فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۲ (بهار ۱۳۹۲) صص. ۳۷ تا ۵۲

مساحت و کاستی در مدل بلترامی ـ کلاین

سید قهرمان طاهریان

چکیده

آبراهام اونگار[1] در [12] فرمول‌هایی برای محاسبهٔ کاستی یک مثلث در مدل بلترامی ـ کلاین ارائه کرده است. وی بر اساس ساختار جبری حاصل از جمع سرعت‌های نسبیتی روی مجموعهٔ سرعت‌های مجاز (کمتر از سرعت نور)، تعریف جدیدی برای مساحت (با نام جایرو ـ مساحت) پیشنهاد می‌کند که همهٔ ویژگی‌های بنیانی مساحت را ندارد. برای مثال اگر مثلثی را به دو مثلث تقسیم کنیم مجموع جایرو ـ مساحت مثلث‌های پدید آمده برابر جایرو ـ مساحت مثلث اولیه نیست. در سال ۲۰۰۵، هلموت کارتسل[2] و ماریو مارکی[3] در [3] با رهیافتی جدید، مفهوم تابع کاستی را در هندسهٔ مطلق (به معنای [1]) بیان کردند. در این مقاله بر اساس ایده‌های کارتسل و اونگار، تعریف دقیقی برای کاستی و مساحت در مدل بلترامی ـ کلاین ارائه می‌شود. به‌کمک این تعریف، برای فرمول‌های محاسبهٔ کاستی، اثبات‌های ساده و مقدماتی به‌دست می‌آیند.

۱. مقدمه

یکی از اهداف این مقاله آشنا کردن دانشجویان و اساتید با پیشرفت‌های جدید در هندسه‌ی هذلولوی است. بسیاری از مفاهیم هندسهٔ هذلولوی مانند مساحت و حجم در کتاب‌های مقدماتی به شکل رضایت‌بخشی ارائه نمی‌شوند. در این نوشتار، یک رهیافت مقدماتی ولی کاملاً دقیق برای مفهوم کاستی به‌کمک بازتاب‌های نقطه‌ای بیان می‌شود. با این رهیافت که نگارنده و یکی از دانشجویانش در [6] به چاپ رسانده‌اند، اثبات‌ها به‌شکل مشروح و مقدماتی بیان شده‌اند.

1) Abraham. A. Ungar 2) Helmut Karzel 3) Mario Marchi

فلیکس کلاین[1] در سال ۱۸۷۱ یک مدل تحلیلی برای هندسهٔ غیراقلیدسی بر اساس تعریف آرتور کیلی[2] از همنهشتی پاره‌خط‌ها در هندسهٔ تصویری ارائه کرد. او این هندسه را **هندسهٔ هذلولوی** نامید که به آن **مدل بلترامی ـ کلاین** هم گفته می‌شود. در این مدل، نقاط صفحه، نقاط درونی دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات و خطوطِ صفحه، وترهای این دایره بدون نقاط انتهایی در صفحهٔ اقلیدسی هستند. به عبارت دیگر، مجموعهٔ نقاط عبارت است از $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} \;:\; |z| < ۱\}$ که $\mathbf{C}$ صفحهٔ مختلط و $|z| = z\bar{z}$ اندازهٔ بردار z است. مجموعهٔ خطوط $\mathfrak{G}_h$ عبارت است از $\mathfrak{G}_h := \{A \cap D :\; A \cap D \neq \emptyset\}$ که A نشان‌دهندهٔ یک خط در صفحهٔ اقلیدسی است. در این مدل، دو پاره‌خط (a, b) و (c, d) همنهشت (قابل‌انطباق) هستند اگر و تنها اگر $\rho(a, b) = \rho(c, d)$ که در آن، ρ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(x, y) := \frac{(۱ - \langle x, y\rangle)^{۲}}{(۱ - x\bar{x})(۱ - y\bar{y})} \quad , \qquad \langle x, y\rangle := \frac{۱}{۲}(x\bar{y} + y\bar{x}).$$

۱.۱. مفهوم مساحت

یکی از مفهوم‌های بنیادی در مبانی هندسه، مساحت است. مساحت یکی از مباحث نظریهٔ اندازه[3] محسوب می‌شود ولی در مبانی هندسه با رهیافت‌های ساده‌تری هم قابل بیان است. در هندسهٔ اقلیدسی می‌توان مساحت ناحیه‌های دلخواه هندسی را به‌کمک مساحت مربع واحد بیان کرد، ولی این کار در هندسهٔ هذلولوی باید به‌شکل دیگری انجام گیرد، زیرا در هندسهٔ هذلولوی مربع وجود ندارد. تفاوت مهم هندسهٔ، هذلولوی با هندسهٔ اقلیدسی، «بُنداشت توازی» است. به‌کمک بُنداشت توازی اقلیدسی ثابت می‌شود که مجموع زوایا در یک مثلث دلخواه برابر دو قائمه است و در نتیجه، چهارگوش با چهار زاویهٔ قائمه (مربع) وجود دارد. در این هندسه به‌کمک مربع با ضلع واحد، واحد مساحت تعریف می‌شود و در نتیجه مساحت مستطیل، متوازی‌الاضلاع و مثلث قابل تعریف است. اما در هندسهٔ هذلولوی مجموع زوایای مثلث کوچکتر از دو قائمه است و هر چهارگوش را می‌توان به دو مثلث با مساحت یکسان تقسیم کرد. پس در هندسهٔ هذلولوی مربع وجود ندارد و مفهوم مساحت باید به‌صورت دیگری تعریف شود. رهیافت‌های گوناگونی برای تعریف مساحت در هندسهٔ هذلولوی وجود دارد. در یک روش متداول، مساحت مثلث به‌کمک کاستی آن تعریف می‌شود. به‌طور شهودی انتظار داریم که مساحت مثلث عددی مثبت باشد و اگر مثلثی را به دو مثلث تقسیم کنیم، جمع مساحت آن‌ها برابر با مساحت مثلث نخست باشد. با توجه به این‌که کاستیِ مثلث این ویژگی‌ها را دارد، بسیاری از مؤلفین از آن برای تعریف مساحت در هندسهٔ هذلولوی استفاده کرده‌اند. در بیشتر کتاب‌های مقدماتی هندسه، این روش دقت کافی ندارد و به‌طور عمیق به آن پرداخته نمی‌شود. از جمله رهیافت‌های دیگر می‌توان به رهیافت تحلیلی بر اساس چارچوب

1) Felix Klein 2) Arthur Kayley 3) Masure theory

کلی مفهوم مساحت در هندسه‌های ریمانی اشاره کرد. مثلاً هانفرید لنتز[1] در [4] نشان می‌دهد که در مدل قرص پوانکاره، $ds^۲ = \frac{۴}{(۱-x^۲-y^۲)^۲}(dx^۲ + dy^۲)$ و بر این اساس، مساحت ناحیهٔ دلخواه D در این مدل را به‌صورت $\int_D \sqrt{EG - F^۲}dxdy$ تعریف می‌کند که در آن، $G = \frac{۴}{(۱-x^۲-y^۲)^۲}$، $F = ۰$ و $E = \frac{۴}{(۱-x^۲-y^۲)^۲}$. لنتز در ادامه ثابت می‌کند که مساحت مثلث برابر با کاستی آن است ([4]، صفحهٔ ۱۴۲).

با رهیافتی کاملاً متفاوت، اونگار در [12] مفهوم **جایرو ــ مساحت** یک مثلث را در مدل بلترامی ــ کلاین برابر با $۲ \tan \frac{\delta}{۲}$ تعریف می‌کند که در آن، δ کاستی این مثلث است. اما بر اساس این تعریف، ویژگی اساسی مساحت یعنی قاعدهٔ جمع مساحت‌ها برقرار نیست. بنا بر این قاعده، در مثلث دلخواه $\triangle(a,b,c)$ برای هر نقطهٔ x واقع بر پاره‌خط (a,b) و بین a و b، مساحت مثلث $\triangle(a,b,c)$ برابر است با جمع مساحت مثلث‌های $\triangle(c,b,x)$ و $\triangle(a,x,c)$. در این مقاله همانند بیشتر کتاب‌های هندسه، مساحت یک مثلث در مدل بلترامی ــ کلاین برابر با کاستی آن مثلث تعریف می‌شود و در قضیهٔ ۵ ثابت می‌شود که قاعدهٔ جمع مساحت‌ها برقرار است. روشی که برای اثبات قضیهٔ ۵ به‌کار رفته رهیافت جدیدی بر اساس ایده‌های کارتسل و اونگار، به‌ترتیب در [2,3] و [12، 11، 10، 9، 8] است.

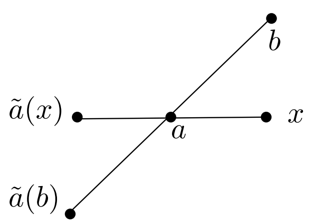
۲.۱. تعبیر هندسی جمع

یادآوری می‌کنیم که در صفحهٔ اقلیدسی $\mathcal{P}$ با انتخاب یک نقطهٔ مرجع O (مبدأ مختصات) می‌توان عمل جمع «$+$» را به‌قسمی تعریف کرد که $(\mathcal{P},+)$ یک گروه آبلی باشد. برای نقاط a و b، مجموع $a+b$ رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن a، b و O هستند (شکل ۳). این روش را **قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع** می‌نامند. ویژگی اساسی این تعبیر، استفادهٔ ضمنی از اصل توازی است و در نتیجه، در صفحهٔ هذلولوی قابل استفاده نیست. روش دیگر برای تعبیر هندسی جمع که در [5] و [13] به‌طور مفصل بیان شده، استفاده از مفهوم **بازتاب (انعکاس)** نسبت به نقطه یا خط است. با این رهیافت برای بسیاری از مفاهیم در مدل بلترامی ــ کلاین از جمله کاستی و ویژگی‌های آن اثبات‌های دقیق و زیبایی به‌دست می‌آید. برای راحتی خوانندگانی که به مراجع اشاره شده دسترسی ندارند، برخی از مفاهیم پایه یادآوری می‌شوند.

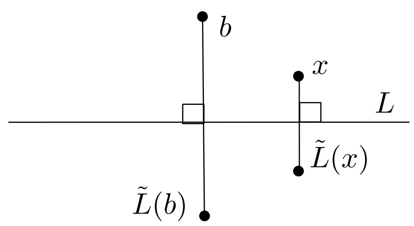
یک **خودریختی** صفحهٔ مطلق، نگاشتی یک‌به‌یک و پوشا از صفحه به خود آن صفحه است که خط را به خط تصویر می‌کند. در حالت خاص، یک خودریختی φ **حرکت** نامیده می‌شود اگر **طولپا** باشد. به بیان دیگر، برای هر دو نقطهٔ a و b، پاره‌خط (a,b) با تصویر آن تحت φ یعنی $(\varphi(a),\varphi(b))$ قابل‌انطباق باشد. مجموعهٔ $\mathcal{M}$، شامل همهٔ حرکت‌های یک صفحهٔ مطلق

1) Hanfried Lenz

با عمل ترکیب توابع یک گروه است که به آن **گروه حرکت‌های صفحهٔ مطلق** می‌گوییم. مهم‌ترین حرکت‌های صفحهٔ مطلق بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی هستند. فرض کنیم a و b دو نقطهٔ متمایز در صفحه و $\overline{a,b}$ خط منحصر به‌فردی است که a و b بر آن واقع هستند. منظور از بازتاب b نسبت به نقطهٔ a که آن را با $\tilde{a}(b)$ نشان می‌دهیم، نقطهٔ منحصر به‌فردِ متمایز با b و واقع بر خط $\overline{a,b}$ است به‌قسمی که پاره‌خط (a,b) با پاره‌خط $(a,\tilde{a}(b))$ قابل‌انطباق باشد. به این ترتیب برای $a \in \mathcal{P}$، نگاشت $\tilde{a} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ با ضابطهٔ $x \mapsto \tilde{a}(x),\ \tilde{a}(a) := a$ را **بازتاب نقطه‌ای نسبت به** a می‌نامیم (شکل ۱). یادآوری می‌کنیم که در صفحهٔ مطلق برای هر نقطهٔ $p \in \mathcal{P}$ و هر خط L، دقیقاً یک خط H وجود دارد که p بر H واقع و H بر L عمود است. از این پس، برای بیان تعامد از نماد $H \bot G$ استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر، از هر نقطهٔ صفحه می‌توان بر هر خط دلخواه صفحه، عمود منحصر به‌فردی رسم کرد. برای سادگی می‌نویسیم $H := \{p \bot L\}$. برای هر خط L، نگاشت $\widetilde{L} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ با ضابطهٔ $x \mapsto \widetilde{x}_L(x)$ به‌قسمی که $x_L = \{x \perp L\} \cap L$، **بازتاب خطی نسبت به خط** L نامیده می‌شود.



شکل ۱ بازتاب نقطه‌ای.



شکل ۲ بازتاب خطی.

در ادامه به چند نتیجهٔ مهم در مورد بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی اشاره می‌کنیم:

۱. بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی، حرکت‌های خودوارون (مرتبه‌ی ۲) هستند.

۲. هر حرکت را می‌توان به‌صورت حاصلضرب حداکثر سه بازتاب خطی بیان کرد.

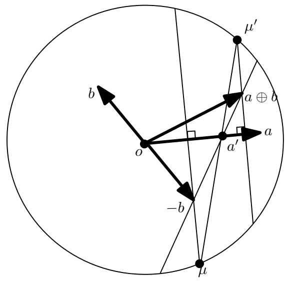
۳. حاصلضرب سه بازتاب خطی برای سه خط واقع بر یک نقطه، همواره یک بازتاب خطی نسبت به خطی است که از آن نقطه می‌گذرد.

۴. برای دو خط A و B، از $A \perp B$ و $c := A \cap B$، نتیجه می‌شود $\widetilde{c} = \widetilde{A} \circ \widetilde{B}$.

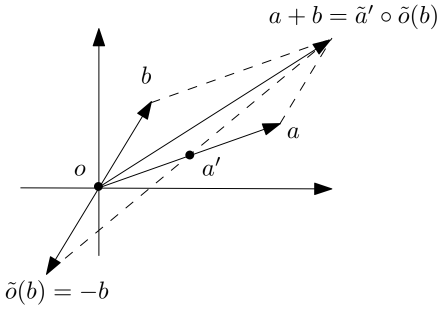
۵. هر حرکت با نقطهٔ ثابت منحصر به‌فرد a لزوماً همان انعکاس نقطه‌ای $\tilde{a}$ است و برای دو نقطهٔ متمایز a و b همواره $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a}$ یک انعکاس نقطه‌ای است.

اکنون به یادآوری تعبیر هندسی جمع در صفحهٔ مطلق با روش مبتنی بر بازتاب‌های نقطه‌ای می‌پردازیم. این روش مستقل از اصل توازی است (شکل ۳). فرض کنیم a' نقطهٔ وسط a و O

باشد. مشاهده می‌شود که $a+b=\tilde{a}'\circ\tilde{O}(b)$.



شکل ۴ تعبیر هندسی جمع نسبیتی.



شکل ۳ تعبیر جمع بر اساس بازتاب.

این قاعدهٔ ساده و اساسی را نخستین بار کارتسل در صفحهٔ مطلق به‌کار برد ([2]). مزیت اصلی این تعبیر، استقلال آن از مفهوم توازی است. این همان قاعدهٔ جمع در نظریهٔ نسبیت خاص است.

۳.۱. جمع در مدل بلترامی ـ کلاین

در مدل بلترامی ـ کلاین، عمل جمع به‌وسیلهٔ رابطهٔ $a\oplus b:=\widetilde{a'}\circ\widetilde{O}(b)$ تعریف می‌شود. در این مقاله از نماد «$+$» برای جمع در $\mathbf{R}$ و از نماد «$\oplus$» برای جمع نسبیتی (هذلولوی) در $\mathbf{D}$ استفاده می‌کنیم. در ادامهٔ بحث، روش هندسی به‌دست آوردن $a\oplus b$ را یادآوری می‌کنیم. بازتاب نسبت به نقطهٔ O، نقطهٔ b را به $-b$ می‌نگارد. پس برای محاسبهٔ $\widetilde{a'}\circ\widetilde{O}(b)=\widetilde{a'}(-b)$، اگر $b=O$، آن‌گاه $a\oplus b=a\oplus O=a$. فرض کنیم $b\neq O$. در این صورت، به‌ازای $\mu\in\mathbf{S}\cap(-b\perp A)$ و $\mu'\in\mathbf{S}\cap\overline{\mu,a'}$ که در آن، $\mu'\neq\mu$ (شکل ۴)، داریم

$$a\oplus b=\widetilde{a'}(-b)=\overline{-b,a'}\cap(\mu'\perp A).$$

در این نوشتار، یکی از قضیه‌های [17] و [13] را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

قضیه ۱. فرض کنیم $\mathbf{D}$ قرص واحد باز در مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbf{C}$ باشد. در این صورت، مدل بلترامی ـ کلاین مجموعهٔ $\mathbf{D}$ است و ساختار متریک در این مدل به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

۱. برای هر $a\in\mathbf{D}$، انعکاس نسبت به نقطهٔ a توسط نگاشت متعامد زیر به‌دست می آید:

$$\widetilde{a}:\ D\to D\ ;\ x\mapsto\frac{(a\bar{a}-1)x+(2-(a\bar{x}+x\bar{a}))a}{1+a\bar{a}-(a\bar{x}+x\bar{a})}.\qquad(1)$$

۲. برای هر دو نقطهٔ $a, b \in \mathbf{D}$، نقطهٔ m وسطِ a و b از رابطهٔ

$$m = \frac{\sqrt{۱ - b\bar{b}}}{\sqrt{۱ - a\bar{a}} + \sqrt{۱ - b\bar{b}}}\, a + \frac{\sqrt{۱ - a\bar{a}}}{\sqrt{۱ - a\bar{a}} + \sqrt{۱ - b\bar{b}}}\, b = \frac{\| b \|_h}{\| a \|_h + \| b \|_h}\, a + \frac{\| a \|_h}{\| a \|_h + \| b \|_h}\, b. \qquad (۲)$$

به‌دست می آید که در آن، ($\| a \|_h = \sqrt{۱ - a\bar{a}} = \sqrt{۱ - |a|^۲}$). به‌ویژه، نقطهٔ a' وسطِ a و O از رابطهٔ

$$a' = \frac{۱}{۱ + \sqrt{۱ - a\bar{a}}}\, a = \frac{۱}{۱ + \| a \|_h}\, a. \qquad (۳)$$

به‌دست می آید.

۳. برای هر خط U که $O \in U$ و برای هر $a, b \in U$، $a \oplus b = \frac{۱}{۱ + \bar{a}b}(a + b)$. همچنین مجموعهٔ U یک گروه جابه‌جایی یکریخت با $((-۱, ۱), \oplus)$ و در نتیجه یکریخت با $(\mathbf{R}, +)$ است.

۴. برای $a, b \in \mathbf{D}$، داریم

$$a \oplus b = \frac{a + b}{۱ + \langle a, b\rangle} + \frac{۱}{۱ + ||a||_h}\left(\frac{\langle a, b\rangle\, a - |a|^۲\, b}{۱ + \langle a, b\rangle} \right), \qquad (۴)$$

$$(۱ + \langle a, b\rangle)\, \|a \oplus b\|_h = \|a\|_h\, \|b\|_h. \qquad (۵)$$

۲. ساختار جبری جمع نسبیتی روی مجموعهٔ سرعت‌های مجاز

در این بخش، ابتدا به یادآوری ساختار جبری $(\mathbf{D}, \oplus)$ می‌پردازیم. این ساختار یک لوپ خاص موسوم به K ــ لوپ است. مفهوم K ــ لوپ به روش‌های مختلف قابل تعریف است که همه هم‌ارزند. یک تعریف ساده این است که لوپ K یک K ــ لوپ (یا بروک ــ لوپ) است هرگاه رابطهٔ «بُل»:

$$a + (b + (a + c)) = (a + (b + a)) + c \qquad (٦)$$

و ویژگی معکوس خودریخت به‌شکل زیر در آن برقرار باشند:

$$-(a + b) = (-a) + (-b). \qquad (۷)$$

در تساوی فوق، $a-$ وارون راست a است و بر مبنای رابطهٔ $a + (-a) = \circ$ تعریف می‌شود. روش دیگر تعریف K ــ لوپ به‌کمک جایگشت‌ها است. اگر $(K, +)$ یک لوپ باشد، برای هر $a, b, x \in K$، رابطهٔ

$$a + (b + x) = (a + b) + \delta_{a,\, b}(x)$$

یک نگاشت دوسویی $\delta_{a,\, b} : K \longrightarrow K$ تعریف می‌کند که آن را **نگاشت چرخش**[1] هم می‌نامیم. نگاشت‌های چرخش در یک K ــ لوپ خودریختی‌های آن ($\mathrm{Aut}(K, +)$) هستند. لوپ $(K, +)$ یک K ـ لوپ است هرگاه برای هر $a, b \in K$ داشته باشیم

$$[K_۱] \qquad \delta_{a,b} \in Aut\ (K, +), \tag{۸}$$

$$[K_۲] \qquad \delta_{a,b} = \delta_{a,b+a}, \tag{۹}$$

$$[K_۳] \qquad -(a + b) = (-a) + (-b). \tag{۱۰}$$

ثابت می‌شود ([5] و [13]) که $(\mathbf{D}, \oplus)$ یک K ــ لوپ با عضو همانی O است. همچنین $\mathbf{D}^+ = \{\tilde{a}^+ :\ a \in \mathbf{D},\ \ a^+ = \tilde{a}' \circ\ \tilde{O}\}$ زیر مجموعه‌ای از گروه حرکت‌های صفحهٔ هذلولوی است. افزون بر این، $\tilde{O} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{D}, \oplus)$، یعنی

$$-(a \oplus b) = (-a) \oplus (-b)$$

و تساوی بل برقرار است ([2]):

$$a^+ \circ b^+ \circ a^+ = c^+ = (a + (b + a))^+.$$

نکتهٔ مهم دیگر این است که $(\mathbf{D}, \oplus)$ نه تعویض‌پذیر است و نه شرکت‌پذیر. اگر قرار دهیم $\delta_{a,b} = (a^+(b)^+)^{-۱} \circ a^+ \circ b^+ = ((a + b)^+)^{-۱} \circ a^+ \circ b^+$، آن‌گاه طبق تعریف،

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \delta_{a,b}(c)$$

و $\delta_{a,b}(O) = O$. در [17] نشان داده شده که برای هر $x, y \in \mathbf{D}$ داریم

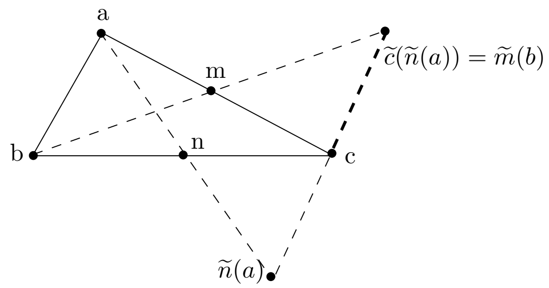
$$\delta_{a,b}(x) \oplus \delta_{a,b}(y) \quad = \quad \delta_{a,b}(x \oplus y),$$

یعنی $\delta_{a,b}$ یک خودریختی $(\mathbf{D}, \oplus)$ است. نگاشت $\delta_{a,b}$ که پیش از این نگاشت چرخش نامیده شد، یک دوران حول O است و **دوران توماس**[2] نامیده می‌شود ([10] و [7]). در بخش بعد نشان می‌دهیم که زاویهٔ دوران توماس برابر با کاستی مثلث $\triangle(O, a, -b)$ است. یک ویژگی دیگر دوران توماس که مورد استفادهٔ ما قرار می‌گیرد این است که برای هر $x, y \in \mathbf{D}$،

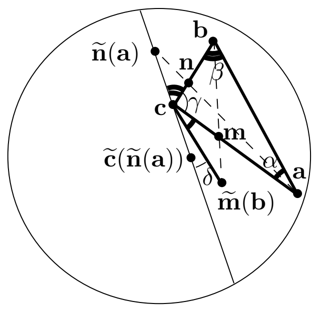
$$\delta_{y,x}(x \oplus y) = y \oplus x. \tag{۱۱}$$

---

1) precession map 2) Thomas rotation



شکل ۵ کاستی صفر در صفحهٔ اقلیدسی.



شکل ۶ کاستی در مدل بلترامی ـ کلاین.

۳. کاستی در مدل بلترامی ـ کلاین

فرض کنیم $\triangle(a,b,c)$ یک مثلث دلخواه در صفحهٔ اقلیدسی، m نقطهٔ وسط a و c و n نقطهٔ وسط b و c باشد. نقطهٔ وسط x و y نقطهٔ $\frac{x+y}{2}$ است و بازتاب نقطهٔ x نسبت به نقطهٔ z با رابطهٔ $\widetilde{z}(x) = 2z - x$ مشخص می‌شود. با توجه به این که در مدل تحلیلی هندسهٔ اقلیدسی، عمل جمع شرکت‌پذیر و تعویض‌پذیر است، روابط $\widetilde{m}(b) = 2m - b = a + c - b$ و $\widetilde{c}(\widetilde{n}(a)) = \widetilde{c}(2n - a) = 2c - (2n - a) = a + c - b$ برقرار هستند. بنابراین $\widetilde{m}(b) = \widetilde{c}(\widetilde{n}(a))$، یعنی زاویهٔ $\delta := \angle\big(\widetilde{m}(b), c, \widetilde{c}(\widetilde{n}(a))\big)$ برابر با صفر است (شکل ۵).

اکنون مثلث دلخواه $\triangle(a,b,c)$ را در مدل بلترامی ـ کلاین در نظر می‌گیریم. حرکت $\widetilde{n}$ نقطهٔ b را به c و نقطهٔ a را به $\widetilde{n}(a)$ تصویر می‌کند. بنابراین خط $\overline{b,a}$ به خط $\overline{c,\widetilde{n}(a)}$ تصویر و خط $\overline{b,c}$ ثابت نگه‌داشته می‌شود. در نتیجه زاویهٔ $\beta := \angle(a,b,c)$ به زاویهٔ $\angle(\widetilde{n}(a),c,b)$ تصویر می‌شود. پس $\beta \equiv \angle(\widetilde{n}(a),c,b)$. به همین ترتیب، $\alpha := \angle(b,a,c) \equiv \angle(a,c,\widetilde{m}(b))$ (شکل ۶). فرض کنیم $\delta := \angle\big(\widetilde{m}(b), c, \widetilde{c}(\widetilde{n}(a))\big)$ و $\gamma := \angle(b,c,a)$. در مدل بلترامی ـ کلاین که مدلی برای هندسهٔ هذلولوی است، اندازهٔ $\alpha + \beta + \gamma$ کمتر از دو قائمه است. پس با توجه به این‌که اندازهٔ زاویهٔ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ برابر با دو قائمه است، نتیجه می‌شود که کاستی مثلث $\triangle(a,b,c)$ برابر با δ است (شکل ۶).

برای به‌دست آوردن یک فرمول تحلیلی ساده برای محاسبهٔ کاستی مثلث $\triangle(a,b,c)$ بدون کم شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که $c = O$، یعنی رأس c بر مبدأ منطبق است. دلیل این است که می‌توان مثلث $\triangle(a,b,c)$ را با حرکت $\widetilde{c'}$ به مثلثی همنهشت با آن نگاشت که یک رأس مثلث مبدأ مختصات باشد. در این صورت، $m = a'$ و $n = b'$. در نتیجه $\widetilde{m}(b) = a \oplus (-b)$ و $\widetilde{c}(\widetilde{n}(a)) = -(\widetilde{n}(a)) = (-b) \oplus a$. بنابر قضیهٔ ۱، داریم

$$||a \oplus (-b)||_h = \frac{\|a\|_h \, \|-b\|_h}{1 + \langle a, -b\rangle} = \frac{\|a\|_h \, \|b\|_h}{1 - \langle a, b\rangle} = \frac{\|-b\|_h \, \|a\|_h}{1 + \langle -b, a\rangle} = \|(-b) \oplus a\|_h.$$

در نتیجه $|a \oplus (-b)| = |(-b) \oplus a|$. پس

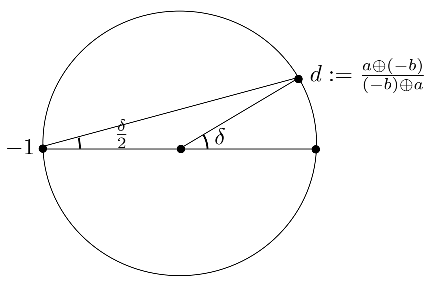
$$\delta = \arccos\left(\frac{\langle a \oplus (-b)\ ,\ (-b) \oplus a\rangle}{|(-b) \oplus a|^{۲}}\right). \qquad (۱۲)$$

از سوی دیگر، بنابر رابطهٔ (۸)، $\delta_{a,-b}((-b) \oplus a) = a \oplus (-b)$ و لذا

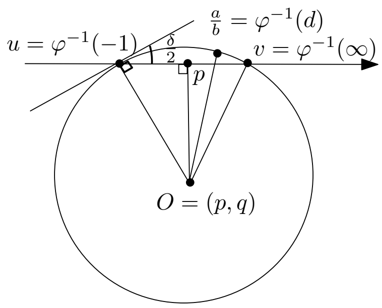
قضیه ۲. در مثلث $\triangle(a,b,c)$ زاویهٔ دوران نگاشت توماس، $\delta_{a,-b}$، برابر با کاستی $\triangle(a,b,c)$ است.

پس $d := \dfrac{a \oplus (-b)}{(-b) \oplus a}$ یک بردار واحد است با $\cos\delta = \dfrac{d+\bar{d}}{۲}$ (شکل ۷) و طبق قضیهٔ ۱، داریم

$$\begin{aligned} a \oplus (-b) &= \frac{۱}{۱ - \langle a,b\rangle}\left(-||a||_h\ b + (۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱ + ||a||_h})a\right), \\ (-b) \oplus a &= \frac{۱}{۱ - \langle a,b\rangle}\left(||b||_h\ a - (۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱ + ||b||_h})b\right). \end{aligned}$$



شکل ۷ زاویهٔ کاستی.



شکل ۸ اثر نگاشت همدیس φ^{-1}.

در نتیجه

$$d = \frac{a \oplus (-b)}{(-b) \oplus a} = \frac{-||a||_h\ b + (۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱+||a||_h})a}{-(۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱+||b||_h})b + ||b||_h\ a}.$$

فرض کنیم φ نگاشت همدیسی با ضابطهٔ

$$z \mapsto \frac{-||a||_h\ + (۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱+||a||_h})z}{-(۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱+||b||_h}) + ||b||_h\ z}$$

باشد. در این صورت، $d = \varphi(\frac{a}{b})$ و $\varphi^{-۱}$ نگاشت همدیسی با ضابطهٔ

$$z \mapsto \frac{-||a||_h\ + (۱ - \frac{<a,b>}{۱+||b||_h})z}{-(۱ - \frac{<a,b>}{۱+||a||_h}) + ||b||_h\ z}$$

خواهد بود. بنابراین

$$\varphi^{-1}(d)=\frac{a}{b},\quad \varphi^{-1}(-1)=\frac{1+\|a\|_h}{1+\|b\|_h}=:u,\quad \varphi^{-1}(\infty)=\frac{1+\|b\|_h-\langle a,b\rangle}{\|b\|_h(1+\|b\|_h)}=:v$$

و لذا φ^{-1} محور x را بر خودش می‌نگارد (شکل ۸). علاوه بر این، فرض کنیم $O=(p,q)$ مرکز دایرهٔ $\varphi^{-1}(\mathbf{S})$ باشد ($\mathbf{S}:=\{z\in\mathbf{C}:|z|=1\}$). چون $\|a\oplus(-b)\|_h<1$، از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که $\|a\|_h\,\|b\|_h<1-\langle a,b\rangle$ و این معادل است با $u<v$. پس

$$p=\frac{u+v}{2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\|b\|_h+\|a\|_h\,\|b\|_h+1+\|b\|_h-\langle a,b\rangle}{\|b\|_h(1+\|b\|_h)}\Big).$$

اگر قرار دهیم $b^{\perp}:=ib$، $r:=\frac{\langle a,b\rangle}{|b|^2}$ و $s:=\frac{\langle a,b^{\perp}\rangle}{|b|^2}$، آن‌گاه $\frac{a}{b}=r+si$. چون مرکز دایرهٔ $\varphi^{-1}(\mathbf{S})$ عمودمنصف پاره‌خط (u,v) است، پس $(p-r)^2+(q-s)^2=(m-u)^2+q^2$. از این‌رو

$$q=\frac{1}{2s}\Big(\frac{|a|^2}{|b|^2}+uv-rv-ru\Big).$$

در نتیجه $\tan\frac{\delta}{2}=|\frac{p-u}{q}|$ یا به‌طور معادل

$$\tan\frac{\delta}{2}=\Big|\frac{-\langle a,b^{\perp}\rangle\big(\|a\|_h\,\|b\|_h-1+\langle a,b\rangle\big)}{\big(\|a\|_h\,\|b\|_h-1+\langle a,b\rangle\big)\big(\langle a,b\rangle-(1+\|a\|_h)(1+\|b\|_h)\big)}\Big|.$$

به این ترتیب اثبات کوتاه و ساده‌ای برای فرمول اونگار در [12] (قضیهٔ ۱۵) به‌دست می‌آید:

$$\tan\frac{\delta}{2}=\Big|\frac{\langle a,b^{\perp}\rangle}{(1+\|a\|_h)(1+\|b\|_h)-\langle a,b\rangle}\Big|. \tag{13}$$

به‌ویژه اگر $\triangle(a,b,O)$ قائم‌الزاویه باشد، این فرمول به‌صورت ساده‌تری قابل بیان است:

$$\tan\frac{\delta}{2}=\frac{|a|\,|b|}{(1+\|a\|_h)(1+\|b\|_h)}=|a'|\,|b'|. \tag{14}$$

اونگار به‌کمک نرم‌افزارهای ریاضی فرمول زیر را برای محاسبهٔ کاستی مثلث به‌دست آورده که با (۱۰) هم‌ارز است ([12]):

$$\tan\frac{\delta}{2}=\frac{\sqrt{1+2\gamma_a\gamma_b\gamma_c-\gamma_a^2-\gamma_b^2-\gamma_c^2}}{1+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c},\qquad \gamma_x:=\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}. \tag{15}$$

به‌کمک این فرمول نشان می‌دهد که در قرص به شعاع r، به‌عنوان مدل بلترامی ـ کلاین، اگر h_a را ارتفاع نظیر رأس a در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$\gamma_a a\gamma_{h_a}h_a=r^2(1+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)\tan\frac{\delta}{2}.$$

به این ترتیب، می‌توانیم مساحت مثلث هذلولوی $\triangle ABC$ با کاستی δ در دایرهٔ به شعاع r را برابر با $r^۲\delta$ تعریف کنیم. در حالت $r = ۱$ مساحت مثلث هذلولوی برابر با δ می‌شود و داریم

$$r^۲\delta = ۲r^۲ \tan^{-۱} \frac{\gamma_a a \gamma_{h_a} h_a}{r^۲(۱+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}.$$

وقتی r به بی‌نهایت میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{r\to\infty} r^۲\delta = \lim_{r\to\infty} ۲r^۲\left(\frac{\frac{\gamma_a a\gamma_{h_a} h_a}{r^۲(۱+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}}{\frac{\gamma_a a\gamma_{h_a} h_a}{r^۲(۱+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}}\right)\tan^{-۱}\left(\frac{\gamma_a a\gamma_{h_a} h_a}{r^۲(۱+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}\right) = \frac{۱}{۲} a h_a.$$

پس اگر $r \to \infty$؛ یعنی اگر صفحهٔ هذلولوی به صفحهٔ اقلیدسی تبدیل شود، آن‌گاه فرمول مساحت مثلث در هندسهٔ هذلولوی به فرمول آشنای مساحت مثلث اقلیدسی تبدیل می‌شود.

۴. ویژگی‌های کاستی مثلث در مدل بلترامی ـ کلاین

بر اساس یکی از ویژگی‌های بنیادی کاستی مثلث در مدل بلترامی ـ کلاین، مفهوم مساحت مثلث در این مدل تعریف می‌شود. این ویژگی در قضیهٔ زیر بیان شده است.

قضیه ۳. برای هر نقطهٔ $x \in (a,b)$ کاستی مثلث $\triangle(a,b,c)$ برابر مجموع کاستی‌های دو مثلث $\triangle(c,a,x)$ و $\triangle(c,b,x)$ است.

برای اثبات این قضیه ابتدا به بیان یک لم از [3] ((۱.۲) و (۴.۱)) می‌پردازیم.

لم ۴. فرض کنیم α یک حرکت و $\widetilde{x,y}$ بازتاب نقطه‌ای یکتایی باشد که x و y را به هم تصویر می‌کند. در این صورت، برای نقاط a,b,O داریم

۱− $\alpha \circ \widetilde{a,b} \circ \alpha^{-۱} = \widetilde{\alpha(a),\alpha(b)}$.

۲− $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}(b)}$.

۳− $\widetilde{O,\ominus b} = \widetilde{O} \circ \widetilde{O,b} \circ \widetilde{O}$.

۴− $\widetilde{O,a} \circ \widetilde{o,a\ominus b} \circ \widetilde{O,a} = \widetilde{a,b}$.

۵− $\delta_{a,b} = \widetilde{O,a\oplus b} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,b}$.

اثبات. ۱) نقطهٔ m وسط پاره‌خط (a,b) تنها نقطهٔ ثابت بازتاب نقطه‌ای $\widetilde{a,b}$ است. پس

$$\alpha \circ \widetilde{a,b} \circ \alpha^{-۱}(x) = x \iff \widetilde{a,b}\,(\alpha^{-۱}(x)) = \alpha^{-۱}(x) \iff \alpha^{-۱}(x) = m \iff x = \alpha(m)$$

به این ترتیب تنها نقطهٔ ثابت $\alpha \circ \widetilde{a,b} \circ \alpha^{-۱}$ که یک حرکت مرتبهٔ ۲ است، نقطهٔ $\alpha(m)$ است. از سوی دیگر، چون $\alpha \circ \widetilde{a,b} \circ \alpha^{-۱}(\alpha(a)) = \alpha(b)$، پس $\alpha \circ \widetilde{a,b} \circ \alpha^{-۱} = \widetilde{\alpha(a),\alpha(b)}$.

۲) شبیه قسمت (۱) است.

۳) برای $\alpha = \widetilde{O}$ از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.
۴) برای $\alpha = \widetilde{O,a}$ از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.
۵) بنابر تعریف دوران توماس (نگاشت چرخش) $\delta_{a,b}$، داریم

$$\delta_{a,b} = ((a \oplus b)^{+})^{-1} \circ a^{+} \circ b^{+} = \widetilde{O} \circ \widetilde{O,a \oplus b} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,b} \circ \widetilde{O}.$$

همچنین

$$O = \delta_{a,b}(O) = \delta_{a,b}(x \oplus (-x)) = \delta_{a,b}(x) \oplus \delta_{a,b}(-x)$$

و در نتیجه $-\delta_{a,b}(x) = \delta_{a,b}(-x)$، یعنی $\widetilde{O} \circ \delta_{a,b} \circ \widetilde{O} = \delta_{a,b}$. به این ترتیب

$$\delta_{a,b} = \widetilde{O,a \oplus b} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,b}\ . \qquad (۱۶)$$

اکنون به اثبات ویژگی مهم کاستی می‌پردازیم. با توجه به آنچه در مورد رابطهٔ کاستی مثلث با دوران توماس در قضیهٔ ۲ گفته شد، قضیهٔ ۳ معادل قضیهٔ زیر است.

قضیه ۵. اگر $a, b, x \in \mathbf{D}$ سه نقطهٔ هم‌خط باشند، آن‌گاه

$$\delta_{a,-b} = \delta_{a,-x} \circ \delta_{x,-b}. \qquad (۱۷)$$

اثبات. بنابر رابطهٔ (۱۳)، تساوی (۱۴) معادل است با

$$\widetilde{O,a \ominus b} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus b} = \widetilde{O,a \ominus x} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus x} \circ \widetilde{O,x \ominus b} \circ \widetilde{O,x} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus b}.$$

این رابطه با حذف عبارت‌های یکسان، به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\widetilde{O,a \ominus b} \circ \widetilde{O,a} = \widetilde{O,a \ominus x} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus x} \circ \widetilde{O,x \ominus b} \circ \widetilde{O,x}\ .$$

با ترکیب دو طرف این معادله با $\widetilde{O,a}$ از چپ، تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\widetilde{O,a} \circ \widetilde{O,a \ominus b} \circ \widetilde{O,a} = (\widetilde{O,a} \circ \widetilde{O,a \ominus x} \circ \widetilde{O,a}) \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus x} \circ \widetilde{O,x \ominus b} \circ \widetilde{O,x}\ .$$

بنابر لم ۴، تساوی بالا به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\widetilde{a,b} = \widetilde{a,x} \circ (\widetilde{O,x} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,x}) \circ (\widetilde{O,x} \circ \widetilde{O,x \ominus b} \circ \widetilde{O,x}) = \widetilde{x,a} \circ \widetilde{x} \circ \widetilde{b,x}\ .$$

به عبارت دیگر، باید ثابت کنیم $\widetilde{x,a} \circ \widetilde{a,b} \circ \widetilde{b,x} = \widetilde{x}$. اما این رابطه درست است، زیرا a، b و x هم‌خط هستند، $\widetilde{x,a} \circ \widetilde{a,b} \circ \widetilde{b,x}\,(x) = x$ و نقطهٔ ثابت یک بازتاب نقطه‌ای یکتا است. ■

۵. مساحت و محیط دایره در مدل بلترامی ـ کلاین

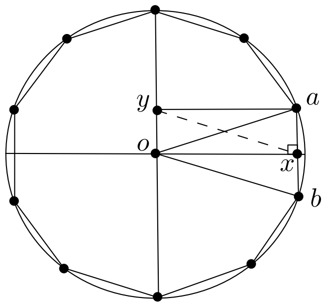
در این بخش، بر اساس فرمول جمع نسبیتی، به بررسی مساحت و محیط دایره در مدل بلترامی ـ کلاین می‌پردازیم. شبیه به روش معمول برای تعریف مساحت و محیط دایره در صفحهٔ

اقلیدسی، در اینجا نیز مساحت و محیط دایره را حد مساحت و محیط یک n ـ ضلعی منتظم P_n وقتی $n \to \infty$ تعریف می‌کنیم که P_n در این دایره محاط شده است.

بدون کم شدن از کلیت مسأله، فرض می‌کنیم C دایره‌ای به شعاع $۱ > r > ۰$ و مرکز مبدأ مختصات، S_r مساحت و C_r محیط آن باشند. همچنین فرض کنیم a و b دو نقطهٔ مجاور در P_n و x نقطهٔ وسط پاره‌خط (a,b) باشد (شکل ۹). در این صورت، مثلث $\triangle(a,O,x)$ یک مثلث قائم‌الزاویه در رأس x و مساحت P_n برابر با جمع مساحت‌های $۲n$ مثلث قائم‌الزاویهٔ همنهشت است. در این مثلث داریم $|x| = r\cos\frac{\pi}{n}$. فرض کنیم $y := \tilde{O}\circ\widetilde{x}'(a)$. بنا بر تعریف، $a = x \oplus y$ و $\triangle(a,x,O) \equiv \triangle(y,O,x)$. پس بنابر قسمت (۳) قضیهٔ ۱، $\| a \|_h = \| x \|_h \| y \|_h$ و در نتیجه

$$\sqrt{۱-r^۲} = \sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}\ \ \sqrt{۱-|y|^۲}.$$

بنابراین $|y| = \dfrac{r\sin(\pi/n)}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}$..



شکل ۹ مساحت و محیط دایره به‌عنوان حد مساحت و محیط یک n ـ ضلعی منتظم P_n.

فرض کنیم δ کاستی $\triangle(a,O,x) \equiv \triangle(y,O,x)$ باشد. در این صورت، بنابر معادلهٔ (۱۱) داریم

$$\frac{\delta}{۲} = \tan^{-۱}(|x'||y'|)$$

پس مساحت P_n به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
S_n &= ۴n\tan^{-۱}(|x'||y'|)\\
&= ۴n\tan^{-۱}\left(\left|\frac{x}{۱+\| x \|_h}\right|\left|\frac{y}{۱+\| y \|_h}\right|\right)\\
&= ۴n\tan^{-۱}\left(\frac{r\cos(\pi/n)}{۱+\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}\ \frac{r\sin(\pi/n)/\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}{۱+\sqrt{۱-(\frac{r\sin(\pi/n)}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}})^۲}}\right)
\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} S_n &= ۴n\tan^{-۱}\frac{۱}{۴n}\Big[\Big(\frac{r\cos(\pi/n)}{۱+\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}\ \ \frac{۴nr\sin(\pi/n)}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}+\sqrt{۱-r^۲}}\Big)\Big] \\ &= ۴n\tan^{-۱}\frac{۱}{۴n}\Big[\Big(\frac{r\cos(\pi/n)}{۱+\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}\ \ \frac{۴\pi r\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}+\sqrt{۱-r^۲}}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

اکنون اگر $n\to\infty$، آن‌گاه مساحت دایرهٔ C در مدل بلترامی ـ کلاین به‌دست می‌آید:

$$S_n \to \frac{۲\pi r^۲}{۱-r^۲+\sqrt{۱-r^۲}} := S_r.$$

برای سادگی قرار می‌دهیم $\gamma_r = \frac{۱}{\sqrt{۱-r^۲}}$. در این صورت

$$S_r = \pi r^۲\,\frac{۲\gamma_r^۲}{۱+\gamma_r}.$$

به همین ترتیب محیط P_n عبارت است از

$$C_n = ۲n\,|y| = ۲n\frac{r\sin(\pi/n)}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}.$$

در این حالت نیز اگر $n\to\infty$، محیط دایرهٔ C در مدل بلترامی ـ کلاین را خواهیم یافت:

$$C_n \to \frac{۲\pi r}{\sqrt{۱-r^۲}} := C_r.$$

به این ترتیب $C_r = ۲\pi r\gamma_r$.

مشاهده می‌شود که اگر $r\to ۰$، آن‌گاه $\gamma_r \to ۱$ و فرمول‌های مساحت و محیط برای دایره‌های با شعاع کوچک به همان فرمول‌های شناخته شدهٔ مساحت و محیط دایره در هندسهٔ اقلیدسی نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر، در جهان هذلولوی برای دایره‌های کوچک می‌توان از فرمول‌های مساحت و محیط در هندسهٔ اقلیدسی استفاده کرد. پیش از این نیز دیدیم که تعریف مساحت مثلث به‌کمک کاستی آن با این نکتهٔ مهم سازگار است که مساحت مثلث در هندسهٔ اقلیدسی حد مساحت آن در مدل بلترامی ـ کلاین به‌ازای دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت بزرگ است.

مراجع

[1] Karzel H., Sörensen K., Windelberg D., *Einführung in die Geometrie*, Vandenhoeck, Göttingen, 1973.

[2] Karzel H., "Recent developments on absolute geometries and algebraization by K-loops", *Discrete Math.*, **208/209**(1999), 387-409.

[3] KARZEL H. AND MARCHI, M., "Relation between the K-loop and the defect of an absolute plane", *Results Math.*, **47**(2005), 305-326.

[4] LENZ H., *Nichteuklidische Geometrie* , B.I Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1967.

[5] TAHERIAN S. GH., "On algebraic structures related to Beltrami-Klein model of hyperbolic geometry", *Results Math.*, **57**(2010), 205-219.

[6] ROSTAMZADEH M. AND TAHERIAN S. GH., "Defect and Area in Beltrami-Klein Model of Hyperbolic Geometry", *Results Math.*, **63**(2013), 229-239.

[7] THOMAS H. L., "The motion of the spinning electron", *Nature* (1926), 117-514.

[8] UNGAR A. A., "Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group", *Found. Phys. Lett.*, **1**(1988), 57-89.

[9] UNGAR A. A., "The relativistic noncommutative nonassociative group of velocities and the Thomas rotation", *Resultate Math.*, **16**(1989), 168-179.

[10] UNGAR A. A., "Thomas precession and its associated grouplike structure", *Amer. J. Phys.*, **59**(1991), 824-834.

[11] UNGAR A. A., *Beyond the Einstein addition law and its gyroscopic Thomas Precession.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2001.

[12] UNGAR A. A., "Einsteins velocity addition law and its hyperbolic geometry", *Comput. Math. Appl.*, **53**(2007), 1228-1250.

[۱۳] سید قهرمان طاهریان، «ساختار جبری جمع در نظریهٔ نسبیت اینشتین»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۰، شماره پیاپی ۴۸، پاییز ۹۰، صص. ۲۲—۱.

سید قهرمان طاهریان
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
taherian@cc.iut.ac.ir