تنها در توپولوژی همتافته بلکه در دیگر زمینه‌ها مانند نظریهٔ پیمانه روی خمینه‌های مرزدار، آشکار گردیده است. نظریهٔ زایبرگ ــ ویتن روی خمینه‌های همتافته خود حکایت دیگری است. شگرفترین کارها در این زمینه از آنِ تاوبز است. وی با آنالیز موشکافانهٔ فضای جواب‌های این معادلات، به تعمیم ناورداهای زایبرگ ــ ویتن و ارتباط آن‌ها با ناورداهای گروموف پرداخته و به نتیجه‌های شگفت‌انگیزی در توپولوژی همتافته دست یافته است. در ادامه، به تعریف ناوردای گروموف روی خمینه‌های همتافته می‌پردازیم. خمینهٔ همتافتهٔ ۴ ــ بعدی (X,ω) را در نظر می‌گیریم و یک ساختار تقریباً مختلط ω ــ سازگار روی X مثل J انتخاب می‌کنیم و برای هر $e\in H^{2}(X,\mathbb{Z})$ قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{M}_{Gr}(X,\omega,J,e):=\{\Sigma \mid P.D([\Sigma])=e \text{ که } \Sigma \text{ خمی شبه‌تمامریخت باشد}\}$$

در این صورت، قضیه زیر را داریم که اثبات آن در [86] آمده است.

قضیه الف) برای یک J کلی فضای $\mathfrak{M}_{Gr}(X,\omega,J,e)$ یک خمینهٔ هموار با بعد زوج $2d$ است که

$$2d=-c_{1}(K_{X}).e+e.e.$$

ب) برای یک مجموعهٔ d عضوی کلی از نقاط X مثل Ω،

$$H_{\Omega}(e):=\{\Sigma\in\mathfrak{M}_{Gr}(X,\omega,J,e)\mid \Omega\subset\Sigma\}$$

مجموعه‌ای متناهی است که به هر نقطهٔ آن عضوی از $\{\pm 1\}$ نظیر می‌شود.

---

1) D. Salamon 2) G.Tian 3) Pseudo-holomorphic curves

اکنون آماده‌ایم تا به تعریف ناوردای گروموف بپردازیم.

تعریف فرض کنید (X,ω) یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی همتافته است. در این صورت، ناوردای گروموف روی X را با نگاشت $Gr_X : H^2(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- (Gr_1) اگر $d < 0$ قرار می‌دهیم $Gr_X \equiv 0$؛
- (Gr_2) اگر $d = 0$، آن‌گاه برای یک J نوعی، $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{Gr}(X,\omega,J,e)$ مجموعه‌ای متناهی است که به هر نقطه از آن، عضوی از $\{\pm 1\}$ نظیر می‌شود. در این حالت قرار می‌دهیم:

$$Gr_X(e) := \sum_{\mathfrak{M}} \pm 1;$$

- (Gr_3) اگر $d > 0$، برای یک J و Ω نوعی، $H_\Omega(e)$ یک مجموعهٔ متناهی است و به هر نقطه از آن، عضوی از $\{\pm 1\}$ نظیر می‌شود. در این حالت قرار می‌دهیم:

$$Gr_X(e) := \sum_{H_\Omega(e)} \pm 1.$$

این تعریف با قضیهٔ زیر کامل می‌شود.

قضیه ناوردای $Gr_X : H^2(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ تنها به زوج (X,ω) بستگی دارد، یعنی مقدار Gr_X مستقل از انتخاب ساختار تقریباً مختلط J و مجموعهٔ Ω (در حالت $d > 0$) است که در تعریف آن به‌کار رفته‌اند. علاوه بر این، اگر $\{\omega_t | t \in [0,1]\}$ خانواده‌ای پیوسته از فرم‌های همتافته روی X باشد، مقادیر Gr_X در حالات ω_0 و ω_1 بر هم منطبق‌اند. همچنین Gr_X تحت وابرریختی‌های X ناوردا است، یعنی اگر $\varphi : X \to X$ یک وابرریختی باشد، مقدار $Gr_X(e)$ (تعریف شده به‌وسیلهٔ ω) و مقدار $Gr_X(\varphi^* e)$ (تعریف شده به‌وسیلهٔ $\varphi^*\omega$) با تقریب علامت برابرند.

اثبات این قضیه و جزئیات بیشتر راجع به ناوردای گروموف، در [15]، [50] و [56] آمده است.

تاوبز صورت دیگری از ناوردای گروموف را معرفی کرده است که به ناوردای تاوبز ـ گروموف معروف است ([58]). در ادامه، ناوردای اخیر را نیز با Gr_X نمایش می‌دهیم. تاوبز نشان داده است که ناوردای زایبرگ ـ ویتن و ناوردای تاوبز ـ گروموف روی خمینه‌های همتافته بر هم منطبق‌اند:

قضیه (تاوبز) فرض کنید X یک خمینهٔ ۴ ـ بعدی همتافته و فشرده با شرط $b^+ > 1$ باشد. در این صورت، $SW_X = Gr_X : H^2(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$.

اثبات این قضیه بسیار طولانی است. در واقع، این قضیه نماد نظریه‌ای است که امروزه به نظریهٔ تاوبز روی خمینه‌های همتافته معروف است. بنای این نظریه و اثبات این قضیه

در قالب مقالات [57]، [58]، [59] و [60] آمده است. در واقع، تاوبز با در نظر گرفتن معادلات اختلال‌یافتهٔ زایبرگ ـ ویتن و این فرض که $\psi_r = (\alpha_r, \beta_r)$، جوابی از این معادلات متناظر با پارامتر $r \in [1, +\infty)$ باشد، ثابت می‌کند که با میل دادن r به سمت $+\infty$، مکان هندسی $\alpha_r^{-1}(0)$، یک خم شبه‌تمامریخت را نمایش می‌دهد که به خم تاوبز معروف است.

۱۳. چند کاربرد

کارهای عمیق تاوبز، نتایج مهمی را نیز به ارمغان آورده است (مراجع [20]، [21] و [44] را ببینید). به‌عنوان نمونه،

- گروموف و لاوسن نشان دادند که $m\mathbb{CP}^2 \# n\overline{\mathbb{CP}^2}$ ($n > 1$ یا m) دارای متریک با خمیدگی عددی مثبت می‌باشد. ولی ویتن در [67] نشان داد که در حالت خمیدگی عددی مثبت، ناوردای زایبرگ ـ ویتن صفر است. بنابراین می‌توان حکم کرد که ناوردای زایبرگ ـ ویتن $m\mathbb{CP}^2 \# n\overline{\mathbb{CP}^2}$ صفر است. پس این خمینه دارای هیچ ساختار همتافته‌ای نیست، زیرا طبق قضایای تاوبز، خمینه‌های همتافته دارای ناوردای زایبرگ ـ ویتن ناصفر هستند. همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، خمینه‌های با ناوردای زایبرگ ـ ویتن ناصفر دارای هیچ متریک با خمیدگی عددی مثبت نیستند، پس بنابر قضایای تاوبز، می‌توان حکم کرد که خمینه‌های همتافته نیز دارای چنین متریکی نیستند.
- تاوبز برای محاسبهٔ ناوردای زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های همتافته نشان می‌دهد که در حالت‌هایی که بعد فضای پیمانه‌ای ناصفر است، ناوردای زایبرگ ـ ویتن صفر است و این یعنی همهٔ خمینه‌های همتافته، نوع ساده هستند و این خود تأییدی است بر انگارهٔ نوع ساده.
- در دههٔ هفتاد میلادی، یائو با روش‌های پیشرفته‌ای در هندسهٔ کی‌لری، نشان داد که $\mathbb{CP}^2$ تنها دارای یک ساختار کی‌لری است ([49])، یعنی این‌که هر ساختار کی‌لری روی $\mathbb{CP}^2$ با ساختار کی‌لری استاندارد روی آن، یکسان است. گروموف و مک‌داف با استفاده از نظریهٔ خود کوشیدند تا این مطلب را به ساختارهای همتافته تعمیم دهند. اگرچه ایشان موفق به این کار نشدند، اما به محک زیر دست یافتند:
- **قضیه (گروموف و مک‌داف)** اگر ω ساختار همتافته‌ای روی $\mathbb{CP}^2$ باشد که متناظر با آن، کرهٔ همتافتهٔ نشانده‌شده‌ای در $\mathbb{CP}^2$ وجود داشته باشد، آن‌گاه ω با ساختار همتافتهٔ استاندارد یکریخت است ([49]).

- لالونده[1] و مک‌داف، رده‌بندی مشابهی را برای ساختارهای همتافته روی رویه‌های خط کشی شده[2] انجام دادند. در واقع، آن‌ها ثابت کردند ([49])

قضیه فرض کنید (X,ω) یک رویهٔ خط‌کشی شده باشد. در این صورت، (X,ω) همواره با (X,ω') همتافریخت است که در آن ω' عضو دلخواهی از $[\omega]\in H^{2}(X,\mathbb{R})$ است .

(X,ω) را رویهٔ خط‌کشی شده گویند هرگاه فضای تام، یک S^{2} ـ کلاف باشد.

- تاوبز در راستای اثبات $SW=Gr$ نشان داد که چنین کرهٔ همتافته‌ای همواره وجود دارد و طبق قضیهٔ گروموف و مک‌داف، می‌توان حکم کرد که همهٔ ساختارهای همتافته روی $\mathbb{CP}^{2}$ با ساختار استاندارد یکریخت‌اند.
- لیو[3] و لی[4] نشان دادند که ساختارهای همتافته روی $\mathbb{CP}^{2}\#_{n}\overline{\mathbb{CP}^{2}}$ $(2\le n\le 9)$ در حد هم‌ارزی یکی هستند. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا واقعاً ساختارهای همتافتهٔ ناهم‌ارز وجود دارند یا نه؟ روآن[5] وجود چنین ساختارهایی را در بعدهای بالا نشان داده است. اما اولین مثال از چنین ساختارهای ناهم‌ارز روی خمینه‌های ۴ ـ بعدی همتافته را مک‌مولن[6] و تاوبز در [37] با استفاده از نظریهٔ زایبرگ ـ ویتن نشان داده‌اند.

تذکر دو ساختار همتافته ω_{0} و ω_{1} روی X را هم‌ارز گویند هرگاه وابرریختی $\varphi: X\to X$ موجود باشد که $\varphi^{*}\omega_{1}=\omega_{0}$ و خانوادهٔ هموراری از فرم‌های همتافته مثل $\{\omega_t | t\in[0,1]\}$ موجود باشد که ω_{0} را به ω_{1} وصل می‌کند؛

- ناوردای گروموف برای همهٔ خمینه‌های همتافته از بعد دلخواه تعریف شده است و ناوردای زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های ۴ ـ بعدی، با توجه به رابطهٔ $SW=Gr$ تاوبز این پرسش عمیق را مطرح ساخت که تا چه حد می‌توان این دو ناوردا را تعمیم داد، یعنی این‌که آیا ناوردای گروموف را می‌توان روی همهٔ خمینه‌های هموار زوج ـ بعدی تعریف کرد؟ یا این‌که آیا ناوردای زایبرگ ـ ویتن در ابعاد بالاتر نیز قابل تعریف است یا نه؟
- ناصفر بودن ناوردای زایبرگ ـ ویتن برای خمینه‌های همتافته این گمان را به‌وجود آورد که هر خمینه با ناوردای زایبرگ ـ ویتن ناصفر لزوماً دارای ساختار همتافته است.کاتشچیک، مورگان و تاوبز در [19] با ساختن خمینه‌ای ناهمتافته که ناوردای ناصفر دارد، این گمان را رد کردند.

---

1) F. Lalunde 2) Ruled 3) A. Liu 4) T. Li 5) Y. Ruan 6) Mc Mullen

- روش‌هایی که تاوبز در اثبات انگارهٔ ونشتین برای جستجوی مدارهای ریب به‌کار گرفته است، به‌نوعی نسخه‌ای ۳ ــ بعدی از روش‌های وی برای جستجوی خم‌های تاوبزی در بعد ۴ است.

۱۴. معادلات زایبرگ ــ ویتن و انگارهٔ ونشتین

در ادامه، به بیان انگارهٔ ونشتین، تاریخچه، تلاش‌ها و رهیافت‌هایی که در راستای بررسی آن تاکنون صورت گرفته می‌پردازیم. برای شروع، اشاره‌ای کوتاه به انگارهٔ آرنولد خالی از لطف نیست به‌ویژه این‌که در قسمت توپولوژی همتافته نیز از آن یاد کردیم.

بدون اغراق می‌توان گفت دو انگاره بر تاج هندسه همتافته می‌درخشند: اولی انگارهٔ آرنولد و دیگری انگارهٔ ونشتین. این دو انگاره، حدود سه دهه برجسته‌ترین هندسه‌دانان و فیزیک‌دان‌ها را به پژوهش‌هایی عمیق واداشت و پیشرفت‌های بزرگی را در هندسه و فیزیک در پی داشت. انگارهٔ آرنولد در واقع تعمیمی از آخرین قضیهٔ هندسی پوانکاره در رابطه با کران پایین برای تعداد نقاط ثابت همتافریختی‌هاست. به‌طور دقیق‌تر:

انگارهٔ آرنولد (۱۹۶۶) فرض کنید (X,ω) یک خمینهٔ همتافتهٔ فشردهٔ $2n$ ــ بعدی و $f : X \to X$ یک همتافریختی دقیقا هموتوپیک[1] با نگاشت همانی باشد. در این صورت

$$Card\{p \in X | f(p) = p,\ \det(f_{*p}) \neq 0\} \geq \sum_{i=0}^{2n} \dim H^i(X, \mathbb{R}).$$

اگر $\{h_t : X \to \mathbb{R}\}_{t\in\mathbb{R}}$ یک خانوادهٔ هموار با دورهٔ تناوب یک $(h_{t+1} = h_t)$ از نگاشت‌های هموار روی X باشد، میدان برداری وابسته به زمان v_t تعریف شده با $\omega(v_t, 0) = dh_t$ را در نظر گرفته و ایزوتروپی تولید شده توسط آن را با $\rho : X \times \mathbb{R} \to X$ نمایش می‌دهیم. تابع $f : X \to X$ را دقیقاً هموتوپیک با نگاشت همانی گوییم هرگاه برای چنین خانوادهٔ h_t داشته باشیم $f = \rho_1$.

انگارهٔ آرنولد از اواخر دههٔ هفتاد میلادی به‌تدریج شروع به اثبات شد. به‌عنوان چند نمونه از کارهای شاخص می‌توان به کارهای الیاشبرگ، کونلی و زندر، فلور، سیکارو[2]، ونشتین[3]، هافر و سالامون و آنو[4] اشاره کرد. این انگاره سرانجام در سال ۱۹۹۶ توسط لیو و تیان[5] اثبات گردید ([33]). سه سال بعد نیز اثبات دیگری توسط فوکایا[6] و آنو ارائه گردید. اثباتی از این انگاره توسط سالامون در [50] آمده است.

---

1) Exactly Homotopic 2) J. C. Sikarov 3) A. Weinstein 4) K. Ono 5) G. Tian 6) K. Fukaya

برای بیان انگارهٔ ونشتین و مروری بر کارهای انجام شده برای اثبات آن، به چند تعریف نیاز داریم.

تعریف. خمینهٔ $2n+1$ ـ بعدی M را در نظر بگیرید. ۱ ـ فرمی $a \in \Omega^1(M)$ را فرم سایا روی M گویند هرگاه $a \wedge (d\,a)^n \neq 0$. در صورت وجود چنین فرمی، زوج (M, a) خمینهٔ سایا خوانده می‌شود.

تعریف. فرض کنید (M, a) یک خمینهٔ سایا و میدان برداری یکتای $R \in \mathfrak{X}(M)$ با شرط $i_R d\,a = 0$ تعریف شده باشد. R را میدان برداری ریب[1] و خم‌های انتگرال بستهٔ آن را مدارهای ریب[2] می‌نامند.

برای هر $p \in M$، هستهٔ تابعک a را با ξ_p نمایش می‌دهیم:

$$\xi_p := \{v \in T_pM | a_p(v) = 0\}.$$

با توجه به این‌که فرم a همه‌جا ناصفر است، ξ_p یک زیرفضای برداری $2n$ ـ بعدی از T_pM است. می‌توان نشان داد $\xi = \sqcup_{p\in M}\xi_p$ یک زیرکلاف برداریِ TM است. کلاف ξ را ساختار سایا روی M می‌نامند. همهٔ خمینه‌ها لزوماً دارای ساختار سایا نیستند. اما در سال ۱۹۷۱، ژان مارتینه[3] به‌کمک جراحی نشان داد که هر خمینهٔ جهت‌پذیر ۳ ـ بعدی لزوماً دارای ساختار سایاست. در آن زمان، گمان بر این بود که رده‌بندی ساختارهای سایا روی خمینه‌های ۳ ـ بعدی کار مشکلی نیست، اما گذر زمان نشان داد که این مسأله تا چه اندازه دشوار است حتی در مورد S^3. شرحی از این ماجراها به قلم الیاشبرگ در [11] آمده است.

حال به بیان تاریخچهٔ انگارهٔ ونشتین و مروری بر شاخص‌ترین کارهای انجام شده برای مطالعهٔ آن می‌پردازیم. در سال ۱۹۵۰، زایفر[4] سؤالی مطرح کرد: «اگر X یک میدان برداری همه‌جا ناصفر روی S^3 باشد، آیا این میدان برداری دارای مدارهای متناوب است؟» در سال ۱۹۶۶، ویلسون[5] نشان داد که در بعدهای بالاتر یعنی روی S^{2n-1} $(n \geq 3)$ میدان‌های برداری همه‌جا ناصفری بدون مدار متناوب وجود دارند. در سال ۱۹۷۴، شویتزر[6] یک میدان برداری از ردهٔ C^1 بدون هیچ مدار متناوبی را به‌عنوان مثال نقض این سؤال ارائه داد. سرانجام بیست سال بعد، کاپربرگ[7] مثال نقضی از ردهٔ C^∞ معرفی کرد. سرانجام ونشتین با توجه به کارهای رابینو[8] به این نتیجه رسید که برای جستجوی مدارهای متناوب باید به اطلاعات دینامیکی متوسل شد و حدسی را به‌صورت زیر مطرح کرد ([66]):

انگارهٔ ونشتین فرض کنید (M, a) یک خمینهٔ $2n+1$ ـ بعدی بسته، جهت‌پذیر و سایا باشد.

---

1) Reeb vector field 2) Reeb Orbit 3) J. Martinet 4) H. Seifert 5) F. W. Wilson
6) P. A. Shweutzer 7) K. Kuperberg 8) P. Rabinowitz

در این صورت، میدان برداری ریب وابسته به این ساختار سایا دارای حداقل یک مدار متناوب است.

اولین گام عمده را کلود ویتربو[1] برداشت و انگاره را در سال ۱۹۸۷ برای ابررویه‌های $\mathbb{R}^{2n}$ اثبات کرد. در سال بعد، هافر و ویتربو انگاره را در حالت کلاف کتانژانت اثبات کردند. هافر در سال ۱۹۹۳، پروژهٔ معناداری رابا روش‌هایی کاملاً متفاوت نسبت به کارهای قبلی انجام شده، برای اثبات انگارهٔ شروع کرد. به‌عنوان نمونه، وی توانست با مطالعهٔ خم‌های شبه‌هلومورف در همتافته‌شدهٔ خمینهٔ ۳ ــ بعدی M، به انگاره در سه حالت زیر پاسخ دهد ([16]):

- $M = S^3$ این‌که M توسط S^3 پوشیده شود؛
- $\Pi_2(M) \neq 0$ ($\Pi_2(M)$ دومین گروه بنیادی M را نشان می‌دهد)؛
- وقتی ساختار سایا فراتابیده[2] باشد.

در سال ۱۹۹۶، ویمین شن انگاره را در حالت ابررویه‌های سایا در یک خمینهٔ ۴ ــ بعدی همتافته اثبات نمود ([6]). لازم به ذکر است که وی از قضایای وجودی تاوبز در مورد خم‌های شبه‌تمامریخت سود برده است.

تعریف فرض کنید (M, ξ) یک خمینهٔ ۳ ــ بعدی سایا باشد. در این صورت، ساختار سایای ξ را فراتابیده گویند هرگاه دیسک نشانده‌شده‌ای در M مثل D چنان یافت شود که

- $T(\partial D) \subset \xi|(\partial D)$؛
- برای هر $p \in \partial D$ داشته باشیم $T_p \not\subset \xi_p$.

ساختار سایای ξ را تایت گویند هرگاه فراتابیده نباشد.

در مقالهٔ عمیق [10]، الیاشبرگ همهٔ ساختارهای فراتابیده را رده‌بندی کرد و نشان داد که این رده‌بندی اساساً یک مسألهٔ نظریهٔ هموتوپی است. علاوه بر این، وی نشان داد که S^3 تنها دارای یک ساختار تایت و تعداد شمارایی ساختار فراتابیده است. ساختارهای تایت روی $\mathbb{R}^3$ را نیز الیاشبرگ رده‌بندی کرده است. مسألهٔ رده‌بندی ساختارهای تایت هنوز باز است. در سال ۲۰۰۵، قسیم عباس[3] و کایلیباک[4] و هافر به معرفی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی خمینهٔ M پرداختند و نشان دادند که انگارهٔ ونشتین درست است اگر و تنها اگر این دستگاه دارای جواب ثابت نباشد. آن‌ها همچنین این انگاره را برای نوعی از ساختارهای سایا موسوم به ساختار سایای تخت[5] اثبات کردند ([1]).

---

1) C. Viterbo 2) Over twisted 3) Cassim. Abbas 4) K. Ceilieback 5) Planar contact structure

در همان سال، گی[1]، انگاره را در مورد خمینه‌های سه بعدی با تاب غیرصفر به مفهوم گیراکس[2] اثبات کرد ([14]). تلاش دیگری نیز توسط کالین[3] و هوندا[4] صورت گرفت ([5]). سرانجام، در اکتبر ۲۰۰٦، تاوبز با ارائهٔ مقالهٔ [61] با عنوان

"The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture"

به این انگاره روی خمینه‌های سه‌بعدی در کلی‌ترین حالت، پاسخ داد.
از آنجا که وی از معادلات زایبرگ ـ ویتن برای جستجوی خم‌های انتگرال یک میدان برداری استفاده کرده است، می‌توان به زبان ساده کار وی را استفاده از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی نامید.

در ادامهٔ مطلب، فرض می‌کنیم که (M, a) یک خمینهٔ ۳ ـ بعدی مجهز به فرم سایای a باشد و کلاف برداری تعریف شده توسط $Ker(a)$ را با K^{-1} نشان می‌دهیم. تاوبز در مقالهٔ اخیر خود، نشان داده است که روی خمینه‌های سایای فشرده، مدارهای ریب بسته، به وفور یافت می شوند. قضیهٔ اساسی زیر گویای این مطلب است.

قضیه (تاوبز) ردهٔ همولوژی $e \in H^{2}(M, \mathbb{Z})$ را به گونه‌ای تثبیت کنید که $e - \frac{c_1(K)}{2}$ تابدار باشد. در این صورت، یک مجموعهٔ ناتهی از مدارهای ریب بسته مثل $\mathfrak{R}(e)$ و نگاشت $n_e : \mathfrak{R}(e) \to \mathbb{Z}$ به گونه‌ای وجود دارند که مجموع وزن‌دار صوری این مدارها با ضرایب مربوطه، دوگان پوانکارهٔ e را در $H_1(M, \mathbb{Z})$ نمایش می‌دهد:

$$\sum_{\gamma \in \mathfrak{R}(e)} n_e(\gamma)\gamma = P.D(e)$$

که $P.D : H^{2}(M, \mathbb{Z}) \to H_1(M, \mathbb{Z})$ نشان‌دهندهٔ دوگان پوانکاره است.

تاوبز صورت دیگری از این قضیه را که در آن $e - \frac{c_1(K)}{2}$ تابدار نیست، در مقالهٔ بعدی خود اثبات کرده است ([62]). همچنین لازم به ذکراست که تاوبز در راستای اثبات انگارهٔ ونشتین، گام عمده‌ای نیز در زمینهٔ اثبات یکی بودن زایبرگ ـ ویتن ـ فلور همولوژی و همولوژی سایای نشانده‌شده برداشته است. اگرچه تاوبز برای رسیدن از تک‌قطبی‌ها به مدارهای ریب، راه پر پیچ و خمی را پیموده است، اما به‌طور کلی می‌توان گفت وی برای اثبات قضیهٔ اخیر از ابزارهای زیر استفاده کرده است:

- معادلات زایبرگ ـ ویتن روی خمینه‌های سایا؛
- شارش طیفی؛

1) D. Gay   2) E. Giroux   3) V. Colin   4) K. Honda

- نظریهٔ فردهولم؛
- زایبرگ ــ ویتن ــ فلور همولوژی سایا؛
- روش‌های تقریب توماس پارکر[1] در هسته‌های گرمایی[2]؛
- معادلات ورتکس[3].

مراجع

[1] C. Abbas, K. Cielebak and H. Hofer, *The Weinstein conjecture for planar contact structures in dimension three*, preprint arXiv:math.SG/0409355v2,March 2005.

[2] D. Auckley, "The Thurston norm and three-dimensional Seiberg-Witten theory", *Osaka J. Math.*, **33**(1996), 737-750.

[3] A. Besse, *Einstein Manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer*, Springer-Verlag, 1987.

[4] F. Bourgeois,*A Morse-Bott approach to contact homology*, Ph.D. thesis, Stanford University, 2002.

[5] V. Colin and K. Honda, "Reeb vector fields and open book decompositions I: the periodic case", preprint, 2005.

[6] W. Chen, "Casson's invariant and Seiberg-Witten gauge theory", *Turk. J. Math.* **21**(1997), 61-81.

[7] W. Chen, "Pseudo-holomorphic curves and the Weinstein conjecture", *Comm. Anal. Geom.*, **8**(2000), 115-131.

[8] S. K. Donaldson, "Topological field theories and formulae of Casson and Meng-Taubes", In:Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), *Geom. Topol. Monogr.*, 2, Geom.Topol., Coventry, 1999, 87-102 (electronic).

[9] S. K. Donaldson. *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, Volume 147 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. With the assistance of M. Furuta and D. Kotschick.

1) T. H. Parker 2) Heat kernels 3) Vortex

[10] Y. Eliashberg, "Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds", *Invent. Math.*, **98**(1989), 623-637.

[11] Y. Eliashberg, "Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work", *Ann. Inst. Fourier*, **42**(1992), 165-192.

[12] Y. Eliashberg, A. Givental and H. Hofer, "Introduction to symplectic field theory", *Geom. Funct. Anal.*, Special Volume, Part II (2000), 560-673.

[13] A. Floer, "An instanton invariant for 3-manifolds", *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988), 215-240.

[14] D. Gay, "Four dimensional symplectic cobordisms containing three handles", *Geometry and Topology*, **10**(2006), 1749-1759.

[15] M. Gromov, "Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds", *Invent. Math*, **82**(1985), 307-347.

[16] H. Hofer, "Pseudo-holomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three", *Invent. Math.*, **114**(1993), 515-563.

[17] J. M. Hutchings and M. Sullivan, "Rounding corners of polygons andembedded contact homology", *Geometry and Topology*, **10**(2006), 169-266.

[18] Y. Kanda, "The classification of tight contact structures on the 3-torus", *Comm. Anal. Geom.*, **5**(1997), 413-438.

[19] D. Kotschick, J. W. Morgan, C. H. Taubes, "Four-manifolds without symplectic structures but with non-trivial Seiberg-Witten invariants", *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 119-124

[20] D. Kotschick. "The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifold (after C. H. Taubes)", *Seminaire Bourbaki*, Vol. 1995/96, 195-220.

[21] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Monopoles and Three-Manifolds*, Cambridge University Press, 2007.

[22] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. "Monopoles and contact structures". *Invent. Math.*, **130**(1997), 209-255.

[23] P. B. Kronheimer, T. S. Mrowka, “Scalar curvature and the Thurston norm”, *Math. Res. Lett.*, **4**(1997), 931-937.

[24] C. LeBrun, “On the scalar curvature of complex surfaces”, *Geom. Funct. Anal.*, **5:3**(1995), 619-628.

[25] C. LeBrun, “Einstein metrics and Mostow rigidity”, *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 1-8.

[26] C. LeBrun, “Polarized 4-manifolds, extremal kahler metrics, and Seiberg-Witten theory”, *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 653-662.

[27] C. LeBrun, “Four-manifolds without Einstein metrics”, *Math. Res. Lett.*, **2** (1996), 133-147.

[28] C. LeBrun, “Yambe constants and the Seiberg-witten perturbed equations”, *Comm. An. Geom.*, **5**(1997), 535-553.

[29] Y. Lim, “The equivalence of Seiberg-Witten and Casson invariants for homology 3-spheres”, *Math. Res. Lett.*, **6**(1999), 631- 643.

[30] Y. Lim, “Seiberg-Witten invariants for 3-manifolds in the case b1 = 0 or 1”, *Pac. J. Math.*, **195**(2000), 179-204.

[31] P. Lisca, “Symplectic Fillings and positive scalar curvature”, *Geometry and Topology*, **2**(1998), 103-116.

[32] P. Lisca and G. Matic, “Tight contact structures and Seiberg-Witten invariants”, *Invent. Math.*, **129**(1997), 509-525.

[33] G. Liu and G. Tian, “Floer homology and Arnold conjecture”, *J. Diff. Geom.*, **49**(1998), 1-7.

[34] M. Marcolli, *Seiberg-Witten gauge theory*, Texts and Readings in Math. vol. 17, Hindustan Book Agency, New Delhi, 1999.

[35] M. Marcolli and B.L.Wang, “Equivariant Seiberg-Witten Floer homology”, *Comm. Anal. Geom.*, **9**(2001), 451-639.

[36] M. Marcolli and B. L. Wang, “Seiberg-Witten and Casson-Walker invariants for rational, homology 3-spheres”, *Geom. Dedicata*, **91**(2002), 45-58.

[37] C. McMullen and C.H.Taubes, "4-manifolds with inequivalent symplectic form and 3-manifolds with inequivalent fibrations", *Math. Res. Lett.*, **6**(1999), 681-696.

[38] G. Meng and C. H. Taubes, "SW=Milnor torsion", *Math. Res. Lett.*, **3**(1996), 661-674.

[39] J. W. Milnor, "Whitehead torsion", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72**(1966), 358-428

[40] T. S. Mrowka, P. Ozsvath and B. Yu. "Seiberg-Witten monopoles on Seifert fibered spaces", *Comm. Anal. Geom.*, **5(4)**(1997), 685-791.

[41] L. I. Nicolaescu, "Seiberg-Witten invariants of 3-manifolds (Part 1)", unpublished notes, http://www.nd.edu/ lnicolae/.

[42] L. I. Nicolaescu, *The Reidemeister torsion of 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 30, Walter de Gruyter, Berlin, 2003.

[43] L. I. Nicolaescu, "Adiabatic limits of the Seiberg-Witten equations on Seifert manifolds", *Comm. Anal. Geom.*, **6**(1998), 331-392.

[44] L. I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten Theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 28, Amer. Math. Soc., 2000.

[45] L. I. Nicolaescu, "Seiberg-Witten theoretic invariants of lens spaces", arXiv : math., DG/9901071.

[46] L. I. Nicolaescu, "Seiberg-Witten invariants of rational homology spheres", arXiv : math., GT/0103020.

[47] P. S. Ozsvath and Z. Szabo, *Lectures on Heegaard Floer homology*, Floer Homology, Gauge Theory and Low Dimensional Topology, Clay Mathematics Proceedings(2006), 29-70.

[48] J. Petean, "The Yamabe invariant of simply connected manifolds", *J. Reine Angew. Math.*, **523**(2000), 225-231.

[49] D. A. Salamon, *Spin geometry and Seiberg-Witten invariants,* to appear in Birkhauser-Verlag.

[50] D. A. Salamon, *Lecture notes on Floer homology*, in "Symplectic Geometry and Topology", IAS/Park City Mathematics Series, 7(1999), 143-229.

[51] A. Sambusetti, *Einstein manifolds, volume rigidity and Seiberg Witten theory*, Seminaire de theorie spectrale et geometrie, Grenoble, Volume 17(1999), 163-184.

[52] A. Sambusetti, "An obstruction to the existence of Einstein metrics on 4-manifolds", *Math. Ann.*, **311**(1998), 533-548.

[53] N. Saveliev, *Lectures on the topology of 3-manifolds.* De Gruyter Textbook, Walter de Gruyter, Berlin, 1999.

[54] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms," *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 809-822.

[55] C. H. Taubes, "More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten in variants," *Math. Res. Letters*, **2**(1995), 9-13.

[56] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten and the Gromov invariants," *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 221-238.

[57] C. H. Taubes, "SW $\Rightarrow$ Gr: from the Seiberg-Witten equations to pseudo holomorphic curves", *J. Amer. Math. Soc.*, **9**(1996), 845-918.

[58] C. H. Taubes, "Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4", *J. Diff. Geom.*, **44**(1996), 819-893.

[59] C. H. Taubes, "Gr $\Rightarrow$ SW: from pseudo-holomorphic curves to Seiberg-Witten solutions", *J. Diff. Geom.*, **51**(1999), 203-334.

[60] C. H. Taubes, "Gr = SW : Counting curves and connections", *J. Diff. Geom.*, **52** (1999), 453-609.

[61] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture", *Geometry and Topology*, **11**(2007), 2117-2202.

[62] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture II: More closed integral curves for the Reeb vector field", Preprint(2007), arxiv: math/0702366 V2.

[63] W. Thurston, "A norm for the homology of 3-manifolds", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **59**(1986), no. 339, 99-130.

[64] V. G. Turaev, *Introduction to combinatorial torsions*, Lectures in Mathematics, ETH Zurich, Birkhauser, 2001.

[65] I. Ustilovsky, "Infinitely many contact structures on S^{4m+1}", *Int. Math. Res. Notices*, **14**(1999), 781-792.

[66] A. Weinstein, "On the hypotheses of Rabinowitz's orbit theorems", *J. Diff. Eqe.*, **33**(1979), 353-358.

[67] E. Witten, "Monopoles and four-manifolds", *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 769-796.

حامد فرهادپور
پژوهشگاه دانشهای بنیادی، پژوهشکده ریاضیات
hfarhadpour@ipm.ir