فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۲ (بهار ۱۳۹۲) صص. ۱۳ تا ۳۵

انتگرال: از ارشمیدس تا لبگ (قسمت اول)

سعید مقصودی

چکیده

در این مقاله، شرحی تاریخی ــ توصیفی از شکل‌گیری و تکامل مفهوم انتگرال از ابتدا تا زمان لبگ ارائه می‌کنیم. همچنین با تمرکز بر روی برخی جنبه‌های خاص نظریه‌های انتگرال ریمان و لبگ و با ارائه مثال‌هایی، به برخی کاستی‌های این دو نظریهٔ انتگرال‌گیری اشاره خواهیم کرد.

۱. مقدمه

نظریهٔ انتگرال‌گیری محصول قرن‌ها پالایش و گسترش مفهوم مساحت است. در دوره‌ای، انتگرال را فرآیند معکوس مشتق‌گیری و در دوره‌ای دیگر، آن را فرآیندی برای جمع‌زدن‌های بی‌پایان در نظر می‌گرفتند. اما در حال حاضر، چنین دیدگاه‌های یگانه‌ای در خصوص نظریهٔ انتگرال کمتر به چشم می‌خورد، زیرا ریاضیات در زمانهٔ ما با آهنگ شتابانی در حال رشد است.

در این مقاله، قصد داریم گزارشی تاریخی ــ توصیفی از شکل‌گیری مفهوم انتگرال تا اوایل قرن بیستم ارائه کنیم. در بخش دوم، شرح مختصری از مفهوم انتگرال از زمان ارشمیدس تا ابداع حسابان به‌دست نیوتن و لایب‌نیتس آورده‌ایم. در بخش سوم، به بررسی شکل‌گیری و تکامل انتگرال‌گیری از زمان ابداع حسابان تا قبل از عصر دقت در آنالیز که در آن انتگرال به‌مفهوم جدید تعریف می‌شود، می‌پردازیم. در این بخش، از مراجع [۳] و [۷] سود برده‌ایم. در بخش‌های چهارم، پنجم و ششم، تکامل انتگرال به‌مفهوم جدید آن را بررسی کرده‌ایم. در این باره، دو کتاب خواندنی [۹] و [۱۰] بسیار راهگشا هستند. در بخش پایانی، به بررسیِ چگونگی شکل‌گیری انتگرال لبگ پرداخته‌ایم. برخی قضایای انتگرال ریمان و لبگ را به‌طور رسمی و البته بدون اثبات به‌منظور مقایسه ذکر کرده‌ایم. برای اثبات آن‌ها می‌توان به هر کتاب استاندارد آنالیز حقیقی رجوع کرد؛ دو کتاب [۶] و [۱۵] در این زمینه، بسیار مفیدند. با آوردن مثال‌هایی به کاستی‌های دو نظریهٔ فوق اشاره کرده‌ایم. این کاستی‌ها انگیزهٔ معرفی نظریه‌های انتگرال‌گیری دیگری بوده‌اند. برای بررسی برخی از این

نظریه‌ها، [۱۷] را ببینید. همچنین، برای مطالعهٔ یک بررسی تقریباً همه‌جانبه و متقن از تاریخ و نظریه‌های انتگرال تا اواخر قرن بیستم، از نگاه یک آنالیزدان حرفه‌ای، به [۱۴] مراجعه کنید. [۱۳] نیز توصیف مختصری از عمدهٔ نظریه‌های انتگرال تا اوایل قرن بیستم در اختیار می‌گذارد.

مشاهدهٔ زنجیروار شکل‌گیری و تحول مفهوم انتگرال بسیار جالب و آموزنده است. هم از این بابت که نشان می‌دهد مفهومی به آشنایی مفهوم انتگرال مدت زمان زیادی طول کشیده تا به‌شکل امروزین آن درآید و هم از این نظر که نشان می‌دهد ترتیب تحول برخی مفاهیم ریاضی، خلاف ترتیب آموزشی رایج آن‌ها است.

۲. مفهوم انتگرال از زمان یونانیان تا نیوتن

بررسی چگونگی شکل‌گیری مفهوم انتگرال از زمان یونانیان تا ابداع حساب به‌دست نیوتن و لایب‌نیتس، بسیار جالب و آموزنده است و نیازمند بحث مفصل و جداگانه‌ای است. در این بخش، به مهم‌ترین جنبه‌های آن اشاره خواهیم کرد. برای بحث کامل‌تر می‌توانید [۱،۳،۴،۵،۸،۱۰] را ملاحظه کنید. همچنین، در [۱۱] حساب دیفرانسیل و انتگرال از جنبهٔ تاریخی با نگاه آموزشی، مورد بررسی قرار گرفته است.

قدیمی‌ترین مسألهٔ آنالیز محاسبهٔ طول خم‌ها، مساحت سطوح و حجم‌ها بوده است. نزد یونانیان باستان مفهوم مساحت کاملاً شناخته شده بود و آن‌ها موفقیت‌های قابل توجهی نیز در محاسبهٔ مساحت برخی شکل‌های هندسی به‌دست آورده بودند. تا سال ۵۰۰ قبل از میلاد مسیح، هندسه‌دانان یونانی قادر بودند مساحت نواحی که محدود به خطوط مستقیم هستند یا به‌اصطلاح چندضلعی‌ها را محاسبه کنند. در ریاضیات یونانی، مساحت یک شکل زمانی معنی‌دار بود که به‌طور هندسی (یعنی با برخی وسایل هندسی ساده مانند خط‌کش و پرگار) بتوان مربعی هم‌مساحت با آن شکل ساخت؛ مفهوم «تربیع» نیز از همین‌جا نشأت گرفته است.

یونانیان در مواردی که تعیین کمیتی غیرممکن بود یا چگونگی تعیین آن از طریق ساختار هندسی شناخته شده نبود، از تقریب استفاده می‌کردند. مثلاً تربیع دایره را که در پاپیروس رایند مصر در حدود ۱۸۰۰ قبل از میلاد مطالعه شده بود، درنظر بگیرید. در اینجا دایره‌ای به شعاع r در مربعی با طول ضلع d محاط شده بود و این مربع نیز به نُه مربع مساوی تقسیم و مربع‌های کناری به‌وسیلهٔ قطرشان نصف شده بودند. از این‌رو، مساحت مربع بریده‌شده، A، برابر مجموع مساحت‌های هفت زیرمربع است و لذا $A = (1 - \frac{2}{9})d^2$. مقدار A را می‌توان تقریب ساده‌ای برای مساحت دایره در نظر گرفت. مصریان باستان مقدار $(\frac{8}{9})d^2$ را برای تقریب A به‌دست آورده بودند و به همین دلیل می‌توان گفت آن‌ها تقریب $\pi = (\frac{16}{9})^2 = 3/160$ را به‌کار می‌بردند.

سوفیست‌ها اولین ریاضیدانان یونانی بودند که مسألهٔ محاسبهٔ مساحت دایره را مطرح کردند. معروف است که مسألهٔ تربیع دایره را آناگساگوراس زمانی که در زندان بود مطرح کرد. هیپوکرات

مسألهٔ هلال‌ها را در قرن پنجم قبل از میلاد مطرح کرد و راه‌حل او جزء اولین دست‌نوشته‌های یونانیان در ریاضیات است. محاسبهٔ این مساحت‌ها گرچه به روش غیردقیق انجام می‌پذیرفت، یونانیان را به تربیع دایره برانگیخت، زیرا نشان می‌داد که محاسبهٔ چنین مساحت‌هایی امکان‌پذیر است.

در قرن پنجم قبل از میلاد، آنتیفون سوفیست مسألهٔ تربیع دایره را بررسی کرد. او چندضلعی‌های منتظم بر دایره محاط کرد و دایره را تحلیل‌رفتهٔ چندضلعی‌ها در نظر گرفت به شرطی که تعداد رأس‌های چندضلعی به قدر کافی زیاد باشد. ضلع‌های کوچک چنین چندضلعی‌هایی را با قطعات کوچک از کمان‌ها یکی در نظر گرفت و ادعا کرد که با تقسیم‌های به قدر کافی زیاد و در عین‌حال متناهی از ضلع‌ها، می‌توان کمان‌های به‌دلخواه کوچک تولید کرد (وی این کار را بدون ارجاع به مفهوم حد انجام می‌دهد).

ریاضیدانانِ دیگر، روش فوق را تعمیم و دقت بیشتر بخشیدند. با ملاحظهٔ این مطالب، ائودوکسوس (۴۰۰ ـ ۳۴۷ ق. م.) روش افنا را ابداع می‌کند. روش افنا که عمدهٔ محاسبات حجم و مساحت بر آن استوار بوده است، اساساً روشی برای فرار از فرآیند حدگیری است؛ برای بررسی پیش‌زمینه‌های آن، [۱۶] را ببینید. روش افنا دو گام دارد. در گام اول اندازهٔ مفروض A با اندازهٔ دیگری مانند B که راحت به‌دست می‌آید تقریب زده می‌شود. در گام دوم نشان داده می‌شود که نه $A < B$ و نه $B < A$ نمی‌تواند درست باشند و سپس با برهان خلف دوگانه نتیجه می‌شود که $A = B$. توجه می‌کنیم که این روش ابداً یک روش حدی نیست. روش افنا دنباله‌های نامتناهی را به‌کار نمی‌برد. بلکه پس از تعداد متناهی مرحله متوقف می‌شود و باقیمانده که به‌دلخواه کوچک است (و مقدار صرف‌نظرشدنی تلقی نمی‌شود) در برهان خلف به‌کار گرفته می‌شود. بدین معنی واژهٔ «افنا» گمراه کننده است، زیرا منظور از این روش را به‌طور کامل آشکار نمی‌سازد؛ واژهٔ «کنار گذاشتن» یا «استثنا کردن» بهتر است.

ارشمیدس (۲۸۷ ـ ۲۱۲ ق. م.) در رسالهٔ کوچکی با عنوان «در باب اندازه‌گیری دایره» نشان می‌دهد که مساحت دایره برابر با مساحت مثلث معینی است. وی برای این منظور، روش مقایسه با ۹۶ضلعی منتظم محاطی و محیطی را به‌کار می‌برد و با نمادهای امروزی نشان می‌دهد که $۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷}$. ارشمیدس در سال ۲۸۰ پیش از میلاد محیط دایره، مساحت دایره، مساحت قطعه‌ای از سهمی، مارپیچ ارشمیدسی و حجم کره، حجم قطعه‌ای از کره و برخی سطوح را محاسبه کرده است. او همچنین مماس بر مخروطی‌ها و مارپیچ را نیز بررسی کرده است (گرچه مفهوم مماس به‌صورت حد خطوط قاطع تنها از قرن ۱۷ به‌بعد مطرح شد). برای مثال، برای محاسبهٔ مساحت قطعه‌ای از سهمی، با محاط کردن مثلثی در زیر آن ناحیه و استفاده از روش افنا مقدار دقیق را به‌دست می‌آورد.

گرچه ارشمیدس مفهوم حد را به‌کار نمی‌برد و با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی و روش افنا، مساحت و حجم را محاسبه می‌کند، نباید تصور کرد که روش وی همان و یا شبیه نظریهٔ انتگرال ریمان است. اولاً ارشمیدس مساحت و حجم را در چارچوب هندسهٔ اقلیدسی می‌فهمید و

به‌کار می‌برد. ثانیاً این روش را بدون توجه به این‌که آیا نتیجه به یک روش معینی وابسته است یا نه، به‌کار می‌گرفت. علاوه بر این، ارشمیدس علاقه‌ای به پروراندن یک روند کلی نشان نمی‌داد، بلکه برای هر مسألهٔ جدید، یک رویکرد (هندسی) مناسب را جستجو می‌کرد. در برخی موارد حتی برای مسأله‌های مشابه روش‌های کاملاً متفاوتی را برمی‌گزید. در عین‌حال نتایج ارشمیدس نقاط بسیار برجسته‌ای از تاریخ ریاضیات هستند. ریاضیدانان اسلامی از جمله ابن‌هیثم (۱۰۳۸ ــ ۹۶۵ م.) و ثابت بن قرّه (۹۰۱ ــ ۸۳۶ م.) در قرن ۱۰ میلادی با به‌کار بردن روش افنا، حجم برخی اجسام دورانی را محاسبه کرده‌اند [۱۴].

در قرن چهاردهم میلادی، بعد از گذشت عصر تاریکی و شروع دورهٔ رنسانس در اروپا، شاهد ورود مفاهیم بی‌نهایت، شتاب و تغییرات لحظه‌ای (عمدتاً وابسته به حرکت) و استفاده از نمودار در بررسی این مفاهیم هستیم. همچنین در این دوره مفهوم عدد، دیگر فقط یک مفهوم هندسی نیست بلکه مفهومی کمّی نیز پیدا می‌کند. توصیف کمی حرکت، عمده‌ترین علت علاقه‌مندی ریاضیدانان به مسائل وابسته به مشتق و انتگرال‌گیری بوده است: محاسبهٔ مسافت طی‌شده توسط متحرک در فاصلهٔ زمانی مشخص، سرعت لحظه‌ای، شتاب و ارتباط این سه با یکدیگر. مسألهٔ مماس و قائم در دیگر قسمت‌های فیزیک ظاهر می‌شود. برای مثال عبور نور از یک عدسی نیاز به محاسبهٔ قائم بر سطح عدسی دارد و به‌وضوح این مسأله، الهام‌بخش دکارت در ساختن خط قائمه بوده است. همچنین در مطالعهٔ ذرهٔ متحرک روی یک مسیر که مسأله‌ای معمول در مکانیک سماوی است، مماس بر مسیر جهت، سرعت را نشان می‌دهد. به‌علاوه روش‌های یافتن مماس و قائم، کلید حل مسائل مربوط به یافتن ماکسیمم و مینیمم در فیزیک، نجوم و ریاضیات بود. مسائل وابسته به طول خم، مساحت بین خم‌ها، حجم و مرکز ثقل اجسام در همه جا بروز و ظهور داشتند. کپلر و کاوالیری از جملهٔ اولین ریاضیدانانی بودند که سعی در یافتن روش‌هایی برای تحلیل این مسائل داشتند. برخی روش‌ها برای این مسائل از زمان ارشمیدس شناخته شده بود، اما مشخص نبود که این روش‌ها را چگونه یافته است و نیاز به یک روش داهیانه احساس می‌شد.

در قرن پانزدهم میلادی، مفاهیم تقسیم‌ناپذیرها و بی‌نهایت‌کوچک‌ها وارد ریاضیات می‌شوند؛ گرچه هیچ پایهٔ منطقی برای آن‌ها وجود ندارد و دارای تناقضات بی‌شماری هستند. در قرن شانزدهم میلادی، پیشرفت‌هایی در جبر اتفاق می‌افتد. نمادگرایی جبری و نمایش اعداد با حروف رواج پیدا می‌کند. تلاش‌هایی برای نزدیک کردن روش ارشمیدس در محاسبهٔ حجم و مساحت و بی‌نهایت‌کوچک‌ها انجام می‌شود. تلاش‌هایی برای یافتن روش‌های جایگزینی برای روش افنا و استدلال برهان خلف دوسویه صورت می‌گیرد. در اوایل قرن هفدهم میلادی، کپلر (۱۶۳۰ ــ ۱۵۷۱) کتابی دربارهٔ محاسبهٔ حجم برخی اشکال تألیف می‌کند. او کره را متشکل از بی‌نهایت مخروط در نظر می‌گیرد و از روش بی‌نهایت‌کوچک‌ها استفاده می‌کند. کاوالیری (۱۶۴۷ ــ ۱۵۹۸) نیز در سال ۱۶۳۵ به محاسبهٔ حجم و مساحت برخی اشکال و اجسام می‌پردازد و نتایج کلی در این باب به‌دست می‌آورد. او سطح را متشکل از تعداد بی‌نهایت خط موازی و حجم

را متشکل از بی‌نهایت صفحهٔ هم‌فاصله درنظر می‌گیرد و این اجزاء را تقسیم‌ناپذیرها می‌نامد. او قادر به محاسبهٔ چیزی می‌شود که امروزه با فرمول $\int_{\circ}^{a} x^n \, dx = (a+۱)/(n+۱)$ بیان می‌شود. محاسبه را برای $n \leq ۹$ انجام می‌دهد و فرمول بالا را برای هر n، درست می‌داند. اثبات این حدس توجه ریاضیدانان بسیاری از جمله روبروال، فرما، والیس و پاسکال را بین سال‌های ۱۶۳۶ تا ۱۶۵۵ جلب کرد. آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها، در واقع با کتابی که کاوالیری نوشت آغاز شد. قضیهٔ فوق شاید اولین قضیه در آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها باشد. تأثیر اندیشه‌های کاوالیری در کار نیوتن و لایب‌نیتس مشهود است.

در دههٔ ۱۶۳۰ میلادی فرما (۱۶۶۵ ــ ۱۶۰۱) و دکارت (۱۶۵۰ ــ ۱۵۹۶) روشی ارائه می‌دهند که به‌وسیلهٔ آن مسائل هندسی به مسائل جبری تبدیل می‌شوند. تمامی روش‌های این دوره به‌نوعی خصلت هندسی داشتند. خطوط، سطوح و حجم‌ها بی‌نهایت‌کوچک در نظر گرفته می‌شدند. اما اعداد بی‌نهایت کوچک معنی محصّلی نداشتند. این عقیده نیز متأثر از فلسفهٔ ارسطو بود که عدد را مجموعه‌ای از واحدها می‌دانست.

با رواج جبر و هندسهٔ تحلیلی، این نگرش تغییر کرد. فرما نوعی بی‌نهایت‌کوچک عددی را وارد بحث کرد و با استفاده از آن، توانست ماکسیمم و مینیمم را محاسبه کند. همچنین فرمول $\int_{\circ}^{a} x^n \, dx = (a+۱)/(n+۱)$ را ثابت کرد. فرما با درنظر گرفتن مستطیل‌هایی در زیر منحنی که عرض آن‌ها متوالیاً کوچک و کوچکتر می‌شوند، با محاسبهٔ مجموع یک سری، فرمول مذکور را اثبات کرد. او مسأله را برای عدد گویای n مطرح و حل کرد. نباید تصور کرد که فرما با روشی که در اثبات فرمول بالا به‌کار می‌برد به انتگرال معین نزدیک می‌شود، زیرا او خودِ فرآیند انتگرال‌گیری را اصلاً مورد توجه قرار نمی‌دهد و آن را تنها روشی برای حل یک مسألهٔ هندسی خاص می‌داند.

۳. مفهوم انتگرال در زمان نیوتن و لایب‌نیتس

در خلال سال‌های ۱۶۶۰ تا ۱۶۸۰، آیزاک نیوتون (۱۷۲۱ ــ ۱۶۴۳) و گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس (۱۷۱۶ ــ ۱۶۴۶) آنچه را امروزه حسابان بی‌نهایت‌کوچک‌ها می‌نامیم ابداع کردند. مسلماً کار آن‌ها عناصری از ریاضیاتِ پیش از آن‌ها را به انضمام مفاهیم خاصی که خود آن‌ها افزودند و در ریاضیات امروز رایج است، در بر داشت. نیوتن و لایب‌نیتس تنها کسانی بودند که فرآیند مورد استفاده در بی‌نهایت‌کوچک‌ها را مستقل از تعبیرات فیزیکی و هندسی وابسته به آن، به منزلهٔ یک رویکرد و تکنیک تشخیص دادند و نام خاص بر آن نهادند. گرچه فرما بی‌نهایت‌کوچک‌ها را به‌صورت هندسی و تحلیلی برای حل دستهٔ وسیعی از مسائل به‌کار برد، او نیز همانند پاسکال و دیگران ارتباط اساسی بین مسأله‌های مساحت و مماس را درنیافت. وی تا حدودی به این حدس که رابطه‌ای عکس بین این دو مسأله وجود دارد، نزدیک شد ولی این حدس را هیچ‌گاه دنبال نکرد. او می‌پنداشت این شیوهٔ حل مسأله، روشی نو و مستقل نیست و محدود به همان مسائل است. اما نیوتن و لایب‌نیتس عمومی بودن این فرآیند را به‌درستی تشخیص دادند. به هر حال، زمان

آن رسیده بود که در نیمهٔ دوم قرن هفدهم میلادی کسی دیدگاه‌ها و روش‌های موجود در آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها را یکدست کند و روش مشخص و یکپارچه‌ای ارائه دهد.

نوآوری نیوتون و لایب‌نیتس سه جنبه دارد: تقلیل مسأله، محاسبهٔ مساحت از طریق معکوس کردن فرآیند محاسبهٔ مماس، ابداع یک روش و الگوریتم. نیوتون و لایب‌نیتس تنها کسانی بودند که دریافتند مسأله‌های محاسبهٔ مرکز ثقل، محاسبهٔ حجم، مماس، طول خم، شعاع خمیدگی و غیره که مشغلهٔ اصلی ریاضیدانان در نیمهٔ اول قرن هفدهم بود، در واقع حالت‌هایی از دو مسألهٔ اصلی هستند. به‌علاوه، آن‌ها دریافتند که این مسأله‌ها نیز عکس یکدیگرند و حل یکی که شاید ساده‌تر نیز باشد، پاسخ مسألهٔ دیگر خواهد بود. همچنین آن‌ها یک الگوریتم کارآمد فراهم کردند که می‌توانست به‌صورتی روشمند و کلی برای حل مسائل به‌کار گرفته شود. گرچه روش و الگوریتم ابداعی آن‌ها شبیه آن چیزی است که ما امروزه به‌کار می‌بریم، باید توجه کرد که آنان نیز در بستر زمان خود می‌زیستند. به‌عبارت دیگر، مفهوم تابع برای آن‌ها شناخته‌شده نبود و آن‌ها از «کمیت‌ها» صحبت می‌کردند و نه از «تابع»، و در بحث از میزان تغییرات، تفاضل این کمیت‌ها را به موجودات هندسی مشخصی (مثل خم) نسبت می‌دادند. خط اعداد حقیقی نزد آنان مفهوم هندسی و سینماتیکی بود. مفهوم حدی که آن‌ها از آن صحبت می‌کردند نیز بر پایهٔ شهود هندسی و سینماتیک بود. پاره‌ای از کارهای نیوتن و لایب‌نیتس اشاره به این مطلب دارند که برای این دو نیز اندیشیدن دربارهٔ حد با دید عددی، بسیار مشکل بوده است.

اکنون اجازه دهید به برخی از نکات عمدهٔ روش آن‌ها اشاره کنیم. برخی از مهم‌ترین اکتشافات علمی نیوتون در خلال سال‌های ۱٦٦۵ تا ۱٦٦۷ که دانشگاه کمبریج تعطیل بود، اتفاق افتاد. به‌نظر می‌رسد علاقهٔ نیوتون به ریاضیات از سال ۱٦٦۴ با مطالعهٔ آثار فرانسوا ویت، دکارت و والیس شروع شد. او با مطالعهٔ این آثار که می‌توان از آن‌ها به «آنالیز جدید» تعبیر کرد، با اکتشافات بدیع در هندسهٔ تحلیلی، جبر، مسألهٔ مماس، تربیع و سری‌ها آشنا شد. با استفاده از برخی نتایج والیس و محاسبهٔ مساحت زیر خم و به‌ویژه خم $y = x^n$ به رابطهٔ مربوط به بسط دوجمله‌ای دست یافت. توجه کنیم که نماد توان‌های کسری و منفی که والیس پیشنهاد کرده بود در اینجا نقش مهمی داشتند. از سوی دیگر، نزد نیوتون (برخلاف دکارت) خم‌ها فقط با معادلات جبری متناهی توصیف نمی‌شدند، بلکه سری‌های بی‌پایان نیز می‌توانستند چنین کنند.

اولین رسالهٔ منسجم نیوتون در ریاضیات، De analysi per aequationes numero terminoruum infinitas نام داشت. این رساله عمدتاً به بسط سری‌ها و کاربرد آن‌ها در حل مسألهٔ مساحت می‌پردازد. وی در آنجا با سه قاعده برای محاسبهٔ مساحت شروع می‌کند. مثلاً یکی از آن‌ها مربوط به تابع $y = ax^{\frac{m}{n}}$ است.

یکی از کلی‌ترین نتایج در باب تربیع منحنی‌ها (یا همان انتگرال‌گیری) قضیهٔ بنیادی حسابان است که نیوتون آن را در سال ۱٦٦۵ کشف کرد. وی این مطلب را برای خم‌های خاص به روش هندسی و استفاده از بی‌نهایت‌کوچک‌ها اثبات می‌کند ولی روش او کاملاً کلی است. به کمک قضیهٔ

بنیادی، نیوتون توانست به‌جای مسأله تربیع، به دنبال به‌اصطلاح امروزی، توابع اولیه بگردد.

نیوتون در کتاب «De methodis serierum et fluxionum» که در ۷۱ ـ ۱٦۷۰ منتشر شد، به بررسی کاربرد الگوریتمی می‌پردازد که در سال‌های ٦٦ ـ ۱٦٦۵ ابداع کرده بود. این الگوریتم برای کمیت‌هایی که به زمان بستگی دارند به‌کار گرفته می‌شد. مثلاً حرکت یک ذره، یک خط و حرکت خط، یک سطح تولید می‌کند. کمیت‌هایی که با یک «جریان» تولید می‌شوند را «فلوئنت» نامید و سرعت لحظه‌ای آن‌ها را «فلوکسیون». «اندازهٔ حرکت» کمیت‌های فلوئنت، افزایش بسیار کوچکی هستند که طی مدت زمان بی‌نهایت کوچکی در این کمیت‌ها رخ می‌دهند. مثلاً نقطه‌ای را که با سرعت متغیر روی یک خط راست جریان دارد در نظر بگیرید. مسافت طی‌شده در زمان t فلوئنت، سرعت لحظه‌ای فلوکسیون و تغییر بی‌نهایت کوچکی که بعد از مدت زمان بی‌اندازه کوچکی حاصل می‌شود، همان اندازه حرکت است. نیوتون نمادهای خاصی برای این کمیت‌ها وضع نکرد. حتی برای مساحت زیر منحنی نیز که لایب‌نیتس با همان نماد انتگرال امروزی نشان می‌دهد، نماد یکسانی به‌کار نمی‌برد. او در De methodis حل یک سری مسائل را عرضه می‌کند که مهم‌ترین آن‌ها یافتن ماکسیمم و مینیمم، مماس، خمیدگی، مساحت و طول خم است. حال که کمیت‌ها می‌توانند توسط یک جریان پیوسته تولید شوند، مسائل مذکور را به دو مسأله تقلیل می‌دهد:

۱) طول پیموده‌شده در زمان، داده شده است. سرعت لحظه‌ای را بیابید.

۲) سرعت حرکت داده شده است. مسافت پیموده‌شده را بیابید.

و نیوتون برای هر دو مسأله الگوریتم‌هایی عرضه می‌کند.

در خلال سال‌های ۱٦۷۱ تا ۱۷۰۴، نیوتون حسابان فلوکسین‌ها را رها می‌کند و به هندسهٔ فلوکسین‌ها که در آن کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک به‌کار گرفته نمی‌شوند، می‌پردازد. وی روشش را «روش ترکیبی فلوکسیون‌ها» می‌نامند. در روش قبل، کمیت‌های فلوئنت را با نمادهای جبری نشان می‌داد ولی در این روش جدید، آن‌ها را به‌صورت اشکال هندسی در نظر می‌گیرد. یکی از این دست مسائل، مطالعهٔ مقداری است که نسبت دو فلوئنت هندسی وقتی هر دو همزمان صفر می‌شوند، به آن میل می‌کند.

در سال‌های ۱٦۸۷ تا ۱٦۹۲ نیوتون به فلوکسیون‌های مراتب بالاتر و به‌اصطلاح امروزی، به بسط تیلور می‌پردازد که نقش مهمی در حسابان قرن هجدهم دارد. در تمامی کارهای نیوتون سری‌ها یکی از ابزارهای تحلیلی مهم هستند.

لایب‌نیتس علاقهٔ وافری به ترکیبیات داشت و این موجب شد تا دنباله عددی تفاضلات را در نظر بگیرد و با شیوهٔ «تفاضلات متناهی»، مجموع برخی سری‌ها از جمله $\sum \frac{۲}{n(n+۱)}$ را محاسبه کند. علاقه به تفاضلات دنباله‌ها در ابداع حسابان او نیز تأثیر تمام داشته است. از سال ۱٦۷۳ تا ۱٦۷۴ به گفتهٔ خودش، هنگام خواندن یکی از کتاب‌های پاسکال که به مسائل تربیع و مساحت پرداخته است، متوجه می‌شود پاسکال به هر نقطه روی محیط دایره، یک مثلث با ابعاد بی‌نهایت‌کوچک

وابسته کرده است. لایب‌نیتس این ایده را تعمیم می‌دهد. با در نظر گرفتن یک منحنی به‌صورت یک چندضلعی که از بی‌نهایت اضلاع بی‌نهایت‌کوچک تشکیل شده است و در نظر گرفتن یکی از آن اضلاع به‌صورت مماس، مسألهٔ یافتن مساحت را به مسأله‌های دیگری که حل آن‌ها ساده‌تر است، تحویل می‌کند. در این بین، دستوری را که امروزه انتگرال‌گیری جزء به جزء نامیده می‌شود، به‌دست می‌آورد. در خلال محاسبات متوجه می‌شود که ارتباطی بین مماس بر خم و مسألهٔ محاسبهٔ مساحت وجود دارد. او همچنین در ضمن مباحث فوق به اهمیت کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک نیز پی می‌برد. لایب‌نیتس در ابتدا نماد کاوالیری «.Omn» را برای مساحت به‌کار می‌بُرد اما بعد نماد $\int ydx$ را برای مساحت برگزید. وی اولین بار در سال ۱۶۸۴ نماد d و نماد انتگرال $\int$ را در سال ۱۶۸۶ در مقالات خود به‌کار برد.

در اینجا هم باید دقت کرد که لایب‌نیتس به تابع یا مشتق آن نمی‌پردازد، زیرا با چنین مفاهیمی آشنا نیست؛ بلکه آن دسته مفاهیمی که لایب‌نیتس در چارچوب آن‌ها می‌اندیشد عبارت‌اند از حرکت کمیت‌های متغیر و تفاضلات. لذا dy/dx مشتق تابع y نسبت به x نیست، بلکه نسبت دو کمیت دیفرانسیلی dy و dx است. با حذف یک بی‌نهایت‌کوچک در مقایسه با بی‌نهایت‌کوچک دیگر، به شرطی که از مرتبهٔ بالاتر باشد، توانست قواعد محاسبه مثل $d(xy) = xdy + ydx$ را بیان و اثبات کند. لایب‌نیتس عموماً محاسبه انتگرال را از طریق جایگزینی متغیر و روش جزء به جزء انجام می‌داد. این روش‌ها می‌توانند به شیوه‌ای کاملاً تحلیلی بدون نیاز به ساخت‌های پیچیدهٔ هندسی انجام شوند؛ این حسن نمادهای وی بود. لایب‌نیتس نمادهایی را وارد حسابان کرده است که بسیار مفیدند و تا به امروز استفاده می‌شوند. نمادهای لایب‌نیتس مسائلی را که حل آن‌ها به استعداد کم‌نظیر ارشمیدس و نیوتن احتیاج داشت، در سرانگشت هر دانشجوی متوسط ریاضی قرار داد. با این حال، گرچه نمادها فهم و حل مسأله را آسان‌تر می‌کنند، همین نمادگرایی او مانع از صورت‌بندی دقیق مفاهیم شدند و او را وادار کردند تا نسبت دیفرانسیل‌ها را یک کسر، و انتگرال را مجموع در نظر بگیرد.

دربارهٔ تقدم نیوتن یا لایب‌نیتس در ابداع حسابان گرچه به‌قطع نمی‌توان چیزی گفت، ولی باید توجه کرد که نیوتون در سال ۱۶۸۷ کتاب مشهورش، «اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی»، را که دربارهٔ نظریهٔ گرانش است منتشر کرد. با انتشار این کتاب، نظریهٔ ریاضی وی اولین بار در اختیار عموم قرار گرفت، گرچه وسعت کلی ریاضی او را ابداً نشان نمی‌داد. او در آن کتاب، قدری هم حسابان به‌کار گرفت ولی اولین رسالهٔ منسجم او دربارهٔ حسابان با عنوان De quadratura curvarum در سال ۱۷۰۴ منتشر شد. از طرف دیگر، لایب‌نیتس در سال‌های ۱۶۸۴ و ۱۶۸۶ نتایجی درباهٔ حساب دیفرانسیل‌ها منتشر کرد. مقالات کوتاه بودند و در محافل ریاضی توجه چندانی را به خود جلب نکردند. گرچه ظاهراً لایب‌نیتس از برخی کارهای ریاضی نیوتن آگاهی داشت، ولی مستقلاً حساب دیفرانسیل و انتگرال را در خلال سال‌های ۱۶۷۶ ـ ۱۶۷۲ کشف کرده بود.

مقایسهٔ کار لایب‌نیتس و نیوتون دشوار است. لایب‌نیتس هیچ‌گاه رسالهٔ منسجمی دربارهٔ حسابان خود منتشر نکرد. بیشتر کارهای او در مقالات و نامه‌ها پراکنده بودند. لایب‌نیتس در وجود

بی‌نهایت‌کوچک‌ها شک داشت و آن‌ها را به‌صورت ابزار راهنما به‌کار می‌گرفت. همچنین نیوتون نیز مفهوم «اندازه حرکت» را یک خلاصه‌نویسی می‌دانست و می‌پنداشت با استفاده از فرآیندهای حدی دقیق می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. به‌علاوه، مفهوم فلوکسین در نظر وی مفهوم فیزیکی نبود بلکه مفهومی بسیار مجرد بود. نیوتون و لایب‌نیتس هر دو به کمیت‌های متغیر می‌پرداختند. لیکن برای نیوتون کمیت‌ها نسبت به زمان متغیر بودند ولی برای لایب‌نیتس آن‌ها روی یک دنبالهٔ بی‌نهایت نزدیک از مقادیر حرکت می‌کردند. برای نیوتون انتگرال‌گیری، محاسبهٔ کمیت فلوئنت یک فلوکسین داده شده بود و بنابراین قضیهٔ اساسی حسابان در تعریف انتگرال مستتر بود. اما لایب‌نیتس انتگرال را نوعی مجموع‌یابی می‌دید. بنابراین قضیهٔ اساسی حسابان برای وی از تعریف نتیجه نمی‌شد، بلکه نتیجه‌ای از ارتباط معکوس بین جمع‌بندی و تفاضل‌یابی بود.

شک و تردیدهایی دربارهٔ مبانی نظری هر دو رویکرد مطرح شد. برخی از آن‌ها را خود نیوتون و لایب‌نیتس پاسخ دادند. مثلاً بی‌نهایت کوچک‌ها واقعاً چه هستند؟ و آیا وجود دارند؟ دیفرانسیل حقیقتاً چیست؟ اما از مهم‌ترین انتقاداتی که بر مبانی حسابان گرفته شده است نه از جانب ریاضیدانان، بلکه از جانب فیلسوف مشهور، جورج بارکلی، است. وی در کتابی تحت عنوان خلاصه‌شدهٔ The Analyst به‌سال ۱۷۳۴ انتقادات تندی دربارهٔ مبهم بودن کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک و رشد نسبت آن‌ها، دیفرانسیل‌های مراتب بالاتر و مسائلی از این دست، بیان کرده است. انتقادهای بارکلی بحث و جدل‌های طولانی دربارهٔ مبانی حسابان برانگیخت که بسیاری درصدد رفع آن برآمدند.

لایب‌نیتس و طرفداران وی به اثبات‌های هندسی نیوتون با دیدهٔ تردید می‌نگریستند. یکی از اهداف آن‌ها بیان اثبات‌های هندسی نیوتون برحسب حساب دیفرانسیل و انتگرال بود. واقعِ امر این است که مکانیک سرچشمهٔ الهام برای طرفداران لایب‌نیتس بود. از طریق گسترش ابزارهای ریاضی برای مسائل متنوع مکانیک (جامدات، سیالات)، ریاضیدانانی مانند یوهان و دانیل برنولی، کلرو، اویلر، دالامبر و لاگرانژ حسابان را بسط قابل توجهی دادند. مشخصهٔ قرن هجدهم، رویکرد تحلیلی است که پیروان مکتب لایب‌نیتس در پیش گرفتند. ریاضیدانان در ابتدا به مسائل ملموس در مکانیک، نورشناسی و اخترشناسی می‌پرداختند که اغلب به معرفی برخی خم‌های جدید می‌انجامید. مکانیک نظری طی فرآیندی طولانی، خود را از زبان هندسی نیوتن جدا کرد و به زبان معادلات دیفرانسیل صورت‌بندی شد. از جملهٔ ریاضیدانانی که در این دوره سهیم بودند می‌توان به برادران برنولی، بروک تیلور، جیمز استرلینگ، لئونارد اویلر، کولین مک‌لورن، آلکس کلرو، جان لوراند دالامبر، یوهان لمبرت، ژوزف ـ لویی لاگرانژ، سیمون لاپلاس و آدرین ماری لژاندر اشاره کرد.

حسابان نیوتون به‌دلیل فقدان ریاضیدان قابل و دور بودن از تحولات قارهٔ اروپا و همچنین عدم تمایل در به‌کار بردن نمادهای کارآمد در همان بریتانیای کبیر باقی ماند. اما در عوض، حسابان لایب‌نیتس بسیار جذاب بود. یاکوب برنولی (۱۷۰۵ ــ ۱۶۵۴) مقالات لایب‌نیتس را به‌طور کامل مطالعه کرد و به درک کامل آن‌ها نائل آمد. وی حسابان را به برادر خود یوهان (۱۷۴۸ ــ ۱۶۶۷)

نیز آموخت. این دو نمایندگان برجستهٔ مکتب لایب‌نیتس در حساب بی‌نهایت‌کوچک‌ها در اروپا بودند. مفهوم تابع هم اولین بار در نامه‌های بین یوهان برنولی و لایب‌نیتس مطرح شد. برنولی تابع را کمیت متغیری در نظر می‌گرفت که ترکیب شده است از یک کمیت متغیر دیگر و ثابت‌ها. مارکی دو لوپیتال (۱۷۰۴ ــ ۱۶۶۱) پس از اتمام مطالعاتش در طب، به پاریس رفت و نزد برنولی طی قراردادی در ازای پرداخت مبلغ کافی، حسابان را آموخت. لوپیتال آن درس‌ها را در کتابی با عنوان «آنالیز کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک برای درک خطوط منحنی» در ۱۶۹۶ منتشر کرد. این کتاب، اولین کتاب درسی در حساب دیفرانسیل به روش لایب‌نیتس بود.

در ابتدا حسابان تشکیل شده بود از روش‌های نه‌چندان مرتبط و مسائلی که با آن روش‌ها حل می‌شد. کسی که حسابان لایب‌نیتس را به‌صورت یک موضوع ریاضی منسجم تبدیل کرد، یکی از سرشناس‌ترین شخصیت‌های سال‌های میانی قرن ۱۸ در قاره اروپا و برجسته‌ترین شاگرد یوهان برنولی، لئونارد اویلر (۱۷۸۳ ــ ۱۷۰۷) بود. اویلر سه کتاب در سال‌های ۱۷۴۸، ۱۷۵۵ و ۱۷۶۸ نوشت که نقش اساسی در تأسیس آنالیز ریاضی داشتند.

اویلر در این کتاب‌ها بحث کاملی دربارهٔ انتگرال‌گیری توابع برحسب توابع مقدماتی و انتگرال معین و برخی شیوه‌های حل معادلات با مشتقات جزئی می‌آورد. جالب است توجه کنیم که هر چه از زمان برنولی جلوتر می‌رویم، حسابان از کاربردها جدا می‌شود. مثلاً با مقایسه نوشته‌های برنولی و اویلر درمی‌یابیم که گرچه برنولی مسائل مکانیکی و هندسی را در نوشته‌هایش به‌صورت برجسته‌ای می‌آورد، در کتاب‌های اویلر کاربردها کمتر دیده می‌شود و رویکردی جبری در پیش گرفته شده است. به‌طور کلی از ابتدای قرن هجدهم تا سال ۱۷۳۰ شیوه‌های هندسی حاکم بود. در دورهٔ میانی، مفاهیم جبری به‌صورت مشخصی غالب بود. مفاهیم اصلی به هندسه برمی‌گشت. اما پس از این می‌بینیم که اویلر در یکی از کتاب‌های خود از کمیت‌های عددی و نه کمیت‌های هندسی صحبت می‌کند. مفاهیم و اشیائی که وی به‌کار می‌برد کاملاً ماهیت جبری دارند. مفهوم تابع برای او مفهومی اساسی است و تابع را عبارت‌های تحلیلی و جبری تعریف می‌کند. در پایان قرن هم کتاب لاگرانژ را می‌بینیم که مفاهیم به‌کار رفته در آن به‌طور صریح ماهیتی جبری دارند. لاگرانژ دیفرانسیل و بی‌نهایت‌کوچک‌ها را کنار می‌گذارد و مشتق تابع را بدون کاربرد حد و برحسب بسط تابع به‌صورت سری تعریف می‌کند.

اشاره کردیم که یوهان برنولی وقت خود و شاگردانش را صرف نشان دادن برتری روش لایب‌نیتس بر روش نیوتون کرد، به‌ویژه در مسألهٔ توصیف حرکت محیط‌های پیوسته بر اساس قانون جاذبهٔ نیوتون. در واقع این دوران مکانیک استدلالی پس از نیوتون است که در آن به مطالعهٔ مکانیک تیرک‌ها، غشاءها، تارها، مایعات و موادی از این گونه پرداخته می‌شود. اویلر در سال ۱۷۳۴ مطالبی دربارهٔ مشتقات جزئی، انتگرال‌گیری از آن‌ها و جابه‌جایی مشتقات جزئی عرضه کرده بود که ابزار ریاضی قدرتمندی برای تحلیل این مسائل به‌دست می‌دادند.

ژان لُراند دالامبر (۱۷۸۳ ــ ۱۷۱۷) در سال ۱۷۴۷ برخی از معادلاتی را که در

بسیاری از مسائل فیزیکی ظاهر می‌شوند، یافت. یکی از آن معادلات، معادلهٔ تار مرتعش $\partial^۲ y/\partial x^۲ = (۱/c^۲)\partial^۲ y/\partial t^۲$ بود. در واقع، هدف، به‌دست آوردن معادلهٔ حرکت تاری است که دو سر آن ثابت نگه‌داشته شده و در امتداد محور x قرار گرفته است. دالامبر با استدلالی طولانی که امروزه برای ما آشناست، جواب $y = F(x+ct) + G(x-ct)$ (F و G توابع دلخواه هستند) را برای این معادله به‌دست آورد. با شرایط اولیهٔ $y = ۰$ در نقاط $x = ۰$ و $x = l$ برای تمام tها (که در اینجا l طول تار است)، جواب به‌صورت $y = F(ct+x) - F(ct-x)$ تبدیل می‌شود که تابع F دارای دورهٔ $۲l$ است. این پیشرفتی اساسی در تحلیل این مسأله بود که پس از ۳۰ سال از حل $y = k\sin(\pi x/l)$ برای مسألهٔ حرکت پایا توسط بروک تیلور (۱۶۸۵ ــ ۱۷۳۱) در ۱۷۱۳، داده شده بود. دالامبر تأکید می‌کرد که تمام توابعی که در معادله صدق می‌کنند باید مشتق‌پذیر باشند به این دلیل که برنولی و پیروان او قصد داشتند برتری حسابان لایب‌نیتس را برای حل مسائل فیزیکی نشان دهند. حسابان اساساً برای آن‌ها حسابان عملگرها روی عبارت‌های جبری بود. عملگرها نیز مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بودند و رابطهٔ عکس آن‌ها را نیز نیوتون و لایب‌نیتس کشف کرده بودند. مسائل مشکل مماس و مساحت اکنون به‌راحتی حل می‌شدند. تنها شرط لازم این بود که اشیائی که انتخاب می‌کنیم تا این عملگرها روی آن‌ها اثر کنند، مشتق‌پذیر باشند. لذا حسابان روی آن توابعی درست عمل می‌کرد که این شرط یعنی مشتق‌پذیری را داشته باشند، مثل توابع چندجمله‌ای، مثلثاتی، توابع نمایی و تمامی عبارت‌های جبری که این اعمال روی آن‌ها نتیجه معینی به‌دست می‌دهد.

زیبایی مسألهٔ تار مرتعش، اویلر را بر آن داشت که حل خود را در سال ۱۷۴۹ منتشر کند. مسأله چنان جذاب بود که وی نسخهٔ فرانسوی و لاتینی نیز از مقاله‌اش منتشر کرد. وی جواب معادله را برحسب دو تابع دلخواه بیان و استدلال می‌کند که بنابر شرایط فیزیکی مسأله، لزومی ندارد آن توابع مشتق‌پذیر باشند. وی بعدها در این باره به دالامبر می‌نویسد «درنظر گرفتن چنین توابعی که مقید به هیچ شرط پیوستگی نیستند قلمروی کاملاً جدیدی را در آنالیز به سوی ما می‌گشاید.»

اویلر در کتاب‌هایش دربارهٔ آنالیز که در سال ۱۷۴۸ منتشر کرد، وضعیت را مشروح‌تر بیان می‌کند. جلد اول به نظریهٔ جبری توابع می‌پردازد و در آن، طبقه‌بندی توابع به‌صورت جبری و متعالی، ضمنی یا صریح، یک صورتی یا چند صورتی (تک یا چند ــ مقداری) را به‌دست می‌دهد. اویلر تابع برحسب یک کمیت متغیر را عبارتی تحلیلی مرکب از آن کمیت متغیر و کمیت‌های ثابت و اعداد تعریف می‌کند. عبارت تحلیلی نیز عبارتی است که از انجام اعمال جبری (جمع، تفریق، و ...) یا اعمال متعالی مانند به توان رساندن و لگاریتم و دیگر اعمالی که در حسابان موجود است بر متغیرها و ثابت‌ها حاصل شود. در جلد دوم تحت تأثیر مسألهٔ تار مرتعش این نظریه با تمایز قائل شدن بین خم‌های پیوسته و ناپیوسته یا «مخلوط» گسترش داده می‌شود. توجه کنیم اصطلاحات اویلر با اصطلاحات ما (که منشأ آن‌ها به قرن نوزدهم برمی‌گردد) متفاوت است. مفهوم پیوستگی برای اویلر با مفهوم مشتق‌پذیری نزد ما هم‌معنی است و ناپیوستگی به‌مفهوم اویلر با پیوستگی به‌مفهوم امروزین یکی است و منظور توابعی هستند که از عبارت‌های تحلیلی مناسب روی هر قسمت از

دامنه تشکیل می‌شوند.

دالامبر به این گسترش بسیار انتقاد داشت. او می‌گفت حل مسأله فقط برای حالت‌هایی امکان‌پذیر است که صورت‌های مختلف تار مرتعش را بتوان در یک معادلهٔ واحد جمع کرد. در حالت‌های دیگر به نظر غیرممکن می‌رسد که صورت کلی y را بتوان به‌دست داد. مهم‌تر این‌که در نقاط به‌اصطلاح کناری، مشتق تعریف نشده است و چطور $\partial^۲ y/\partial x^۲$ می‌تواند با $(۱/c^۲)(\partial^۲ y/\partial t^۲)$ برابر باشد. چون اویلر به بی‌نهایت‌کوچک‌ها گرایش داشت، بیان می‌کرد که مطمئناً خطاهایی اتفاق می‌افتد اما چنان کوچک‌اند که می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. اما دالامبر این مطلب را نمی‌پذیرفت.

اویلر در سال ۱۷۴۷ به‌دنبال توابعی برای حل معادلهٔ تار مرتعش بود که شرط تناوب مورد نظر را نیز داشته باشند. وی طبیعتاً به‌سراغ جواب تیلور رفت و جواب کلی‌تر به‌صورت $y = \alpha \sin(\pi x/l) + \beta \sin(۲\pi x/l) + \cdots$ را درنظر گرفت. این‌که آیا او سری باپایان یا بی‌پایان را در نظر گرفته است معلوم نیست، اما یک چیز قطعی است و این‌که جواب فقط برای توابع «پیوسته» (یعنی مشتق‌پذیر) برقرار است و بنابراین در قیاس با راه‌حل خودش آن‌چنان اهمیتی ندارد. لیکن این جواب را در سال ۱۷۵۳ دانیل برنولی (۱۷۸۲ ــ ۱۷۰۰) پسر یوهان برنولی جدی گرفت. دانیل برنولی مجذوب یکی گرفتن حل $y = k \sin(\pi x/l)$ با فرکانس تار مرتعش بود که تیلور ارائه کرده بود. لذا استدلالی فیزیکی در جهت تأیید سری‌های مثلثاتی اقامه کرد. او می‌گفت تار می‌تواند ارتعاش یکنواخت خود را به بی‌نهایت طریق انجام دهد و لذا همهٔ اجسام توانایی تولید بی‌نهایت صدا و بی‌نهایت نوع ارتعاش منظم را دارند. پس تار، همهٔ هارمونی‌های تیلوری را به هر ترکیب ممکن دارد که این ایجاب می‌کند حل مثلثاتی به‌صورت

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi c t}{l} + \beta \sin \frac{۲\pi x}{l} \cos \frac{۲\pi c t}{l} + \cdots$$

جواب کلی حرکت باشد. البته برنولی برهان ریاضی برای این ادعا ارائه نکرد.

آنچه دیدیم فضای فکری بود که بر آن قرن حاکم بود، قرنی که در آن، شیوه‌های جبری برای حل مسائل غیرجبری به‌کار می‌رفت. ریاضیدان بعدی که وارد صحنه شد، ژوزف لوئی لاگرانژ (۱۸۱۳ ــ ۱۷۳۶) بود. او مسألهٔ n جسم را که با کمانی بی‌وزن به یکدیگر متصل هستند بررسی و تعداد نقاط را به بی‌نهایت میل داد و جوابی برحسب توابع مثلثاتی به‌دست آورد. اما کار اساسی را پنجاه سال بعد ژوزف فوریه (۱۸۳۰ ــ ۱۷۶۸) انجام داد. لاگرانژ فقط یک قدم با نتایج فوریه فاصله داشت، ولی نتوانست در این کار موفق شود، شاید به این دلیل که افق دیدش به سوی اهداف دیگری بود.

فوریه معادلهٔ دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی دیگری را بررسی کرد: معادلهٔ انتشار گرما $k(\partial^۲ \nu/\partial x^۲) = \partial \nu/\partial t$. فوریه با استفاده از سری‌های مثلثاتی جواب را محاسبه کرد. با کار فوریه است که ما به هندسه‌ای که اویلر آرزوی آن را داشت برمی‌گردیم. لاگرانژ در سال ۱۸۰۷ زنده بود و یکی از ممتحنان رسالهٔ انتشار گرمای فوریه بود. علی‌رغم این‌که فوریه با مثال‌های متنوعی مسأله را

توضیح داده بود، وی انتقادهای شدیدی به آن وارد کرد و مانع انتشار آن شد. انتقاد لاگرانژ هم به روش جداسازی متغیرها بود که به حل اولیهٔ برنولی برمی‌گشت و هم به خود سری‌ها. فوریه اشاره می‌کرد که «من معتقدم حرکت تار مرتعش به همان دقت از طریق بسط‌های مثلثاتی در همهٔ حالت‌های ممکن قابل نمایش است که با روابطی متضمن انتگرال‌گیری از توابع».

حقیقت این است که کارهای فوریه یکی از پیش‌زمینه‌های مهم در نظریهٔ انتگرال ریمان است. در کارهای فوریه دربارهٔ شار گرما در اجسام جامد، سؤالاتی که قبلاً دربارهٔ تار مرتعش نیز وجود داشت، مطرح شد: این‌که آیا می‌توان تابع «دلخواه» f بر بازهٔ $[-l,l]$ را به سری مثلثاتی $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{l}))$ برای هر x در بازهٔ $[-l,l]$ بسط داد؟

فوریه با کارهایی که در قرن هجدهم دربارهٔ مسألهٔ تار مرتعش انجام شده بود، آشنایی داشت. در واقع، استدلال او برای بسط تابع دلخواه برحسب سری‌های مذکور متقاعد کننده‌تر از ریاضیدانان پیش از او نیست. لیکن برای اولین بار این مسأله را که آیا سری مذکور به تابع f همگراست یا نه، در کانون توجه قرار داد. او حالت مهمی را که پاسخ آن مثبت است عرضه می‌کند، گرچه برهانش قابل مناقشه است. سری بالا را معادله‌ای با بی‌نهایت متغیر a_i و b_i تلقی می‌کند و روشی برای «حل» آن جستجو می‌کند. مثلاً برای یافتن a_0 داریم

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{l} \frac{1}{2}a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}(a_n\cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{l}))dx$$

و چون انتگرال‌هایی که توابع $\sin$ و $\cos$ را دربر دارند، برابر صفر هستند، پس $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$. در اینجا فوریه این فرض را که تا آن زمان بی چون و چرا می‌پذیرفتند به‌کار برد: انتگرال یک مجموع بی‌پایان برابر است با مجموع انتگرال‌ها. در این فرض در واقع عبور حد از انتگرال مجاز دانسته می‌شود. با این فرض، دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx.$$

فوریه ادعا می‌کند که سری مثلثاتی با ضرایب بالا که امروزه به سری‌های فوریه مشهورند، به تابع f همگراست. فوریه حالت ویژه‌ای را که ادعای بالا برای آن برقرار است در کتابش با عنوان «نظریهٔ تحلیلی گرما» در سال ۱۸۲۲ عرضه می‌کند. فوریه بر این باور بود که توابع «دلخواه» یا «ناپیوسته» به‌مفهوم اویلر برحسب این سری‌های مثلثاتی قابل نمایش هستند.

تابع دلخواه در نظر فوریه با تابع «پیوسته» که در قرن هجدهم بیان می‌شد، بسیار متفاوت است و در واقع، بسیار شبیه توابع «ناپیوسته» در نظرِ اویلر است. حقیقت آن است که فوریه خیلی به مفهوم جدید تابع به‌عنوان یک تناظر خوش‌تعریف نزدیک می‌شود. این مفهومِ تابع در کارهای وی نقش مهمی ایفا می‌کند.

توابع دلخواهی که فوریه در نظر می‌گیرد اکثراً به‌صورت توابع چندضابطه‌ای است، یعنی تعداد متناهی از توابع به‌اصطلاح «پیوسته» روی بازهٔ $[-l,l]$. فوریه با این تعریف جدید از تابع نیاز به تغییر

مفهوم انتگرال قرن هجدهمی نیز داشت. به‌عبارت دیگر باید مشخص می‌کرد منظور از انتگرال یک تابع «دلخواه» چیست. او انتگرال تابع را به‌صورت مساحت زیر نمودار آن تابع در نظر گرفت. بدین ترتیب ناآگاهانه سؤال مهمی مطرح کرد و آن این‌که اگر f تابع دلخواهی باشد، چگونه می‌توان $\int_{-l}^{l} f(x)dx$ را به‌صورت مساحت تعریف کرد؟ کُشی، دیریکله و ریمان در خلال سال‌های ۱۸۲۱ تا ۱۸۵۴ پاسخ‌هایی به این پرسش دادند.

۴. انتگرال نزد کُشی و ریمان

آگوستین ـ لویی کُشی (۱۸۵۷ ـ ۱۷۸۹) اولین ریاضیدانی بود که به پرسش فوریه پاسخ داد. او در دو کتاب مشهورش یعنی «رساله‌ای در باب آنالیز» (۱۸۲۱) و «خلاصهٔ درس‌های مدرسهٔ فنی سلطنتی در باب حساب بی‌نهایت‌کوچک‌ها» (۱۸۲۳) سعی کرد گزاره‌هایی اساسی دربارهٔ حسابان با دقتی در حد دقت هندسهٔ یونانی عرضه کند. این‌که کُشی تا چه حد تحت تأثیر فوریه بوده معلوم نیست ولی به‌وضوح کُشی رویکرد صوری ـ جبری رایج به حسابان را رد کرد و به‌جای آن رویکردی برآمده از هندسه را برگزید. کُشی همزمان با بولتسانو در فرانسه، اندیشه‌هایی را دنبال می‌کرد که سرانجام موفق به بنا نهادن پایه‌های محکمی برای حسابان گردید. در واقع، عصر دقت در آنالیز ریاضی با کُشی آغاز می‌شود. مفهوم حد در روش یونانیان برای محاسبهٔ حجم و مساحت مخفی بود و در کارهای دالامبر یک مفهوم پایه‌ای تلقی می‌شد، اما چون عمدتاً بر مفاهیم هندسی مبتنی بود، هیچ‌گاه تعریف دقیقی نیافت. کُشی و البته قبل از او بولتسانو، حد را بر مبنایی عددی و نه هندسی بنا نهادند. کُشی مفهوم حد را در سال ۱۸۲۱ میلادی در کتاب «رساله‌ای در باب آنالیز» خود، فارغ از هرگونه ارجاع به مفاهیم هندسی، تعریف کرد. اکنون با داشتن مفهوم حد، بی‌نهایت‌کوچک در نظر کُشی چیزی نبود جز یک متغیر که به صفر میل می‌کند. البته نباید تأثیر مفهوم رایج تابع در قرن هجدهم به‌عنوان رابطهٔ بین دو متغیر را بر این برداشت، از نظر دور داشت.

نقطهٔ شروع کُشی برای تعریف انتگرال، تعریف تحلیلی وی برای پیوستگی تابع بود. وی در خلاصهٔ درس‌ها به سال ۱۸۲۳ با استفاده از مفهوم تابع پیوسته تعریفی از انتگرال ارائه کرد که با دیدگاه فوریه بیشتر سازگار است. با فرض پیوستگی f روی بازهٔ $[a,b]$، افراز P از $[a,b]$ به‌صورت $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b$ را در نظر می‌گیرد و «مجموع کُشی» را به‌صورت $S = \sum_{n=۱}^{n} f(x_{i-۱})(x_i - x_{i-۱})$ تعریف می‌کند. با فرض پیوستگی نشان می‌دهد برای هر دو افراز P و P'، تفاضل مجموع‌های متناظر S و S' را می‌توان به‌دلخواه کوچک کرد به‌شرطی که طول زیربازه‌های $[x_{i-۱}, x_i]$ در هر دو افراز به‌دلخواه کوچک شده باشد. لذا کُشی در ۱۸۲۱ می‌نویسد «مقدار S به‌وضوح به مقدار مشخصی خواهد گرایید». این مقدار را انتگرال معین می‌نامند. بدین ترتیب کُشی به پرسش فوریه پاسخ می‌دهد، منتها در حالتی که تابع پیوسته باشد. اثبات وی را

می‌توان برای تابع کرانداری که در تعداد متناهی نقطه نیز ناپیوسته باشد بیان کرد؛ چیزی که به انتگرال ناسرهٔ کُشی ــ ریمان معروف است. اما در کار کُشی شکاف‌های منطقی وجود دارد. مثلاً تعریف حد بر اساس معنای شهودی حرکت بنا شده است. مجموعهٔ بی‌پایان که در دنباله‌های بی‌پایان و تعریف مشتق و انتگرال به‌کار می‌روند، معنی دقیقی ندارند و از همه مهم‌تر شکاف‌هایی در مورد خود مفهوم عدد وجود دارد که در تعریف حد نقش اساسی به‌عهده دارند.

پاسخ جزئی دیگری به سؤال فوریه را یوهان گوستاو لژون دیریکله (۱۸۵۹ ــ ۱۸۰۵) عرضه کرده است. دیریکله مطالعهٔ ریاضیات را در سال ۱۸۲۲ شروع کرد و چون در آلمان آن روز به استثنای گاوس ریاضیدان برجسته‌ای نبود، به مرکز ریاضیات آن روز یعنی پاریس مهاجرت کرد. وقتی به پاریس رسید، کتاب فوریه تازه منتشر شده بود. وی کتاب فوریه و کتاب «رساله‌ای در آنالیز» کُشی را مطالعه کرد. دیریکله نتایجی دربارهٔ بسط تابع برحسب سری‌های مثلثاتی به‌دست آورد و آن‌ها را در مجلهٔ کِرِل در سال ۱۸۲۹ منتشر کرد. تابع مشهور دیریکله مربوط به این دوره است که نشان می‌دهد انتگرال کُشی برای هر تابع «دلخواه» معنی‌دار نیست.

دیریکله اشاره می‌کند که پیوستگی تابع یا حتی متناهی بودن تعداد نقاط ناپیوستگی نیز برای معنی‌دار بودن انتگرال تابع شرط لازم نیست، بلکه (به زبان امروزی) تنها لازم است که نقاط ناپیوستگی هیچ‌جا چگال باشند. او این ادعا را ثابت نمی‌کند و می‌نویسد: «اثبات نیازمند برخی جزئیات مربوط به اصول اساسی آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها است که در جایی دیگر عرضه خواهد شد». این وعده هیچ‌گاه برآورده نشد شاید به این دلیل که دریافت نمی‌تواند چنین کند. در واقع اگر با رویکرد کُشی کار کنیم، این ادعا اصلاً نادرست است. به هر حال دیریکله به این نکتهٔ مهم اشاره می‌کند که تابع یک توالی از مختصات (یا به زبان امروزی تناظر) است و باید گسترش تعریف انتگرال به توابعی که تعداد نامتناهی نقطه ناپیوستگی دارند، امکان‌پذیر باشد. در سال ۱۸۲۶ دیریکله به آلمان برگشت و با خود این پرسش‌ها را آورد: تا چه حد شرط پیوستگی می‌تواند ضعیف شود؟ بدون از دست رفتن انتگرال‌پذیری تا چه تعداد نقطهٔ ناپیوستگی برای تابع امکان‌پذیر است؟

گام بعدی را یکی از شاگردان خاص دیریکله یعنی برنهارت ریمان (۱۸۶۶ ــ ۱۸۲۶) برداشت. ریمان در سال ۱۸۵۳ نتایج خود را با عنوان «دربارهٔ نمایش‌پذیری تابع‌ها بر حسب سری‌های مثلثاتی» عرضه کرد. در آنجا در ضمن مطالب دیگر، مفهوم انتگرال‌پذیری را بسط داد و تحت تأثیر دیریکله، تابع را به مفهوم تناظر در نظر گرفت. ریمان توابع ناپیوسته را به‌طور جدی وارد ریاضیات کرد. کارهای او دو سال بعد از مرگش در ۱۸۶۸ منتشر شد. رساله‌اش حاوی بخشی دربارهٔ تعریف انتگرال، معیار انتگرال‌پذیری و یک مثال جالب است. پرسش اصلی ریمان این بود که معنای $\int_a^b f(x)dx$ چیست؟

تعریف ریمان اساساً شبیه تعریف کُشی است اما بدون شرط محدود کنندهٔ پیوستگی. ریمان با برداشتن شرط پیوستگی و دادن آزادی انتخاب بیشتر در برگزیدن نقاطِ به‌اصطلاح بینی یا نمونه،

تعریف بسیار کلی‌تری ارائه کرد. ریمان همانند کُشی با افراز $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ برای بازهٔ $[a, b]$ شروع کرد. سپس برخلاف کُشی، مجموع متفاوت $S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(x_{i-1} + \delta_i \epsilon_i)$ را که $\delta_i = x_i - x_{i-1}$، $i = 1, \ldots, n$ و ϵ_i اعداد گویای مثبت هستند، در نظر گرفت. ریمان اشاره می‌کند که S به δ و ϵها وابسته است و سپس تعریف زیر را ارائه می‌دهد:

تعریف [**ریمان (۱۸۵۴)**] اگر مجموع بالا دارای این خاصیت باشد که به هر صورتی δ و ϵ انتخاب شوند، این مجموع‌ها به عدد ثابت A میل کنند به شرطی که δ بی‌نهایت کوچک شود، این حد $\int_a^b f(x)dx$ نامیده می‌شود.

به بیان دیگر اگر با تظریف بیشتر افرازها و مستقل از انتخاب نقاط $x_{i-1} + \epsilon_i(x_i - x_{i-1})$، $\epsilon_i \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$، مجموع ریمان به عدد ثابت A میل کند، در این صورت، f انتگرال‌پذیر و A انتگرال f روی $[a, b]$ است.

ریمان حالتی را که f در اطراف یک نقطه، بی‌کران باشد نیز بررسی کرده است. انتگرال ریمان به توابع کراندار روی بازه‌های کراندار محدود می‌شود. بنابراین لازم است تعریف‌های خاص به‌منظور گسترش انتگرال به توابع و یا بازه‌های بی‌کران انجام شود. این گسترش‌ها را که اولین بار کُشی به آن‌ها پرداخته است، گاهی اوقات انتگرال‌های کُشی ــ ریمان می‌نامند. او همچنین معیار مهمی که انتگرال‌پذیری تابع را مشخص می‌کند به‌دست داد. فرض کنید $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ افرازی از $[a, b]$ و $\delta(P) = \max\{x_i - x_{i-1} \ : \ 1 \leq i \leq n\}$ نرم P باشد. فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعهٔ همهٔ افرازهای $[a, b]$ را نشان دهد و $\mathcal{P}_d = \{P \in \mathcal{P} \ : \delta(P) < d\}$. ریمان نشان داد که

قضیه فرض کنید f روی $[a, b]$ کراندار و انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$ و هر $\delta > 0$، عدد $d > 0$ موجود است به‌طوری که برای هر افراز $P \in \mathcal{P}_d$ داریم $l(P, \delta) < \epsilon$. در اینجا $l(P, \delta)$ مجموع طول بازه‌هایی از افراز P را نشان می‌دهد که نوسان f روی آن‌ها بزرگتر از δ است.

ریمان نوسان تابع روی یک بازه را به‌صورت تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع در فاصلهٔ مربوط تعریف می‌کند. توجه می‌کنیم این تعریف دقت لازم را ندارد چراکه فرق بین بزرگترین و سوپریمم و همچنین کوچکترین و اینفیمم، لحاظ نشده است.

ریمان با این معیار نشان می‌دهد شرطی که دیریکله برای انتگرال‌پذیری حدس زده بود، لازم نیست. در واقع یک تابع می‌تواند ناپیوستگی‌های بسیاری داشته باشد ولی در عین‌حال انتگرال‌پذیر باشد. توجه کنیم که هنوز مفاهیم مجموعهٔ نقاط وارد ریاضیات نشده بود و این بیان‌ها فاقد صورت‌بندی برحسب مفهوم مجموعه هستند. مثال جالب ریمان تابع انتگرال‌پذیری است که نقاط ناپیوستگی آن مجموعه‌ای چگال است: قسمت غیرصحیح عدد حقیقی x را با (x) نشان می‌دهیم و تابع ϕ را برابر با (x) به‌ازای xهایی که $(x) < 1/2$، 0 به‌ازای xهایی که $(x) = 1/2$ و $(x) - 1$ برای xهایی که $(x) > 1/2$ تعریف می‌کنیم. توجه می‌کنیم که تابع ϕ در نقاط $x = \pm(2k+1)/2$، $k \in \mathbf{N}_0$، ناپیوسته و در نقاط دیگر پیوسته است و $\phi(\mathbf{R}) = (-1/2, 1/2)$. برای هر $n \in \mathbf{N}$ و

$x \in \mathbf{R}$، قرار می‌دهیم $\phi_n(x) = \phi(nx)$. توابع ϕ_n فقط در نقاط $x = \pm(۲k + ۱)/۲n$، $k \in \mathbf{N}_۰$ ناپیوسته اند. مثال ریمان عبارت است از تابع $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \phi_n(x)/n^۲$. این تابع فقط در نقاط $x = p/۲q$ که p و q نسبت به هم اولند، ناپیوسته است. ریمان با به‌کار بردن قضیهٔ بالا نشان داد که f انتگرال‌پذیر است.

۵. انتگرال ریمان پس از ریمان؛ ضعف‌ها و قوت‌ها

تصور انتگرال‌پذیری و انتگرال یک تابع کراندار فراتر از این، غیرممکن به نظر می‌رسید، زیرا اگر مجموع کُشی ـ ریمان تابعی همگرا نباشد، دیگر معلوم نیست چطور می‌توان از مساحت زیر منحنی آن صحبت کرد. این رویکرد هندسی به دوران ارشمیدس برمی‌گردد. علی‌رغم رواج چنین گرایشی در قرن نوزدهم دربارهٔ انتگرالِ ریمان، کشفیاتی اتفاق افتاد که ضعف‌های نظریهٔ انتگرال ریمان را آشکار ساخت. همچنین باید افزود که در قرن نوزدهم شاهد تغییر رویکردها به مبانی آنالیز هستیم. به‌علاوه، فرضیاتی که درست پنداشته می‌شدند ولی هیچ اثباتی برای آن‌ها آورده نشده بود، مورد پرسش قرار گرفتند. مثال مشهور وایرشتراس در همین فضای انتقادی به بنیان‌ها قرار می‌گیرد. یکی از اولین کسانی که به مفهوم جدید تابع و به‌ویژه انتگرال ریمان واکنش نشان داد، هرمان هانکل (۱۸۷۳ ـ ۱۸۳۹) بود. او در گوتینگن تحصیل کرده بود و تحت تأثیر شدید ریمان بود. هانکل در سال ۱۸۷۰ مقاله‌ای با عنوان «پژوهش‌هایی دربارهٔ توابع بی‌نهایت‌بار نوسانی و ناپیوسته» منتشر ساخت که بلافاصله مورد توجه قرار گرفت. مقالهٔ هانکل خطای جالبی دارد که تا مدتی مانع از بسط و رشد ایده‌های نظریهٔ اندازه شد.

هانکل به مفهوم تابع نزد اویلر و دیریکله اشاره می‌کند و مفهوم تابع اویلر را برای آنالیز کافی می‌داند. با فرض مفهوم جدید تابع، هانکل به تعریف پیوستگی به‌مفهوم امروزی می‌پردازد. وی توابع به‌طور خطی ناپیوسته را، یعنی توابعی که در بی‌نهایت نقطه از یک بازه ناپیوسته‌اند، بررسی می‌کند.

ناپیوسته بودن f در نقطهٔ a یعنی این‌که

$$\exists\delta > ۰ \ \forall\epsilon > ۰ \ \exists\sigma \in (-\epsilon, +\epsilon) \quad | f(a+\sigma) - f(a) | > \delta.$$

هانکل این حالت را «پرش در a بزرگتر از δ» می‌نامند که ما آن را به‌لحاظ تاریخی با $j_f(a) > \delta$ نشان می‌دهیم. سپس به مجموعهٔ پرش‌های (ناپیوستگی‌های) تابع و به‌ویژه مجموعه‌ای که امروزه به‌صورت $S_\delta(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid j_f(x) > \delta\}$ نوشته می‌شود، می‌پردازد. روشن است که هانکل در بررسی نوسان تابع در یک بازه تحت تأثیر ریمان بوده است. با وجود این، او به ارتباط بین نوسان و پرش‌های تابع f در نقاط انتهایی اشاره می‌کند. چند نماد امروزی را به‌کار می‌بریم: فرض کنید $\mathcal{I}$ مجموعهٔ همهٔ بازه‌ها باشد، $\mathcal{I}_a = \{I \in \mathcal{I} : a \in I\}$ و $a \in \mathbf{R}$. نوسان f در بازهٔ I را به‌صورت $\omega_f(I) = \sup\{f(x) : x \in I\} - \inf\{f(x) : x \in I\}$ تعریف می کنیم (این تعریف متعلق به داربو

است). اکنون می‌توانیم آنچه را هانکل در نظر داشت بیان کنیم

$$a \in S_\delta(f) \Longrightarrow \forall I \in \mathcal{I}_a \quad : \omega_f(I) > \delta, \qquad a \notin S_\delta(f) \Longrightarrow \exists I \in \mathcal{I}_a \quad : \omega_f(I) < ۲\delta.$$

در اینجا دو جنبهٔ توپولوژیک و نظریه ـ اندازه‌ای نقاط ناپیوستگی f تلاقی می‌کنند. از یک طرف مجموعهٔ $S_\delta(f)$ را داریم که یا چگال یا هیچ‌جا چگال است (جنبهٔ توپولوژیکی) و از طرف دیگر مجموعهٔ بازه‌هایی که نوسان روی آن‌ها بزرگتر از δ است (جنبهٔ نظریه ـ اندازه‌ای).

امروزه به‌راحتی می‌توانیم نشان دهیم اگر f انتگرال‌پذیر باشد، مجموعهٔ $S_\delta(f)$ را برای هر $\delta > ۰$ می‌توان با تعدادی شمارا بازه با طول به‌دلخواه کوچک پوشاند. لذا اگر f انتگرال‌پذیر باشد، مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن اندازه ـ صفر است. هانکل به‌جای پرسش از جهت عکس این حکم، دو مفهوم را تعریف می‌کند که معادل همان چگال و هیچ‌جا چگال بودنِ امروزی است. او ثابت می‌کند اگر $S_\delta(f)$ هیچ‌جا چگال باشد، مجموع طول بازه‌هایی را که برای آن‌ها $\omega_f(I) > ۲\delta$ می‌توان به‌دلخواه کوچک کرد و به‌عکس. مطلب جالب و به‌لحاظ تاریخی مهم این است که قسمتِ «اگر» این قضیه، اشتباه است؛ اما اشتباهی خوب!

آنچه از دید ریمان پنهان مانده بود ارتباط مشخص بین انتگرال‌پذیری و درجهٔ ناپیوستگی تابع بود. دو بوا ـ ریموند (۱۸۸۹ ـ ۱۸۳۱) چنین ارتباطی را به‌دست می‌دهد گرچه تقریباً همزمان و مستقل از او، هارناک و دینی نیز در سال ۱۸۷۰ چنین ارتباطی را کشف کردند. دو بوا ـ ریموند ثابت کرد که اگر $\omega(f,x) = \lim_{\delta\to ۰^+} \omega_f(x-\delta, x+\delta)$ و برای هر $\alpha > ۰$ مجموعهٔ $E_\alpha = \{x : \omega(f,x) > \alpha\}$ را بتوان در تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک قرار داد، آن‌گاه شرط انتگرال‌پذیری ریمان برقرار است و به‌عکس.

در سال ۱۸۷۵ ریاضیدان انگلیسی هـ. ج. س. اسمیت (۱۸۸۳ ـ ۱۸۲۶) تابعی کشف کرد که نقاط ناپیوستگی آن هیچ‌جا چگال (و به‌ویژه $S_\delta(f)$ هیچ‌جا چگال) است، ولی انتگرال‌پذیر نیست. بنابراین به زبان امروزی، مجموعه‌های هیچ‌جا چگال لزوماً اندازه ـ صفر نیستند؛ مطلبی که هانکل از آن برای اثبات انتگرال‌پذیری توابع با مجموعهٔ $S_\delta(f)$ $(\delta > ۰)$ هیچ‌جا چگال، استفاده کرده بود. مثال‌هایی از این دست نشان داد که مجموعه‌های کوچک به‌لحاظ توپولوژیک، لزوماً به‌لحاظ اندازه کوچک نیستند. این، عاملِ بسط نظریهٔ محتوی شد. اگر اشتباه هانکل نبود شاید بسط و توسعهٔ زبان نظریهٔ اندازه به‌گونهٔ فعلی نبود.

گام مهم بعدی در توسعهٔ انتگرال ریمان را ریاضیدان فرانسوی، ژان گاستون داربو (۱۹۱۷ ـ ۱۸۴۲)، برداشت. او سه مقاله بین سال‌های ۱۸۷۲ تا ۱۸۷۹ منتشر کرد و در آن‌ها لزوم دقت بیشتر را در شیوه‌های آنالیز گوشزد کرد. او با ارائهٔ مثال‌هایی، خطراتی را که از اعتماد کردن به شهود ناشی می‌شوند نشان داد. در این باره به‌ویژه از مفهوم همگرایی یکنواخت استفاده اساسی می‌کرد.

اگر f تابعی کراندار روی بازهٔ $I = [a,b]$ و $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b$ افراز دلخواهی از

بازهٔ I باشد، قرار می‌دهیم $\delta_i = x_i - x_{i-1}$، $i = 1, \ldots, n$ و M_i و m_i را سوپریمم و اینفیمم تابع روی زیربازهٔ i ـ ام می‌گیریم. نوآوری داربو در این است که نشان داد اگر $\infty \longrightarrow n$ و $0 \longrightarrow \delta_i$ مقادیر $\sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$ و $\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i$ به مقدارهای ثابتی میل می‌کنند که فقط به a و b و f بستگی دارد. داربو توابعی را که برای آن‌ها دو مقدار بالا مساوی‌اند از دیگر توابع جدا کرد. اکنون می‌توان به فرمول‌بندی داربو از انتگرال ریمان رسید. برای تابع f و افراز $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ از آن و $\theta_i \in [0, 1]$، مجموع داربو را به‌صورت $S(n, \delta, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(x_{i-1} + \theta_i\delta_i)$ که به $\delta = (\delta_i)$ و $\theta = (\theta_i)$ و n وابسته است در نظر می‌گیریم. با نمادهای پئانو، انتگرال بالایی و پایینی را به‌صورت $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$ و $\underline{\int_a}^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i$ می‌نویسیم.

قضیه [داربو (۱۸۷۵)] مجموع داربو به حد منحصر به‌فردی میل می‌کند اگر و تنها اگر $\underline{\int_a}^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

داربو مقدار مشترک فوق را $\int_a^b f(x)dx$ نامید و مثلاً ثابت کرد که هر تابع پیوسته انتگرال‌پذیر (داربو) است. همچنین نشان داد تابع $x \longmapsto \int_a^x f(x)dx$ پیوسته است و اگر f در x_0 پیوسته باشد، تابع مذکور در x_0 مشتق‌پذیر و مشتق آن برابر با $f(x_0)$ است. به‌ویژه نشان داد

قضیه اگر F روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر و مشتق آن تابع انتگرال‌پذیرِ f باشد، آن‌گاه $F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$.

اگر f تابعی غیرثابت باشد که مشتق آن f' کراندار و صفرهای آن مجموعه‌ای چگال تشکیل دهند، f' نمی‌تواند انتگرال‌پذیر ریمان باشد، چراکه به‌راحتی می‌بینیم $\int_a^x f'dt = 0$ و طبق قضیه بالا باید $f(x) - f(a) = 0$، یعنی f باید ثابت باشد که تناقض است. اولین بار ریاضیدان ایتالیایی، اولیسّه دینی (۱۹۱۸ ـ ۱۸۴۵) در سال ۱۸۷۸ متوجه این نکته شد. دینی مثالی ارائه نکرد اما کمی بعد از بحث دینی مثال‌های نقضی پیدا شدند. یکی از آن‌ها متعلق به ولترا در سال ۱۸۸۱ است. مثال دیگر را ریاضیدان سوئدی تورستن بُردِن در ۱۸۹۶ منتشر کرد. لذا فرآیند مشتق می‌تواند تابعی با مشتق کراندار تولید کند که انتگرال ریمان ندارد. پس انتگرال ریمان و مشتق‌گیری کاملاً وارون یکدیگر نیستند. این اولین بحران نظریهٔ ریمان است که البته تا قبل از لبگ از محبوبیت آن نظریه چیزی نمی‌کاست.

دینی در سال ۱۸۷۸ در کتابی با عنوان «مبانی نظریهٔ توابع حقیقی‌مقدار» مشتق‌های چهارگانهٔ خود را تعریف کرد و نشان داد اگر f انتگرال‌پذیر ریمان باشد و $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$، آن‌گاه مشتق دینی F، DF، کراندار و انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b DF(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

قضیهٔ بنیادی حسابان از دو قسمت تشکیل شده است و فرآیندهای انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری را به یکدیگر مرتبط می‌کند و نشان می‌دهد این دو عمل به‌نوعی معکوس یکدیگرند.

قضیه [قضیهٔ بنیادی حسابان صورت (۱)] فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ و مشتق آن f' انتگرال‌پذیر

باشد. در این صورت، $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

شرط انتگرال‌پذیری f' در قضیهٔ فوق، اساسی است. تابع $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ را با $f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}$ برای $0 < x \le 1$ و $f(0) = 0$ تعریف کنید. مشتق f به‌صورت $f'(x) = 2x \cos \frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x^2}$ برای $0 < x \le 1$ و $f'(0) = 0$ به‌دست می‌آید. تابع f' روی $[0, 1]$ بی‌کران است و در نتیجه نمی‌تواند انتگرال‌پذیر باشد. شاید دلیل انتگرال‌پذیر نبودن f' در این مثال، به بی‌کران بودن f' نسبت داده شود، ولی مثال دشوار و تکنیکی زیر که متعلق به ولترا است، نشان می‌دهد که این چنین نیست. در سال ۱۸۸۱، ولترا مثالی از یک مجموعهٔ هیچ‌جا چگال با اندازهٔ ناصفر ارائه داد و با استفاده از آن، حدس دینی مبتنی بر وجود تابع با مشتق کراندار ولی انتگرال‌ناپذیر را اثبات کرد. باید متذکر شد که مستقل از او، دو بوا ـ ریموند نیز در سال ۱۸۸۰ مثالی از چنین مجموعه‌ای ساخته بود.

برای تشریح مثال ولترا، ابتدا توجه کنید که می‌توان زیرمجموعهٔ هیچ‌جا چگال از $[0, 1]$ مانند E ساخت که $0, 1 \in E$ و اندازه لبگ E مثبت باشد. چنین مجموعه‌ای را می‌توان به این صورت ساخت که ابتدا فاصلهٔ بازی به طول ۱/۴ از میانهٔ بازهٔ $[0, 1]$ را حذف می‌کنیم و از هر یک از فاصله‌های بستهٔ باقیمانده نیز فاصلهٔ باز به طول ۱/۱۶ را می‌برداریم. اکنون فرض کنید که در مرحلهٔ n ـ ام از میانهٔ هر یک از 2^{n-1} بازهٔ بستهٔ باقیمانده بعد از $n - 1$ ـ امین مرحله، بازهٔ بازی به طول 4^{-n} را حذف کنیم. با ادامهٔ این فرآیند، از بازهٔ $[0, 1]$ فاصله‌های بازی را حذف کرده‌ایم که مجموع طول آن‌ها برابر است با $\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4^2} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{1}{2}$. حال E را مجموعهٔ بستهٔ باقیمانده را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح اندازهٔ E مثبت است و $[0, 1] \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$. اکنون فرض کنید $[a, b]$ بازهٔ دلخواهی باشد. تابع زیر را درنظر بگیرید:

$$g(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \sin \frac{1}{x-a} & a < x \le b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

به‌راحتی دیده می‌شود که

$$g'(x) = \begin{cases} 2(x-a) \sin \frac{1}{x-a} - \cos \frac{1}{x-a} \sin \frac{\pi}{x^2} & a < x \le b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

تابع g تعداد نامتناهی فرینهٔ نسبی دارد و در هر یک از آن‌ها، g' برابر صفر است. تابع g' کراندار است. اکنون c را در بازهٔ $(a, (a+b)/2)$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری که $g'(c) = 0$ و همچنین d را در بازهٔ $((a+b)/2, b)$ چنان انتخاب می‌کنیم که $c - a = b - d$. توجه کنید که $(c-a)^2 \sin \frac{1}{c-a} = -(d-b)^2 \sin \frac{1}{d-b}$. تابع $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ را با ضابطهٔ

$$g(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \sin \frac{1}{x-a} & a < x \le c \\ (c-a)^2 \sin \frac{1}{c-a} & c < x < d \\ -(x-b)^2 \sin \frac{1}{x-b} & d \le x < b \end{cases}$$

و $h(a) = 0 = h(b)$ تعریف می‌کنیم. اگر E مجموعه ساخت شده در بالا باشد، تابع f_k را برابر تابع h تعریف شده روی بازهٔ $[a_k, b_k]$ می‌گیریم. اکنون تابع $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = f_k(x)$ برای $x \in (a_k, b_k)$ و $f(x) = 0$ برای $x \in E$ همان تابع مورد نظر خواهد بود.

قسمت دوم قضیهٔ بنیادی حسابان مربوط به مشتق‌گیری از یک انتگرال نامعین است. فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد. انتگرال نامعین f در نقطهٔ $x \in [a,b]$ به‌صورت $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ تعریف می‌شود.

قضیه [قضیهٔ بنیادی حسابان صورت (۲)] فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت انتگرال نامعین آن، F، روی $[a,b]$ پیوسته است و چنانچه f در $c \in [a,b]$ پیوسته باشد، F در c مشتق‌پذیر است و $F'(c) = f(c)$.

بحران دیگر در نظریهٔ انتگرال از فرضی ناشی می‌شود که فوریه در بررسی‌های خود بدیهی می‌پنداشت؛ این‌که از یک سری می‌توان جمله‌به‌جمله انتگرال گرفت. به عبارت دیگر مسألهٔ عبور حد از انتگرال. تا پیش از نیمهٔ دوم قرن نوزدهم فرض جابه‌جایی حد و انتگرال بی‌چون و چرا قبول عام یافته بود. اما در سال ۱۸۷۰ یکی از دوستان وایرشتراس، ادوارد هاینه (۱۸۲۱ ــ ۱۸۸۱)، در مقاله‌ای اشاره کرد که این فرض درست پنداشته می‌شد تا این‌که وایرشتراس متوجه شد که نه‌تنها سری باید همگرا باشد بلکه باید همگرای یکنواخت نیز باشد. در واقع وایرشتراس بین همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت برای جابه‌جایی حد و انتگرال تفاوت قائل شد. اما این تمایز تا قبل از اشارهٔ صریح هاینه به آن، شناخته نشده بود.

انتگرال ریمان نسبت به فرآیند حد بسیار بد رفتار می‌کند و فاقد قضایای همگرایی مطلوب است. اگر $\{f_k\}_k$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر باشد و به تابع f به معنایی همگرا باشد، مسألهٔ مهم این است که آیا f انتگرال‌پذیر است؟ و آیا رابطهٔ $\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k$ برقرار است؟ هر قضیه‌ای که شرایطی برای پاسخ دادن به این سؤال‌ها ارائه کند، یک قضیهٔ همگرایی نامیده می‌شود. اگر همگرایی یکنواخت باشد، آن‌گاه f انتگرال‌پذیر است و جابه‌جایی حد و انتگرال امکان‌پذیر است، اما در حالت کلی چنین نیست. مثلاً فرض کنید $f_k : [0,1] \to \mathbf{R}$، $f_k(x) = k\chi_{[0,1/k]}(x)$. دنبالهٔ $\{f_k\}_k$ همگرای نقطه‌ای به تابع ثابت صفر است، ولی به‌وضوح تساوی $\int_0^1 f = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k$ برقرار نیست.

علاوه بر شرایط همگرایی نقطه‌ای، دو فرض طبیعی دیگر نیز می‌توان بر دنبالهٔ توابع اعمال کرد: یکی کرانداری دنباله است و دیگری یکنوایی. اما این دو نیز همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد، به تنهایی کافی نیستند. فرض کنید $\{r_n\}_n$ شمارشی از اعداد گویای بازهٔ $[0,1]$ باشد. تعریف کنید $f_k : [0,1] \to \mathbf{R}$، $f_k(x) = \chi_{\{r_1,\dots,r_k\}}(x)$. در این صورت، $\{f_k\}_k$ دنباله‌ای صعودی و کراندار از توابع انتگرال‌پذیر و همگرای نقطه‌ای به تابع انتگرال‌ناپذیر دیریکله است.

گاستون داربو صریحاً به کار هاینه اشاره و در سال ۱۸۷۵ همگرایی یکنواخت را مجدداً صورت‌بندی می‌کند و قضیهٔ جابه‌جایی حد و انتگرال را هنگامی که همگرایی یکنواخت باشد، اثبات

می‌کند. آنچه اهمیت دارد این است که داربو در آن رساله مثال‌های روشنگری بیان می‌کند. مثلاً از سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-2nxe^{-n^2x^2}+2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2})$ که به $-2xe^{-x^2}$ همگراست نمی‌توان جمله‌به‌جمله انتگرال گرفت. پس انتگرال ریمان با فرآیندهای حدی نیز در حالت کلی سازگار نیست.

مراجع

[1] M. E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[2] U. Bottazzini, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weirstrass*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[3] C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publication, New York, 1959

[4] W. Dunham, "Touring the calculus gallery", *Amer. Math. Monthly*, **112**(2005), 1–19.

[5] C. H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[6] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc. GSM Vol. 4, Providence, Rohde Island, 1994.

[7] I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Massachusetts, 1970.

[8] I. Grattan-Guinness, *From the calculus to set theory, 1630-1910: An introductory history*, Princeton University Press, Princeton, 2000.

[9] T. Hawking, *Lebesgue's theory of integration: It's origins and development*, Chelsea Pub. Co., New York, 1975.

[10] H. N. Janke, *A history of analysis*, Amer. Math. Soc. History of Math. Vol. 24, Providence, Rhode Island, 2003.

[11] I. Kleiner, "History of the infinitely small and the infinitely large in calculus", *Ed. Stud. Math.*, **48**(2001), 137–174.

[12] G. H. Moore, "The emeregence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology", *Historia Math.*, **35**(2008), 220–241.

[13] I. N. Pesin, *Classical and modern integration theories*, Academic Press, New York, 1970.

[14] J. P. Pier, *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris, 1996.

[15] C. Swartz, *Measure, integration and function spaces*, World Scientific, Singapore, 1994.

[۱۶] م. رجبعلی‌پور، «کسرهای مصری»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۴۲، تابستان ۱۳۸۸، ۱—۳۸.

[۱۷] س. مقصودی، «نظریه‌های انتگرال‌گیری دانژوا، پرون، و هنستاک ـ کورزویل روی خط حقیقی»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۴۷، تابستان ۱۳۹۰، ۱۹—۳۵.

سعید مقصودی
دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
s_maghsodi@znu.ac.ir