فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۲ (بهار ۱۳۹۲) صص. ۱ تا ۱۱

کل و جزء در ریاضیات*

جان ال بل

مترجمین: امید غیور، رستم محمدیان، مهرداد نامداری

چکیده

در این مقاله، نقش محوری رابطهٔ «کل $\leftrightarrow$ جزء» در ریاضیات با ارائهٔ مثال‌هایی از جبر، هندسه، آنالیز تابعی، منطق، توپولوژی، نظریهٔ رسته‌ها و در تجزیه و تحلیل آن مثال‌ها، آشکار می‌شود.

کلید واژه‌ها: دوگانی گلفاند، توپولوژی گروتندیک، کل $\leftrightarrow$ جزء، دوگانی استون، جزء، کل.

رابطهٔ میان **کل** و **جزء** (که با «جزء $\leftrightarrow$ کل» نشان می‌دهیم) نقش محوری در توسعه و گسترش ریاضیات به عهده دارد. شاید اولین ظهور شفاف آن در بُنداشت پنجم اقلیدس (نه اصل موضوع پنجم وی) باشد که در اثر جاودانه‌اش «اصول» بنا نهاده شد و بیان می‌کرد که کل از جزء بزرگتر است. ابطال این دیدگاه توسط کانتور در بیش از دو هزار سال بعد، عاملی اساسی در نظریهٔ مجموعه‌های ترامتناهی بود.

یک مثال کلاسیک از «جزء $\leftrightarrow$ کل» را می‌توان در هندسهٔ تحلیلی یافت. نقاط یا بردارهای دلخواه در فضای n ـ بعدی اقلیدسی $\mathbf{R}^n$، به‌صورت ترکیب خطی از n بردار پایه‌ای $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ نمایش داده می‌شوند. در این مثال، «کل» $\mathbf{R}^n$ توسط جزء (خیلی کوچک) خود، یعنی $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (به‌وسیلهٔ مختصات) کاملاً مشخص می‌شود. البته این مثال، به مفهوم پایه برای یک فضای برداری و ایدهٔ ساختار ریاضیِ **تولید شده** توسط یک جزء خود تعمیم داده شده است، چنان‌که یک زبان نوشتاری توسط حروف الفبای آن زبان شکل می‌گیرد. مثالی دیگر در این باره از این حقیقت سرچشمه می‌گیرد که هر نقطه در یک چندضلعی یا چندوجهی محدب P، مرکز جرم یا **مرکز ثقل**

*) John L. Bell, “Whole and Part in Mathematics”, *Axiomathes*, **14**(2004), 285–294.

یک توزیع یکتا از جرم‌هایی است که در رأس‌های P قرار گرفته‌اند. این حقیقت به **قضیهٔ شوکه**[۱] تعمیم داده شده است که نتیجهٔ مهمی در آنالیز تابعی است (به‌عنوان نمونه [4] را ببینید). در واقع، این قضیه بیان می‌کند که در یک فضای نُرمدار هر نقطه از یک زیرمجموعهٔ محدب و فشرده مانند C، (با دیدی گسترده‌تر) مرکزِ ثقلِ یک اندازه روی مجموعهٔ E است که E مجموعهٔ **نقاط گوشه‌ای** C می‌باشد (نقطهٔ گوشه‌ای C نقطه‌ای است که درون یک پاره‌خط واقع در C نباشد). نتیجهٔ مهم این موضوع، **قضیهٔ کرین ــ میلمن**[۲] است: C کوچکترین مجموعهٔ محدب بستهٔ دربرگیرندهٔ E است. هر دو قضیه نشان می‌دهند که «کلِ» C با یک برداشت مناسب، توسط جزءِ کوچک خود، یعنی E کاملاً مشخص می‌شود.

یک «جزء» از کل در ریاضیات ممکن است با نادیده انگاشتن جنبه‌هایی از **ساختار** آن به‌دست آید. از این منظر و برای مثال، گروه جمعی اعداد صحیح، یک جزء از حلقهٔ اعداد صحیح است. بر اساس همین دیدگاه، گاهی اوقات یک جزء می‌تواند کل را مشخص کند. به‌عنوان نمونه، جزء جبری خالصِ میدان مرتب اعداد حقیقی به‌طور یکتا ترتیب آن و در نتیجه ساختار کلی آن را مشخص می‌کند ($r \leq s$ اگر و تنها اگر $s - r$ مربع باشد). این حقیقتِ آشکار، یک تعمیم نابدیهی دارد (قسمتی از قضیهٔ آرتین ــ شرایر[۳]): هر میدان بسته ــ حقیقی F (یعنی عنصر -1 مجموعی از مربعات در هر توسیع جبری اکید F باشد و در خود F این‌طور نباشد) دارای یک ترتیب کامل و یکتای سازگار با ساختار جبری خود است.

یک کلِ ریاضی ممکن است با جزئی از آن معین شود، به این معنی که هر عضو کل به‌تعبیر (توپولوژیکی) مناسبی با اعضای جزء «تقریب‌پذیر» است. یک نمونهٔ کلاسیک، این حقیقت است که هر عدد حقیقی، نقطهٔ حدی دنباله‌ای از اعداد گویاست. البته این حقیقت ریشه‌های عمیقی در تاریخ ریاضیات دارد. به نظر می‌رسد که فیثاغورسیان در حدود ۵۵۰ سال قبل از میلاد، بر این باور بودند که مجموعهٔ کل «نسبت تناسب‌های» کمیت‌های هندسی متشابه، با جزء تشکیل شده از «نسبت‌های» اعداد صحیح یکی است (و بنابراین مفهوم سختِ اندازه‌گیری به مفهوم سادهٔ شمارش تقلیل می‌یابد). کشف آن‌ها در مورد گنگ بودن نسبت ضلع به قطر یک مربع، یعنی ناگویا بودن $\sqrt{۲}$، (اولین «بحران ریاضی») مجبورشان ساخت تا در ادامهٔ کارشان در ریاضی به این موضوع توجه داشته باشند که «نسبت‌های» اعداد صحیح، فقط یک **جزء اکید** از آن کل است و بنابراین یک توصیف عملی از این کل را صورت‌بندی کردند که همان نظریهٔ تناسب ائودوکسوس[۴] است.

از دیگر نمونه‌های مهم از این دست، می‌توان به **قضیه‌های تقریب وایراشتراس**[۵] اشاره کرد: هر تابع حقیقی یا مختلط پیوسته روی یک بازهٔ حقیقی بسته، حد یکنواخت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها است و هر تابع مختلط ۲π ــ متناوب روی خط حقیقی، حد یکنواخت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های

---

۱) به نام ریاضیدان فرانسوی گوستاو شوکه Gustave Choquet

2) Krein-Milman 3) Artin-Schreier 4) Eudoxus 5) Weierstrass approximation theorems

مثلثاتی است. در هر دو مورد، کل (توابع پیوسته دلخواه یا توابع متناوب دلخواه) با تقریب یکنواخت یا «تغییرات» یک جزء معین (چندجمله‌ای‌ها یا چندجمله‌ای‌های مثلثاتی) مشخص می‌شوند. این قضایای قرن نوزدهم، در قرن بیستم به **قضیهٔ استون ـ وایراشتراس**[1] تعمیم پیدا کردند (مرجع [4] را ببینید). این قضیه، معیاری برای جزء A از یک جبر توابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار یا مختلط روی فضای هاسدورف و فشردهٔ X به‌دست می‌دهد تا با جبر تمام این توابع یکی باشد. معیار این است که A باید یک زیرجبر خود ـ الحاقی بسته شامل تابع واحد باشد که نقاط X را نیز جدا کند.

نظریهٔ گالوا (مرجع [3] را مشاهده کنید) یک نمونهٔ وسیع از «جزء $\leftrightarrow$ کل» در ریاضیات را به‌دست می‌دهد. در حالت کلاسیک‌اش، یک معادلهٔ چندجمله‌ای $f(x) = 0$ روی هیأت F (به‌عنوان نمونه اعداد گویا) داده می‌شود و ما به‌دنبال یافتن جواب آن به‌کمک «رادیکال‌ها» هستیم؛ یعنی یافتن ریشهٔ nام برای n دلخواه. «کل» مربوط به این مورد، **میدان شکافیدن** f روی F است که آن را با K نشان می‌دهیم، یعنی کوچکترین میدان شامل F که در آن، f می‌تواند کاملاً به عوامل خطی تجزیه شود. بیان دیگری از شرط حل‌پذیری f با رادیکال‌ها چنین است که کل هیأت K (با دقت بیشتر، یک توسیع مناسب از K) را می‌توان با «اجزاء» مناسبش ساخت؛ در این حالت، اجزاء، **زیرمیدان‌های میانی** L از K هستند به‌طوری که $F \subseteq L \subseteq K$. متناظر با K یک گروه G وجود دارد (**گروه گالوای** آن) که یکریخت است با زیرگروهی از گروه جایگشت‌های n شیء که در آن، n درجهٔ f است. گروه G یک «کل» جدید تشکیل می‌دهد که «اجزاء» وابسته‌اش **زیرگروه‌های** آن هستند. **قضیهٔ اساسی نظریهٔ گالوا** ادعا می‌کند که پیوندهای اجزاء دو کل K و G به تعبیری مناسب، یکریخت هستند. (تناظر پدیدآورندهٔ این یکریختی، نمونه‌ای کلی‌تر از تناظری است که اکنون **الحاق گالوا** یا **اتصال گالوا**[2] نامیده می‌شود.) این یکریختی خاصیت نسبتاً سادهٔ **حل‌پذیری** اجزاء G (و بنابراین خود G) را جایگزین خاصیت پیچیدهٔ پیوند اجزاءِ کلِ K که بیان دیگری از حل‌پذیری f با رادیکال‌هاست، می‌کند. در واقع، با نمونه‌ای از الگوی **جزء $\rightleftarrows$ کل** سر و کار داریم.

مثال‌های مهمی از « کل $\leftrightarrow$ جزء» در **منطق ریاضی** وجود دارد. برای شروع می‌توان به این گزارهٔ بدیهیِ غالباً مفید اشاره کرد که: سازگاری نظریهٔ مرتبهٔ اول را می‌توان به سازگاری اجزاء متناهی‌اش کاهش داد. سپس **قضیهٔ** بی‌نظیر **فشردگی** در پی می‌آید (مرجع [2] راببینید) که بیان می‌کند یک نظریهٔ مرتبهٔ اول Σ دقیقاً هنگامی مدل دارد که هر جزء متناهی آن چنین باشد. اینجا مدل Σ (به‌عنوان یک «ابرحاصل‌ضرب») از مدل‌های اجزاء متناهی‌اش در نظر گرفته می‌شود. این نمونه‌ای از «بازسازی» یک ساختار ریاضی «از اجزایش» است؛ روشی که به آن باز خواهیم گشت. قضیهٔ مشهور **لوونهایم ـ اسکولم**[3] حاکی است که خواص تعریف‌پذیر یک ساختار (نامتناهی) با نظیر همان خواص در برخی از اجزاء (نسبتاً کوچک) آن ساختار یکسان هستند و همچنین با نظیر همان خواص در ساختارهای بزرگتر دیگر که خودِ آن ساختار اصلی را به‌عنوان جزء دربر دارند، یکسان‌اند.

---

1) Stone-Weierstrass theorem 2) Galios connection or adjunction 3) Löwenheim-Skolem theorem

یک نتیجهٔ مرتبط، **اصل انعکاس در نظریهٔ مجموعه‌ها** است (مرجع [1] را ببینید) که بیان می‌کند خواص تعریف‌پذیر در عالم مجموعه‌ها در یک جزء کوچک آن، یعنی یک مجموعه، منعکس شده است.

نتایج پایایی در منطق ریاضی نیز منبعی از نمونه‌های «جزء $\leftrightarrow$ کل» فراهم می‌آورند. در این بحث، دو نظریهٔ $\Sigma_۱ \subseteq \Sigma_۲$ داده شده‌اند که به‌ترتیب به زبان‌های $\mathcal{L}_۱ \subseteq \mathcal{L}_۲$ صورت‌بندی می‌شوند. $\Sigma_۲$ یک **توسیع پایا** از $\Sigma_۱$ است اگر جزء $\Sigma_۲$ که شامل $\mathcal{L}_۱$ــ گزاره‌ها است با $\Sigma_۱$ یکسان باشد. **نمونهٔ پایه‌ای** این موضوع آن هنگام رخ می‌دهد که $\Sigma_۱$ یک نظریه در زبان مرتبهٔ اول $\mathcal{L}_۱$ و $\Sigma_۲$ مجموعه‌ای از نتایج منطقی $\Sigma_۱$ در زبان مرتبهٔ اول $\mathcal{L}_۲ \supseteq \mathcal{L}_۱$ باشد. **آنالیز غیراستاندارد** آبراهام رابینسون[1] (مرجع [11]) یک نمونه دیگر است: $\Sigma_۱$ آنالیز کلاسیک صورت‌بندی شده در زبان نظریهٔ مجموعه‌های معمولی $\mathcal{L}_۱$ و $\Sigma_۲$ آنالیز غیراستاندارد فرمول‌بندی شده در زبان $\mathcal{L}_۲$ است که توسیع مناسبی از $\mathcal{L}_۱$ می‌باشد. مثال دیگر توسط گودل[2] ارائه شده است: $\mathcal{L}_۱$ زبان (نظریهٔ مجموعه‌ای) حساب، $\Sigma_۱$ مجموعهٔ گزاره‌های قابل اثباتِ $\mathcal{L}_۱$ در نظریهٔ مجموعه‌های زرملو ــ فرانکل[3] **ZF**، $\mathcal{L}_۲$ زبان نظریهٔ مجموعه‌ها و $\Sigma_۲$، «نظریهٔ **ZF**» + «اصل انتخاب» + «فرض پیوستار» در نظر گرفته می‌شوند. به‌عنوان نمونه‌ای می‌توان به **ناموفق** شکل ابتدایی برنامهٔ هیلبرت[4] نگریست. در اینجا $\mathcal{L}_۱$ زبان **ریاضیات قیدی**، $\Sigma_۱$ گزاره‌های به‌طور مقید اثبات‌پذیر در زبان $\mathcal{L}_۱$، $\mathcal{L}_۲$ زبان **ریاضیات آرمانی** و $\Sigma_۲$ گزاره‌های آرمانیِ اثبات‌پذیر در زبان $\mathcal{L}_۲$ هستند. هیلبرت امیدوار بود تا ثابت کند که $\Sigma_۲$ یک توسیع پایای $\Sigma_۱$ است، اما چنان‌که می‌دانیم، گودل با قضیه‌های ناتمامیت مشهور خود نشان داد که چنین چیزی برقرار نیست.

دو مثال اول از «جزء $\leftrightarrow$ کل» نشان داد که چگونه یک ساختار ریاضی می‌تواند با یک **تک جزء** به‌طور خاص انتخاب شده، معین گردد. اکنون می‌توانیم حالت‌هایی را در نظر بگیریم که در آن‌ها چنین ساختارهایی بتوانند از تجمع مناسبی از اجزاء خاص بازآرایی شوند. یک مثال ساده در این زمینه، این است که شیء دلخواه A در رستهٔ جبرها را می‌توان از زیرجبرهای متناهیاً تولید شده‌اش دوباره به‌دست آورد: A هم ــ حد نموداری است که رأس‌های آن زیرجبرهای متناهاً تولید شدهٔ A و پیکان‌های آن، نگاشت‌های شمول روی این رأس‌ها است.

جالب‌تر آن‌که ساختارهای ریاضی را اغلب می‌توان از اجزای برخاسته از مجموعه‌های ترازِ «کمیت‌هایی» که روی آن ساختار به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند، بازسازی کرد (درست مانند یک رویه که به‌کمک منحنی‌های تراز بنا می‌شود). نمونهٔ ابتدایی این الگو، **فضای هاسدورف**[5] و فشردهٔ X است. در اینجا X می‌تواند از **صفر ــ مجموعه‌های توابع پیوسته** که با $Z(f)$ نشان داده می‌شوند دوباره ساخته شود: $Z(f)$ آن جزء فضای X است که تابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار f روی آن صفر می‌شود (مرجع [5] را ببینید). هر $Z(f)$ را می‌توان یک **جزء اطلاعاتی** دربارهٔ X تصور کرد که

1) Abraham Robinson 2) Gödel 3) Zermelo-Frankel 4) Hilbert's program
5) Hausdorff space

در واقع، آن جزء از X را مشخص می‌کند که روی آن، کمیت متغیر پیوستهٔ f یک مقدار ثابت خاص (در این حالت، صفر) می‌گیرد. به این تعبیر، صفر ــ مجموعه‌ها **اجزای اطلاعاتی** X را تشکیل می‌دهند (اگر X یک رویه در فضای سه بعدی باشد، آن‌گاه صفر ــ مجموعه‌های پیوستهٔ وابسته به آن، یعنی منحنی‌های تراز، مقطع آن رویه با صفحات موازی با یکی از صفحات مختصات‌اند.) درمی‌یابیم که مجموعه‌های نامجزای ماکسیمال از اجزای اطلاعاتی X، با **نقاط** X متناظرند و همچنین X را می‌توان با القای یک توپولوژی طبیعی روی خانواده‌ای از این مجموعه‌های اجزای اطلاعاتی بازسازی کرد. در این حالت، «اگر اجزای اطلاعاتی را بشناسید، آن‌گاه کل را می‌شناسید.»

شیوهٔ بازسازی یک فضا از اجزای اطلاعاتی‌اش، به **ساختارهای جبری** مانند حلقه‌های (تعویض‌پذیر) قابل‌توسیع است که با تحدید ایدهٔ **کمیت متغیر** (پیوسته) پدیدار می‌شوند. در اینجا ایده این است که از پیوند اجزای اطلاعاتی یک حلقهٔ داده شده مانند R، یک فضای توپولوژیک X ساخته شود و با مشخص کردن حلقهٔ (توپولوژیکی) R^* و با کمک روابط کلیدی معین، حلقهٔ R دوباره آن‌چنان ساخته شود که بتوان آن را به‌عنوان حلقهٔ نگاشت‌های پیوستهٔ R^* ــ مقدار روی X در نظر گرفت. در ارتباط با این موضوع، دو نمونه کلاسیک وجود دارد.

اولین نمونه، **دوگانی استون**[1] است (مرجع [6] را مشاهده کنید). در این حالت، حلقهٔ R حلقهٔ **بولی** B است، یعنی حلقه‌ای که در آن، اتحاد $x^2 = x$ برقرار است. (مفهوم حلقهٔ بولی اساساً توسط خود بول از ایدهٔ تابع گزاره‌ای یا تابع ارزشی، یعنی یک «کمیت» متغیر که دقیقاً دو «ارزش درستی» می‌پذیرد، به‌دست آمده است: **درست** (۱) و **غلط** (۰).) در اینجا «اجزا»ی اطلاعاتی B همان **ایدآل‌های ماکسیمال** هستند؛ «اجزائی» از B که روی آن‌ها، هر همریختی به حلقهٔ توپولوژیکی گسستهٔ $\mathbf{2} = \{0, 1\}$، فقط مقدار صفر را اختیار می‌کند. این اجزاء، یک فضای توپولوژیک X پدید می‌آورند (همان فضای استون B) و آن‌گاه B به‌عنوان حلقهٔ نگاشت‌های پیوسته از X به $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ مشخص می‌شود.

دومین نمونه، **دوگانی گلفاند** است (مرجع [8] را مشاهده کنید). در این حالت، حلقهٔ R یک C^* ــ **جبر** (نوع خاصی از حلقهٔ مرتب ارشمیدسی) است. در اینجا «اجزا»ی اطلاعاتی R، ایدآل‌های ماکسیمال هستند؛ «اجزائی» که روی آن‌ها، هر همریختی به یک میدان، مقدار صفر را اختیار می‌کند. این اجزاء، یک فضای توپولوژیک X می‌سازند و آن‌گاه R به‌عنوان حلقهٔ نگاشت‌های پیوسته از X به **میدان اعداد حقیقی** $\mathbf{R}$ مشخص می‌شود. در هر دو مورد، حلقهٔ R به‌عنوان حلقهٔ توابع پیوسته روی فضای توپولوژیک X مجدداً ساخته می‌شود، که خود X با «اجزا»ی معین R ساخته شده است. با معرفی ردهٔ $\mathbf{Shv}X$ شامل **بافه‌های روی** X که به‌عنوان جهان اشیائی توصیف می‌شود که تحت تأثیر تغییرات پیوسته روی X قرار می‌گیرند، می‌توان کارهای بیشتری ارائه کرد (مرجع [9] را ببینید). این منجر می‌شود به این‌که هر حلقهٔ بولی را می‌توان به‌وسیلهٔ حلقهٔ $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ و هر C^* ــ جبر را با حلقهٔ R مشخص کرد که هر دو در $\mathbf{Shv}X$ ساخته می‌شوند.

---

1) Stone Duality

به روش دیگر، هر حلقهٔ بولی B (یا C^* ـ جبر R) را می‌توان به‌عنوان حلقهٔ $\mathbf{2}$ (یا $\mathbf{R}$) در نظر گرفت که تحت تأثیر تغییرات پیوسته روی یک فضای توپولوژیکی قرار می‌گیرند، فضایی که خود از «اجزا»ی اطلاعاتی B (C^* ـ جبر R) ساخته شده است. برای بازسازی یک حلقهٔ دلخواه (تعویض‌پذیر) R به روشی مشابه، اجزای اطلاعاتی مرتب، **ایدآل‌های اول** هستند، یعنی اجزائی از R که روی آن‌ها، هر همریختی به یک حوزهٔ صحیح، مقدار صفر را اختیار می‌کنند و این اجزاء یک فضای X را به‌وجود می‌آورند که **طیف زاریسکی** X نام دارد. در این صورت، R را می‌توان با یک **حلقهٔ موضعی** معین در $\mathbf{Shv}X$ شناسایی کرد (مرجع [۱۰] را ببینید). (حلقهٔ موضعی، تقریباً یک میدان است به این معنی که برای هر عنصر x، یا x وارون‌پذیر است یا $1 - x$: هم $\mathbf{2}$ و هم $\mathbf{R}$ حلقه‌های موضعی هستند، همان‌طور که حلقهٔ جرم‌های[1] توابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار در هر نقطه از یک فضای توپولوژیک نیز چنین است.) بنابراین هر حلقهٔ تعویض‌پذیر را می‌توان «تقریباً میدان» در نظر گرفت که تحت تأثیر تغییرات پیوسته روی فضایی قرار می‌گیرد که خود این فضا از اجزای اطلاعاتی آن «تقریباً میدان» ساخته شده است. برای جمع‌بندی حالت‌های فوق می‌توان نوشت:

کل $\to$ تغییرات $+$ اجزاء

مفهوم جزء در **نظریهٔ رسته‌ها** دارای یک صورت‌بندی خیلی کلی است (مرجع [7] را ببینید). شیء A را در رستهٔ $\mathcal{C}$ در نظر می‌گیریم. یک **زیرشیءِ** A یک پیکان یک‌به‌یک $\alpha : S \to A$ در $\mathcal{C}$ است. زیراشیاء A، اشیاء رستهٔ $\mathbf{Sub}(A)$ را تشکیل می‌دهند. در **رستهٔ زیراشیاء** A یک پیکان از شیء $S \xrightarrow{\alpha} A$ به شیء $T \xrightarrow{\beta} A$، یک پیکان (لزوماً یک‌به‌یک) $S \xrightarrow{f} T$ در $\mathcal{C}$ است، به‌طوری که نمودار زیر جابه‌جا می‌شود:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & T \arrow[dl, "\beta"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

در $\mathbf{Sub}(A)$ حداکثر یک پیکان بین هر دو شیء داده شده وجود دارد، بنابراین $\mathbf{Sub}(A)$ یک ردهٔ پیش‌مرتب است. یک **جزء** A، یک ردهٔ هم‌ارزی از زیراشیاء A است تحت رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ با تعریف $S \xrightarrow{\alpha} A \sim T \xrightarrow{\beta} A$ اگر و فقط اگر یکریختی $S \xrightarrow{i} T$ موجود باشد که نمودار زیر را جابه‌جا کند:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & T \arrow[dl, "\beta"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

1) germs

در این صورت، ردهٔ $\mathbf{Part}(A)$ از اجزاء A با رابطهٔ **شمول** $\subseteq$ مرتب جزئی است. با به‌کارگیری $\tilde{\alpha}$ برای ردهٔ هم‌ارزی زیرشیء α، رابطهٔ $\tilde{\alpha} \subseteq \tilde{\beta}$ دقیقاً زمانی برقرار است که یکریختی $S \xrightarrow{f} T$ در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد که نمودار $(*)$ را جابه‌جا کند.

یکی از انواع «کل $\leftrightarrow$ جزء» با اهمیت خاص در ریاضیات این ایده است که یک شیء توسط اجزایش **پوشانده** شود. برای مثال در هندسهٔ دیفرانسیل، یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر، یک فضای توپولوژیک است که به روشی مناسب با اجزاء باز که هر کدام با یک «جزء» $\mathbf{R}^n$ همسانریخت هستند، پوشانده می‌شود. در نظریهٔ مجموعه‌ها، هر مجموعه با خانوادهٔ تک عضوی‌ها پوشانده می‌شود و با این تعبیر، آن مجموعه اجتماع این خانواده می‌شود. در ریاضیات شهودی، آنجا که قانونِ شِق وسط به‌طور کلی پذیرفتنی نیست، تک‌ها «تباهیده» هستند (یعنی شرط «$a = b$ یا $a \neq b$» لزوماً برقرار نیست) و بنابراین یک مجموعهٔ تک‌عضوی باید به‌عنوان مجموعه‌ای که **حداکثر** شامل یک عنصر است، در نظر گرفته شود. اشیائی که از اجتماع مجموعه‌های تک‌عضوی تشکیل می‌شوند از این منظرِ جدید، نقش **مجموعه‌های تعمیم‌یافته** را بازی می‌کنند.

در مجموعه‌ها، رابطهٔ پوشش در سه شرط مشخصهٔ زیر صدق می‌کند:

۱$-$ i) $\{U\}$، U را می‌پوشاند («هر مجموعه خودش را می‌پوشاند»).

۲$-$ ii) اگر خانوادهٔ $\mathcal{A}$ از مجموعه‌ها U را بپوشاند و به‌علاوه $V \subseteq U$، آن‌گاه $\mathcal{A}|V = \{A \cap V : A \in \mathcal{A}\}$، V را می‌پوشاند («تحدید یک پوشش به یک «جزء»، یک پوشش است»).

۳$-$ iii) اگر $\mathcal{A}$، U را بپوشاند و برای هر $A \in \mathcal{A}$، $\mathcal{B}_A$، A را بپوشاند، آن‌گاه $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_A$، U را می‌پوشاند («اجتماع یک خانواده از پوشش‌ها یک پوشش است»).

گروتندیک[۱] این شرایط را به رسته‌های دلخواه تعمیم داد؛ آنچه که بعدها به **توپولوژی گروتندیک** معروف شد (مرجع [9] را ببینند). این مفهوم در مبحث مجموعه‌های جزئاً مرتب، شکل شفافِ مشخصی پیدا می‌کند. فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب ثابت، امّا دلخواه باشد: حروف p, q, r, s, t را برای نمایش عناصر P به‌کار می‌بریم. گیریم S و T زیرمجموعه‌های P باشند. S را یک **تراش** T می‌نامیم و می‌نویسیم $S < T$ اگر برای هر $s \in S$ یک $t \in T$ موجود باشد به‌طوری که $s \leq t$. یک **طرح پوششی** روی P نگاشتی است چون $\mathbf{C}$ که به هر $p \in P$ خانوادهٔ $\mathbf{C}(p)$ از زیرمجموعه‌های $p\downarrow = \{q : \quad q \quad \leq p\}$ را که $\mathbf{C}$ ـ پوشش‌های p نام دارند، نظیر می‌کند چنان‌که اگر $q \leq p$، آن‌گاه هر پوشش p را می‌توان به یک پوشش از q تراش داد، یعنی

$$S \in C(q), q \leq p \to \exists T \in C(q)[\forall t \in T \quad \exists s \in S \quad (t \leq s)].$$

این متناظر با شرط (ii) بالا است. اکنون **توپولوژی گروتندیک** روی P عبارت است از یک طرح

1) Grothendieck

پوشش $\mathbf{C}$ روی P که در شرط‌های همتا با (i) و (iii) در بالا صدق کند، یعنی $\mathbf{C}(p) \ni \downarrow p$ برای هر $p \in P$ و اگر $s \in C(p)$ و برای هر $s \in S$ داشته باشیم $T_s \in \mathbf{C}(s)$، آن‌گاه $\bigcup_{s\in S} T_s \in \mathbf{C}(p)$. در هر فضای توپولوژیک T، به‌طور معمول یک مفهوم بستار وجود دارد: اگر $X \subseteq T$، آن‌گاه بستار X که با $\overline{X}$ نشان داده می‌شود کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل X است؛ یعنی کوچکترین مجموعهٔ Y شامل X، با این خاصیت که اگر هر همسایگی نقطهٔ p، مجموعهٔ Y را قطع کند، آن‌گاه $p \in Y$. عملگر بستار در **اصول معروف کوراتفسکی**[1] صدق می‌کند که عبارت‌اند از

$$X \subseteq \overline{X}, \quad \overline{X} = \overline{\overline{X}}, \quad \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

توپولوژی‌های گروتندیک نیز نوعی عملگر بستار روی غربال‌ها (به‌جای زیرمجموعه‌های دلخواه) به‌دست می‌دهند: یک غربال در مجموعهٔ جزئاً مرتب $(P, \leq)$ عبارت است از زیرمجموعهٔ S از P که $\geq$ ــ پایاست، یعنی اگر $p \in S$ و $p \geq q$، آن‌گاه $q \in S$. به این ترتیب، فرض کنید توپولوژی گروتندیکِ C روی مجموعهٔ جزئاً مرتبِ $(P, \leq)$ داده شده است. نماد $S(P)$ بیانگر مجموعهٔ همهٔ غربال‌ها در P است. اگر غربال I شامل یک **پوشش** از عنصر $p \in P$ باشد، گوییم I عنصر p را می‌پوشاند. اگر غربال I شامل تمام عناصری از P باشد که آن‌ها را می‌پوشاند، گوییم I، $\mathbf{C}$ ــ **بسته** است، یعنی

$$\exists S \in C(p)(S \subseteq I) \Rightarrow p \in I.$$

به‌سادگی دیده می‌شود که اشتراک یک خانوادهٔ دلخواه از غربال‌های C ــ بسته، یک غربال C ــ بسته است، بنابراین برای هر غربال I در P کوچکترین غربال C ــ بستهٔ شامل I وجود دارد که با $\tilde{I}$ نشان داده می‌شود و آن را $\mathbf{C}$ ــ **بستار** I می‌نامیم. عملگر C ــ بستار در دو شرط کوراتفسکی ذکر شده در قبل صدق می‌کند؛ یکی $I \subseteq \tilde{I}$ و دیگری $\tilde{I} = \tilde{\tilde{I}}$. اما به‌جای پخش‌شدن روی اجتماع، دارای خاصیت پخشی روی **اشتراک** است: $\widetilde{I \cap J} = \tilde{I} \cap \tilde{J}$. گرچه مهم نیست، امّا بد نیست اشاره شود که ویژگی‌های مشخصهٔ عملگر بستارِ که به‌واسطهٔ مفهوم **پوشش** به‌دست می‌آیند، در حدود نیم قرن بعد از آن کشف شدند که این ویژگی‌ها از مفهوم **همسایگی** به‌دست آمدند.

سرانجام نگاهی به ایدهٔ **مشبکه** از اجزاء می‌اندازیم. فضا یا کلِ S داده شده است، انتظار می‌رود که اجزاء مناسبی از S تحت رابطهٔ شمول، $\subseteq$، **مشبکهٔ** L را تشکیل دهند، یعنی برای هر دو جزء U و V از S اجزاء $U \sqcup V$ و $U \sqcap V$ موجود باشند (این اجزاء به **وست** و **رسند** U و V معروف هستند) که به‌ترتیب $\subseteq$ ــ کوچکترین و $\subseteq$ ــ بزرگترین اجزاء S شامل U و V و مشمول آن‌ها هستند. فرض کنیم $\varnothing$ و S به‌ترتیب کوچکترین و بزرگترین «اجزاء» S باشند. همچنین برای هر جزء U جزء U^* موجود باشد به‌طوری که $U \sqcap U^* = \varnothing$. U^* آن جزء از S است که «خارج» U است. به‌علاوه فرض کنیم که عملگر «$*$» شمول‌برگردان است: اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $V^* \subseteq U^*$. ساختار $\mathbf{S} = (S, L)$ را یک فضای «جزئی$\leftrightarrow$کلی» می‌نامیم که در آن، S کل است و اعضای L اجزای $\mathbf{S}$ هستند.

---

1) Kuratowski axioms

اکنون فرض کنیم که **صفات کیفی** ابتدایی A و B («قرمز»، «سخت» و غیره) داده شده باشند و اجزاء $\mathbf{S}$ بتوانند این صفات را بپذیرند. به هر جزء U خانوادهٔ $\mathbf{A}(U)$ از صفات کیفی‌ای که آن جزء می‌تواند بپذیرد، نسبت داده می‌شود: فرض کنیم که رابطهٔ پذیرش صفات ابتدایی، موروثی باشد به این معنی که اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $\mathbf{A}(V) \subseteq \mathbf{A}(U)$. رابطهٔ «پذیرش» صفات ابتدایی به صفات مرکب φ به‌صورت زیر توسیع می‌یابد: اگر «U صفت مرکب φ را بپذیرد» می‌نویسیم $U \Vdash \varphi$:

$U \Vdash A$ اگر و تنها اگر $A \in \mathbf{A}(U)$ برای هر صفت اولیهٔ A؛

$U \Vdash \varphi \wedge \psi$ اگر و تنها اگر $U \Vdash \varphi$ و $U \Vdash \psi$؛

چنانچه $U = V \sqcup W$، $U \Vdash \varphi \vee \psi$ اگر و تنها اگر $V \Vdash \varphi$ و $W \Vdash \psi$؛

$U \Vdash \sim \varphi$ اگر و تنها اگر از $V \Vdash \varphi$ نتیجه شود که $V \subseteq U^*$ برای هر V.

صفت φ در $\mathbf{S}$ **پایاست** اگر برای همه اجزاء U و V گزاره زیر برقرار باشد:

$$U \Vdash \varphi, V \subseteq U \rightarrow \vee \Vdash \varphi.$$

پایایی صفات دلخواه در $\mathbf{S}$، با **توزیع پذیری** L، یعنی برقراری قانون

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

تضمین می‌شود. هرگاه متناظر با هر جزء U یک صفت کیفی A_U موجود باشد به‌طوری که برای هر جزء X داشته باشیم $X \Vdash A_U \Leftrightarrow X \subseteq U$، این دو شرط معادل هستند. اگر رابطهٔ $\Vdash$ را به‌عنوان نوعی رابطهٔ **پوششی** بین اجزاء و صفات تصور کنیم، ($U \Vdash \varphi$ به این معنا باشد که φ، U را می‌پوشاند) آن‌گاه به پایایی صفات کیفی دلخواه در $\mathbf{S}$ می‌توان به‌عنوان برقراری فرض دوم توپولوژی گروتندیک نگریست: تحدید یک پوشش، خود یک پوشش است.

در ارتباط با **ساختارهای تقرب**، فضاهای طبیعیِ «جزء $\leftrightarrow$ کل»ی مانند $\mathbf{S}$ پدید می‌آیند که در آن‌ها صفات کیفی معین φ پایا نیستند: در حقیقت ممکن است φ توسط «کل»ِ فضا در برگرفته شود، اما نه با اجزاء مشخص! در این حالت، صفات کیفی «کل» **به تمام اجزایش بازتاب داده نمی‌شوند.**

یک ساختارِ **تقرب**، مجموعه‌ای مانند S است که به یک رابطهٔ دوتاییِ متقارنِ بازتابی $\simeq$ مجهز شده باشد. برای هر $x \in S$، **حباب** در x را که با B_x نشان می‌دهیم، چنین تعریف می‌کنیم:

$$B_x = \{y \in S : x \simeq y\}.$$

هر اجتماعی از حباب‌ها را یک جزء S می‌نامیم. یک فضای «جزء $\leftrightarrow$ کل » $(S, \mathbf{Part}(S))$ فضای تقرب نامیده می‌شود در صورتی که در آن، عملگر وست همان اجتماع مجموعه‌ها و رسند دو جزء از S، اجتماع تمام حباب‌های مشمولِ اشتراکِ آن دو جزء باشد و برای $U \in \mathbf{Part}(S)$ داشته باشیم

$$U^* = \{y \in S : y \not\simeq x, \forall x \in U\}.$$

این بحث را با یک مثال ساده از یک فضای تقرب **ناپایا** به پایان می‌بریم. فرض کنیم S دایرهٔ یکه و حباب در هر نقطهٔ $x \in S$ ربع دایره‌ای باشد که x روی آن قرار دارد. اکنون با قرمز کردن ربع اول و سوم و سیاه کردن ربع دوم و چهارم، صفات **red** و **black** را به «اجزاء» S نسبت می‌دهیم. بنابراین S دارای صفت $\mathbf{red} \vee \mathbf{black}$ است. از طرف دیگر اگر U یکی از نیم‌دایره‌هایی باشد که توسط قطری از دایره که نیم‌ساز ربع اول و سوم است تشکیل می‌شود، آن‌گاه آشکارا U دارای $\mathbf{red} \vee \mathbf{black}$ نیست، زیرا نمی‌تواند به دو «جزء» تجزیه شود که به‌ترتیب دارای صفات **red** و **black** باشند. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که S دارای صفت $\mathbf{red} \vee \neg\mathbf{red}$ است امّا U این صفت را ندارد. از طرف دیگر، U صفت $\neg\neg(\mathbf{red} \vee \mathbf{black})$ را دارد، زیرا می‌توان نشان داد که برای هر جزء U از یک فضای تقرب و هر صفت φ داریم

$$U \Vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \exists V \supseteq V, V \Vdash \varphi.$$

به بیان دیگر، در یک فضای تقرب، یک «جزء» U نقیضِ نقیضِ یک صفت را داراست، دقیقاً هنگامی که U خود جزئی از یک جزء بزرگتر واجد این صفت باشد. بنابراین در حالی که یک صفت دلخواه ممکن است پایا نباشد، نقیضِ نقیضِ آن همیشه پایاست.

مراجع

[1] Bell, J. L. and Machover, M., *A Course in mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1977.

[2] Bell, J. L. and Slomson, A. B., *Models and ultraprodicts: An introduction*, North-Holland, Amesterdam, Netherlands, 1969.

[3] Bourbaki, N., *Eliements of mathematics: algebra II*, Springer-Verlag, New York, N. Y., 1990.

[4] Edwards, R. E., *Functional analysis*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, N. Y., 1965.

[5] Gillman, L. and Jerison, M., *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, New York, N. Y., 1960.

[6] Johnstone, P. T., *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1982.

[7] Lawvere, F. W. and Schanuel, S., *Conceptual mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1997.

[8] Loomis, L. H., *Abstract harmonic analysis*, Van Nostrand, New York, N. Y., 1953.

[9] Mac Lane, S. and Moerdijk, I., *Sheaves in geometry and logic*, Springer-Verlag, New York, N. Y., 1992.

[10] Mulvey, C. J., "Representations of rings and modules", *Applications of Sheaves*, M. P. Fouman, C. J. Mulvey and S. S. Scott (eds.), Lecture Notes in Mathematics **753**, 542–585.

[11] Robinson, A., *Non-standard analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1996.

[12] Spivak, M., *Differential geometry*, Publish or Perish Press, Waltham, M. A., 1979.

مترجمین: امید غیور ghayour@scu.ac.ir

رستم محمدیان mohamadian@scu.ac.ir

مهرداد نامداری، namdari@ipm.ir

دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید چمران، اهواز