

# کاربردهای پایه گرنر در هندسه ترکیباتی

زینب مالکی، امیر هاشمی

## چکیده

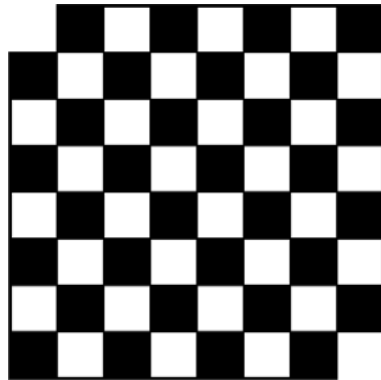
پایه‌های گرنر یکی از مباحثی است که به تازگی مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته و کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف ریاضیات و حتی سایر علوم پیدا کرده است. در این نوشتار، کاربرد پایه‌های گرنر را در هندسه ترکیباتی (مسئله جورچینی که مسئله‌ای با ماهیت ترکیباتی است) معرفی می‌کنیم.

## ۱. مقدمه

مسئله جورچینی<sup>۱</sup> یکی از مسئله‌های جذاب ترکیباتی است. شاید تاکنون پیش آمده که بخواهید سطحی (نه لزوماً به شکل مستطیل) را با موزاییک‌های غیر هم‌شکل بپوشانید. سؤال طبیعی که به ذهن می‌رسد این است که آیا این کار امکان‌پذیر است؟ به این مسئله معروف توجه کنید: یک صفحه  $8 \times 8$  که دو گوشه‌های متقابل آن حذف شده است را در نظر می‌گیریم (شکل ۱). آیا می‌توان این صفحه را توسط دومینوها معرفی شده در شکل ۲ پوشاند به طوری که هیچ مربعی خالی نماند و دومینوها نیز هم‌پوشانی نداشته باشند؟

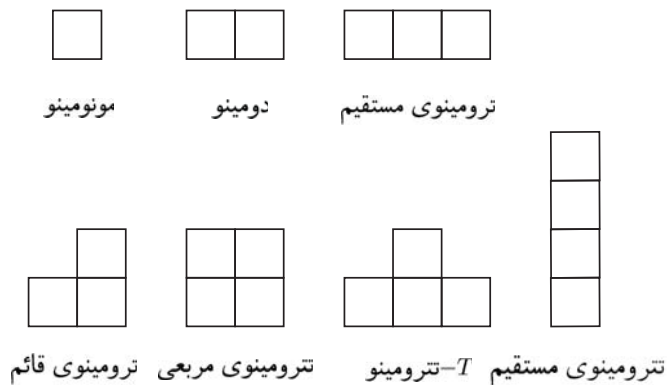
---

1) tiling problem



شکل ۱

شکل ۲ تعدادی از پلیومینوهای متداول را نشان می‌دهد. در حالت کلی، پلیومینوها شکل‌هایی هستند که از اتصال تعدادی مربع هم‌اندازه تشکیل شده‌اند به طوری که هر مربع، حداقل به یک مربع دیگر در یک یال متصل باشد (شطرنج‌بازان به چنین شکلی همبند رخ‌گرد می‌گویند؛ بدین معنی که رخ شطرنج می‌تواند در هر پلیومینو به صورت افقی یا عمودی از هر مربع به هر مربع دیگر آن، در تعداد متناهی حرکت، منتقل شود).



شکل ۲

پلیومینوها اولین بار در سال ۱۹۵۳ توسط سلْمون گولوم در یک سخنرانی برای باشگاه ریاضی هاروارد، معرفی و نامگذاری شدند. یک سال پس از این سخنرانی، متن آن در ماهنامه ریاضی

آمریکا [۵] منتشر شد و مورد توجه تعدادی از ریاضی دانان برجسته قرار گرفت. طرح‌های پلیومینو در حقیقت مثال‌هایی از هندسه ترکیببانی هستند. این شاخه از ریاضیات با روش‌هایی که شکل‌های هندسی می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند، سر و کار دارد و جنبه فراموش شده‌ای از ریاضیات است، زیرا به نظر می‌رسد که دارای روش‌های عمومی محدودی است و قاعده‌های نظام‌مند نتوانسته‌اند جای خلاقیت موجود در حل مسأله‌های آن را بگیرند. در حقیقت، ماهیت بسیاری از مسأله‌های طراحی در مهندسی دارای ساختار ترکیببانی است، به ویژه وقتی مؤلفه‌ها یا شکل‌های متداول باید به بهترین روش کنار یکدیگر قرار گیرند.

مسأله‌های جورچینی (مسأله‌های مربوط به پوشاندن یک سطح مشبک توسط پلیومینوها) در حالت کلی از نظر محاسباتی سخت هستند. برای مثال، مسأله تصمیم‌گیری برای پوشاندن یک شبکه نامتناهی توسط نسخه‌هایی از یک مجموعه متناهی از پلیومینوها، تصمیم‌ناپذیر است. اگرچه مسأله پوشاندن یک صفحه مشبک متناهی توسط نسخه‌های یک مجموعه متناهی از پلیومینوها، با بررسی کلیه حالت‌های ممکن، تصمیم‌پذیر است، ولی NP-کامل است (برای اثبات، [۴] صفحه ۲۵۷ را ببینید).

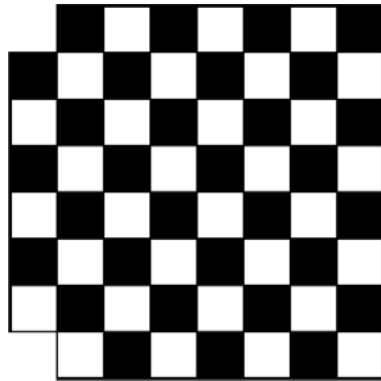
در این نوشتار، ابتدا با بیان برخی از ایده‌های ترکیببانی کارآمد در حل چنین مسأله‌هایی، مقدمه‌ای برای بازآفرینی جنبه ریاضی پلیومینوها ارائه می‌کنیم، سپس ضمن معرفی حالت خاصی از پایه‌های گربنر از هندسه جبری محاسباتی، با استفاده از این ابزار قدرتمند، روش دیگری برای حل این مسأله‌ها معرفی می‌نماییم. برای این منظور، در بخش ۲، نمونه‌هایی از راه‌حل‌های ترکیببانی را برای حل بعضی از مسأله‌های از این دست ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، تعریف‌ها و پیش‌نیازهای مورد نیاز را بیان می‌نماییم. سپس در بخش ۴، قضیه اصلی  $\mathbb{Z}$ -پوشش‌پذیری (که آن را با پایه‌های گربنر مرتبط می‌سازد) بیان می‌کنیم. در بخش ۵، پایه‌های گربنر را روی  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  معرفی نموده و نمونه‌ای از کاربرد آن در مسأله جورچینی را بیان می‌کنیم. در بخش آخر، یک رنگ آمیزی تعمیم‌یافته را که در حل مسأله‌های جورچینی کاربرد دارد، بیان می‌نماییم.

## ۲. پلیومینوها

در این بخش، نمونه‌هایی از راه‌حل‌های ترکیببانی برای برخی از مسأله‌های جورچینی از جمله مسأله‌ای که در مقدمه آمد، ارائه می‌نماییم.

ابتدا این مسأله را در نظر بگیرید: آیا می‌توان یک صفحه  $8 \times 8$  را که دو مربع در گوشه‌های انتهایی یک یال آن حذف شده‌اند (شکل ۳)، توسط دومینوها پوشاند؟ پاسخ به این سؤال، سخت نیست، زیرا در این حالت، هر ستون تعداد زوجی مربع دارد و لذا می‌تواند با دومینوها پوشانده شود و در نتیجه، کل شکل می‌تواند توسط دومینوها پوشانده شود. اما آیا می‌توان شکل ۱ را توسط دومینوها پوشاند؟ فرض کنید این صفحه مانند صفحه شطرنج شکل ۱ رنگ شده باشد. در این صورت، مشاهده می‌شود که هر دومینو دقیقاً یک خانه سیاه و یک خانه سفید را می‌پوشاند. پس  $m$  عدد

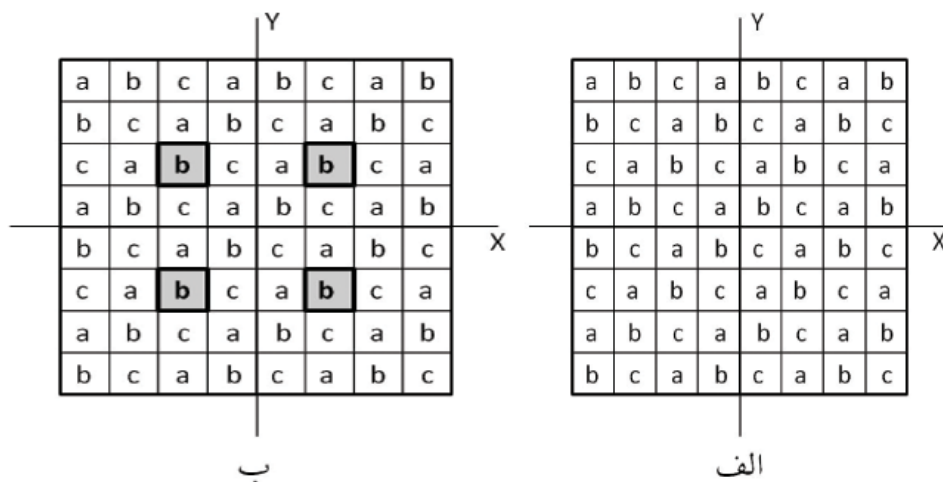
دومینو،  $m$  خانه سیاه و  $m$  خانه سفید را می پوشانند، یعنی از هر کدام به تعداد مساوی. اما تعداد خانه های سیاه صفحه داده شده بیشتر از تعداد خانه های سفید است. بنابراین نمی توان آن ها را با دومینوها پوشاند.



شکل ۳

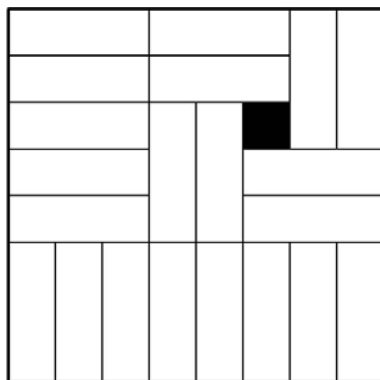
اکنون به این سؤال توجه کنید: شرط لازم و کافی برای این که صفحه حاصل از یک شبکه مربعی  $8 \times 8$  (مانند صفحه شطرنج) که یک خانه از آن حذف شده، به وسیله ۲۱ عدد ترومینوی مستقیم پوشانده شود، چیست؟

برای پاسخ به این سؤال، فرض کنید می خواهیم صفحه شطرنج را با ۲۱ عدد ترومینوی مستقیم و یک مونومینو بپوشانیم. ابتدا صفحه شطرنج را با رنگ هایی با نام های  $a$ ،  $b$  و  $c$  مانند شکل ۴ (الف)، رنگ می کنیم. مشاهده می شود که صفحه شطرنج شامل ۲۱ مربع به رنگ  $a$ ، ۲۲ مربع به رنگ  $b$  و ۲۱ مربع به رنگ  $c$  است. هر ترومینوی مستقیم از هر رنگ دقیقاً یک مربع را می پوشاند، بنابراین مونومینو باید در یکی از خانه های به رنگ  $b$  باشد. از طرف دیگر، رنگ خانه های متقارن با این خانه نسبت به مرکز مختصات و محورها نیز باید  $b$  باشد، زیرا در غیر این صورت، با دوران صفحه (تغییر در نامگذاری رنگ ها) این خانه می تواند یکی از رنگ های ۲۱ تایی را اختیار کند. بنابراین تنها مکان های ممکن برای مونومینو یکی از چهار مربع مشخص شده در شکل ۴ (ب) است.



شکل ۴

در حالتی که مونومینو در یکی از خانه‌های مشخص شده در شکل ۴ (ب) باشد، مشابه شکل ۵ می‌توان صفحه را پوشاند، بنابراین جواب سؤال اصلی به دست می‌آید.



شکل ۵

این روش را می‌توان به صفحات مشبک کلی‌تر نیز تعمیم داد. برای مطالعه بیشتر در این زمینه، می‌توانید به [۶، ۸] مراجعه نمایید. همان‌طور که در این مثال‌های ساده مشاهده نمودید، با پیچیده‌شدن چنین سؤالانی در صورت پوشش‌پذیر نبودن صفحه، برای پاسخ به سؤال، نیاز به رنگ آمیزی‌های هوشمندانه‌ای داریم که گاهی یافتن آن‌ها بسیار مشکل است. در ادامه این نوشتار،

روش بودینی و نوول [۲] را مطرح می‌کنیم که در بسیاری از حالات با استفاده از محاسبات رایانه‌ای در صورت پوشش‌پذیر نبودن صفحه، بتوان آن را توسط رایانه ثابت کرد. همچنین یک رنگ آمیزی که تعمیمی برای تمام این رنگ آمیزی‌ها است، ارائه می‌دهیم.

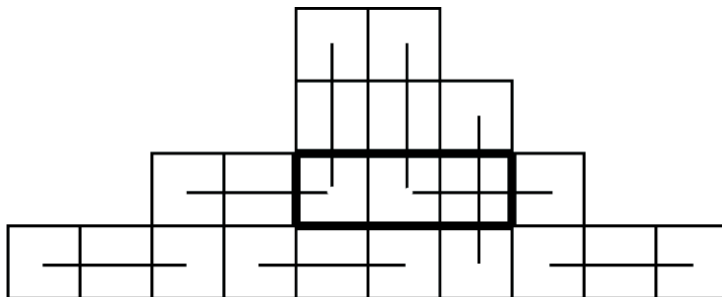
### ۳. تعاریف و پیش‌نیازها

برای معرفی روش ذکر شده، در این بخش تعاریف مورد نیاز را ارائه می‌نماییم.

منظور از یک سلول  $c(i, j)$  در صفحه مختصات، مجموعه

$$\{(x, y) : i \leq x \leq i + 1, j \leq y \leq j + 1\}$$

است. اگر  $S$  را مجموعه تمام سلول‌های صفحه در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که این مجموعه با  $\mathbb{Z}^2$  در تناظر یک‌به‌یک است. از این پس، منظور از پلیومینو اجتماع متناهی از سلول‌ها است که لزوماً همبند نیست. فرض کنید  $P$  یک پلیومینو و  $E$  مجموعه‌ای از پلیومینوها باشد. یک  $\mathbb{Z}$ -پوشش<sup>۱</sup> یا پوشش علامت‌دار<sup>۲</sup> برای  $P$  توسط  $E$  شامل تعداد متناهی پلیومینوی انتقال‌یافته است (با امکان همپوشانی)، که به هر پلیومینو مقدار  $+1$  و یا  $-1$  تخصیص داده شده، به طوری که برای هر سلول  $c(i, j) \in P$ ، مجموع مقادیر پلیومینوهای  $c(i, j)$  را می‌پوشانند، برابر  $+1$  است و در غیر این صورت، مقدار آن برابر صفر است (برای مثال شکل ۶ را ببینید).



شکل ۶. پلیومینوی  $P$  که توسط ترومینوهای مستقیم  $\mathbb{Z}$ -پوشش‌پذیر است. توجه کنید که تنها مقدار تخصیص داده شده به ترومینوی پررنگ، منفی است.

مشاهده می‌شود که اگر یک پلیومینو با مجموعه‌ای از پلیومینوها پوشانده شود، این پلیومینو توسط این مجموعه،  $\mathbb{Z}$ -پوشش نیز دارد (کافی است به تمام پلیومینوها مقدار  $+1$  را نسبت دهیم). بنابراین  $\mathbb{Z}$ -پوشش‌پذیر بودن یک شرط کافی برای پوشش‌پذیر بودن است. این شرط کافی توسط کانوی و نوول در [۳] ارائه شد. آن‌ها همچنین یک شرط معادل جبری برای  $\mathbb{Z}$ -پوشش‌پذیر بودن ارائه دادند.

1)  $\mathbb{Z}$ -tiling 2) Signed tiling

در اینجا روش بودینی و نوول [۲] را که با استفاده از پایه‌های گرینر شرط معادلی برای  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیر بودن ارائه کرده‌اند مطرح می‌نماییم. مزیت این روش در این است که در بسیاری از موارد می‌تواند توسط رایانه بررسی شود. در این روش، با ارائه یک ساختار چندجمله‌ای، مسأله  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیری با محاسبه یک پایه گرینر حل می‌شود. ابتدا تعریف دقیق مفاهیم گفته شده را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱ -  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوی وزن دار یا به طور ساده،  $\mathbb{Z}$  - پلیومینو، نگاشتی  $P$  از  $\mathbb{Z}^2 \simeq S$  به  $\mathbb{Z}$  است که به جز تعداد متناهی از نقاط، تصویر سایر نقاط، صفر است (تکیه‌گاه<sup>۱</sup> نگاشت  $P$ ، مجموعه‌ای متناهی است). برای هر سلول  $c$ ،  $P(c)$  را وزن  $P$  در  $c$  می‌گوییم.

فضای شامل تمام  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوهای وزن دار را با  $P_{\mathbb{Z}}$  نمایش می‌دهیم که یک  $\mathbb{Z}$  - مدول آزاد است. در واقع، سلول‌های با وزن  $+1$  پایه‌ای برای  $P_{\mathbb{Z}}$  تشکیل می‌دهند.

تعریف ۲ -  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوی  $P$  را توسط مجموعه  $E$  از  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوهای وزن دار  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیر گوئیم هرگاه  $P = \sum_{i=1}^t \lambda_i P_i(\cdot - a_i)$  که در آن  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ،  $P_i \in E$  و  $a_i \in \mathbb{Z}^2$  (توجه کنید که منظور از  $P_i(\cdot - a_i)$ ، انتقال یافته  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوی  $P_i$  توسط بردار  $a_i$  است).

فرض کنید  $X_1, X_2, Y_1$  و  $Y_2$  چهار متغیر باشند. برای هر  $a \in \mathbb{Z}^2$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\chi^a = X_1^{\frac{a_1+|a_1|}{2}} X_2^{\frac{a_2+|a_2|}{2}} Y_1^{\frac{|a_1|-a_1}{2}} Y_2^{\frac{|a_2|-a_2}{2}}.$$

به این ترتیب، هر مربع صفحه به صورتی کد می‌شود که توان منفی نداریم. بنابراین به هر پلیومینو، یک چندجمله‌ای به صورت زیر نسبت می‌دهیم.

تعریف ۳ -  $P$  - چندجمله‌ای وابسته به هر  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوی  $P$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_P = \sum_{a \in \mathbb{Z}^2} P(c(a)) \chi^a.$$

تعریف ۴ - اگر  $E$  مجموعه‌ای از  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوها باشد، ایدال پوششی  $E$  که با  $I(E)$  نمایش می‌دهیم عبارت است از

$$\langle X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1, \{Q_P : P \in E\} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

منظور از اندیس  $\mathbb{Z}$  در اینجا این است که  $I(E)$  را به عنوان ایدال حلقه  $\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$  در نظر می‌گیریم.

بودینی و نوول با استفاده از این چندجمله‌ها، رابطه بین مسأله  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیر بودن و پایه‌های گرینر را به صورتی که در بخش‌های بعدی مشاهده خواهیم کرد، ارائه نمودند.

1) Support

#### ۴. پوشش برای پلیومینوها $\mathbb{Z}$

در این بخش، قضیه اصلی مسأله  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیری را (با استفاده از پایه‌های گربنر) بیان و اثبات می‌نماییم. برای این منظور، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۵ فضای  $P_{\mathbb{Z}}$  با فضای

$$\frac{\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]}{\langle X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1 \rangle_{\mathbb{Z}}}$$

$\mathbb{Z}$  - یکرخت است.

اثبات. تابع خطی  $f: \mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2] \rightarrow P_{\mathbb{Z}}$  را در نظر می‌گیریم که  $f(X_1^{a_1} Y_1^{b_1} X_2^{a_2} Y_2^{b_2})$  را به سلول  $(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$  با وزن یک می‌برد. حال اگر ثابت کنیم  $\ker(f) = \langle X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1 \rangle$ ، آن‌گاه بنا بر قضایای یکرختی در جبر، نتیجه حاصل می‌شود. می‌دانیم هر پلیومینوی  $Q$  را می‌توان به شکل  $Q = R + \sum_{i=1}^t Q_i (X_i Y_i - 1)$  نوشت که  $R$  فقط شامل تک جمله‌ای‌های  $\chi^a$  ( $a \in \mathbb{Z}^2$ ) است. توجه می‌کنیم که منظور از پلیومینوی  $\circ$  یا پلیومینوی تهی، پلیومینوی  $P$  است که وزن آن روی هر سلول صفر است. از آنجا که  $f$  خطی است، بنا بر تعریف، داریم  $f(\chi^a X_i Y_i) = f(\chi^a)$  و لذا  $f(Q_i (X_i Y_i - 1)) = \circ$ . در نتیجه  $f(Q) = \circ$  اگر و تنها اگر  $f(R) = \circ$ . از طرف دیگر،  $\{f(\chi^a)\}$  یک پایه برای  $\mathbb{Z}$  - مدول  $P_{\mathbb{Z}}$  است. پس، از خطی بودن  $f$  نتیجه می‌شود که شرایط  $f(R) = \circ$ ،  $R = \circ$  و  $Q \in \langle X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1 \rangle_{\mathbb{Z}}$  معادل‌اند. بنابراین

$$\ker(f) = \langle X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

قضیه ۶ فرض کنید  $E$  مجموعه‌ای از  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوها باشد.  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوی  $P$  توسط  $E$ ، پوشش پذیر است اگر و تنها اگر  $Q_P \in I(E)$ .

اثبات. بنا بر تعریف،  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوی  $P$  توسط مجموعه  $E$  پوشش پذیر است اگر و تنها اگر  $P = \sum_{i=1}^t \lambda_i P_i (\cdot - a_i)$  که در آن  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ ،  $P_i \in E$  و  $a_i \in \mathbb{Z}^2$  علاوه بر این، در حلقه

$$\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2] / \langle X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1 \rangle_{\mathbb{Z}}$$

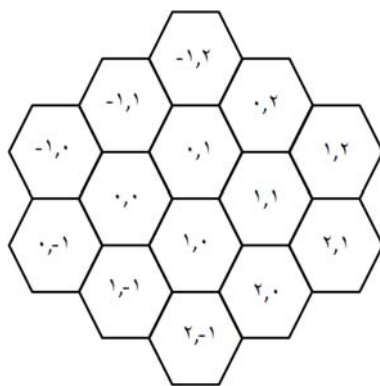
داریم  $Q_{P_i(\cdot - a_i)} = \chi^{a_i} Q_{P_i}$  (توجه کنید که در ادامه اثبات، همه تساوی‌ها در همین حلقه هستند). در نتیجه  $Q_P = \sum_{i=1}^t \lambda_i \chi^{a_i} Q_{P_i}$  و بنابراین  $Q_P \in I(E)$ . برعکس، اگر  $Q_P \in I(E)$ ، آن‌گاه  $Q_P = \sum_{P' \in E} (\sum \lambda_i \chi^{a_i}) Q_{P'}$  که  $Q_{P'}$ ها در تک جمله‌ای‌هایشان هیچ  $X_i$  و  $Y_i$  متوالی ندارند. بنابراین داریم  $P = \sum_{P' \in E} (\sum \lambda_i P'(\cdot - a_i))$ ، یعنی  $P \in \mathbb{Z}$  - پلیومینوی  $P$  توسط مجموعه  $E$  پوشش پذیر است. ■



می توان به جای مشبکه مربعی<sup>۱</sup>، مشبکه شش گوشه ای<sup>۲</sup> را در نظر گرفت. در واقع، مشبکه شش گوشه ای با کنار هم قرار دادن نسخه های انتقال یافته پوش محدب<sup>۳</sup> نقاط  $(0, 0)$ ،  $(1, 0)$ ،  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ،  $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ،  $(2, 0)$  و  $(1, \sqrt{3})$  ساخته می شود. برای  $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$  منظور از  $[a_1, a_2]$  سلول شش گوشه ای<sup>۴</sup> است که گوشه سمت چپ پایین آن  $(\frac{1}{3}(a_1 + a_2), \frac{\sqrt{3}}{3}(-a_1 + a_2))$  است (شکل ۷).

تعریف ۷ -  $P$  چند جمله ای هر  $\mathbb{Z}$  - شش گون  $P^5$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Q_P = \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2} P([a_1, a_2]) X^{(a_1, a_2)}.$$



شکل ۷

مشابه آنچه در مورد مشبکه مربعی داشتیم، در رابطه با مشبکه شش گوشه ای نیز قضیه زیر را داریم.

قضیه ۸ فرض کنید  $E$  مجموعه ای از  $\mathbb{Z}$  - شش گون ها باشد.  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوی شش گون  $P$  توسط  $E$ ، پوشش پذیر است اگر و تنها اگر

$$Q_P \in \langle Q_{P'} \text{ with } P' \in E, X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

لازم به ذکر است که برای بررسی تعلق یک چند جمله ای به یک ایدال از  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  که  $\mathbb{K}$  میدان است، فرم متعارف چند جمله ای را نسبت به پایه گربنر ایده آل محاسبه می کنیم. اگر این مقدار برابر صفر شد، چند جمله ای متعلق به ایده آل است. در بخش بعد، تعریف و نحوه محاسبه پایه گربنر یک ایده آل با ضرایب در اعداد صحیح را معرفی خواهیم کرد.

1) Square lattice 2) Hexagonal lattice 3) Convex hull 4) Hexagonal cell 5)  $\mathbb{Z}$ -polyhexe

## ۵. پایه گریبدر روی $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$

در این بخش، به معرفی ابزاری می‌پردازیم که با استفاده از آن بتوانیم مسأله تعلق داشتن یک چندجمله‌ای به یک ایدآل در  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  را حل کنیم. پایه‌های گریبدر یکی از مباحث پژوهشی است که مورد اقبال ریاضیدانان قرار گرفته و کاربردهای فراوانی پیدا کرده است ([۷] مرجع خوبی برای آشنایی مقدماتی با این مفهوم است). اگر به جای  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ ،  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  را در نظر بگیریم که  $\mathbb{K}$  یک میدان است، پایه گریبدر و الگوریتم بوخبرگر، مسأله را حل می‌کند. می‌توان حالت تعمیم‌یافته‌ای از پایه گریبدر و الگوریتم بوخبرگر را برای  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  ارائه نمود. ثابت می‌شود که یک عضو به ایدآلی از  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  تعلق دارد اگر و تنها اگر باقیمانده تقسیم آن به پایه، صفر باشد (برای توضیحات بیشتر، [۱] فصل ۱۰ را ببینید). در اینجا ضمن بیان مقدمات، تعریف پایه گریبدر روی  $\mathbb{Z}$  را ارائه می‌نماییم. فرض کنید  $R = \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  حلقه چندجمله‌ای‌های  $n$  متغیره با ضرایب در  $\mathbb{Z}$  باشد. یک عضو  $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$  از  $R$  را تک‌جمله‌ای و یک عضو  $cx_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$  از  $R$  که  $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  را یک جمله<sup>۱</sup> می‌گوییم.  $\mathcal{M}$  را مجموعه تمام تک‌جمله‌ای‌های  $R$  در نظر بگیرید. یک ترتیب تک‌جمله‌ای<sup>۲</sup> روی  $R$ ، ترتیبی کلی  $\prec$  روی  $\mathcal{M}$  است که در شرط‌های زیر صدق کند:

- (الف) برای هر  $m_1, m_2, m_3$  در  $\mathcal{M}$  که  $m_1 \prec m_2$ ، نتیجه شود  $m_1 m_3 \prec m_2 m_3$ ؛  
 (ب) به‌ازای هر  $m$  در  $\mathcal{M}$ ،  $m \prec m$ .

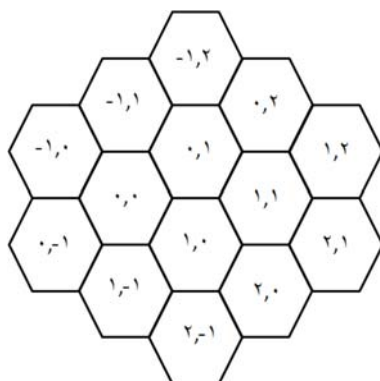
مثال مهمی از ترتیب تک‌جمله‌ای، ترتیب لغت‌نامه‌ای<sup>۳</sup>  $\prec_{\text{lex}}$  است. فرض کنید  $m_1 = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  و  $m_2 = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ ،  $m_1 \prec_{\text{lex}} m_2$ ، گوئیم  $m_1$  هرگاه اولین مؤلفه ناصفر  $(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$ ، مثبت باشد. در هر چندجمله‌ای مانند  $f$ ، بزرگترین تک‌جمله‌ای نسبت به ترتیب  $\prec$  را تک‌جمله‌ای پیشرو<sup>۴</sup>، جمله<sup>۵</sup> مربوط به آن را جمله پیشرو<sup>۵</sup> و ضریب آن را ضریب پیشرو<sup>۶</sup> نامیده و به ترتیب با نمادهای  $LM(f)$ ،  $LT(f)$  و  $LC(f)$  نمایش می‌دهیم. ایدآل جمله<sup>۶</sup> پیشروی  $I$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$LT(I) = \langle LT(f) \mid f \in I \rangle.$$

ثابت می‌شود که اگر  $I$  ایدآلی از  $R$  باشد، آن‌گاه مولدی متناهی برای  $I$  مانند  $\{g_1, \dots, g_m\}$  وجود دارد که  $LT(I) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_m) \rangle$ . چنین مولدی را پایه گریبدر نسبت به ترتیب  $\prec$  برای  $I$  گویند. در [۱] فصل ۱۰، الگوریتمی برای محاسبه چنین پایه‌ای ارائه شده است. این بخش را با ارائه کاربردی از مطالب گفته شده ادامه می‌دهیم و قضایای کلاسیکی که کانوی و همکارش ثابت کردند را به کمک پایه گریبدر ثابت می‌نماییم.

1) term      2) monomial ordering      3) lexicographic order      4) leading monomial  
 5) leading term      6) leading coefficient

فرض کنید  $T_N$  مثلثی از سلول‌های شش‌گون باشد که  $N(N+1)/2$  سلول دارد (شکل ۸).



شکل ۸

قضیه ۹ الف) ناحیه مثلثی  $T_N$  در مشبک شش‌گون، یک  $\mathbb{Z}$ -پوشش با نسخه‌های هم‌نهشت (نسخه‌های حاصل از انتقال و دوران)  $T_2$  دارد اگر و تنها اگر  $N$  به‌پیمانه ۳ هم‌نهشت با ۰ یا ۲ باشد.  
 ب) ناحیه مثلثی  $T_N$  در مشبک شش‌گون، یک  $\mathbb{Z}$ -پوشش با نسخه‌های هم‌نهشت شش‌گون شامل سه خانه مجاور روی یک خط دارد اگر و تنها اگر  $N$  به‌پیمانه ۹ هم‌نهشت با ۰ یا ۸ باشد.  
 اثبات. الف) رابطه ترتیب تک‌جمله‌ای  $X_1 <_{\text{lex}} Y_1 <_{\text{lex}} X_2 <_{\text{lex}} Y_2 <_{\text{lex}} X_3 <_{\text{lex}} Y_3 <_{\text{lex}} X_4 <_{\text{lex}} Y_4$  را در نظر بگیرید. ایدآل پوششی  $T_2$  به‌شکل زیر است:

$$I(E) = \langle X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1, X_1 + X_2 + 1, X_1 X_2 + X_1 + X_2 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

با استفاده از حالت تعمیم‌یافته الگوریتم بوخبرگر در میپل برای محاسبه پایه‌های گریبنر با ضرایب در  $\mathbb{Z}$ ، پایه‌ای برای  $I(E)$  به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$B = \{X_1 + X_2 + 1, X_1^2 + X_2 + 1, Y_2 + X_2 + 1, Y_1 - X_2\}.$$

همچنین از آنجا که

$$Q_{T_N} = \sum_{i=0}^{N-1} X_2^i \left( \sum_{j=0}^{N-i-1} X_1^j \right),$$

می‌توان باقیمانده  $Q_{T_N}$  را بر  $(X_1 + X_2 + 1, X_1^2 + X_2 + 1, Y_2 + X_2 + 1, Y_1 - X_2)$  محاسبه کرد. به‌وضوح این باقیمانده برابر است با

$$\begin{cases} 0, & N \equiv 0 \text{ یا } 2 \\ 1, & N \equiv 1. \end{cases}$$

اثبات قسمت (ب) مشابه است.

## ۶. رنگ آمیزی تعمیم یافته

در این بخش، یک رنگ آمیزی تعمیم یافته تعریف می کنیم که تعمیم رنگ آمیزی های تعریف شده توسط کانوی و همکارش است. در ادامه، باقیمانده چندجمله ای  $P$  بر  $(P_1, \dots, P_s)$  را با  $\bar{P}^{(P_1, \dots, P_s)}$  نمایش می دهیم.

تعریف ۱۰ فرض کنید  $E$  مجموعه ای از  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوها و  $B$  یک پایه گریبنر  $I(E)$  باشد. رنگ آمیزی تعمیم یافته  $\chi_E$  نگاشتی از  $\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$  به  $\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$  است به طوری که  $\chi_E(Q) = \bar{Q}^B$ .

با توجه به مطالب گفته شده، قضیه زیر را به سادگی می توان ثابت کرد.

قضیه ۱۱ یک  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوی  $P$ ، توسط مجموعه  $E$  از  $\mathbb{Z}$  - پلیومینوها،  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیر است اگر و تنها اگر  $\chi_E(P) = 0$ .

برای مثال، اگر ایدال متناظر با مجموعه  $E$  شامل تمام  $T$  - تترامینوها (شکل ۹) را در نظر بگیریم، داریم

$$I(E) = \langle X_1^2 + X_1 X_2 + X_1 + 1, X_1^2 X_2 + X_1 X_2 + X_1 + X_2, \\ X_1 X_2 + X_2^2 + X_2 + 1, X_1 X_2^2 + X_1 X_2 + X_1 + X_2, \\ X_1 Y_1 - 1, X_2 Y_2 - 1 \rangle.$$

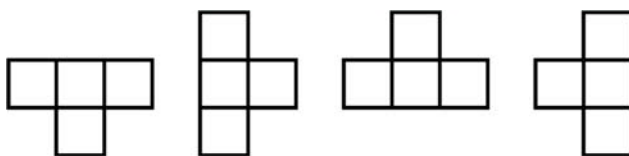
با محاسبه پایه گریبنر تعمیم یافته برای  $I(E)$  با ترتیب  $Y_1 \prec_{\text{lex}} Y_2 \prec_{\text{lex}} X_1 \prec_{\text{lex}} X_2$ ، به دست می آوریم

$$B = \{X_1 + 3, X_2 + 3, 8, Y_1 + 3, Y_2 + 3\}.$$

علاوه بر این، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\chi_E(QP) = \chi \left( \sum_{c(i,j) \in P} Q_{c(i,j)} \right) = \chi_E \left( \sum_{c(i,j) \in P} \chi_E(Q_{c(i,j)}) \right).$$

حال از آنجا که  $A := \chi_E(Q_{c(i,j)})$  یک عدد صحیح است و  $8 \in B$ ، نتیجه می شود که  $\chi_E(A)$  برابر با باقیمانده  $A$  در تقسیم بر ۸ است. بنابراین، قضیه زیر را داریم.

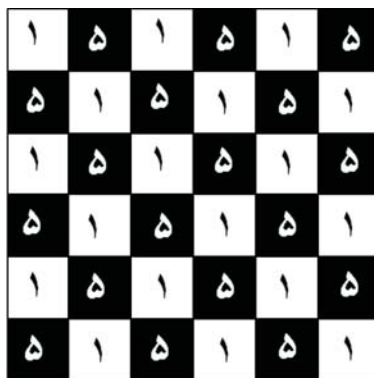


شکل ۹

قضیه ۱۲ فرض کنید خانه‌های صفحه، مشابه صفحه شطرنج رنگ شده‌اند (شکل ۱۰). به خانه‌های سفید عدد ۵ و به خانه‌های سیاه عدد ۱ را نسبت می‌دهیم. یک پلیومینو  $P$ ، توسط  $T$  - تترامینوها  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیر است اگر و تنها اگر مجموع مقادیر سطحی که می‌خواهیم ببوشانیم، مضربی از ۸ باشد.

نتیجه ۱۳ مربع  $n \times n$  توسط  $T$  - تترامینوها پوشش پذیر است اگر و تنها اگر  $n$  بر ۴ بخش پذیر باشد.

اثبات. اگر  $n$  فرد باشد، مجموع مذکور در قضیه قبل فرد است و لذا مربع  $n \times n$ ،  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیر نیست و در نتیجه پوشش پذیر هم نمی‌باشد. اگر  $n$  زوج باشد، مشاهده می‌شود که مجموع متناظر، برابر با  $3n^2$  بوده و لذا  $\chi_E(Q_{n \times n})$  برابر است با  $3n^2$  به پیمانۀ ۸. بنابراین مربع  $n \times n$  با  $T$  - تترامینوها  $\mathbb{Z}$  - پوشش پذیر است اگر و تنها اگر  $n$  بر ۴ بخش پذیر باشد. همچنین مشاهده می‌شود که مربع  $4 \times 4$  پوشش پذیر است، بنابراین اگر  $n$  بر ۴ بخش پذیر باشد، آنگاه مربع  $n \times n$  نیز پوشش پذیر خواهد بود. ■



شکل ۱۰

## مراجع

- [1] T. Becker, V. Weispfenning, *Grobner bases: A computational approach to commutative algebra*, Springer-Verlag, 1993.
- [2] O. Bodini, B. Nouvel,  *$\mathbb{Z}$ -tilings of polyominoes and standard basis*, IWICIA, 2004.
- [3] J. H Conway, J. C. Lagarias, "Tiling with polyominoes and combinatorial group theory", *J. C. T. Series A*, **53**(1990), 183-208.
- [4] M. Gary and D.S. Johnson, *Computers and intractability: a guid to the theory of NP-completeness*, Freeman, San Fransisco, 1979.
- [5] S. W. Golomb, "Checker boards and polyominoes", *Amer. Math. Monthly*, **61**(1954), 675-682.
- [6] S. W. Golomb, "Tiling with polyominoes", *J. C. T. Series A*, **1**(1966), 280-296.

[۷] رشید زارع نهندی، «بوخبرگر و پایه‌های گربنر»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹)، ۵۵ – ۸۰.

[۸] سلمون گولوم، پلیومینو، ترجمه سپیده چمن‌آرا و مانی رضایی، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۸۱.

---

امیر هاشمی [amir.hashemi@cc.aut.ac.ir](mailto:amir.hashemi@cc.aut.ac.ir)

زینب مالکی [zmaleki@math.aut.ac.ir](mailto:zmaleki@math.aut.ac.ir)

اصفهان، دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی، کد پستی ۸۳۱۱۱-۸۴۱۵۶