

انتگرال: از ارشمیدس تا لبگ (قسمت دوم)

سعید مقصودی

چکیده

در این مقاله، شرحی تاریخی - توصیفی از شکل‌گیری و تکامل مفهوم انتگرال از ابتدا تا زمان لبگ ارائه می‌کنیم. همچنین با تمرکز بر روی برخی جنبه‌های خاص نظریه‌های انتگرال ریمان و لبگ و با ارائه مثال‌هایی، به برخی کاستی‌های این دو نظریه انتگرال‌گیری اشاره خواهیم کرد.

۶. به‌سوی چارچوبی نظریه - اندازه‌ای برای انتگرال ریمان

اشاره کردیم که هانکل، یکی از شاگردان ریمان، در سال ۱۸۷۰ به دنبال شرایط لازم و کافی بود که انتگرال‌پذیری تابع مثال ریمان را مستقیماً بررسی کند. در این راستا، او مجموعه‌ی نقاطی را که جهش‌های تابع در آن‌ها بزرگتر از عدد مثبت δ است، S_δ ، مورد مطالعه قرار داد. هانکل می‌پنداشت ثابت کرده است که تابع کراندار f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\delta > 0$ ، S_δ هیچ‌جا چگال باشد. لذا این قضیه، حدس دیریکله را تصدیق می‌کرد بدین مضمون که اگر مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی یک تابع کراندار، هیچ‌جا چگال باشد، آن‌گاه تابع انتگرال‌پذیر است. اما قضیه‌ی هانکل به‌طوریک طرفه برقرار است، یعنی اگر f انتگرال‌پذیر باشد، برای هر $\delta > 0$ ، $c_e(S_\delta) = 0$ و لذا برای هر $\delta > 0$ ، S_δ هیچ‌جا چگال است (در اینجا c_e محتوای بیرونی است که بعداً تعریف می‌کنیم). عکس این مطلب برقرار نیست. در بررسی جهت عکس، وی نشان داد که هر مجموعه‌ی هیچ‌جا چگال را می‌توان در تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک قرار داد و می‌پنداشت یک معیار به اصطلاح امروزی ما، توپولوژیک، برای انتگرال‌پذیری برحسب S_δ به‌دست آورده است و لذا دیگر نیازی به پروراندن مشخصه‌سازی نظریه‌ی اندازه‌ای نیست. اما اثباتش درست نبود. در واقع، مشکل اینجا بود که تفاوت پوچ بودن توپولوژیک و نظریه‌ی اندازه‌ای روشن نشده بود، زیرا در ۱۸۷۰ هنوز ابزارهای کنونی نظریه‌ی مجموعه‌ها ابداع نشده بود و برهان‌هایی که به مجموعه‌های

بی‌پایان از نقاط مربوط می‌شد اغلب بسیار خام، ابتدایی و غیردقیق بودند ([9]).

مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}$ را اندازه (محتوا) - صفر می‌نامیم اگر آن را بتوان با تعداد شمارا (متناهی) از بازه‌ها با مجموع طول به دلخواه کوچک پوشاند. هانکل فکر می‌کرد مجموعه‌های به لحاظ توپولوژیکی کوچک (هیچ‌جا چگال) به مفهوم نظریه اندازه‌ای نیز کوچک (اندازه - صفر) هستند و به عکس. اما این طور نیست، زیرا بعداً مجموعه‌هایی کشف شدند که هیچ‌جا چگال ولی با اندازه مثبت هستند.

ورود گئورگ کانتور (۱۹۱۸ - ۱۸۴۵) به صحنه با تحقیقاتش در نظریه مجموعه‌ها که ریشه در مطالعات مربوط به سری‌های فوریه داشتند، به سردرگمی مذکور افزود. کانتور در سال ۱۸۶۷ از رساله دکتری خود در نظریه اعداد دفاع کرد. پس از دریافت مدرک استادی، به آنالیز روی آورد و به دانشگاه هاله که ادوارد هاینه در آنجا بود و روی سری‌های مثلثاتی کار می‌کرد، رفت. هاینه استعداد فوق‌العاده کانتور را تشخیص داد و به وی پیشنهاد کرد روی یکی از مسائل مهم آنالیز قرن نوزدهم کار کند. هاینه خود مشغول چنین کاری بود، یعنی کار روی مسأله یکتایی ضرایب سری‌های فوریه. کانتور یکی از قضایای هاینه در این باره را با افزودن شرطی برحسب نقطه انباشتگی یک مجموعه بی‌پایان، گسترش داد. در کار بعدی که در سال ۱۸۷۲ در این باره منتشر ساخت، یک بخش مقدماتی به آن مبحث افزود که به نوشته خودش «در اغلب وضعیت‌هایی که یک تعداد متناهی یا نامتناهی از کمیت‌های عددی داده شده است، پیش می‌آید». مفهوم‌های نقطه حدی و مجموعه مشتق در بحث او اهمیت اساسی دارند. گرچه مفهوم نقطه حدی یک مجموعه را اولین بار کانتور در سال ۱۸۷۲ منتشر کرد و برای آن، واژه «Grenzpunkt» را به کار برد، و ایرشتراس آن را ابداع کرده بود. این مفهوم در بیان او از قضیه بولتسانو - ایرشتراس به کار گرفته شده است. بد نیست توجه کنیم که قضیه مذکور در هیچ نوشته‌ای از بولتسانو ظاهر نشده است. آنچه در کارهای بولتسانو دیده می‌شود، روش نصف کردن بازه‌ها است که در اثبات ایرشتراس از این قضیه، به کار رفته است. نقطه حدی در ایتالیا نیز با انتشار کتاب اولیسه دینی در سال ۱۸۷۸ رواج یافت. دینی در آن کتاب، صورت دقیق‌تری از قضیه بولتسانو - ایرشتراس را بیان و اثبات کرد. همچنین برای اولین بار نشان داد که هر مجموعه نوع اول، محتوای صفر دارد.

کانتور مجموعه P را از نوع ν نامگذاری کرد اگر مجموعه مشتق $(\nu + 1)$ ام آن، $P^{(\nu+1)}$ تهی باشد. سپس برحسب این مفاهیم، قضیه‌ای درباره منحصربه‌فرد بودن ضرایب سری‌های فوریه عرضه کرد. کانتور مجموعه E را که $E^{(n)} = \{0\}$ ، به ازای یک n ، مجموعه‌ای از نوع اول نامید. او دریافت که برخی خواص مجموعه‌های متناهی به استقرا، برای مجموعه‌های نوع اول نیز برقرار است. به سادگی دیده می‌شود مجموعه‌های نوع اول هیچ‌جا چگال هستند و با تعداد متناهی بازه با مجموع طول به دلخواه کوچک پوشیده می‌شوند. بنابراین برای این دسته از مجموعه‌ها، دو مفهوم پوچی توپولوژیکی و نظریه اندازه‌ای، یکسان است. بسیاری از ریاضیدانان می‌پنداشتند مجموعه‌های نوع اول، تنها مجموعه‌های هیچ‌جا چگال هستند. لذا مجموعه هیچ‌جا چگال باید به لحاظ نظریه اندازه

نیز یوچ باشند. به نظر می‌رسد اولین مثال نقض را هنری جی. استفان اسمیت در سال ۱۸۷۵ عرضه کرده است. مثال‌های دیگری نیز ساخته شده‌اند که همگی از یک ساختار کلی پیروی می‌کنند. اسمیت به تحلیل برهان هانکل می‌پردازد و اشاره می‌کند که برهان فقط برای مجموعه‌های متناهی، پذیرفتنی است. نه اسمیت و نه معاصرانش اهمیت مثال را درک نکردند. اما در آلمان مثال ولترا و اسمیت هر دو شناخته شده بودند و در ابتدای قرن هجدهم پیشرفت‌هایی در شرف وقوع بود.

علاوه بر پال دوبوا - ریموند که در سال‌های ۱۸۸۰ و ۱۸۸۲ اهمیت مثال‌ها را متذکر شده بود، باید به نقش آکسل هارناک (۱۸۰۵ - ۱۸۸۸) نیز اشاره کنیم. هارناک در ابتدا به مسأله سری‌های مثلثاتی و نمایش‌پذیری توابع دلخواه علاقه‌مند بود و در یکی از کارهایش در سال ۱۸۸۰ تحت تأثیر تأکید وایرشراس بر مسأله همگرایی یکنواخت، به موضوع نمایش‌پذیری توابع می‌پردازد و به اهمیت مجموعه نفاظی که با تعداد متناهی بازه با مجموع طول به دلخواه کوچک پوشیده می‌شوند، اشاره می‌کند. پرسش اصلی هارناک این بود که آیا متمم اجتماع شمارا از بازه‌ها برابر اجتماع شمارایی از بازه‌هاست؟ پاسخ او مثبت بود که البته اشتباه است.

در کار هارناک نیز در ابتدا قدری سردرگمی رایج درباره این مفاهیم را می‌بینیم. لیکن او برای مشکلات فائق آمد به طوری که در کتاب درسی که درباره ریاضیات می‌نویسد شاهد تعریف دقیق مفاهیم هستیم. در آنجا به مجموعه ناپیوستگی‌های توابع در مبحث انتگرال می‌پردازد و دو دسته مجموعه را در این باره از هم تمیز می‌دهد. اما باید مطلب دیگری درباره هارناک اضافه کنیم و آن این که در مقاله‌ای در سال ۱۸۸۵ اشاره می‌کند که در تعریف، به اصطلاح امروزی، مجموعه با محتوای صفر (یا مجموعه گسسته به اصطلاح هارناک) محدودیت تعداد متناهی بازه وجود دارد و برای اجتناب از سوء تفاهم باید گفت که هر مجموعه شمارا دارای این خاصیت است که می‌توان آن را با بازه‌هایی که مجموع طول آن‌ها به دلخواه کوچک است پوشاند. او مجموعه اعداد گویا در بازه $[0, 1]$ را مثال می‌زند که با بازه‌های مجزا از هم با طول ϵ_i ، $i \in \mathbb{N}$ ، پوشیده شود که $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i = \delta$ و $\delta > 0$ دلخواه است. لذا اگر خود را به تعداد متناهی بازه مقید نکنیم، مجموعه‌های به لحاظ توپولوژیکی بزرگ (مثل مجموعه‌های چگال) ممکن است به لحاظ نظریه اندازه‌ای کوچک باشند. برای کانتور هم عجیب بود که با محتوای بیرونی که او معرفی کرده بود، محتوای مجموعه اعداد گویا در بازه $[0, 1]$ برابر ۱ می‌شد و نه صفر؛ در حالی که همین مجموعه در مطالعاتش درباره مجموعه‌های شمارا قابل صرف نظر کردن بود. بنابراین حذف محدودیت تعداد متناهی بازه به نتایج عجیبی می‌انجامید. سپس این پرسش مطرح شد که اندازه مجموعه شمارا چیست؟ کانتور مسأله را در حالت n - بعدی نیز بررسی کرد، اما از طرف جامعه ریاضی چندان اقبالی نیافت.

کشف مجموعه‌ای با بزرگی صفر، منجر به مفهوم اندازه یک مجموعه شد. اندازه را با پوشاندن مجموعه‌ها به وسیله مجموعه‌های مقدماتی که طول، مساحت، ... آن‌ها شناخته شده بود و در دسترس بودند تعریف کردند. اما اولین کسی که به طور صریح تعریفی از محتوای بیرونی ارائه کرد، اوتو شتولتس (۱۸۴۲ - ۱۹۰۵) است. او در ضمن کار روی مسأله تعریف طول خم، متوجه شد که

حجم و مساحت باید برحسب انتگرال تعریف شوند. مستقل از او، کانتور نیز در سال ۱۸۸۳ برای محتوا، تعریفی بر اساس انتگرال چندگانه ارائه کرد. کمی بعد نیز هارناک در سال ۱۸۸۴ تعریف معادلی آورد. ولی نظریه انتگرال چندگانه تا قبل از ژردان، به هیچ وجه دقت منطقی نداشت. واژه محتوا را کانتور به کار برد. تمایز بین محتوای درونی و بیرونی را پئانو در ۱۸۸۷ بیان کرد و با انتشار کتاب دوره‌ای در آنالیز ژردان این مفاهیم رواج عام یافتند. به این ترتیب، با کارهای هانکل، کانتور و دیگران در مشخص کردن ارتباط خواص مجموعه‌های نقاط و انتگرال‌پذیری توابع، چهارده سال بعد از مقاله ریمان، عناصر نظریه اندازه‌ای مخفی در محک انتگرال‌پذیری ریمان، مفهوم‌سازی شدند.

جوزیه پئانو (۱۸۵۸ – ۱۹۳۲) که در دانشگاه تورین تحصیل و تدریس کرده بود، در سال ۱۸۸۳ انتگرال بالایی و پایینی داربو را که ولترا ابداع کرده بود، به منظور ارائه برهان‌های ساده‌تر برای برخی قضایای ریمان به کار گرفت. وی جزء اولین کسانی بود که در مقاله‌ای در سال ۱۸۸۳، تعریف دقیقی از درون و مرز یک مجموعه عرضه کرد. همچنین از تعریف انتگرال بر اساس مفهوم مساحت ناخرسند بود، زیرا تعریف مساحت نیز از دقت کافی برخوردار نبود. به همین دلیل، در سال ۱۸۸۳ میلادی سعی کرد تعریفی برای مساحت ناحیه‌های ساده ارائه دهد. روش او مبتنی بر محاط و محیط کردن چندضلعی‌ها و محاسبه سوپریمم و اینفیمم مساحت‌های به دست آمده بود. وی تعریف اندازه برای مجموعه‌های دوبعدی و سه‌بعدی را جداگانه بررسی کرد. پئانو برای یک مجموعه دوبعدی A ، مساحت درونی را برابر سوپریمم مساحت چندضلعی‌هایی که A را در بر دارند و مساحت بیرونی را برابر اینفیمم مساحت چندضلعی‌هایی که در A هستند تعریف می‌کند. او مساحت را مقدار مشترک این دو (در صورت وجود) در نظر می‌گیرد. همچنین در سال ۱۸۸۷، به ارتباط این تعریف و تعریف انتگرال می‌پردازد. در واقع، ثابت می‌کند انتگرال پایینی برابر مساحت درونی و انتگرال بالایی برابر مساحت بیرونی است. بنابراین تابع f انتگرال‌پذیر است اگر ناحیه محصور به نمودار f و محور حقیقی، اندازه‌پذیر باشد؛ به عبارت دیگر، دارای مساحت باشد. به بیانی دیگر، تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است اگر و تنها اگر مجموعه $E(f, [a, b]) = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y < f(x)\}$ اندازه‌پذیر به مفهوم پئانو – ژردان باشد و به علاوه، $\int_a^b f(x) dx = c(E(f^+, [a, b])) - c(E(f^-, [a, b]))$.

خوب است اشاره کنیم که نقطه درونی که کانتور تعریف می‌کند، بسیار شبیه به نقطه درونی است که پئانو در کتابش با عنوان کاربردهای هندسی حسابان بی‌نهایت کوچک‌ها در ۱۸۸۷ تعریف کرده است. البته پئانو فراتر می‌رود و نقطه بیرونی را نیز تعریف می‌کند. ایده پئانو به راحتی می‌توانست به تعریف مجموعه باز منتهی شود ولی نشد. این کار را ژردان در سال ۱۸۹۲ انجام داد. پئانو می‌توانست مجموعه باز را مجموعه‌ای تعریف کند که با مجموعه نقاط درونی خودش برابر است. عجیب است که مفاهیم مشابهی را دکیند مدت‌ها پیش در درس‌گفتارهای منتشر نشده‌اش به سال ۱۸۷۹ بیان کرده بود. این دست‌نوشته‌ها بعداً در ۱۹۳۱ به چاپ رسید. در زمان پئانو تعمیم این مفاهیم و گسترش آن‌ها در دستور کار فعالیت‌های ریاضیدانان نبود و بنابراین نتایج درخوری هم از این مفاهیم به دست نیامد؛ همان‌طور که گُشی نیز تعریف انتگرال را برای توابع پیوسته بیان کرد، زیرا

در زمان او نیازی به انتگرال گیری از توابع ناپیوسته احساس نمی شد.

مسئله دیگری که نقش مهمی در توسعه نظریه انتگرال داشت، انتگرال گیری از توابع چندمتغیره بود. راه حل طبیعی، جایگزین کردن افراز بازها با افراز مستطیل ها و در نظر گرفتن مجموع هایی مشابه مجموع کُشی - ریمان بود. ولی کدام مستطیل ها را باید در مجموع لحاظ کرد؟ آن هایی که در ناحیه مربوطه قرار می گیرند یا با آن اشتراک دارند؟ دیدگاه عموم این بود که در هر دو روش، مساحت کلی مرز ناحیه، با ظریف تر کردن افرازها به صفر میل می کند و هر دو روش یک عدد به دست می دهند. اما وقتی پتانو خمی در مربع واحد کشف کرد که تمام مربع را می پوشاند، فرض مذکور مورد پرسش اساسی واقع شد. سؤال این بود که چه شرایطی روی ناحیه باید اعمال شود تا یک عدد منحصر به فرد برای انتگرال به دست آید؟ اولین کسی که در صدد پاسخ به این مسائل برآمد، کامیل ژردان (۱۸۳۸ - ۱۹۲۲)، ریاضیدان فرانسوی، بود که ۲ سال بعد از انتشار خم پتانو، رویکرد جدیدی را به انتگرال ارائه کرد. انگیزه او در این کار، تعریف انتگرال دوگانه بود. مفهوم اندازه پذیری هنگام تعمیم انتگرال دوگانه به مجموعه های دلخواه اهمیت می یابد. البته این اولین بار نبود که اندازه پذیری بررسی می شد. در خلال سال های ۱۸۵۰ تا ۱۸۹۲، کارهایی مربوط به انتگرال دوگانه انجام شده بود که در آنها، به مفهوم اندازه پذیری اشاره کرده بودند. ژردان در سال ۱۸۹۲ می نویسد: «گرچه نقش تابع f در انتگرال گیری کاملاً روشن است ولی به نظر می رسد اثر دامنه با همان دقت بررسی نشده است.» از این رو، ابتدا نظریه محتوای مجموعه ها در \mathbb{R}^n را بسط داد.

مسئله اندازه پذیری در قضیه فوبینی نیز مطرح می شود. کُشی در اوایل قرن ۱۹ اشاره می کند که قضیه جابه جایی انتگرال های مکرر برای توابع بی کران برقرار نیست و وقتی تومی در سال ۱۸۷۸ تابع کرانداری با این خاصیت پیدا کرد، این موضوع بیشتر مورد توجه قرار گرفت. مسائلی از این دست، نشان می دهند که اگرچه مفهوم انتگرال توابع یک متغیره دقت و کلیتی یافته بود ولی فاقد چنین کیفیتی در کار بست به توابع دو متغیره بود. به عبارت دیگر، دامنه انتگرال گیری به همان نسبت مفهوم تابع موشکافی نشده بود.

تا اینجا سه ضعف انتگرال ریمان مشخص شد:

- ۱- توابعی با مشتق کراندار وجود دارند که مشتق آنها انتگرال پذیر نیست. پس مشتق و انتگرال عمل های عکس یکدیگر نیستند؛
- ۲- انتگرال ریمان با فرآیندهای حدی در حالت کلی سازگاری ندارد؛
- ۳- برای انتگرال چندگانه راه حل رضایت بخشی وجود ندارد.

ژردان که از شیوه تعریف انتگرال ریمان برای توابع چندمتغیره خرسند نبود، بیشترین سهم را در دقیق ساختن و تعریف مجدد و اصولی انتگرال چندمتغیره دارد. روش کار چنین بود که ناحیه E در صفحه را چنان می پنداشتند که به یک خم بسته ساده محدود شده است. سپس با افراز ناحیه به مستطیل هایی با اضلاع موازی محورها، مجموع کُشی - ریمان را تشکیل می دادند. ژردان این روش

را در ویرایش اول کتابش در سال ۱۸۸۳ به کار برد. اما در ۱۸۹۰ پئانو با کشف خمی در صفحه که مربع واحد را پر می‌کرد، فرض پذیرفته شده دربارهٔ مرز یک ناحیه را مورد سؤال قرار داد. به نظر می‌رسد مثال پئانو باعث شد زُردان فرض مرسوم محدود بودن ناحیه به یک خم را کنار بگذارد. لذا در سال ۱۸۹۲ پیشنهاد کرد ناحیهٔ انتگرال‌گیری همچون مجموعه‌ای از نقاط همچون دیدگاه کانتور در نظر گرفته شود. به این ترتیب، فرض محدود بودن به یک خم با فرض اندازه‌پذیری جایگزین شد. او مرز ناحیه را مجموعهٔ نقاطی مانند p تعریف کرد که هر گوی حول p نقاطی از E و متمم آن را در بر داشته باشد و ثابت کرد E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر مرز E دارای محتوای بیرونی صفر باشد. بنابراین شرطی که خم مرزی ناحیه انتگرال‌گیری باید می‌داشت، اندازه‌پذیری بود. پس از این، زُردان انتگرال تابع دومتغیره را روی ناحیهٔ E تعریف می‌کند و سپس به توابع n متغیره تعمیم می‌دهد.

ویرایش دوم کتاب زُردان با عنوان دوره‌ای در آنالیز که در ۱۸۹۳ منتشر شد و در آن به‌طور جدی نظریهٔ مجموعه‌های کانتور در آنالیز به کار گرفته شده است، به سبب تأثیر زُردان در فضای ریاضیات فرانسه، باعث مقبولیت کاربرد نظریهٔ مجموعه‌ها در آنالیز ریاضی شد. چند سال بعد از انتشار کتاب مذکور، سه ریاضیدان فرانسوی تأثیرگذار در نظریهٔ انتگرال‌گیری، یعنی امیل بورل، رنه پر و هانری لِبگ به‌طور وسیعی از آن بهره بردند. لِبگ، به حق، زُردان را سنت‌گرای نوآور نامیده است. زُردان آنچه را از قبل بود با نوآوری خاص خود، روبکردی متمایز (نظریه - مجموعه‌ای) بخشید.

برای یک افزاز ناحیهٔ E توسط مستطیل‌هایی با قطر r ، S را اجتماع مستطیل‌هایی که تماماً در E قرار می‌گیرند و S' را اجتماع مستطیل‌هایی که مرز E را می‌پوشانند، در نظر بگیرید. زُردان در سال ۱۸۹۲ نشان داد که اگر افزاز ناحیه چنان تغییر کند که r به سمت صفر میل کند، مساحت S و $S \cup S'$ به اعداد ثابت A و a میل می‌کنند. اثبات او نه تنها از شهود هندسی سرچشمه می‌گیرد، بلکه بسیار دقیق نیز هست. اگر دو مقدار a و A مساوی باشند، مساحت مجموعهٔ S' که مرز را می‌پوشاند باید به سمت صفر میل کند. از اینجا تعریف اندازه‌پذیری و محتوا به دست می‌آید.

در واقع، با استفاده از نمادهای امروزی، اگر $E \subseteq [a, b]$ و $l(I)$ طول بازهٔ I را نشان دهد، محتوای بیرونی و درونی E به ترتیب، به صورت $c_e(E) = \inf_P \{ \sum l(I_k) : I_k \cap E \neq \emptyset \}$ و $c_i(E) = \sup_P \{ \sum l(I_k) : I_k \subseteq E \}$ تعریف می‌شوند که در اینجا، سوپریمم و اینفیمم روی همهٔ افزازهای P برای بازهٔ $[a, b]$ گرفته می‌شود. مجموعهٔ E زُردان - اندازه‌پذیر نامیده می‌شود اگر $c_i(E) = c_e(E)$ که در این حالت، محتوای آن را با $c(E)$ نشان می‌دهند.

حال اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار روی درون مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subseteq \mathbb{R}^2$ باشد، فرض کنید P افزاز E به تعداد متناهی مجموعهٔ اندازه‌پذیر است: $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$. برای $1 \leq k \leq n$ قرار دهید $m_k = \inf\{f(x) \mid x \in E_k\}$ و $M_k = \sup\{f(x) \mid x \in E_k\}$ و مجموع‌های بالایی و پایینی داربوی تعمیم‌یافته را به صورت $S(P) = \sum_{k=1}^n M_k c(E_k)$ و $s(P) = \sum_{k=1}^n m_k c(E_k)$ تعریف کنید. زُردان اشاره می‌کند که «داربو نشان داده است که اگر افزازها به گونه‌ای تغییر کنند که قطر اعضای آنها به سمت صفر میل کند، آن‌گاه S و s به حدود ثابتی میل می‌کنند». سپس اثبات

جدیدی برای این مطلب ارائه می‌کند و آن حدود را انتگرال‌های بالایی و پایینی و اگر این دو با هم برابر باشند تابع را انتگرال‌پذیر می‌نامد. با اثباتی اساساً مشابه با تومی، نشان می‌دهد که U (اینفیمم S ها) و L (سوپریمم S ها) به مقدار مشترکی میل می‌کنند، به شرطی که ابعاد E_i ها به صفر نزدیک شود. او انتگرال چندگانه f روی E را برابر با این مقدار مشترک تعریف می‌کند. اکنون ژردان قادر بود قضیه فوبینی را در کلی‌ترین حالت خود اثبات کند.

گرچه اثبات‌ها و مفاهیم فوق به نوعی، قبل از او نیز شناخته شده بودند، ژردان بی‌حاشی و بی‌چوب نظریه مجموعه‌ای کامل قرار داد و با تعریف اندازه‌پذیری، به این نظریه کلیت و شفافیت خاصی بخشید. اندازه‌پذیری و مفاهیم وابسته به آن، به دلیل ظرافتی که ژردان در ارائه آن‌ها به کار گرفت، بیش از پیش مورد قبول واقع شدند. توجه کنید که اندکی پس از انتشار کارهای ریمان، مشخصه‌سازی ریمان - انتگرال‌پذیری برحسب انتگرال بالایی و پایینی نیز عرضه شد ولی آنچه ژردان انجام داد، وارد کردن مفاهیم نظریه اندازه‌ای است؛ هرچند خودش آگاه نبود که راه را برای یک نظریه کلی‌تر باز کرده است.

مقاله سال ۱۸۹۲ ژردان نظریه ریمان را در بستر نظریه اندازه قرار داد و زمینه را برای نظریه جدید انتگرال مهیا کرد اما اندازه به مفهوم جدید آن، از جای دیگری سرچشمه گرفته است. آن سرچشمه، کارهای امیل بُرل در نظریه توابع بود. امیل بُرل ۲۲ ساله بود که مدیر بخش ریاضی در دانشگاه لیل شد. در سال ۱۹۰۹ استاد توابع مختلط در سوربن شد و در ۱۹۲۰ ریاست بخش آمار و فیزیک ریاضی آنجا را بر عهده گرفت. او در امور سیاسی نیز فعالیت داشت. مجامع و مؤسسات علمی بسیاری را تأسیس و مدیریت کرد. بُرل بی‌شک یکی از تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرن بیستم بود. بُرل به دنبال حل مسأله‌ای که ریمان مطرح کرده بود، به مجموعه‌های چگال که دارای اندازه صفر به مفهومی متفاوت از معنای رایج این اصطلاح، برخورد کرد. او دریافت که بحث‌های کانتور را می‌توان در یک مسأله از توابع مختلط به کار گرفت. مسأله از آنجا شروع شد که پوانکاره در سال ۱۸۸۳ بسط تحلیلی $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z - a_n)^{-1}$ را برای اعداد مختلط A_n, a_n که $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$ در نظر گرفت و نشان داد که اگر C خم ساده بسته در صفحه مختلط و $\{a_n\}$ زیرمجموعه‌ای چگال از C باشد، آن‌گاه $f(z)$ دو تابع تحلیلی متفاوت تعریف می‌کند؛ یکی داخل C و دیگری بیرون C .

بُرل در تز دکترایش در سال ۱۸۹۴، ایده کانتور را به کار برد و نشان داد که این دو تابع می‌توانند به یکدیگر مرتبط شوند و یک تابع از نوع ادامه تحلیلی تعمیم‌یافته به دست دهند. در این بین، به ماهیت مجموعه نقاط همگرایی برخی سری‌های حاصل در این مسأله برخورد کرد. لذا باید نوعی اندازه برای مجموعه‌های شمارا می‌یافت. مفاهیم محتوا و اندازه‌پذیری به مفهوم ژردان انتظارات وی را برآورده نمی‌کردند، زیرا ماهیت جمع‌پذیری متناهی داشتند و نه جمع‌پذیری شمارا. در کتابی که مجموعه درس‌های او در دانشسرای عالی معلمین در دوره ۱۸۹۶ - ۱۸۹۷ بود و به احتمال زیاد، لبگ که در آن زمان در آنجا دانشجو بود، در کلاس‌های وی حضور داشته است، تعریف جدیدی

برای اندازه‌پذیری مجموعه‌ها پیشنهاد می‌کند و بر مبنای فلسفه ریاضی‌اش تعریفی ساختنی عرضه می‌کند. او با سه فرض آغاز کرد:

- ۱- اندازه بازه‌های کراندار برابر طول آن‌ها است؛
- ۲- اندازه اجتماع شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر دوه‌دو مجزا برابر جمع اندازه‌هایشان است؛
- ۳- اگر S و R اندازه‌پذیر باشند و $R \subseteq S$ ، آن‌گاه $S \setminus R$ نیز اندازه‌پذیر است و اندازه آن برابر با تفاضل اندازه‌های S و R است.

اندازه بُرل بسیار به مفهوم اندازه امروزی نزدیک است، الا این که بُرل خود را به مجموعه‌هایی محدود ساخته بود که از طریق اجتماع شمارا و متمم‌گیری از بازه‌ها ساخته می‌شود. بُرل یک مجموعه را اندازه‌پذیر نامید اگر بتوان با حفظ اصول بالا، به آن اندازه نسبت داد. در این بررسی، به حالت خاصی از قضیه به اصطلاح ما، هاینه - بُرل می‌پردازد که بعداً یکی از مفیدترین ابزارها در اثبات قضایا در نظریه اندازه و انتگرال لبگ شد. کسی اهمیت کار بُرل را در اواخر قرن نوزدهم درک نکرد به جز یک ریاضیدان جوان که در زمان ارائه درس‌های بُرل، در دانشسرای عالی معلمین دانشجو بود و کار بُرل را به ثمر رساند: هانری لبگ.

در پایان این بخش، به مطلبی درباره نقطه حدی و مجموعه‌های باز که بی‌ربط به کارهای بُرل هم نیست اشاره می‌کنیم. در فرانسه، مفهوم نقطه حدی یک مجموعه را پوانکاره و ژولی تانری به کار بردند. اما از همه مهم‌تر ژردان بود که آن را به صورتی که ما امروز تعریف می‌کنیم، بیان کرد. اما ژردان مجموعه باز را به طور کاملاً طبیعی یعنی مجموعه‌ای که با مجموعه نقاط درونی خودش برابر باشد، تعریف نکرد. شاید نیازی به چنین مفهومی احساس نمی‌کرد. در عوض، به نقاط مرزی علاقه‌مند بود. اما جایی که اولین بار مجموعه باز به طور اساسی نیاز است، قضیه هاینه - بُرل یا در اصطلاح فرانسوی‌ها، بُرل - لبگ، است که مفهوم فشردگی در آن استفاده می‌شود. صورتی از این قضیه را بُرل در رساله دکتری خود بیان کرده است ولی اشاره‌ای به مجموعه باز نمی‌کند. بُرل بیان می‌کند که اگر روی خطی تعداد نامتناهی بازه جزئی چنان باشند که هر نقطه از خط در حداقل یکی از آن‌ها قرار گیرد، آن‌گاه می‌توان تعداد متناهی از همان بازه‌ها یافت که همان خاصیت را داشته باشند (یعنی هر نقطه از خط در یکی از آن‌ها باشد). سی سال طول کشید تا این صورت اولیه قضیه بُرل به شکل جدید قضیه هاینه - بورل تبدیل شود. اما اولین تعریف از مجموعه بُرل را چهار سال بعد از قضیه بُرل، رنه - لویی پر (۱۸۷۴ - ۱۹۳۲) در رساله دکتری خود عرضه کرد. او در بحث از توابع نیم‌پیوسته پایینی، دامنه باز در فضای n - بعدی را تعریف کرد. عبارت مجموعه باز را لبگ در رساله دکتری خود در سال ۱۹۰۲ به منظور تعریف اندازه لبگ به کار برده است. وی تحت تأثیر ژردان با استفاده از نقطه درونی و مرز مجموعه، مجموعه باز را تعریف کرد. تعریف مجموعه باز به کندی در جامعه ریاضی رواج یافت. برای مطالعه بحثی جالب و دقیق در این باره، به [12] مراجعه کنید.

۷. انتگرال لبگ

هانری لبگ بین سال‌های ۱۸۹۴ تا ۱۸۹۷ در دانشسرای عالی معلمین در پاریس، دانشجوی بود و به‌نظر می‌رسد در درس‌های بُرل شرکت می‌کرده است. او در زمانی تعلیم ریاضیات دید که کتاب ژردان و شیوه‌های نظریه مجموعه‌ای حاکم بودند. نتایجش تحقیقاتش را در سال‌های ۱۸۹۹ تا ۱۹۰۱ منتشر ساخت و رساله وی در ۱۹۰۲ رسماً پذیرفته شد. در مقاله‌اش به سال ۱۸۹۹ به مسأله مساحت می‌پردازد. در این مسأله، نسبت دادن یک عدد به نام مساحت به هر سطح محدود به یک خم ساده بسته مورد نظر است به طوری که دو سطح معادل دارای یک مساحت باشند و مساحت اجتماع باپایان و یا بی‌پایان از سطح که همپوشانی نکنند، برابر مجموع مساحت‌های آن‌ها باشد. لبگ دریافت که به اندازه‌ای نیاز دارد که مجموعه‌های اندازه‌پذیر ژردان و مجموعه‌های اندازه‌پذیر بُرل را در بر گیرد. بعد از شک و تردیدهایی، سرانجام مسأله مساحت را به‌عنوان موضوع رساله دکتری خود انتخاب کرد. رساله دکترایش با عنوان «انتگرال، طول، مساحت» در سال ۱۹۰۲ در مجله ایتالیایی Annali di Mathematica چاپ می‌شود. لبگ مسأله نسبت دادن عددی نامنفی به مجموعه کراندار $E \subseteq \mathbb{R}$ ، $m(E)$ را که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) مجموعه‌های هم‌نهشت، اندازه مساوی داشته باشند؛

(ب) اندازه اجتماع شمارا از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا، برابر مجموع اندازه‌های آن‌ها باشد؛

(ج) اندازه بازه $[0, 1]$ برابر یک باشد،

مطرح کرد. او برخلاف بُرل به دنبال وسیع‌ترین خانواده از زیرمجموعه‌های \mathbb{R} بود که اندازه‌ای با سه خاصیت بالا برایش وجود داشته باشد. به راحتی می‌توان دید که اگر $m(E)$ برای E قابل تعریف باشد، باید $m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$ که در آن، $\ell(I_i)$ طول بازه I_i و $\{I_i\}$ دنباله بازه‌هایی با درون مجزا هستند که E را می‌پوشانند. لبگ به منظور یافتن راهی برای گسترش مفهوم طول، راه کم و بیش طولانی زیر را برگزید.

فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}$. اندازه بیرونی E به صورت $m^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) : E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i\}$ تعریف می‌شود. اما m^* در شرط (ب) بالا صدق نمی‌کند. لبگ که خود را به بازه $[a, b]$ محدود کرده بود، اندازه درونی را برای $E \subseteq [a, b]$ به صورت $m_*(E) = b - a - m^*([a, b] \setminus E)$ تعریف می‌کند. اکنون به طور کاملاً طبیعی، مجموعه E را اندازه‌پذیر نامید اگر $m^*(E) = m_*(E)$. شرط لبگ به صورت $m^*([a, b]) = m^*(E) + m^*([a, b] \setminus E)$ نیز قابل بیان است. اندازه لبگ گسترش محتوای ژردان است. یعنی اگر مجموعه‌ای ژردان - اندازه‌پذیر باشد، لبگ - اندازه‌پذیر نیز هست و مقدار محتوای آن با اندازه لبگش برابر می‌شود. ولی متأسفانه، چنانچه بخواهیم زیرمجموعه‌های دلخواه اعداد حقیقی را در نظر بگیریم، مشخصه‌سازی بالا دیگر به کار نمی‌آید. کاراتئودوری اولین کسی است که بسیار زیبا و زیرکانه تعریف معادلی برای اندازه‌پذیری در حالت کلی ارائه داد. کنستانتین کاراتئودوری (۱۸۷۳ - ۱۹۵۰) که تباری یونانی داشت در بلژیک رشد و نمو یافت و در آنجا مهندسی خواند. او در خلال سال‌های ۱۸۹۷ تا ۱۹۰۰ در اوقات فراغت، کتاب ژردان

را مطالعه می‌کرد. سپس به دانشگاه برلین رفت و تحت نظر هرمان مینکوفسکی در ریاضیات دکتری گرفت. وی در ۱۹۱۴ تعریف جایگزینی برای اندازه‌پذیری معرفی کرد. منشأ این تعریف جایگزین، گسترشی از مفهوم اندازه زیر مجموعه‌های k -بعدی \mathbb{R}^n است که قبلاً ارائه کرده بود و در ۱۹۱۹، هاسدورف آن را برای بررسی ساختار مجموعه‌ها با بُعد غیر صحیح به کار برد. در واقع، $E \subseteq \mathbb{R}^n$ را اندازه‌پذیر می‌نامیم اگر $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$ برای هر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ خانواده مجموعه‌های اندازه‌پذیر را با \mathcal{M} نمایش می‌دهیم. تحدید m^* به m را اندازه لبگ می‌نامیم و با m نشان می‌دهیم. می‌توان مجموعه‌هایی ساخت که اندازه‌پذیر نیستند. در سال ۱۹۰۵ جوزپه ویتاللی (۱۸۷۵ - ۱۹۳۲)، ریاضیدان ایتالیایی، مثالی از یک زیرمجموعه اندازه‌ناپذیر \mathbb{R} منتشر کرد. وی از دانشسرای عالی معلمین در پیزا تحت نظر اولیسه دینی فارغ‌التحصیل شده بود. مسأله اندازه برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر به صورتی که اشاره کردیم حل می‌شود. اما باید توجه کرد که در حالت کلی، مسأله جواب ندارد. می‌توان به طریق مشابه، اندازه لبگ را برای زیرمجموعه‌های فضای n -بعدی \mathbb{R}^n تعریف کرد.

نظریه اندازه لبگ گرچه بسیار روشن‌تر از نظریه بُرل است، همان اندیشه‌ها را دنبال می‌کند. اما کار اساسی لبگ ارتباط دادن انتگرال با مفهوم اندازه است. با رابطه $\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-)$ که در آن، E^+ و E^- به ترتیب، مساحت‌های محدود به نمودار تابع f و محور x ‌ها از بالا و پایین است، شروع می‌کند. قبلاً به رابطه‌ای مشابه که پتانو به دست آورده بود، اشاره کردیم. لبگ سپس به ارائه تعریفی تحلیلی و نه هندسی اقدام می‌کند. تعریفی که مانند تعریف ریمان بر اساس مجموعه‌ها باشد. انتگرال ریمان مبتنی بر افراز دامنه و جمع کردن مساحت مستطیل‌های محیطی و محاطی در ناحیه E ، بناشده بر افراز مفروض است. ایده لبگ افراز بُرد تابع به جای افراز دامنه آن است. لبگ در سال ۱۹۰۴ کتابی با عنوان «درس‌هایی در باب انتگرال و جستجوی توابع اولیه» منتشر کرد که تسلط و آشنایی عمیق وی با مباحث انتگرال را به خوبی نشان می‌دهد. فصل آخر کتاب، به نظریه انتگرال اختصاص دارد. به تقلید از بُرل، آن فصل را با مسأله انتگرال‌گیری آغاز می‌کند: یافتن عددی است متناظر به تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ که در شرایط زیر صدق کند:

$$\text{الف) } \int_a^b f = \int_{a+h}^{b+h} f$$

$$\text{ب) } \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\text{پ) } \int_a^1 1 = 1$$

$$\text{ت) } \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0$$

$$\text{ث) } \int_a^b f \geq 0 \text{ اگر و تنها اگر } f \geq 0$$

$$\text{ج) اگر } (f_n) \text{ دنباله ای از توابع همگرا به } f \text{ باشد، آن گاه } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

به عبارت دیگر، او خواصی را که انتگرال باید داشته باشد معرفی و توصیف می‌کند. این چنین تعریفی از انتگرال را تعریف توصیفی می‌نامند. به راحتی می‌توان دید که از شرایط فوق نتیجه می‌شود که اگر تابعی ریمان - انتگرال‌پذیر باشد، باید مقدار انتگرال لبگ آن با مقدار انتگرال ریمانش برابر باشد.

اکنون فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کرندار و $\mathcal{P} = \{l_0, \dots, l_n\}$ افرازی از برد f است. چنانچه قرار دهیم $E_i = \{x \in [a, b] : l_{i-1} \leq f(x) < l_i\}$ و تابع ساده $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n l_i \chi_{E_i}(x)$ را در نظر بگیریم، داریم $\varphi \leq f$. بنابراین خاصیت خطی، $\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^n l_{i-1} \int_a^b \chi_{E_i}$. حال اگر \mathcal{P} افزاز دلخواهی باشد، $\{\mathcal{P}_n\}$ را دنباله‌ای از افزازهای بُرد می‌گیریم که $\mathcal{P}_{n-1} \subseteq \mathcal{P}_n$ و $\mu(\mathcal{P}_n) \leq 1/2 \mu(\mathcal{P}_{n-1})$ فرض می‌کنیم φ_n را تابع ساده نظیر افزاز \mathcal{P}_n باشد. واضح است $\varphi_n \rightarrow f$ و در نتیجه $\int_a^b \varphi_n \rightarrow \int_a^b f$. بنابراین محاسبه انتگرال تابع f به محاسبه انتگرال توابع ساده φ_n و آن هم در نهایت، به محاسبه انتگرال تابع مشخصه یک مجموعه منتهی می‌شود. به عبارت دیگر، همان‌طور که لبگ اشاره می‌کند، برای دانستن این‌که چگونه انتگرال تابعی محاسبه می‌شود، کافی است انتگرال تابعی که فقط مقدار صفر یا یک می‌گیرد را بدانیم. اکنون انتگرال تابع مشخصه یک بازه با طول آن برابر می‌شود. پس مسأله انتگرال‌گیری به مسأله گسترش مفهوم طول از بازه‌های \mathbb{R} به زیرمجموعه‌های دلخواه آن منجر می‌شود. به عبارت دیگر، به مسأله اندازه. برای مطالعه بحثی کامل و جالب از چگونگی شکل‌گیری انتگرال لبگ و مفاهیم وابسته، به [9] مراجعه کنید.

در اینجا لبگ به خوبی ضرورت تعریف‌هایی را که در رساله دکتری خود آورده بود، نشان می‌دهد. به راحتی دیده می‌شود اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $\int_a^b \chi_E = m(E)$ تعریف توصیفی لبگ از انتگرال به‌طور طبیعی منجر به تعریف اندازه برای مجموعه‌های \mathbb{R} شد. اکنون با داشتن مفهوم اندازه می‌توانیم مسأله انتگرال را حل کنیم.

گوییم تابع $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است اگر مجموعه $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد. اگر $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ تابعی ساده باشد که در آن، E_i ها اندازه‌پذیرند، تعریف می‌کنیم $\int \varphi = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i)$. چنانچه $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد، تعریف می‌کنیم $\int_E f = \sup\{\int_E \varphi : 0 \leq \varphi \leq f\}$ که در آن، φ ها توابع ساده هستند. از آنجا که برای هر تابع دلخواه $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ می‌توانیم بنویسیم $f = f^+ - f^-$ که f^+ ، f^- به ترتیب، قسمت مثبت و منفی f را نشان می‌دهند، می‌توانیم انتگرال f را به صورت $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$ (در صورت متناهی بودن حداقل یکی از انتگرال‌های طرف راست) تعریف کنیم. به راحتی می‌توان دید انتگرالی که بدین صورت به دست می‌آید، دارای خواص یکنوایی و خطی بودن است. لبگ همچنین قضیه اندازه‌پذیری حد نقطه‌ای دنباله توابع اندازه‌پذیر را بیان و اثبات می‌کند. با اثبات این قضیه که یک تابع کراندار، ریمان - انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموعه نقاط ناپوستگی آن اندازه - صفر باشد، نشان می‌دهد که حوزه توابع انتگرال‌پذیر نسبت به نظریه ریمان وسعت قابل ملاحظه‌ای یافته است.

نظریه جدید اندازه، در ابتدا خیلی به مذاق ریاضیدانان به‌ویژه ریاضیدانانی که جوانی‌شان در دهه‌های ۱۸۷۰ و ۱۸۸۰ گذشته بود خوش نیامد، زیرا آن‌ها نظریه ریمان را نظریه نهایی انتگرال‌گیری می‌پنداشتند. با این حال، گزاره زیر یکی از تفاوت‌های انتگرال لبگ را با انتگرال ریمان نشان می‌دهد. در واقع، توابع انتگرال‌پذیر لبگ برخلاف توابع ریمان - انتگرال‌پذیر، به‌طور مطلق

انتگرال پذیرند.

گزاره. فرض کنید $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه پذیر باشد. آن وقت f انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر $|f|$ انتگرال پذیر باشد.

برای مثال، تابع $f(x) = (\sin x)/x$ روی $[0, \infty)$ انتگرال پذیر به مفهوم لِبگ نیست؛ در حالی که روی این فاصله دارای انتگرال ریمان ناسره است.

بعد از انتشار کارهای لِبگ، ریاضیدانان دیگری به مطالعه آن‌ها پرداختند و اثبات‌های بهتری برای آن‌ها عرضه کردند. یکی از این افراد پیولوی (۱۸۷۵–۱۹۶۱) بود که در فهم بهتر ما از انتگرال لِبگ کمک فراوانی کرد. قضیه همگرایی یکنوا را وی در سال ۱۹۰۶ اثبات کرد. این قضیه راه بسیار مؤثری برای اثبات قضیه همگرایی تسلطی لِبگ در اختیار می‌گذارد. همچنین باید به پی‌یر فاتو (۱۸۷۸–۱۹۲۹)، ریاضیدان فرانسوی، اشاره کنیم که لم فاتو اکنون در هر کتاب آنالیز حقیقی به چشم می‌خورد. او این لم را اولین بار در رساله دکتری خودش اثبات کرد. اکثر کارهای ریاضی وی صرف اثبات وجود جواب برای دسته خاصی از معادلات دیفرانسیل شده است.

اکنون به بررسی رفتار انتگرال لِبگ نسبت به دو موضوع مهم، یعنی قضیه اساسی حسابان و قضیه همگرایی می‌پردازیم. خواهیم دید در ازای بهای پرداخت شده، آنچه به دست آورده‌ایم بسیار قابل توجه است.

قضیه. (قضیه همگرایی یکنوا) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه پذیر نامنفی روی مجموعه اندازه پذیر E و f حد نقطه‌ای این دنباله باشد. در این صورت، $\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n$.
قضیه زیر مشهورترین و قوی‌ترین قضیه همگرایی در این نظریه است.

قضیه. (قضیه همگرایی تسلطی) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال پذیر روی E باشد که تقریباً همه جا روی E به تابع حدی f همگراست. همچنین فرض کنید تابع انتگرال پذیر g موجود است به طوری که $|f_n(x)| \leq g(x)$ برای هر n و تقریباً هر $x \in E$. آن وقت f انتگرال پذیر است و $\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n$.

علی‌رغم این‌ها، باید توجه کرد که در این نظریه هم بدون اعمال شرایط اضافی نمی‌توان انتظار جابه‌جایی حد و انتگرال را در کلی‌ترین حالت داشت.

لِبگ در کتابی با عنوان درس گفتارهایی درباره انتگرال، بحثی عالی درباره انتگرال ریمان و قوت و ضعف‌های آن ارائه می‌کند و هنوز هم یکی از منابع جالب درباره نظریه انتگرال لِبگ است. لِبگ در آن کتاب با داشتن تمام ابزار لازم، نتایج و قضایای بیشتری درباره قضیه اساسی حسابان بیان می‌کند. اثبات‌ها بسیار موجز و در مواردی نارسا هستند و تلاش‌های او برای اثبات کلی‌ترین حالت قضیه اساسی حسابان و بازیابی تابع از مشتق آن توسط فرآیند انتگرال گیری، به موفقیت نمی‌انجامد. ایده‌های او را بعدها دانژوا برای یافتن چنین فرآیندی به کار گرفت. مثال زیر نشان می‌دهد انتظار

اینکه در حالت کلی تابع از مشتقش به وسیله انتگرال گیری قابل بازیابی باشد، بی جاست. مثال. تابع f در مثال ۴.۵ را در نظر بگیرید. ادعا می کنیم تابع f' انتگرال پذیر نیست. چون f' روی $[a, b]$ با شرط $0 < a < b < 1$ پیوسته است، پس $\int_a^b f' = b^2 \cos \frac{\pi}{b^2} - a^2 \cos \frac{\pi}{a^2}$. حال اگر قرار دهیم $a_n = \sqrt{\frac{2}{n+1}}$ و $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ، آن گاه $\int_{a_n}^{b_n} f' = 1/2n$ و چون بازه های $[a_n, b_n]$ دوبه دو مجزا هستند، $\int_a^1 |f'| \geq \sum \int_{a_n}^{b_n} |f'| \geq \sum \frac{1}{2n}$ که نشان می دهد f' نمی تواند انتگرال پذیر به مفهوم لبگ باشد.

دینی در کتابش به این نکته توجه می کند که اگر تابع f مشتق دینی داشته باشد و از بالا یا پایین کراندار باشد، آن گاه f را می توان به صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت. این مطلب با توجه به قضیه دیریکله درباره سری های فوریه اهمیت پیدا می کند. سه سال بعد، ژردان در مقاله ای شرطی ساده بیان کرد که معادل است با این که بتوان تابعی را به صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت. این، همان شرط کراندار بودن تغییرات تابع است.

تعریف. تغییر کل تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ روی $[a, b]$ عبارت است از

$$V(f, [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(d_i) - f(c_i)| \right\}$$

که در آن، سوپریمم روی تمام مجموعه های متناهی $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ از بازه هایی با درون مجزا در $[a, b]$ محاسبه می شود. تابع f را با تغییر کراندار گویند اگر $V(f, [a, b])$ متناهی باشد.

ویژگی پیوستگی مطلق انتگرال معین را اولین بار آکسل هارناک در ۱۸۸۴ دریافت. واژه پیوسته مطلق را ویتالی در ۱۹۰۵ به کار برد، گرچه ریاضیدانانی مثل پواسون، ژردان، شتولتس، و ای. اچ. مور نیز از این خاصیت آگاه بودند. تعریف امروزی آن از این قرار است.

تعریف. تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ را پیوسته مطلق گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ یافت شود به طوری که اگر $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ مجموعه متناهی از بازه ها در $[a, b]$ با درون مجزا باشد و $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$ ، آن گاه $\sum_{i=1}^n |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$

اکنون آماده ایم تا قضیه اساسی حسابان را برای انتگرال لبگ بیان کنیم.

قضیه. (قضیه بنیادی حسابان صورت (۱)) فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال پذیر باشد و برای هر $x \in [a, b]$ آن وقت F پیوسته مطلق است و تقریباً همه جا روی $[a, b]$ داریم $F'(x) = f(x)$.

قضیه. (قضیه بنیادی حسابان صورت (۲)) اگر تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته مطلق باشد، آن گاه f' روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است و داریم $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$.

انتگرال لبگ در جهت رفع کاستی های انتگرال ریمان بسط داده شد. کاربرد قضیه های همگرایی در نظریه لبگ در جابه جایی حد و انتگرال و قضیه اساسی حسابان، و وسیع تر شدن حوزه توابع انتگرال پذیر، پیشرفت های قابل توجهی نسبت به نظریه انتگرال ریمان محسوب می شوند. در خلال

سال‌های ۱۹۰۲ تا ۱۹۰۷ کارهای بسیار مهمی که قدرت نظریه لیبگ را نشان می‌دادند، انجام شد ولی همان‌طور که شرح دادیم، در این نظریه هم کاستی‌هایی وجود دارد. شرط انتگرال‌پذیری همچنان در صورت قضیه اساسی حسابان نیاز است و این مسأله‌ای است که باید بررسی شود. در مسائل کاربردی، بسیار اتفاق می‌افتد که به صورت کلی‌تری از قضیه اساسی حسابان نیاز است. رفع این کاستی‌ها، انگیزه معرفی نظریه‌های انتگرال دیگری بوده است که در [۱۷] به بررسی برخی از مهم‌ترین آن‌ها پرداخته‌ایم.

مراجع

- [1] M. E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1969.
- [2] U. Bottazzini, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weirstrass*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [3] C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publication, New York, 1959
- [4] W. Dunham, "Touring the calculus gallery", *Amer. Math. Monthly*, **112**(2005), 1-19.
- [5] C. H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [6] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc. GSM Vol. 4, Providence, Rhode Island, 1994.
- [7] I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Massachusetts, 1970.
- [8] I. Grattan-Guinness, *From the calculus to set theory, 1630-1910: An introductory history*, Princeton University Press, Princeton, 2000.
- [9] T. Hawking, *Lebesgue's theory of integration: It's origins and development*, Chelsea Pub. Co., New York, 1975.
- [10] H. N. Janke, *A history of analysis*, Amer. Math. Soc. History of Math. Vol. 24, Providence, Rhode Island, 2003.

- [11] I. Kleiner, "History of the infinitely small and the infinitely large in calculus", *Ed. Stud. Math.*, **48**(2001), 137-174.
- [12] G. H. Moore, "The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology", *Historia Math.*, **35**(2008), 220-241.
- [13] I. N. Pesin, *Classical and modern integration theories*, Academic Press, New York, 1970.
- [14] J. P. Pier, *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris, 1996.
- [15] C. Swartz, *Measure, integration and function spaces*, World Scientific, Singapore, 1994.

[۱۶] م. رجبعلی پور، «کسرهای مصری»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۴۲، تابستان ۱۳۸۸، ۳۸-۱.

[۱۷] س. مقصودی، «نظریه‌های انتگرال گیری دانژوا، پرون، و هنستاک - کورزویل روی خط حقیقی»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۴۷، تابستان ۱۳۹۰، ۳۵-۱۹.

سعيد مقصودی

دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

s_maghsodi@znu.ac.ir