

قضیه پروانه

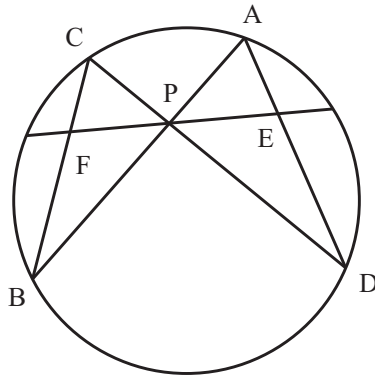
منصور معتمدی

به پاس ایام تحصیل در شیراز
و آنچه از آن به یاد ماند ...

۱. مقدمه

ویلیام هرشل^۱ ستاره‌شناس معروف و کاشف سیاره اورانوس در نامه‌ای که در تاریخ هفتم آوریل سال ۱۸۰۵ به ویلیام والاس^۲ نوشت [۹]، خواستار حل مسأله زیر شد:

از نقطه P وسط وتر یک دایره، دو وتر AB و CD رسم می‌شوند. اگر AD و BC این وتر را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند، ثابت کنید $PE = PF$.



شکل ۱

1) William Hershel 2) William Wallace

ظاهراً نخستین حل مکتوب و مستند این مسأله از آن ویلیام والاس است [۹]. ده سال بعد، همین مسأله با شماره ۱۰۲۹ در یک نشریه روزانه از انتشارات دانشگاه کمبریج چاپ شد. یکی از نخستین حل‌کنندگان آن، هورنر^۱ است که به خاطر ابداع روش تقریبی یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها شهرت دارد. برخی عقیده دارند که یک چینی در این مورد بر هورنر مقدم بوده است [۲ ص. ۶۲].

در صفحه ۷۸ مرجع [۱۱]، قضیه کلی‌تری اثبات شده که قضیه پروانه نتیجه‌ای از آن است. مؤلف در پانوش آن صفحه اشاره می‌کند که قضیه کلی‌تر توسط مکی [۱۴] اثبات و در سال ۱۸۸۴ در نشریه انجمن ریاضی ادینبورو چاپ شده است. این مسأله در دهه‌های ۲۰ و ۳۰ میلادی توجه بسیاری از علاقه‌مندان حل مسأله را به خود جلب کرد و بار دیگر در سال ۱۹۴۳ بار دیگر در بخش مسائل مقدماتی ماهنامه آمریکایی ریاضیات با شماره E571، مطرح گردیده است. در شماره فوریه سال ۱۹۴۴ همان ماهنامه، پنج راه حل مختلف برای این مسأله ارائه شد و از آن پس، با نام «قضیه پروانه» شناخته می‌شود. کلامکین^۲ حدس زده بود که قضیه پروانه می‌تواند به بیضی نیز تعمیم یابد. وی در سال ۱۹۶۹، به‌طور مشترک با چاکاریان و سالی [۸] این حدس را اثبات کرد. ایوز [۱۰] اثباتی با استفاده از مفهوم قطب و قطبی برای این قضیه ارائه داده و آن را برای مقاطع مخروطی نیز اثبات کرده است. اینک اثبات‌های گوناگونی برای این قضیه وجود دارد که در برخی از آن‌ها از هندسه مقدماتی یا تصویری استفاده می‌شود و در برخی دیگر، از هندسه تحلیلی و اعداد مختلط. تعمیم‌های مختلف این قضیه نیز قابل توجه‌اند که بعضی به پیدایش مفاهیم جدید منتهی شده‌اند. هدف این نوشتار، ارائه برخی از اثبات‌ها و تعمیم‌های این قضیه است.

۲. پیشیناز

در این بخش، به یادآوری بعضی مطالب مورد نیاز، به‌ویژه در هندسه تصویری می‌پردازیم. یک کشف اساسی در هندسه تصویری این است که اگر چهار نقطه A, B, C, D بر یک خط راست باشند و این چهار نقطه را مطابق شکل ۳ با استفاده از نگاهت تصویر به مرکز یک نقطه خارج از خط گذرنده از نقاط A, B, C, D و به نقاط A', B', C', D' روی خط دیگری تصویر کنیم، آن‌گاه کمیت خاصی به نام نسبت ناهمساز این چهار نقطه وجود دارد که مقدارش تحت عمل تصویر، ناورد است. بدین ترتیب با یک ویژگی مربوط به مجموعه‌ای از چهار نقطه بر یک خط راست روبه‌رو هستیم. نسبت ناهمساز نه یک طول است، نه نسبت دو طول، بلکه نسبت دو تا از این گونه نسبت‌هاست.

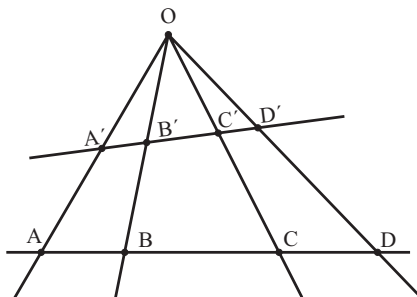
1) Horner 2) Murry Kelamkin



شکل ۲

اگر نسبت‌های $\frac{CA}{CB}$ و $\frac{DA}{DB}$ را در نظر بگیریم، نسبت آن‌ها $(ABCD) = \frac{CA}{CB} / \frac{DA}{DB}$ بنا به تعریف، نسبت ناهمسان‌چهار نقطه A, B, C, D است که به همین ترتیب در نظر گرفته می‌شوند. جهت‌ی را روی خط به‌عنوان جهت مثبت در نظر گرفته و توافق می‌کنیم که طول‌های اندازه‌گیری شده در این جهت مثبت و در جهت مخالف، منفی باشند. اکنون نشان می‌دهیم که نسبت ناهمسان‌چهار نقطه تحت عمل تصویر ناورداست، یعنی اگر A, B, C, D و A', B', C', D' نقاط متناظر روی دو خط باشند که با عمل تصویر به هم مربوط شده‌اند، آن‌گاه

$$\frac{CA}{CB} / \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} / \frac{D'A'}{D'B'}$$



شکل ۳

با استفاده از مفاهیم مقدماتی هندسه می‌توان تساوی فوق را ثابت کرد. کافی است توجه کنیم که مساحت هر مثلث برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع و نیز برابر است با نصف حاصل ضرب هر دو ضلع دلخواه مثلث در سینوس زاویه بین آن دو. پس در شکل ۳ داریم

$$S_{OCA} = \frac{1}{2}h.CA = \frac{1}{2}OA.OC \sin(\widehat{COA}),$$

$$S_{OCB} = \frac{1}{2}h.CB = \frac{1}{2}OB.OC \sin(\widehat{COB}),$$

$$S_{OAD} = \frac{1}{4}h \cdot DA = \frac{1}{4}OA \cdot OD \sin(\widehat{DOA}),$$

$$S_{OBD} = \frac{1}{4}h \cdot DB = \frac{1}{4}OB \cdot OD \sin(\widehat{DOB}).$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} / \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} &= \frac{OA \cdot OC \sin(\widehat{COA})}{OB \cdot OC \sin(\widehat{COB})} \cdot \frac{OB \cdot OC \sin(\widehat{DOB})}{OA \cdot OC \sin(\widehat{DOA})} \\ &= \frac{\sin \widehat{COA} \cdot \sin \widehat{DOB}}{\sin \widehat{COB} \cdot \sin \widehat{DOA}}. \end{aligned}$$

پس نسبت ناهمساز A, B, C و D فقط به زاویه‌های روبه‌رو به پاره‌خط‌های واصل بین A, B, C و D بستگی دارد. از آنجا که این زاویه‌ها برای هر چهار نقطه A', B', C', D' تصاویر A, B, C و D به مرکز O ، یکی هستند، نتیجه می‌گیریم که نسبت ناهمساز در روند عمل تصویر، تغییر نمی‌کند. با توجه به این ویژگی، به تعریف زیر توجه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. نسبت ناهمساز چهار خط که در یک نقطه هم‌رس‌اند، نسبت ناهمساز محل برخورد آن چهار خط با یک خط دلخواه است.

تعریف ۲.۲. هرگاه برای چهار نقطه A, B, C و D واقع بر یک خط راست، داشته باشیم $(ABCD) = -1$ ، گوئیم نسبت ناهمساز این چهار نقطه، همساز (توافقی) است و D مزدوج همساز یا توافقی C نسبت به A و B است.

تعریف ۳.۲. (چهارضلعی کامل) هرگاه چهار خط در صفحه مطابق شکل ۴ دوه‌دو در شش نقطه متمایز یکدیگر را قطع کنند، آن‌ها را اضلاع یک چهارضلعی کامل و نقاط تقاطع را شش رأس آن می‌نامیم. دو رأس را متقابل می‌نامیم هرگاه پاره‌خط شامل آن دو رأس، بخشی از یک ضلع نباشد. پاره‌خط شامل دو رأس متقابل، قطر نامیده می‌شود. تعداد قطرهای برابر ۳ است.

قضیه ۴.۲. در چهارضلعی کامل، هر قطر به وسیله دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود.

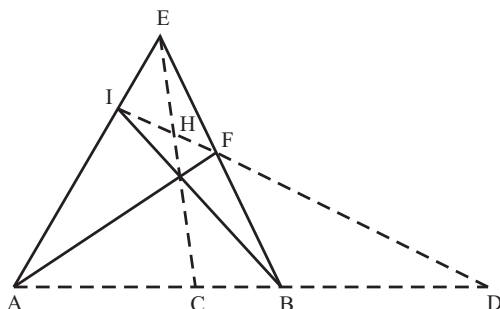
اثبات. کافی است توجه کنیم که با تصویر کردن از E ، داریم

$$x = (ABCD) = (IFHD)$$

و با تصویر کردن از G ، داریم

$$(IFHD) = (BACD).$$

اما $(BACD) = \frac{1}{(ABCD)}$ پس $x = \frac{1}{x}$. در نتیجه $x = 1$ یا $x = -1$. چون C و D نقاط A و B را از هم جدا می‌کنند، یعنی C بین A و B است، نسبت ناهمسان x منفی است و از این رو باید برابر -1 باشد. ■



شکل ۴

مفهوم نسبت ناهمسان چهار نقطه بر روی یک خط را می‌توان به چهار نقطه بر یک دایره تعمیم داد.

تعریف ۴.۲. هرگاه A, B, C, D مطابق شکل ۵ نقاط واقع بر یک دایره و O نقطه‌ای بر روی کمان AD باشد که شامل B و C نیست، نسبت ناهمسان این چهار نقطه برابر با

$$\frac{\sin \widehat{COA} \cdot \sin \widehat{DOB}}{\sin \widehat{COB} \cdot \sin \widehat{DOA}}$$

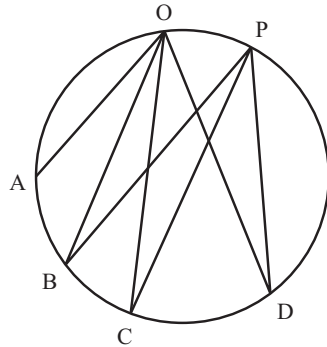
تعریف می‌شود.

قضیه ۵.۲. (شال^۱) برای چهار نقطه واقع بر یک دایره، نسبت ناهمسان یک دسته خطوط از نقطه پنجم، بستگی به انتخاب نقطه پنجم ندارد.

اثبات. اگر O و P دو نقطه دلخواه بر دایره در کمان AD باشند که شامل B و C نیست، با توجه به همنهشتی زاویه‌های محاطی متقابل به یک کمان، نتیجه بدیهی است.

قطب و قطبی یکی از تبدیلات مهم هندسه به‌شمار می‌آید. تعریف مشهور کلاسیک آن در زیر بیان می‌شود [۲ ص. ۱۶۹ یادداشت‌های مترجم].

1) Chasles



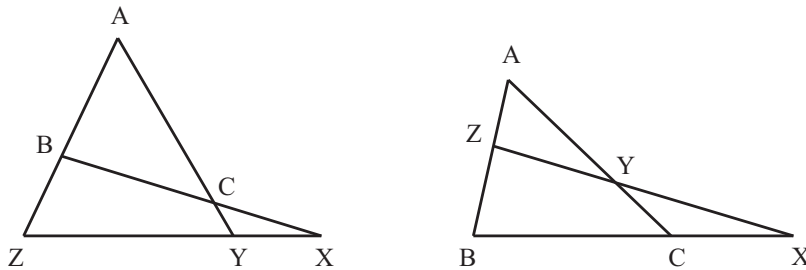
شکل ۵

تعریف ۶.۲. مکان هندسی مزدوج توافقی نقطه در صفحه دایره‌ای مفروض نسبت به دو نقطه تقاطع قاطعی که از آن نقطه می‌گذرد با دایره، قطبی آن نقطه نسبت به دایره نامیده می‌شود.

به موجب این تعریف، قطبی نقطه بر حسب این‌که داخل یا خارج یا روی دایره باشد نسبت به دایره، به ترتیب خط نامحدود، پاره خط و نقطه است و مرکز دایره، قطبی ندارد. با قبول فرض نقطه‌های موهومی و خط بینهایت صفحه و این‌که قطبی هر نقطه از دایره را مماس مرسوم از آن نقطه بر دایره بدانیم، به موجب این تعریف، قطبی نقطه نسبت به دایره در هر حال، خط نامحدود است. این تعریف برای هر منحنی درجه دوم، اعم از دو خط و یا هر مقطع مخروطی می‌تواند به کار رود. کافی است به جای دایره، دو خط متقاطع، بیضی، هذلولی یا سهمی گذاشته شود. در پایان این بخش، قضیه معروف منلائوس را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۶.۲. (منلائوس) هرگاه سه نقطه X ، Y و Z واقع بر اضلاع BC ، CA و AB (یا واقع بر امتداد آن‌ها) از مثلث ABC ، بر یک خط راست واقع باشند، آن‌گاه

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = +1.$$

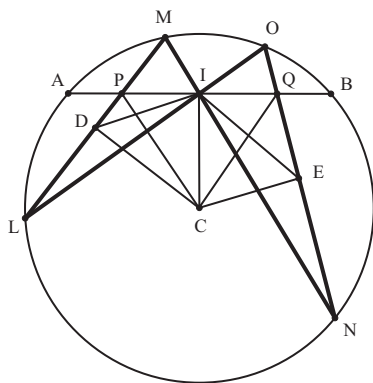


شکل ۶

به عکس اگر چنین رابطه‌ای برای سه نقطه X, Y و Z واقع بر اضلاع مثلث ABC برقرار باشد، این سه نقطه بر یک خط راست واقع‌اند.

۳. اثبات‌ها و تعمیم‌ها

اثبات اول. (هورنر [۳]) بگیریم E و D به ترتیب نقاط وسط پاره‌خط‌های ML و ON باشند. از آنجا که ID و IE میانه‌های متناظر دو مثلث متشابه MLI و CIN هستند، $\widehat{QEI} = \widehat{PDI}$. اینک



شکل ۷

چهارضلعی‌های $ICEQ$ و $DCIP$ محاطی هستند و از این رو، $\widehat{QEI} = \widehat{PDI}$ و $\widehat{PDI} = \widehat{PCI}$. در نتیجه $\widehat{ICQ} = \widehat{PCI}$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه ICQ و ICP ، همنهشت هستند و $IP = IQ$. ■

یادداشت ۱.۳. راه‌حلی (اثباتی) برای این مسأله (قضیه) در مجموعه مجله‌های یکان درج شده که همان اثبات هورنر است [۱].

دومین اثبات، اثبات ویلیام والاس است [۹].

اثبات دوم. در شکل ۸، C وسط پاره‌خط AB ، I و H به ترتیب محل تلاقی GD و FE با AB است. خط KHL را موازی DG رسم می‌کنیم تا DF را در K و امتداد GE را در L قطع کند. از آنجا که

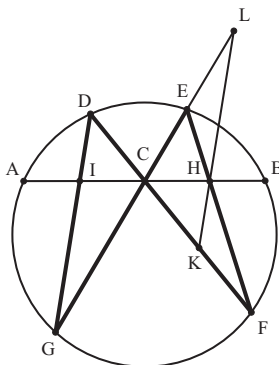
$$\widehat{HLE} = \widehat{CGI} = \widehat{HFK},$$

مثلث‌های LEH و HFK متشابه‌اند و

$$\frac{LH}{HE} = \frac{HF}{HK}.$$

پس

$$HF \cdot HE = LH \cdot HK = AH \cdot HB = (AC + CH)(AC - CH).$$



شکل ۸

همچنین مثلث CID با مثلث CHK و مثلث CHL با مثلث CIG متشابه است و بنابراین

$$\frac{KH}{HC} = \frac{DI}{IC}, \frac{LH}{HC} = \frac{GI}{IC}.$$

با ضرب طرفین نظیر در دو تساوی اخیر، داریم

$$\frac{KH \cdot LH}{HC^2} = \frac{DI \cdot GI}{IC^2}.$$

اما همان طور که دیدیم

$$KH \cdot LH = AC^2 - HC^2, DI \cdot GI = AC^2 - IC^2.$$

بنابراین

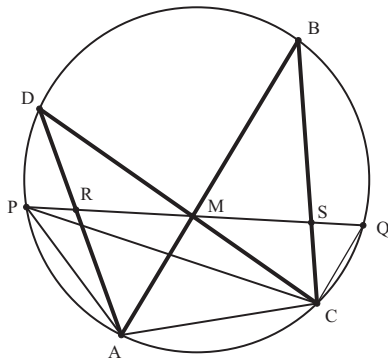
$$\frac{AC^2}{HC^2} = \frac{AC^2}{IC^2}$$

و در نتیجه $HC = IC$.

اثبات سوم بر مبنای نسبت ناهمساز طرح ریزی شده است.

اثبات سوم. بنابر تعریف ۲.۱ و قضیه شال، داریم $(PRMQ) = (PMSQ)$ ، یعنی

$$\frac{PM}{MR} \cdot \frac{PQ}{QR} = \frac{PS}{SM} \cdot \frac{PQ}{QM}$$



شکل ۹

و از این رو،

$$\frac{PM}{MR} \cdot \frac{QR}{PQ} = \frac{PS}{SM} \cdot \frac{QM}{PQ}$$

اما بنابه فرض، $PM = MQ$ پس $RQ \cdot MS = PS \cdot RM$ که به تساوی

$$RM \cdot MS + MQ \cdot MS = PM \cdot RM + MS \cdot RM$$

یا

$$MQ \cdot MS = PM \cdot RM$$

می‌انجامد. از آنجا که $MQ = MP$ ، پس $MS = MR$.
 اثبات چهارم. (با استفاده از قضیه منلائوس) مثلث HMK را که توسط DE و FG قطع شده است در نظر می‌گیریم. از دو رابطه

$$\frac{CH}{CK} \cdot \frac{GK}{GM} \cdot \frac{FM}{FH} = 1, \quad \frac{CH}{CK} \cdot \frac{DK}{DM} \cdot \frac{EM}{EH} = 1$$

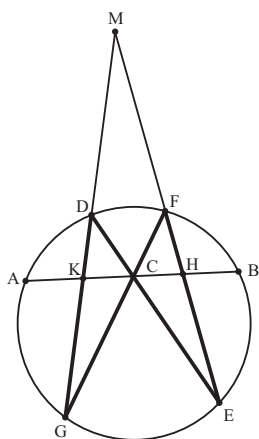
به دست می‌آوریم که

$$\frac{CH \cdot GK \cdot DK \cdot FM \cdot EM}{CK \cdot FH \cdot EH \cdot GM \cdot DM} = 1.$$

اما $FM \cdot EM = GM \cdot DM$ پس

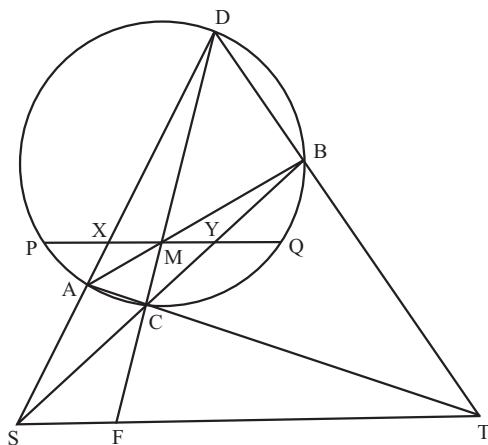
$$\begin{aligned} \frac{CH^2}{CK^2} &= \frac{FH \cdot EH}{GK \cdot DK} = \frac{AH \cdot BH}{AK \cdot BK} = \frac{(AC + CH)(AC - CH)}{(AC + CK)(AC - CK)} \\ &= \frac{AC^2 - CH^2}{AC^2 - CK^2} \end{aligned}$$

و بنابراین $CH = CK$.



شکل ۱۰

اثبات پنجم. (با استفاده از مفهوم قطب و قطبی) فرض کنیم S و T نقاط تقاطع AD با BC و AC

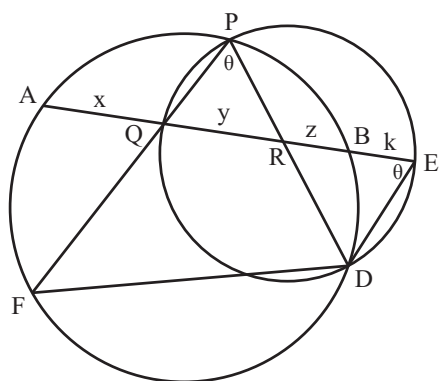


شکل ۱۱

با BD باشند. در این صورت، ST قطبی M نسبت به دایره مفروض است. به ویژه این بدان معنی است که اگر O مرکز دایره مفروض باشد، OM بر ST عمود است. از آنجا که M وسط PQ است، PQ نیز بر OM عمود است و از این رو، ST با PQ موازی است. اما به موجب تعریف، F مزدوج M نسبت به C و D بر ST واقع است. در نتیجه SD, SC, SM و SF یک دسته همساز تشکیل می‌دهند. هر خطی، چنین دسته خطوطی را در مزدوج‌های توافقی قطع می‌کند. به ویژه PQ آن را در M, Y, X و بی‌نهایت قطع می‌کند (زیرا ST موازی PQ است و می‌دانیم که نسبت ناهمسان (همساز) نسبت به انعکاس، ناورد است). از اینجا نتیجه می‌شود که $MX = MY$. ■

اثبات ششم. (با استفاده از لم هاروکی^۱) لم زیر که خود، به تنهایی قابل توجه است، می‌تواند در اثبات قضیه پروانه مورد استفاده قرار گیرد. ابتدا به بیان و اثبات آن می‌پردازیم.

لم ۲.۳. (هاروکی) فرض کنیم AB و FD وترهای نامتقاطع در یک دایره باشند و P نقطه متغیری در کمان AB به جز F و D باشد. در این صورت، برای هر نقطه P ، خطوط PF, PD وتر AB را در سه قطعه به طول‌های x, y, z و k چنان قطع می‌کند که نسبت $\frac{xz}{y}$ برابر با مقدار ثابتی مانند k است. اثبات. (I) در شکل ۱۲ دایره‌ای که از P, Q, D می‌گذرد، امتداد AB را در E قطع می‌کند.



شکل ۱۲

در این دایره، وتر QD در نقاط E و P با زاویه θ مشخص می‌شود. اینک با تغییر P ، زاویه FPD

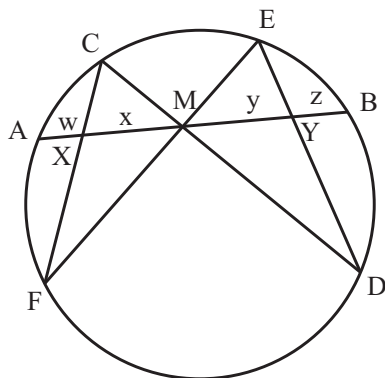
1) Haruki

در دایره مفروض ثابت باقی می ماند. در نتیجه برای هر موقعیت P ، دایره دوم همواره از نقطه ثابت E می گذرد. بنابراین پاره خط BE همواره طول ثابت k را خواهد داشت. اینک در وترهای متقاطع AB و PD در دایره مفروض، داریم $(x + y)z = PR.RD$ و در دایره دوم $PR.RD = y(z + k)$. پس

$$(x + y)z = z(z + k)$$

که به سادگی از آن نتیجه می شود $xz = yk$ و از این رو $\frac{xz}{y} = k$.

(II) در این اثبات، از نسبت های ناهمساز استفاده می شود و فرض می کنیم $AB = m$. ابتدا PA و PB را رسم می کنیم. از آنجا که زوایای APF ، FPD و DPA با تغییر P در کمان AB ، ثابت باقی می ماند، نسبت ناهمساز $(AFDB)$ ثابت باقی می ماند. بنابراین $\frac{xz}{ym}$ مقدار ثابتی است. پس $\frac{xz}{y}$ نیز مقدار ثابتی است. ■



شکل ۱۳

قضیه پروانه نتیجه ای از لم هاروکی است، زیرا با توجه به شکل ۱۳ داریم

$$\frac{w(y + z)}{x} = k = \frac{(w + x)z}{y}$$

اما چون M وسط AB است، پس

$$y + z = w + x$$

و در نتیجه

$$\frac{w}{x} = \frac{z}{y}$$

با اضافه کردن ۱ به طرفین این تساوی، به دست می آوریم

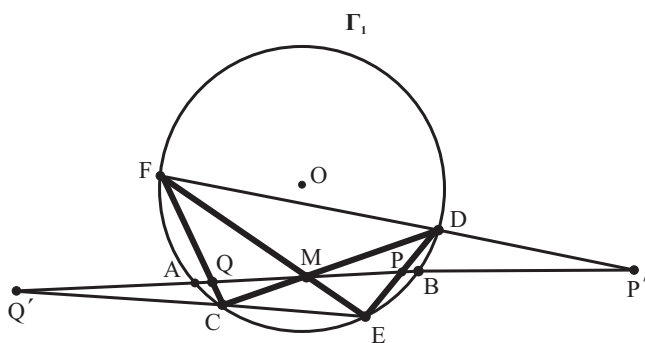
$$\frac{w+x}{x} = \frac{z+y}{y}$$

■ که از آن، تساوی $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ به دست می آید پس $x = y$.

یادداشت ۳.۳. اثبات دوم لم هاروکی، در واقع همان اثبات قضیه شال است و از این رو، می توان این لم و قضیه شال را در اساس یکی دانست. به این نکته نیز باید توجه کرد که در اثبات اول مقدار ثابت k برحسب طول پاره خطی خارج از دایره مفروض مشخص می شود.

در ادامه، اثباتی را برای قضیه پروانه بیان می کنیم که کاربرد مناسب هندسه تحلیلی را نشان می دهد. این اثبات، ابتدا در [۴] و سپس در [۳] آورده شده است و می توان آن را به مقاطع مخروطی نیز تعمیم داد.

اثبات هفتم. (هندسه تحلیلی) فرض کنیم Γ_1 دایره ای مفروض باشد. دستگاه محورهای مختصات را با مبدأ M (وسط AB و OM) در نظر می گیریم که در آن، $O(O, d)$ مرکز دایره است. اگر شعاع این



شکل ۱۴

دایره برابر با r باشد، معادله آن چنین است:

$$\Sigma_1 \equiv x^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0.$$

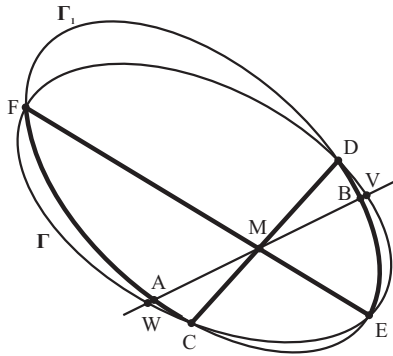
خطوط CD و EF که از مبدأ می گذرند، یک مقطع مخروطی تبهگون Γ_2 را به وجود می آورند که معادله آن به شکل زیر است:

$$\Sigma_2 \equiv ax^2 + 2bxy + by^2 = 0.$$

اینک برای هر k و l معادله

$$\Sigma \equiv k\Sigma_1 + l\Sigma_2 = 0$$

یک مقطع مخروطی Γ را نشان می‌دهد که از محل تلاقی Γ_1 و Γ_2 یعنی C, D, E, F می‌گذرد. هر مقطع مخروطی گذرنده بر C, D, E, F نیز به این شکل قابل نمایش است.



شکل ۱۵

فرض کنیم مقطع مخروطی $\Sigma = 0$ را در W و V قطع کند. معادله AB ، به صورت $y = 0$ است و

$$\Sigma_1(x, 0) = x^2 + d^2 - r^2, \quad \Sigma_2(x, 0) = ax^2.$$

پس طول‌های W و V ریشه‌های $\Sigma(x, 0) = 0$ هستند، یعنی

$$k(x^2 + d^2 - r^2) + lax^2 = 0$$

از آنجا که این معادله فاقد جمله درجه یک است، داریم $\overline{MV} + \overline{MW} = 0$ و

$$VM = MW. \quad (1)$$

اینک (۱) برای تمام مقاطع مخروطی که از C, D, E, F می‌گذرند، برقرار است و زوج خطوط ED و CF نیز چنین مقطعی است، پس تساوی $PM = MQ$ از (۱) به دست می‌آید. زوج خطوط CE و DF نیز مقطع مخروطی گذرنده بر C, D, E, F است. اگر این خطوط، AB را همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، در نقاط P' و Q' قطع کنند، آن‌گاه تساوی $P'M = MQ'$ نیز از (۱) به دست می‌آید.

فرض کنیم به جای دایره، یک مقطع مخروطی سره به معادله

$$\Sigma_1 \equiv Ax^2 + 2hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

داده شده باشد. نمادها را همان نمادهای قبلی فرض می‌کنیم. داریم

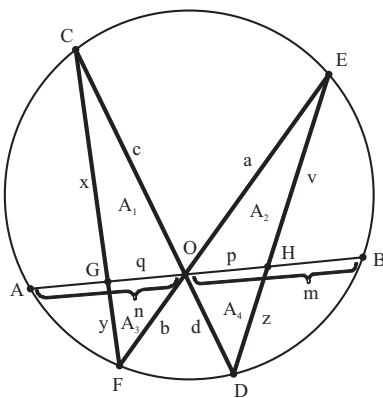
$$\Sigma(x, 0) = k(Ax^2 + 2Gx + C) + lax^2.$$

اگر مختصات A و B به ترتیب $(-\alpha, 0)$ و $(\alpha, 0)$ باشد، آن‌گاه عبارت $\Sigma_1(-\alpha, 0) = \Sigma_1(\alpha, 0) = 0$ ایجاب می‌کند که $G = 0$. پس معادله $\Sigma_1(x, 0) = 0$ دارای جمله درجه یک نیست و بقیه اثبات مانند قبل است. ■

قضیه ۴.۳. (تعمیم قضیه پروانه) فرض کنیم از نقطه M وسط وتر AB در مقطع مخروطی Γ_1 دو وتر دیگر CD و EF رسم شده است. اگر مقطع مخروطی گذرنده بر C, D, E, F را در V و W قطع کند، آن‌گاه $VM = MW$.

در پانوشت صفحه ۷۸ مرجع [۱۲]، مؤلف توجه خواننده را به مقاله‌ای که توسط کندی^۱ در ۱۸۹۸ چاپ شده [۴]، جلب کرده است:

قضیه ۵.۳. (کندی) نقطه دلخواه O را بر وتر AB انتخاب می‌کنیم. اگر مطابق شکل ۱۶، CF و ED وتر AB را به ترتیب در G و H قطع کنند، آن‌گاه نسبت حاصل ضرب طول پاره‌خط‌های محصور بین دایره و دو وتر متناسب با تفاضل (مجموع آن‌ها است).



شکل ۱۶

1) Candy

اثبات. فرض کنیم A_1, A_2, A_3 و A_4 به ترتیب مساحت CGO, EDH, GOF و ODH را نشان دهد. فرض کنیم $m, OB = m, OA = n, OH = p, OG = a, OF = c, OD = d, CG = x, GF = y, EH = v$ و $Hd = z$ در این صورت، چون

$$\widehat{C} = \widehat{E}, \widehat{F} = \widehat{D}, \dots$$

پس

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{cx}{av}, \frac{A_2}{A_3} = \frac{by}{dz},$$

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{cq}{dp}, \frac{A_2}{A_3} = \frac{bq}{ap}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{A_1 A_2}{A_2 A_3} = \frac{bcq^2}{adp^2} = \frac{bcxy}{advz}$$

و به دست می‌آوریم

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{xy}{vz} = \frac{AG \cdot GB}{AH \cdot HB},$$

$$\frac{(n-q)(m+p)}{(n+p)(m-p)} = \frac{mn - q(m-n) - q^2}{mn - p(m-n) - p^2}.$$

از این رو،

$$mn(p-q) = pq(m-n). \quad (2)$$

پس

$$\frac{mn}{pq} = \frac{m-n}{p-q}$$

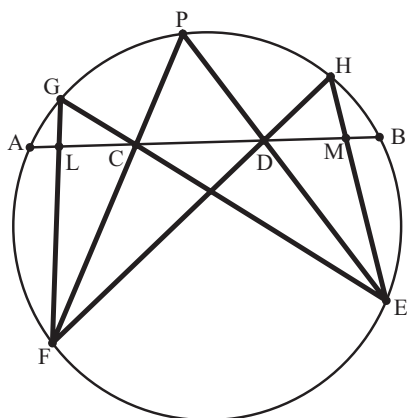
و حکم ثابت می‌شود. ■

نتیجه ۶.۳. قضیه پروانه.

اثبات. در این حالت، نقطه O در میان قضیه را می‌توان وسط AB انتخاب کرد که در این صورت، داریم $m-n=0$. اینک با توجه به (۲) نتیجه حاصل است. ■

نتیجه ۲. (قضیه پروانه با سه بال): فرض کنیم وتر AB در دایره O در C و D به سه قسمت مساوی تقسیم شود. فرض کنیم P یک نقطه دلخواه به جز A و B روی دایره باشد. اگر PC و PD دایره را به ترتیب در E و F و EC و FD دایره را در H و G قطع کنند و اگر GF و HE را به ترتیب در L و M قطع کنند، آنگاه $AL = BM$.

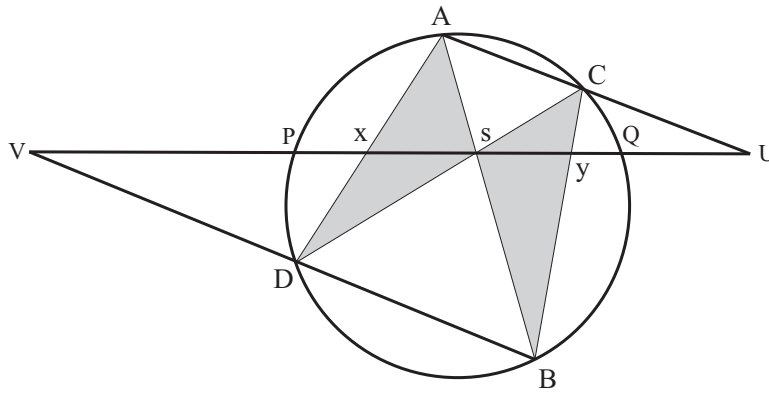
اثبات. در این حالت، قرار می‌دهیم $AC = n = ۱$ ، $CB = m = ۲$ و $CD = p = ۱$ که نتیجه می‌شود $LC = q = \frac{۲}{۳}$. به همین ترتیب، در چهارضلعی $PFHE$ نتیجه خواهیم گرفت که $DM = \frac{۲}{۳}$. پس $AL = MB$ ، زیرا $AC = DB$. ■



شکل ۱۷

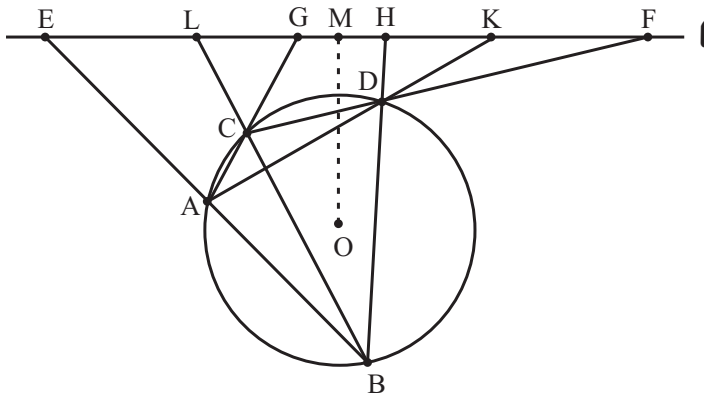
۴. ویژگی پروانه و سرشت‌نمایی بیضی

همان‌گونه که تاکنون شرح داده شد، قضیه کلاسیک پروانه مبین این است که هرگاه وترهای AB و CD در دایره Γ در نقطه S وسط PQ متقاطع باشند، آنگاه S وسط پاره‌خط‌های XY و UY که از تقاطع AD ، BC ، AC و BD به ترتیب در X ، Y ، U و Y به دست می‌آیند، نیز هست. در شکل فوق، نقطه S ، بدنه و مثلث‌های ADS و BCS بال‌های پروانه هستند. در [۱۷] نشان داده شده است که خط PQ را می‌توان با هر خط دیگری l در صفحه دایره S را با تصویر مرکز Γ بر روی l جایگزین کرد (شکل ۱۸). در [۵] و [۱۷] تعمیم‌های دیگری به هر مقطع مخروطی داده شده است. در این مورد، تنها به بیان قضیه زیر بسنده می‌کنیم که در [۱۷] اثباتی با استفاده از اعداد مختلط برای آن ارائه شده است.



شکل ۱۸

قضیه ۱.۴. فرض کنیم A, B, C, D چهار نقطه بر دایره K به مرکز O باشند. فرض کنیم M تصویر متعامد O بر روی خط راست l باشد. اگر M وسط دو نقطه $E = l \cap AB$ و $F = l \cap CD$ باشد، آن گاه M وسط نقاط $G = l \cap AC$ و $H = l \cap BC$ نیز هست.



شکل ۱۹

یادداشت ۲.۴. در حالتی که خط l دایره K را قطع کند، همان قضیه کلی تری به دست می آید که در مقدمه به آن اشاره شد و در [۱۲] صفحه ۷۸ درج شده است.

اینک به مفاهیم زیر توجه می کنیم. گوییم زوج (l, S) شامل خط l و نقطه S بر آن دارای خاصیت پروانه نسبت به چهارضلعی $ABCD$ است هرگاه S نقطه مشترک وسط $l \cap l_f$ و $l \cap l_d$ و $l \cap l_a$ و $l \cap l_c$ باشد.

باشد که در آن l_a, l_b, l_c, l_d به ترتیب محل تلاقی با خطوط AB, BC, CA, DA, AC و BD است. در چنین حالتی می نویسیم $ABCD \bowtie (l, S)$ و گوئیم خط l نسبت به چهارضلعی $ABCD$ در نقطه S دارای خاصیت پروانه است. بدیهی است که خطوط l و چهارضلعی چنان هستند که خطوط l_a, l_b, l_c, l_d و l نقاط تعریف شده در صفحه باشند.

نوشتار خود را با قضیه زیر که نشان می دهد ویژگی پروانه می تواند بیضی را سرشت نمایی کند به پایان می بریم. اثبات این قضیه در مرجع [۱۳] یافت می شود.

قضیه ۳.۴. (کلامکین) هر خم بسته، کراندار و مقعر که دارای ویژگی پروانه باشد، یک بیضی است.

مراجع

- [۱] رضایی، علی، «راه حلی برای یک مسأله مشهور»، یکان، شماره ۱۷، مرداد ۱۳۴۴، ص ۳۱.
- [۲] کوکس تیر، ه. س. م.، گریترز، س. ل. بازآموزی و باز شناخت هندسه، ترجمه عبدالحسین مصحفی، انتشارات دفتر کمک آموزشی و کتابخانه ها، چاپ نهم، ۱۳۷۶.
- [3] L. Bankoff, "The Metamorphism of the Butterfly Problem", *Math. Mag.*, **60**(1987), 195-210.
- [4] A. L. Candy, "A general theorem relating to transversals and its consequences", *Annals of math.*, **11**(1896), 175-176.
- [5] Z. Cerin, "A generalization of the Butterfly theorem from circles to conics", *Math. Communications*, **6**(2001), 161-164.
- [6] Z. Cerin, "Lines with the Butterfly property", *Math. Communications*, **8**(2003), 35-41.
- [7] Z. Cerin, Ginn Maris, Gianvella, "On improvement of the Butterfly theorem", *Far East J. Math. Sci.*, **23**(2006), 69-85.
- [8] G. D. Chakerian, G. T. Sally, M. S. Klamkin, "On the Butterfly Property", *Math. Mag.*, **42**(1969), 21-28.

- [9] Alex D. D. Craik and J. O' Connor, "Some unknown documents associated with William Wallace (1768-1843)", *Journal of the British Society for the History of Mathematics*, **26**(2011), 17-28.
- [10] Howard Eves, *Fundamentals of Geometry*, Allyn and Bacon, 1964, pp. 136-137.
- [11] William I. Jacobson, "The Butterfly problem-Extension, generalization", *Math. Mag.*, **42**(1969), 17-21.
- [12] R. A. Johnson, *Modern Geometry*, Houghton, Mifflin, Boston, 1924. (Reprinted by Dover, New York, as *Advanced Euclidean Geometry*.)
- [13] M. S. Klamkin, "An extension of Butterfly theorem", *Math. Mag.*, **38**(1965), 206-208.
- [14] Makay, *Proc. Edinburgh Math Soc.* III(1884-1885), 38.
- [15] K. Satyanara, "A simple proof of the Butterfly problem", *Crux Mathematicorum*, **7**(1981), 292.
- [16] A. Sliepcevic, "A new generalization of the Butterfly theorem", *Journal for Geometry and Graphics*, **6**(2002), 61-68.
- [17] V. Volence, "A generalization of Butterfly theorem", *Mathematical Communications*, **5**(2000), 157-160.
- [18] V. Volence, "The Butterfly theorem for conics", *Mathematical Communications*, **7**(2002), 35-38.

منصور معتمدی

اصفهان، خانه ریاضیات اصفهان

Motamedi_m@scu.ac.ir