فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ۶۹ تا ۸۲

دیدار با مسأله

بامداد یاحقی

خیز و در کاسهٔ زر آب طربناک انداز
پیشتر زان که شود کاسهٔ سر خاک‌انداز

حافظ

مسأله‌های ۶ و ۷ از بخش «حل مسأله» مسأله‌هایی استاندارد هستند. در پیوند با بخش «مسأله برای حل» این شماره، نگارنده با مسألهٔ ۱ از طریق ایمیل شخصی به نام علی‌محمد کارپرور، که آن‌گونه که در ایمیلشان ذکر کرده‌اند مدرس ریاضی دانشگاه آزاد واحد استهبان هستند، آشنا شد.[۱] البته شایان گفتن است که ایشان با سری مقالات «دیدار با مسأله» آشنایی نداشتند و صرفاً از نگارنده خواستار راهنمایی در حل مسأله بودند که نسبت به خواستهٔ ایشان دریغی نشد. مسألهٔ ۲ جزء دانسته‌های به‌اصطلاح فولکلور نظریهٔ حلقه‌ها و میدان‌هاست که نخستین بار نگارنده در طی برهان گزاره‌ای در کتاب Simultaneous Triangularization به نگارش Heydar Radjavi و Peter Rosenthal به آن برخورد کرد. مسأله‌های ۲ و ۳ و ۴ از اشتباهات جدی کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی دانشجویی کشور به نگارش نگارنده است. این اشتباهات جدی توسط همکاران گرامی آقایان بابک صمدی (مسألهٔ ۲) و محمد حسین جعفری (مسأله‌های ۳ و ۴) به نگارنده گوشزد شدند. در اینجا مراتب سپاس خود را به این همکاران گرامی و به‌ویژه به آقای دکتر جعفری ابراز می‌کنم که نکاتی چند در ارتباط با کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی دانشجویی را در طی چندین ایمیل به نگارنده گوشزد کردند. مسألهٔ ۷ با الهام از مسألهٔ ۸۰۷ کتاب «مجموعهٔ مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی» از ب. پ. دمیدویچ، به ترجمهٔ احسان‌الله قوام‌زاده قوام، چاپ انتشارات میرِ مسکو مطرح شده است.

---

۱) با عرض پوزش از آقای کارپرور، باید اذعان کنم با توجه به این‌که در دنیای مجازی می‌توان تحت هر نام و عنوانی به دیگران ایمیل فرستاد، در صورت دریافت ایمیل از فردی که به‌طور شخصی نمی‌شناسم، تنها فرض خواهم کرد که فرد مربوطه همان است که می‌گوید بدون این‌که به این امر باور داشته باشم!

۱. حل مسأله

۱. با استفاده از معلومات ریاضیات عمومی، گزارهٔ زیر موسوم به دستور جیرارد[1] را ثابت کنید.
مساحت یک مثلث کروی ABC که اضلاعش کمان‌های سه دایرهٔ عظیمهٔ کره به شعاع R هستند، برابر است با $a(ABC) = R^{۲}(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ که در آن، $\alpha = \angle A$، $\beta = \angle B$ و $\gamma = \angle C$ زاویه‌های مثلث کروی ABC هستند.

حل. روش نخست: روش ریاضیات عمومی. نخست دستور جیرارد را برای مثلث کروی دلخواه ABC ثابت می‌کنیم که در C دارای زاویهٔ قائمه است. دستگاه مختصات کروی (r, θ, ϕ) را که در آن، r نشانگر طول بردار، θ نشانگر زاویهٔ تصویر بردار بر صفحهٔ xOy با جهت مثبت محور x و ϕ نشانگر زاویهٔ بردار با جهت مثبت محور z است، برای $\mathbb{R}^{۳}$ در نظر بگیرید. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید رأس C از مثلث کروی ABC بر بخش نامنفی محور z واقع باشد به‌طوری که دو رأس A و B به‌ترتیب بر ربع اول صفحات xOz و yOz هستند و به‌علاوه[2]

$$A = (R\sin\phi_{۱}, ۰, R\cos\phi_{۱}), \quad B = (۰, R\sin\phi_{۲}, R\cos\phi_{۲}), \quad C = (۰, ۰, R)$$

که در آن، R نشانگر شعاع کره است و $\phi_{۱} \leq \phi_{۲} \leq \frac{\pi}{۲}$. به‌روشنی

$$a(ABC) \quad = \quad \int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\phi=۰}^{\phi_{۱}} R^{۲} \sin\phi d\phi d\theta + \int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\phi=\phi_{۱}}^{\phi_{\theta}} R^{۲} \sin\phi d\phi d\theta$$

که در آن، ϕ_{θ} نشانگر ϕی نقطهٔ حاصل از تقاطع صفحهٔ $\theta = \Theta$ با کمان AB از دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ به مرکز مبدأ و به شعاع R است. به‌عنوان تمرینی ساده این مطلب را به خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد

$$\cos\phi_{\theta} = \frac{\cos\theta\cot\phi_{۱} + \sin\theta\cot\phi_{۲}}{\sqrt{۱ + (\cos\theta\cot\phi_{۱} + \sin\theta\cot\phi_{۲})^{۲}}}.$$

در نتیجه

$$a(ABC) \quad = \quad \frac{\pi R^{۲}}{۲} - R^{۲} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos\phi_{\theta} d\theta.$$

با جایگذاری از دستور بالا برای $\cos\phi_{\theta}$ و محاسبهٔ انتگرال به دست آمده با جانشانی

$$u = \sqrt{۱ + (\cos\theta\cot\phi_{۱} + \sin\theta\cot\phi_{۲})^{۲}}$$

---

1) Girard's Formula

۲) ترسیم شکل مسأله را در هر دو روش حل مسأله به خواننده واگذار می‌کنیم.

و ساده کردن انتگرال‌های به‌دست آمده، در نهایت به‌دست خواهیم آورد

$$\begin{aligned} a(ABC) &= R^{۲}\left(\frac{\pi}{۲}+\arcsin\sqrt{\frac{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}}{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}+\cot^{۲}\phi_{۲}}}\right. \\ &\quad \left.+\arcsin\sqrt{\frac{۱+\cot^{۲}\phi_{۲}}{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}+\cot^{۲}\phi_{۲}}}-\pi\right). \end{aligned}$$

به یاد آورید که $\angle C=\frac{\pi}{۲}$. با نشان دادن این‌که

$$\angle A=\arcsin\sqrt{\frac{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}}{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}+\cot^{۲}\phi_{۲}}},\ \angle B=\arcsin\sqrt{\frac{۱+\cot^{۲}\phi_{۲}}{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}+\cot^{۲}\phi_{۲}}},$$

حکم را در این حالت به اثبات می‌رسانیم. ولی

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle(OAC,OAB)=\angle(n_{OAC},n_{OAB}), \\ \angle B &= \angle(OBC,OAB)=\angle(n_{OBC},n_{OAB}) \end{aligned}$$

که در آن، $\angle(OAC,OAB)$ نشانگر زاویهٔ بین دو صفحهٔ OAC و OAB است و n_{OAC} و n_{OAB} به ترتیب نشانگر بردارهای نرمال بر صفحه‌های OAC و OAB هستند. به طور مشابه نمادهای استفاده شده در برابری مربوط به $\angle B$ معنی می‌شوند. توجه کنید که

$$\begin{aligned} n_{OAC} &= j=(۰,۱,۰), \\ n_{OAB} &= (\cos\phi_{۱}\sin\phi_{۲},\sin\phi_{۱}\cos\phi_{۲},-\sin\phi_{۱}\sin\phi_{۲}). \end{aligned}$$

با توجه به این مطلب، به‌آسانی می‌توان برابری بالا در ارتباط با تعیین $\angle A$ را نشان داد. به‌طور مشابه دستور برابری در ارتباط با تعیین $\angle B$ ثابت می‌شود. این امر دستور جیرارد را در حالتی که $\angle C=\frac{\pi}{۲}$ ثابت می‌کند. به‌ازای مثلث کروی دلخواه و داده شدهٔ ABC، ارتفاع AH را رسم کنید تا ضلع BC را در H قطع کند. (بررسیِ این‌که چرا هر مثلث کروی همواره دارای دست‌کم یک ارتفاع است را به عهده خواننده می‌گذاریم). در این صورت، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a(ABC) &= a(ABH)+a(ACH) \\ &= R^{۲}(\angle HAB+\angle B+\angle BHA-\pi) \\ &\quad +R^{۲}(\angle HAC+\angle C+\angle CHA-\pi). \end{aligned}$$

ولی

$$\angle BHA=\angle CHA=\frac{\pi}{۲},\ \ \angle HAB+\angle HAC=\angle A.$$

بنابراین

$$a(ABC) \quad = \quad R^{۲}(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$$

که این حکم را ثابت می‌کند.

روش دیگر: روش هندسی. فرض کنید مثلث کروی دلخواه ABC بر کره‌ای به شعاع R داده شده باشد. فرض کنید A'، B' و C' به‌ترتیب نقاط متقاطر A، B و C بر کره به شعاع R باشند. به‌روشنی با توجه به تقارن کره، مساحت قاچ کروی $ABA'CA$ با زاویهٔ $\angle A = \alpha$ متناسب است. به‌طور دقیق‌تر

$$a(ABA'CA) = \frac{۴\pi R^{۲}\alpha}{۲\pi} = ۲R^{۲}\alpha = ۲R^{۲}\angle A.$$

با توجه به این امر، داریم

$$\begin{aligned} a(ABC) + a(A'BC) \quad &= \quad a(ABA'CA) \\ &= \quad ۲R^{۲}\angle A = ۲R^{۲}\alpha. \end{aligned} \qquad (۱)$$

به‌طور مشابه

$$\begin{aligned} a(BA'C) + a(B'A'C) \quad &= \quad a(BA'B'CB) \\ &= \quad ۲R^{۲}\angle A'BC = ۲R^{۲}(\pi - \beta). \end{aligned} \qquad (۲)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} a(B'A'C) + a(B'A'C') \quad &= \quad a(CA'C'B'C) \\ &= \quad ۲R^{۲}\angle A'CB' = ۲R^{۲}\gamma. \end{aligned} \qquad (۳)$$

با جمع کردن روابط (۱) و (۳) و با استفاده از رابطهٔ (۲) و این‌که با توجه به تقارن کره، $a(ABC) = a(A'B'C')$، به‌دست می‌آوریم

$$a(ABC) + a(A'B'C') + a(BA'C) + a(B'A'C) = ۲R^{۲}(\alpha + \gamma).$$

سرانجام با جایگذاری و ساده کردن به‌دست می‌آوریم

$$a(ABC) = R^{۲}(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

این، برهان را به پایان می‌رساند. ■

۲. فرض کنید D یک حلقه باشد به‌طوری که $D^{۲} \neq ۰$. در این صورت، احکام زیر معادل‌اند.

(i) حلقهٔ D یک حلقهٔ تقسیم است؛

(ii) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ چپ D است؛

(iii) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ راست D است؛

(iv) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ D است و D دارای این خاصیت است که به‌ازای هر $x, y \in D$ یک $z \in D$ موجود است به‌طوری که $xy = zx$؛

(v) تنها ایده‌آل‌های چپ در $M_n(D)$ آن‌هایی هستند که ستون‌هایشان ۰^n یا D^n هستند و به‌علاوه، هر دو ستون ناصفر ایده‌آل $\mathcal{I}$ یا به هم مربوط‌اند و یا از هم مستقل‌اند. منظور از A^n مجموعهٔ همهٔ بردارهای ستونی $(a_۱, \ldots, a_n)$ است که در آن، $a_i \in A$ به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$؛

(vi) تنها ایده‌آل‌های راست در $M_n(D)$ آن‌هایی هستند که سطرهایشان ۰_n یا D_n هستند و به‌علاوه، هر دو سطر ناصفر ایده‌آل $\mathcal{I}$ یا به هم مربوط‌اند و یا از هم مستقل‌اند. منظور از A_n مجموعهٔ همهٔ بردارهای سطری $(a_۱, \ldots, a_n)$ است که در آن، $a_i \in A$ به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$.[۱]

توضیح. به‌ازای $A \in M_n(D)$، فرض کنید نمادهای $\mathrm{col}_i(A)$ و $\mathrm{row}_i(A)$ به‌ترتیب نشانگر ستون و سطر iام ماتریس A باشد. اگر $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل چپ (به‌ترتیب: راست) در $M_n(D)$ باشد، ستون‌های (به‌ترتیب: سطرهای) iام و jام را به هم مربوط گوییم هر گاه یک $a \in D$ موجود باشد به‌طوری که $\mathrm{col}_j(A) = \mathrm{col}_i(A).a$ (به‌ترتیب: $\mathrm{row}_j(A) = a.\mathrm{row}_i(A)$) به‌ازای هر $A \in \mathcal{I}$. ستون‌های (به‌ترتیب: سطرهای) iام و jام را از هم مستقل گوییم هرگاه

$$\{(\mathrm{col}_i(A), \mathrm{col}_j(A)) : A \in \mathcal{I}\} = D^n \times D^n$$

(به ترتیب:

$$(\{(\mathrm{row}_i(A), \mathrm{row}_j(A)) : A \in \mathcal{I}\} = D_n \times D_n$$

حل. گزاره‌های (i)$\Longrightarrow$(ii) و (i)$\Longrightarrow$(iii) بدیهی هستند.

(i)$\Longrightarrow$(ii). از آنجا که $D^{۲} \neq ۰$، نتیجه می‌گیریم ایده‌آل $\{x \in D : Dx = ۰\}$ برابر $\{۰\}$ است، زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت $\{x \in D : Dx = ۰\} = D$ که ایجاب می‌کند $D^{۲} = ۰$ و این تناقض است. فرض کنید $d \in D$ ناصفر باشد. در این صورت، مجموعهٔ $\{x \in D : xd = ۰\}$ ایده‌آلی سره از D خواهد شد که ایجاب می‌کند $\{x \in D : xd = ۰\} = \{۰\}$. در نتیجه از این‌که $x_۱ d = x_۲ d$، درمی‌یابیم که $x_۱ = x_۲$.

۱) در شمارهٔ نخست سری مقالات «دیدار با مسأله» که این مسأله برای حل مطرح شده بود، در نوشتن صورت مسأله بی‌دقتی شده بود.

از سوی دیگر اگر $dx_1 = dx_2$ به‌ازای عضوهایی مانند $x_1, x_2 \in D$، خواهیم داشت $x_1 = x_2$، زیرا در غیر این صورت ایده‌آل چپ $\{x \in D : x(x_1 - x_2) = 0\}$ ناصفر خواهد شد و لذا $D = \{x \in D : x(x_1 - x_2) = 0\}$ که تناقض است. پس قانون حذف در D برقرار است. حال چون Dd ایده‌آل چپ ناصفر در D است، درمی‌یابیم که $Dd = D$. بنابراین عضوی مانند $e \in D$ موجود است به‌طوری که $ed = d$. با فرض این‌که $x \in D$ دلخواه است، می‌توان نوشت $xed = xd$. با حذف d از طرفین برابری اخیر، برابری $xe = x$ به‌ازای هر $x \in D$ حاصل می‌شود. به‌ویژه $de = d$. این به‌روشنی ایجاب می‌کند که $dex = dx$ به‌ازای هر $x \in D$. اکنون با حذف d از طرفین برابری اخیر برابری $ex = x$ به‌ازای هر $x \in D$ به بار می‌نشیند. بنابراین e عضو خنثی ضربی D است. حال فرض کنید x عضوی ناصفر از D باشد. خواهیم داشت $Dx = D$، زیرا Dx ایده‌آل چپ ناصفری در D است. لذا عضوی مانند $x' \in D$ موجود است به‌طوری که $x'x = e$. می‌توان نوشت $x'xx' = ex' = x' = x'e$ که در سایهٔ ویژگی حذف، به‌دست می‌دهد $xx' = e$. این یعنی هر عضو ناصفر D دارای وارون ضربی است. بنابراین D یک حلقهٔ تقسیم است که همان نتیجهٔ مطلوب است.

استلزام (i)$\Longrightarrow$(iii) به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

(i) $\Longrightarrow$ (iv). از آنجا که به‌ازای هر $x, y \in D$ عضوی مانند $z \in D$ موجود است که $xy = zx$، نتیجه می‌گیریم که هر ایده‌آل چپ در D یک ایده‌آل دوطرفه است. بنابراین صفر تنها ایده‌آل چپ سرهٔ D است. در نتیجه با توجه به معادل بودن (i) و (ii) حلقهٔ D یک حلقهٔ تقسیم خواهد شد.

(v) $\Longrightarrow$ (i). فرض کنید $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل چپ $M_n(D)$ باشد. به‌ازای $1 \leq k, l \leq n$ و $A \in M_n(D)$ فرض کنید $(A)_{kl}$ نشانگر درایهٔ kl ماتریس A باشد. با توجه به این مطلب، تعریف می‌کنیم $J_{kl} := \{a \in D : \exists A \in \mathcal{I},\ (A)_{kl} = a\}$. با ضرب کردن اعضای $\mathcal{I}$ از سمت چپ در ماتریس مقدماتی یا جایگشتی که از تعویض سطرهای یکم و kام ماتریس همانی حاصل می‌شود، درمی‌یابیم که $J_{kl} = J_{1l} := J_l$ به‌ازای هر $1 \leq k, l \leq n$. چون $\mathcal{I}$ ایده‌آل چپی در $M_n(D)$ است، نتیجه می‌گیریم که J_l یک ایده‌آل چپ D به‌ازای هر $l = 1, \ldots, n$ است. بنابراین $J_l = 0$ یا $J_l = D$، زیرا D حلقهٔ تقسیم است. حال فرض کنید $l \in \{1, \ldots, n\}$ و $d_1, d_2 \in D$ داده شده باشند. اگر ماتریس‌هایی مانند $A, B \in M_n(D)$ و $1 \leq i_1, i_2 \leq n$ که $i_1 \neq i_2$ موجود باشند که $(A)_{i_1 l} = d_1$ و $(B)_{i_2 l} = d_2$، خواهیم داشت $(C)_{i_1 l} = d_1$ و $(C)_{i_2 l} = d_2$ که در آن، $C = A_1 A + B_1 B$، $A_1 = \mathrm{diag}(\delta_{i_1 1}, \ldots, \delta_{i_1 n})$، $B_1 = \mathrm{diag}(\delta_{i_2 1}, \ldots, \delta_{i_2 n})$، و δ نشانگر دلتای کرونکر است. این نشان می‌دهد که ستون‌های ایده‌آل چپ $\mathcal{I}$ متشکل از همهٔ ماتریس‌هایی در $M_n(D)$ است که ستون‌هایشان 0^n یا D^n است. حال فرض کنید $\mathrm{col}_{l_1}(\mathcal{I})$ و $\mathrm{col}_{l_2}(\mathcal{I})$ به‌ترتیب ستون‌های ناصفر و متمایز l_1 و l_2 ایده‌آل $\mathcal{I}$ باشند. ستون‌های l_1 و l_2 ایده‌آل $\mathcal{I}$، $(1 \leq l_1 < l_2 \leq n)$، را مستقل می‌نامیم هر گاه یک $A \in \mathcal{I}$ موجود باشد به‌طوری که

$(A)_{1l_1} = 0$ و $(A)_{1l_2} \neq 0$. در غیر این صورت، ستون‌های l_1 و l_2ای ایده‌آل $\mathcal{I}$ را مرتبط می‌خوانیم. نخست فرض کنید ستون‌های l_1 و l_2ای ایده‌آل $\mathcal{I}$ مستقل باشند. چون $\mathrm{col}_{l_j}(\mathcal{I}) = D^n$، نتیجه می‌گیریم یک $B \in M_n(D)$ موجود است به‌طوری که $(B)_{1l_1} \neq 0$. ماتریس $B \in \mathcal{I}$ را می‌توان طوری اختیار کرد که $(B)_{1l_2} = 0$، زیرا به‌ازای ماتریس $C := B - ba^{-1}A \in \mathcal{I}$ که در آن، $b = (B)_{1l_2}$، $a = (A)_{1l_2}$ و A مانند بالا است، داریم $(C)_{1l_1} \neq 0$ و $(C)_{1l_2} = 0$. حال چون $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل چپ در $M_n(D)$ است، D یک حلقهٔ تقسیم است و چنین ماتریس‌های A و B در ایده‌آل $\mathcal{I}$ موجودند. به‌آسانی نتیجه می‌گیریم که $\{((C)_{l_1 1}, (C)_{l_2 1}) : C \in \mathcal{I}\} = D \times D$. چون سطرهای ایده‌آل چپ $\mathcal{I}$ را به‌دلخواه می‌توان جابه‌جا کرد، پس $\{(\mathrm{col}_{l_1}(A), \mathrm{col}_{l_2}(A)) : A \in \mathcal{I}\} = D^n \times D^n$ که همان نتیجهٔ مورد نظر ماست. سپس فرض کنید ستون‌های l_1 و l_2 ایده‌آل $\mathcal{I}$ مرتبط باشند. درمی‌یابیم که نگاشت $f : D \to D$ با تعریفِ $f((C)_{l_1 1}) = (C)_{l_2 1}$ به‌ازای هر $C \in \mathcal{I}$ خوش‌تعریف است. در واقع، f یک تبدیل خطی ناصفر چپ از D به‌توی D است. لذا $f(x) = xf(1)$ به‌ازای هر $x \in D$ که در آن، $0 \neq f(1) \in D$. در نتیجه f یک‌به‌یک و پوشاست. دوباره از آنجا که سطرهای ایده‌آل چپ $\mathcal{I}$ به‌دلخواه می‌توانند جابه‌جا شوند، درمی‌یابیم که $\mathrm{col}_{l_2}(A) = \mathrm{col}_{l_1}(A)f(1)$ به‌ازای هر $A \in \mathcal{I}$. این، برهان را کامل می‌کند.

(i) $\Longrightarrow$ (v). گیریم I یک ایده آل چپ ناصفر D باشد. بنابر استلزام (i) $\Longrightarrow$ (ii) بالا، کافی است ثابت کنیم $I = D$. برای این منظور، توجه کنید که مجموعهٔ $(I^n, 0^n, \ldots, 0^n)$ که در آن، I^n و 0^n به‌ترتیب نشانگر بردارهای ستونی $n \times 1$ با درایه‌های واقع در I و 0 هستند، یک ایده‌آل چپ ناصفر $M_n(D)$ است. از فرض آشکار است که $I^n = D^n$ و ایم ایجاب می‌کند $I = D$.

(vi) $\Longrightarrow$ (i) و (i)$\Longrightarrow$ (vi). برهان این دو استلزام مشابه با برهان دو استلزام بالاست، که برای رعایت اختصار آن‌ها را به عهدهٔ خوانندهٔ گرامی می‌گذاریم. ■

۳. فرض کنید F یک میدان باشد. ماتریس $A \in M_n(F)$ را که در آن، $n > 1$ فراتحویل‌ناپذیر[1] گوییم هرگاه $A : F^n \to F^n$ به‌عنوان تبدیلی خطی دارای زیرفضای فراپایای[2] غیربدیهی نباشد. ثابت کنید ماتریس A فراتحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال آن، به‌عنوان یک چندجمله‌ای با ضرایب در F، روی F تحویل‌ناپذیر باشد.

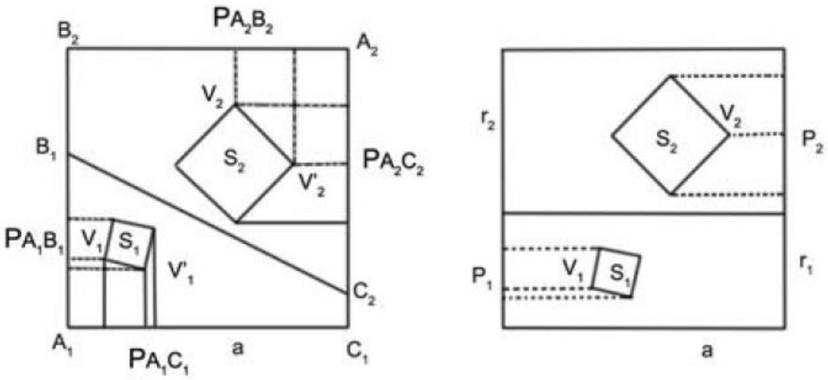
توضیح. فرض کنید V یک فضای برداری، $T \in \mathcal{L}(V)$ و $M \leq V$ زیرفضایی از V باشد. M را برای T فراپایا گوییم هرگاه $SM \subseteq M$ به‌ازای هر $S \in \mathcal{L}(V)$ که $ST = TS$.

حل. بخش «تنها اگر» آسان است. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید m_A

1) hyper-irreducible 2) hyper-invariant subspace

چندجمله‌ای مینیمال A روی F تحویل‌پذیر باشد. پس یک چندجمله‌ای تکین $f \in F[X]$ متمایز از m_A موجود است که m_A را می‌شمارد. حال روشن است که $\ker(f(A))$ زیرفضای غیر بدیهی فراپایای A است که فرض فراتحویل‌ناپذیری A را نقض می‌کند. برای اثبات بخش «اگر»، فرض کنید m_A روی F تحویل‌ناپذیر باشد. از قضیهٔ فرم متعارف گویا (به‌عنوان مثال قضیهٔ VII.۴.۲(i) و قضیهٔ VII.۴.۶(i) کتاب جبر هانگرفورد) درمی‌یابیم که $r = \deg(m_A)$ عدد n را می‌شمارد و A مشابه با جمع مستقیمی از نسخه‌های ماتریس همراه m_A است. به‌طور دقیق، A مشابه با $C \oplus \cdots \oplus C \in M_{\frac{n}{r}}(F(C))$ است که در آن، C نشانگر ماتریس همراه m_A است و $F(C) = \{f(C) : f \in F[X]\}$. بدون آن‌که از کلیت کاسته شود، فرض کنید $A = C \oplus \cdots \oplus C \in M_{\frac{n}{r}}(F(C))$. به‌آسانی می‌توان دید که $\{A\}' = M_{\frac{n}{r}}(F(C))$ که در آن، $\{A\}' = \{B \in M_n(F) : AB = BA\}$ نشانگر جابه‌جاشوندهٔ[1] ماتریس A است. از آنجا که m_A روی F تحویل‌ناپذیر است، نتیجه می‌گیریم که $F(C)$ یک جبر تحویل‌ناپذیر در $M_r(F)$ است. این امر به‌روشنی ایجاب می‌کند که $\{A\}' = M_{\frac{n}{r}}(F(C))$ تحویل‌ناپذیر است، یعنی A فاقد زیرفضای غیربدیهی فراپایاست. ■

۴. فرض کنید مربعی با طول ضلع a شامل دو مربع با درون‌های مجزا با طول ضلع‌های به‌ترتیب a_1 و a_2 باشد. ثابت کنید $a_1 + a_2 \leq a$.



حل. مربع بزرگ را S و مربع‌های درون S را به‌ترتیب S_1 و S_2 بنامید. به‌وضوح می‌توان خطی مانند d رسم کرد که مربع بزرگ را به دو قسمت لزوماً محدب مثلاً R_1 و R_2 تقسیم کند به‌طوری که $S_i \subseteq R_i$ $(i = 1, 2)$. دو حالت می‌توان در نظر گرفت.

(a) اگر d موازی با یکی از اضلاع مربع باشد، آن‌گاه R_1 و R_2 مستطیل‌هایی به‌ترتیب به طول اضلاع r_1، a و r_2، a خواهند بود که $r_1, r_2 < a$ و $r_1 + r_2 = a$ و حکم

1) Commutant

در این حالت به‌آسانی ثابت می‌شود. برای این منظور، نزدیکترین رأس‌های مربع‌های کوچک یعنی S_1 و S_2 به اضلاع کوچک مستطیل‌های کوچک یعنی R_1 و R_2 را در نظر بگیرید و آن‌ها را V_1 و V_2 بنامید. سپس دو ضلع گذرا از V_1 و دو ضلع گذرا از V_2 را بر اضلاع کوچک R_1 و R_2 تصویر کنید. اگر مجموع طول تصویرها را به p_1 و p_2 نشان دهیم، به‌ازای $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 \cos\theta_1 + a_1 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_1) \geq a_1, \\ p_2 &= a_2 \cos\theta_2 + a_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2) \geq a_2 \end{aligned}$$

که در آن، θ_1 و θ_2 به‌ترتیب زاویهٔ یکی از اضلاع گذرا از به‌ترتیب V_1 و V_2 با اضلاع کوچک R_1 و R_2 هستند. ولی $p_1 \leq r_1$ و $p_2 \leq r_2$. در نتیجه $a_1 + a_2 \leq p_1 + p_2 \leq r_1 + r_2 = a$ که حکم را در این حالت ثابت می‌کند.

(b) اگر d موازی با یکی از اضلاع S نباشد، فرض کنید $A_1 \in R_1$ و $A_2 \in R_2$ دو رأس از S باشند که مقابل d قرار دارند؛ یعنی در صورت لزوم، با ادامهٔ اضلاع S، A_1 و A_2 رأس‌های مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای خواهند بود که وترهایشان بخش‌هایی از خط d هستند. فرض کنید پاره‌خط‌های A_1B_1، A_1C_1 و A_2B_2، A_2C_2 توسط d (مطابق شکل) از اضلاع S جدا می‌شوند. نزدیکترین رأس‌های S_1 و S_2 به A_1B_1، A_1C_1 و A_2B_2، A_2C_2 را در نظر بگیرید و آن‌ها را V_1، V_1' و V_2، V_2' بنامید. سپس دو ضلع گذرا از V_1 و V_1' و دو ضلع گذرا از V_2 و V_2' را بر پاره‌خط‌های A_1B_1، A_1C_1 و A_2B_2، A_2C_2 تصویر کنید. اگر مجموع طول تصویرها را به $p_{A_1B_1}$، $p_{A_1C_1}$، $p_{A_2B_2}$ و $p_{A_2C_2}$ نشان دهیم، به‌ازای $0 \leq \theta_1, \theta_1', \theta_2, \theta_2' \leq \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} p_{A_1B_1} &= a_1 \cos\theta_1 + a_1 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_1) \geq a_1, \\ p_{A_1C_1} &= a_1 \cos\theta_1' + a_1 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_1') \geq a_1, \\ p_{A_2B_2} &= a_2 \cos\theta_2 + a_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2) \geq a_2, \\ p_{A_2C_2} &= a_2 \cos\theta_2' + a_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_2') \geq a_2 \end{aligned}$$

که در آن، θ_1، θ_1'، θ_2 و θ_2' به‌ترتیب زاویهٔ یکی از اضلاع گذرا از V_1، V_1' و V_2، V_2' با اضلاع A_1B_1، A_1C_1 و A_2B_2، A_2C_2 هستند. ولی $p_{A_iB_i} \leq A_iB_i$ و $p_{A_iC_i} \leq A_iC_i$ $(i = 1, 2)$. در نتیجه مربع‌های S_1' و S_2' با طول اضلاع به‌ترتیب a_1 و a_2 و با یک رأس به‌ترتیب در A_1 و A_2 در R_1 و R_2 و با اضلاع موازی با اضلاع S موجودند. این حکم را در این حالت ثابت می‌کند، زیرا S_1' و S_2' دارای اضلاع موازی با اضلاع S و دارای درون‌های مجزا در S با طول اضلاع به‌ترتیب a_1 و a_2 هستند. (درواقع حکم در این حالت از (a) نتیجه می‌شود.) ■

توضیح. ۱. در واقع، برهان بالا نشان می‌دهد که مربع با مساحت ماکسیمم در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، مربعی با مساحت ماکسیمم است که یک رأس آن بر یکی از رأس‌های زاویهٔ قائمه ذوزنقه که دارای قائدهٔ بزرگتر است واقع باشد. همچنین به‌طور مشابه مربع با مساحت ماکسیمم در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربعی با مساحت ماکسیمم است که یک رأس آن بر یک رأس زاویهٔ قائمه مثلث واقع باشد.

۲. از اثبات بالا به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت اگر مستطیل به طول ضلع‌های a و b، شامل دو مستطیل با درون‌های مجزا و با طول اضلاع $a_۱$ و $b_۱$ و $a_۲$ و $b_۲$ باشد، آن‌گاه

$$\min(a_۱, b_۱) + \min(a_۲, b_۲) \leq \min(a, b).$$

به آسانی می‌توان دید که همزاد مسألهٔ بالا برای متوازی‌الاضلاع‌ها برقرار نیست. ارائهٔ مثال نقض به عهدهٔ خوانندگان گذارده می‌شود.

۳. اگر اشکالی ندارد! دوست دارم که این توضیح را با حدس زیر به پایان آورم.

حدس. فرض کنید A، B و C سه nضلعی محدب و مشابه به‌ترتیب با اضلاع $a_۱, \ldots, a_n$، $b_۱, \ldots, b_n$، و $c_۱, \ldots, c_n$ باشند به‌طوری که C شامل A و B باشد و درون‌های A و B مجزا باشند. در این صورت،

$$\min(a_۱, \ldots, a_n) + \min(b_۱, \ldots, b_n) \leq \min(c_۱, \ldots, c_n).$$

۵. فرض کنید $F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$ و مجموعهٔ بستهٔ $A \subseteq \mathbb{F}^n$ دارای این خاصیت باشد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{F}^n$ یک عضو یگانهٔ $a_x \in A$ موجود است که

$$\|x - a_x\| = \sup\{\|x - a\| : a \in A\}$$

که در آن، $\|.\|$ نشانگر نرمی دلخواه بر $\mathbb{F}^n$ است. ثابت کنید A مجموعهٔ تک عضوی است. آیا حکم را بدون بسته بودن مجموعهٔ A می‌توانید ثابت کنید؟

حل. به‌ازای $\circ \in \mathbb{F}^n$ عضو یگانهٔ $a_\circ \in A$ موجود است به‌طوری که $\|a_\circ\| = \sup_{a \in A} \|a\|$. اگر $a_\circ = \circ$، آن‌گاه $A = \{\circ\}$ که حکم را در این حالت ثابت می‌کند. روشن است که $A \subseteq \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ که در آن، $\bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ نشانگر گوی بسته به مرکز $\circ$ به شعاع $r_\circ = \|a_\circ\|$ است. حال نگاشت $a : \bar{B}_{r_\circ}(\circ) \longrightarrow A \subseteq \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ را در نظر بگیرید که با دستور $a(x) = a_x$ تعریف می‌شود. با اثبات این‌که تابع a نگاشتی پیوسته است، از قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر نتیجه می‌گیریم که $x \in \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ موجود است به‌طوری که $a(x) = a_x = x$. پس $x \in A$ و چون $a_x = x$، درخواهیم یافت که $A = \{a_x\}$ و حکم ثابت می‌شود. اما برای اثبات این‌که تابع a پیوسته است، با توجه به لم دنباله، کافی است ثابت کنیم $\lim_n a(x_n) = a_x$ هرگاه

$\lim_n x_n = x \in \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ که در آن، $x \in \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ عضوی دلخواه است. برای دیدن این‌که $\lim_n a(x_n) = a_x$، ثابت می‌کنیم هر زیردنبالهٔ $(a(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ خود دارای زیردنباله‌ای است که به a_x همگراست. برای این منظور، فرض کنید $(a(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ زیردنباله‌ای دلخواه از دنبالهٔ $(a(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ باشد. توجه کنید که $a(y_k) \in A \cap \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$. چون $A \cap \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ فشرده است، نتیجه می‌گیریم $(a(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا مانند $(a(z_j))_{j\in\mathbb{N}}$ است. روشن است که $\|a_x\| = \|\lim_j a(z_j)\|$، زیرا در غیر این صورت، با در نظر گرفتن j به‌قدر کافی بزرگ خواهیم داشت $\|a(z_j) - z_j\| > \|a_x - z_j\|$ که تناقض است. لذا $\|a_x\| = \|\lim_j a(z_j)\|$. ولی این امر ایجاب می‌کند که $\lim_j a(z_j) = a_x$، زیرا a_x یگانه عضوی در A است که $\|a_x - x\| = \sup_{a\in A} \|a - x\|$. بنابراین $\lim_j a(z_j) = a_x$ و لذا تابع a در نقطهٔ دلخواه $x \in \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ پیوسته است. ■

۶. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی C^∞ و $N \in \mathbb{N}$ داده شده باشد و به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، عددی طبیعی مانند $n_x \leq N$ موجود باشد به‌طوری که $f^{(n_x)}(x) = \circ$ که در آن، $f^{(n_x)}$ نشانگر مشتق n_xام تابع f است. ثابت کنید f تابعی چندجمله‌ای است. با فرض تحلیلی بودن f نشان دهید فرض $n_x \leq N$ اضافی است. در حالت کلی نشان دهید فرض $n_x \leq N$ ضروری است. آیا می‌توانید این مسأله را به توابع چندمتغیره تعمیم دهید؟

حل. به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ قرار دهید $Z_i = \left(f^{(i)}\right)^{-1}\{\circ\}$. به‌وضوح Z_i به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ای بسته است، زیرا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی C^∞ است. از فرض نتیجه می‌شود که $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{N} Z_i$ و لذا با توجه به قضیهٔ کاتگوری بئر، به‌ازای هر بازهٔ $[a,b]$ یک $1 \leq i \leq N$ موجود است به‌طوری که $Z_i \cap [a,b]$ دارای نقطه‌ای درونی است. در نتیجه به‌ازای هر $[a,b]$ یک $1 \leq i \leq N$ و یک زیربازهٔ باز از $[a,b]$ موجود است که بر آن زیربازهٔ باز، مشتق iام و لذا مشتق Nام f صفر می‌شود. بنابراین Z_N در $\mathbb{R}$ چگال است و از اینجا درمی‌یابیم که $Z_N = \mathbb{R}$، زیرا Z_N در $\mathbb{R}$ بسته است. حکم مسأله از این مطلب به‌روشنی نتیجه می‌شود.
حال فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تحلیلی است و شرط $n_x \leq N$ را بردارید. از قضیه‌ای استاندارد نتیجه می‌گیریم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، تابع $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ نیز تحلیلی است. از سوی دیگر، از فرض نتیجه می‌شود که $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. دوباره این امر با توجه به قضیهٔ کاتگوری بئر ایجاب می‌کند که $N \in \mathbb{N}$ی موجود است به‌طوری که Z_N دارای نقطه‌ای درونی است. چون $f^{(N)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تحلیلی است و Z_N دارای نقطه‌ای درونی و لذا دارای نقطهٔ حدی است، از قضیه‌ای استاندارد نتیجه می‌گیریم که $Z_N = \mathbb{R}$. این مطلب، حکم را ثابت می‌کند. دو بخش آخر مسأله را به‌عنوان تمرین به خوانندهٔ علاقه‌مند واگذار می‌کنیم. ■

۷. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی است که $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$. f را مشخص کنید. به چنین fی حرکت صلب یا طولپایی می‌گویند. همین مسأله را برای طولپایی‌های $\mathbb{C}^n$ حل کنید.

حل. ادعا می‌کنیم تابع $g = f - f(\circ)$ خطی و متعامد است، یعنی ماتریس نمایش آن نسبت به هر پایهٔ متعامدیکه برای $\mathbb{R}^n$، ماتریسی متعامد است. یادآور می‌شویم که ماتریس مربعی حقیقی A را متعامد گوییم هرگاه $AA^t = A^tA = I_n$ که در آن، A^t نشانگر ماتریس ترانهادهٔ A و I_n ماتریس همانی $n \times n$ است. نخست فرض کنید ۱ $= n$. در این حالت باید نشان دهیم $g = \pm I$. چون f و لذا g طولپایی است، پیوسته و یک‌به‌یک است. لذا g روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است. (برای اثبات این مطلب، به‌عنوان مثال می‌توانید به نتیجهٔ لم ۱ در حل دومین مسأله از «نگاهی به مسابقات ریاضی دانشجویی کشور، بخش یکم: آنالیز ریاضی»، نشر ریاضی شماره ۳۱ صفحهٔ ۴۲ رجوع کنید.) نشان می‌دهیم $g = I$ یا $g = -I$ بسته به این‌که g روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد. فرض کنید g روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و به‌ازای یک $x \in \mathbb{R}$ $\circ \neq$ داشته باشیم $g(x) \neq x$. اگر $x > \circ$، آن‌گاه $g(x) > \circ$ که ایجاب می‌کند $|g(x)| = g(x) \neq x = |x|$ و این تناقض است. اگر $x < \circ$، آن‌گاه $g(x) < \circ$ که ایجاب می‌کند $|g(x)| = -g(x) \neq -x = |x|$ و دوباره به تناقض می‌رسیم. پس از صعودی بودن g نتیجه می‌گیریم $g = I$. در حالت اکیداً نزولی بودن g، $-g$ طولپاییِ اکیداً صعودی خواهد بود و از استدلال بالا نتیجه می‌گیریم که $-g = I$، یعنی $g = -I$. این، ادعا را در حالت ۱ $= n$ اثبات می‌کند. حال فرض کنید ۱ $< n$ و $\langle .,. \rangle$ نشانگر ضرب داخلی متداول $\mathbb{R}^n$ باشد. روشن است که $\langle x,y \rangle = \frac{۱}{۲}\left(\|x+y\|^۲ - \|x\|^۲ - \|y\|^۲\right)$ به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$. رابطهٔ اخیر به همراه طولپایی بودنِ g و این‌که $g(\circ) = \circ$ ایجاب می‌کند که $\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$. در نتیجه اگر $\{e_i\}_{i=۱}^n$ پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه $\{g(e_i)\}_{i=۱}^n$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود. حال فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $r, s \in \mathbb{R}$ دلخواه باشند. به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\langle g(rx+sy) - rg(x) - sg(y), g(e_i) \rangle &= \langle g(rx+sy), g(e_i) \rangle - r\langle g(x), g(e_i) \rangle \\
&\quad - s\langle g(y), g(e_i) \rangle \\
&= \langle rx+sy, e_i \rangle - r\langle x, e_i \rangle - s\langle y, e_i \rangle \\
&= \circ
\end{aligned}$$

که به‌روشنی ایجاب می‌کند $g(rx+sy) = rg(x) + sg(y)$، زیرا $\{g(e_i)\}_{i=۱}^n$ پایه‌ای متعامدیکه برای $\mathbb{R}^n$ است. در نتیجه g تابعی خطی است. حال چون g طولپاییِ خطی است، ماتریس نمایش آن در هر پایهٔ متعامدیکه، ماتریسی متعامد است.

قسمت دوم مسأله را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم! توجه کنید که می‌توانید از قسمت نخست مسأله استفاده کنید. ■

۲. مسأله برای حل

۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به‌طوری که تابع $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با تعریفِ $g(x)=xf(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است. ثابت کنید تابع f نیز روی $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۲. ثابت کنید یک میدان متناهی است اگر و تنها اگر به‌عنوان یک حلقه به‌طور متناهی تولید شده باشد.

۳. (i) نشان دهید مسألهٔ زیر که مسألهٔ ۲ عمومی از ششمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور است، غلط است!

یک ماتریس $n\times n$ که درایه‌هایش اعداد صحیح نامنفی‌اند داده شده است. مجموع درایه‌های واقع بر سطر و ستون مربوط به هر عضو ناصفر این جدول، حداقل n است. نشان دهید مجموع همهٔ درایه‌های این ماتریس از $\frac{n^2}{2}$ کمتر نیست.

(ii) جدول $n\times n$ زیر از اعداد صحیح نامنفی

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

با ویژگی زیر را در نظر بگیرید. اگر درایهٔ a_{ij} صفر باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های واقع بر سطر iام و ستون jام این جدول بیشتر یا مساوی n است. نشان دهید مجموع همهٔ این درایه‌ها بیشتر یا مساوی $\frac{n^2}{2}$ است.[۱]

۴. فرض کنید توابع حقیقی f، f_1، f_2 و ... بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده و دارای مشتقات پیوسته باشند. اگر دنبالهٔ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ به‌طور نقطه‌ای به f و همچنین دنبالهٔ $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ به‌طور نقطه‌ای به تابع پیوسته‌ای مانند g میل کند، نشان دهید $f'(x)=g(x)$ به‌ازای هر $x\in[a,b]$.[۲] (تذکر: در دو سر a و b فقط مشتق راست یا چپ منظور است.)

---

۱) آقای دکتر محمد حسین جعفری از دانشگاه تبریز در طی ایمیلی به نگارنده گوشزد کردند که این مسأله ششمین مسأله از المپیادهای بین‌المللی دانش‌آموزی سال ۱۹۷۱ است.

۲) این مسأله سومین مسألهٔ آنالیز از بیست و سومین مسابقه از مسابقات ریاضی دانشجویی کشور است. برهان آورده شده توسط نگارنده در کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی دانشجویی کشور غلط است!

۵. فرض کنید R یک حلقه و H اشتراک کلیهٔ ایده‌آل‌های راست ناصفر R باشد. اگر $H \neq \{0\}$، آن‌گاه نشان دهید که H یک ایده‌آل دوطرفهٔ R است و داریم $H^2 = \{0\}$ یا این‌که R یک حلقهٔ تقسیم است.[1]

٦. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. ثابت کنید $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر تابع f بر هر بازهٔ باز و کراندار (a,b) به‌طور یکنواخت مشتق‌پذیر باشد، یعنی به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ موجود باشد که

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

هرگاه $0 < |h| < \delta$ و $x, x+h \in (a,b)$.

۷. فرض کنید (a,b) یک بازهٔ باز نه لزوماً کراندار و $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. بنا به تعریف، مدول پیوستگی تابع f تابع $\omega_f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ است که به‌صورت

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in (a,b),\ |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

تعریف می‌شود. ثابت کنید تابع f روی (a,b) پیوستهٔ یکنواخت است اگر و تنها اگر

$$\lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0.$$

بامداد یاحقی
دانشگاه گلستان، گروه ریاضی
bamdad@bamdadyahaghi.com

۱) این مسأله دومین مسألهٔ جبر از بیست و سومین مسابقه از مسابقات ریاضی دانشجویی کشور است. برهان آورده شده توسط نگارنده در کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی دانشجویی کشور به صورتی که آورده شده است، غلط است ولی برهان قابل اصلاح است.