فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۴۳ تا ۵۴

نظریهٔ فضاهای برگمن: گذشته، حال و آینده (قسمت دوم)

علی آبکار

چکیده

در قسمت اول این مقاله با نظریهٔ فضاهای برگمن آشنا شدیم و تفاوت‌های اساسی این نظریه را با خویشاوند نزدیک آن، نظریهٔ فضاهای هاردی، توضیح دادیم. در این قسمت، به مرور پیشرفت‌های اساسی این نظریه می‌پردازیم. برای ملاحظهٔ نمادها و تعریف‌ها، خواننده را به قسمت اول مقاله ارجاع می‌دهیم.

۱. تابع‌های فرینی[1]

اولین پیشرفت اساسی در این زمینه مرهون اِچ هدنمالم[2] نوهٔ ریاضی آرنه برلینگ است. هدنمالم در سال ۱۹۸۵ رسالهٔ دکتری خود را زیر نظر اِ. دومار[3] در دانشگاه اوپسالا[4]، سوئد، نوشت. دومار شاگرد برلینگ، ریاضی‌دان مشهور در همین دانشگاه، بود. هدنمالم در مقاله‌های [۱۳] و [۱۴] موفق شد همتایی طبیعی برای تابع درونی[5] فضای برگمن A^2 معرفی کند. الهام‌بخش او در این کار این نکته بود که در فضای هاردی H^2، تابع درونی متناظر با یک زیرفضای ناوردا، جواب یک مسألهٔ فرینی است. در اینجا این مطلب را توضیح می‌دهیم. فرض کنید $\{z_k\}$ دنباله‌ای متشکل از صفرهای یک تابع در A^p باشد (چنین دنباله‌ای را یک صفردنباله[6] در A^p می‌نامند). برای راحتی، فرض می‌کنیم که هیچ‌یک از z_kها برابر صفر نیستند. اکنون زیرفضای ناوردای زیر از A^p را در نظر می‌گیریم:

$$N = \{f \in A^p : \quad f(z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots\}.$$

---

1) extremal functions 2) H. Hedenmalm 3) Y. Domar 4) Uppsala 5) inner function
6) zero sequence

ابتکار هدنمالم این بود که مسألهٔ فرینی زیر را در نظر گرفت: مطلوب است یافتن

$$\max\{|f(0)|: \quad f\in N,\ \ \|f\|_{A^p}=1\}. \qquad (1)$$

به هر جواب مسألهٔ بالا، یک تابع فرینی می‌گویند. یادآور می‌شویم که اگر بخواهیم مسألهٔ بیشینه‌سازی (۱) را در فضای هاردی H^p حل کنیم، جواب یک تابع بلاشکه[1] خواهد بود ([۹]). متذکر می‌شویم که مسألهٔ (۱) توسط هدنمالم برای حالت $p=2$ و بعداً توسط دیگران ([۱۱] و [۱۲])، برای حالت $0<p<\infty$ تعمیم داده شد. فرض کنیم G جواب مسألهٔ فرینی (۱) باشد. در این صورت، $G\in A^p$، $\|G\|_{A^p}=1$ و به‌ازای هر $f\in N$، $\frac{f}{G}\in A^p$. به‌علاوه،

$$\|\frac{f}{G}\|_{A^p}\le\|f\|_{A^p}.$$

G را تابع فرینی هدنمالم و یا مقسوم‌علیه کانونی[2] صفرمجموعهٔ[3] $\{z_k\}$ می‌نامند. نابرابری بالا بیان می‌کند که G به‌عنوان یک مقسوم‌علیه صفر، انقباضی است. این در تباین آشکار با نتایج شناخته شده در فضاهای هاردی است: فرض کنید $\{z_k\}$ دنباله‌ای متشکل از صفرهای یک تابع $f\in H^p$ باشد. می‌دانیم که $\{z_k\}$ در شرط بلاشکهٔ $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty$ صدق می‌کند. اگر

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z_k}z}\,\frac{|z_k|}{z_k},\qquad z\in\mathbb{D}$$

حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متناظر باشد، آن‌گاه $f=Bh$ که در آن، $\|B\|_{H^p}=1$، $h=\frac{f}{B}\in H^p$ و $\|\frac{f}{B}\|_{H^p}=\|f\|_{H^p}$. از این‌رو حاصل‌ضرب بلاشکه، به‌عنوان یک مقسوم‌علیه صفر، به‌مفهومی که بیان شد، دارای ویژگی طولپایی است.

۲. وجود و یکتایی جواب برای مسئلهٔ بیشینه‌سازی

در این بخش، به ایدهٔ کلی وجود و یکتایی جواب مسألهٔ (۱) اشاره می‌کنیم. فرض کنیم

$$m=\max\{|f(0)|: \quad f\in N,\ \ \|f\|_{A^p}=1\}.$$

توجه کنید که $m\ge 1$، زیرا به‌ازای هر $f\in A^p$، به‌دلیل زیرهمساز بودنِ $|f|^p$ داریم $|f(0)|\le\|f\|_{A^p}$. حال اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از اعضای N باشد که $\|f_n\|_{A^p}=1$ و $|f_n(0)|\to m$، آن‌گاه چون $\{f_n\}$ روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ قرص یکه به‌طور یکنواخت کراندار است، پس تشکیل خانواده‌ای بهنجار[4] می‌دهد. از این‌رو زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ مانند $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ قرص یکه به‌طور یکنواخت به تابعی تحلیلی مانند f همگراست. اکنون از لم فاتو نتیجه می‌شود که $f\in A^p$ و $\|f\|_{A^p}\le 1$. بنابراین $f\in N$ و $|f(0)|=m$، یعنی f یک جواب مسألهٔ (۱) است.

---

1) Blaschke function 2) canonical divisior 3) zero-set 4) normal family

برهانی دیگر برای اثبات وجود جواب برای مسألهٔ (۱) به قرار زیر است. ابتدا توجه کنید که وجود جواب برای مسألهٔ (۱) هم‌ارز است با وجود جواب برای مسألهٔ یافتن

$$\min\ \{\|f\|_{A^p} : \quad f \in N,\ f(0) = 1\}. \qquad (2)$$

در واقع، تابع g با نرم واحد، جوابی از مسألهٔ (۱) است اگر و تنها اگر $g/g(0)$ جوابی برای مسألهٔ (۲) باشد. چون A^p به‌ازای $1 < p < \infty$ یک فضای باناخ یکنواخت‌محدب[1] است و چون N مجموعه‌ای بسته و محدب در A^p است، از قضیه‌های استاندارد آنالیز تابعی نتیجه می‌شود که N دارای عضوی (یکتا) با کمترین نرم است. یکتایی تابع فرینی نیز نتیجهٔ این مطلب است که A^1 فضایی اکیداً محدب[2] است. در حالتی که $0 < p < 1$، بحث یکتایی خیلی پیچیده است (رجوع کنید به مقاله‌های [۱۱] و [۱۲]، یا کتاب [۱۰]).

در پایان این بخش، لازم است دو نکته را متذکر شویم. اول این‌که فرض مخالف صفر بودنِ همهٔ z_kها محدودیتی ایجاد نمی‌کند. در واقع، می‌توان به مطالعهٔ مسألهٔ یافتن

$$\max\ \{|f^n(0)| : \quad f \in N,\ \ \|f\|_{A^p} = 1\}$$

به‌ازای یک عدد طبیعی مناسب n مبادرت نمود: فرض ما این بود که $f(0) \neq 0$؛ اگر چنین نباشد، nی وجود دارد که مشتق nام f در مبدأ صفر نمی‌شود. نکتهٔ دوم این‌که می‌توان نشان داد تابع فرینی متناظر با هر زیرفضای ناوردای دلخواه در A^p وجود دارد (به‌جای زیرفضای صفربنیاد یعنی زیرفضایی مانند N متشکل از تابع‌هایی در فضای برگمن که روی یک صفرمجموعه برابر صفرند). برای این منظور، کافی است مسألهٔ یافتن

$$\max\ \{|f(0)| : \quad f \in N,\ \ \|f\|_{A^p} = 1\}$$

را برای زیرفضای ناوردای N حل کنیم. در این ارتباط، لازم است بدانیم که

مسئلهٔ باز ۱: اگر $0 < p < 1$، آیا هر زیرفضای ناوردای A^p دارای تابع فرینی است؟ اگر تابع فرینی وجود داشته باشد، آیا یکتا است؟

مسئلهٔ باز ۲: اگر $p = 1$، آیا هر زیرفضای ناوردای A^1 تابع فرینی دارد؟

برای زیرفضاهای تک‌مولد[3]، وجود و یکتایی تابع فرینی در حالت $0 < p \leq 1$ اثبات شده است (زیرفضای M را تک‌مولد گویند اگر M توسط یک عضو A^p پدید آید، یعنی $f \in A^p$ موجود باشد به‌طوری که $M = \mathrm{cl}\ \{Qf : \quad$ یک چندجمله‌ای است $Q\}$).

۳. صفرمجموعه‌ها

دنبالهٔ $\{z_k\}$ از نقاط متمایز قرص یکهٔ باز را یک صفردنبالهٔ فضای برگمن نامیم اگر تابعی

1) uniformly convex 2) strictly convex 3) singly generated

نامتحد با صفر در A^p یافت شود که دقیقاً روی $\{z_k\}$ صفر شود. مشهور است که صفردنباله‌های فضاهای هاردی، دنباله‌های بلاشکه هستند. در قسمت اول این مقاله، تفاوت صفردنباله‌ها در فضاهای برگمن و هاردی را توضیح دادیم. در اینجا به توضیح دو مفهوم دیگر مرتبط به این موضوع می‌پردازیم. دنبالهٔ $\{z_k\}$ از نقاط متمایز قرص یکهٔ باز را یک دنبالهٔ نمونه‌گیری [1] برای فضای برگمن A^p نامیم هرگاه عددهای ثابت و مثبت K_1 و K_2 یافت شوند به‌طوری که به‌ازای هر $f \in A^p$،

$$K_1\|f\|^p_{A^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)^2|f(z_k)|^p \leq K_2\|f\|^p_{A^p}.$$

به سخن کلی، مقادیر f در این نقاط تخمینی از نرم f است. مشابهاً، $\{z_k\}$ را یک دنبالهٔ درونیابی [2] برای A^p می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر دنبالهٔ $\{w_k\}$ از نقاط قرص یکه که در شرط

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)^2|w_k|^p < \infty$$

صدق کند، تابع $f \in A^p$ موجود باشد که $f(z_k) = w_k$. توجه کنید که هر دنبالهٔ درونیابی یک صفردنباله است، زیرا اگر $\{z_k\}$ یک دنبالهٔ درونیابی باشد، آن‌گاه $f \in A^p$ یافت می‌شود که $f(z_1) = 1$ و $f(z_k) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$. اکنون تابع $g(z) = (z - z_1)f(z)$ را در نظر می‌گیریم که به A^p تعلق دارد، روی دنبالهٔ $\{z_k\}$ صفر می‌شود ولی متحد با صفر نیست. $\{z_k\}$ زیرمجموعه‌ای از یک صفرمجموعهٔ A^p است و لذا خودش یک صفرمجموعه است [10]. از طرف دیگر، یک دنبالهٔ نمونه‌گیری هیچ‌گاه نمی‌تواند یک صفرمجموعه باشد، زیرا اگر $f \in A^p$ روی یک دنبالهٔ نمونه‌گیری $\{z_k\}$ صفر شود، آن‌گاه از نابرابری مربوطه نتیجه می‌شود که $\|f\|_{A^p} = 0$ و لذا $f = 0$. بنابراین هیچ دنباله‌ای نمی‌تواند هم دنباله‌ای درونیابی باشد و هم دنباله‌ای نمونه‌گیری.

همتای معادلی برای مفهوم دنبالهٔ نمونه‌گیری در H^p وجود ندارد، زیرا در این وضع لازم است تعریف به‌صورت زیر درآید:

$$K_1\|f\|^p_{H^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)|f(z_k)|^p \leq K_2\|f\|^p_{H^p}.$$

حال اگر $f = 1$، از نابرابری سمت راست نتیجه می‌شود که $\{z_k\}$ یک دنبالهٔ بلاشکه است. از طرف دیگر، اگر تابع بلاشکهٔ متناظر را در نابرابری سمت چپ جایگزین کنیم، خواهیم داشت $K_1 = 0$ که تناقض است (توجه کنید که تابع بلاشکه در نقاط $\{z_k\}$ برابر صفر می‌شود). مهم‌ترین مسأله در این زمینه، یافتن توصیفی برای دنباله‌های نمونه‌گیری و درونیابی است. در فضاهای هاردی، دنباله‌های درونیابی توسط لنارت کارلسون [3] در سال ۱۹۸۵ توصیف شدند [۸]. پیش از بیان قضیهٔ کارلسون متذکر می‌شویم که دنبالهٔ $\{z_k\}$ را یک دنبالهٔ درونیابی عام [4] می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $\{w_k\} \in \ell^\infty$،

1) sampling sequence 2) interpolation sequence 3) Lenart Carleson 4) universal interpolation sequence

تابع $f \in H^\infty$ یافت شود به‌طوری که $f(z_k) = w_k$. دنبالهٔ $\{z_k\}$ را یک دنبالهٔ درونیابی برای H^p می‌خوانیم اگر به‌ازای هر دنبالهٔ $\{w_k\}$ با شرط $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)|w_k|^p < \infty$، تابع $f \in H^p$ موجود باشد به‌طوری که $f(z_k) = w_k$. قضیهٔ کارلسون بیان می‌کند که $\{z_k\}$ یک دنبالهٔ درونیابی عام است اگر و تنها اگر دنباله‌ای به‌طور یکنواخت جداشده[1] باشد، یعنی عدد $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری که

$$\prod_{j \neq k} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \overline{z_j} z_k} \right| \geq \delta, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

متعاقباً در سال ۱۹۶۱، شاپیرو و شیلدز ثابت کردند که دنبالهٔ $\{z_k\}$ یک دنبالهٔ درونیابی برای H^p است اگر و تنها اگر دنباله‌ای به‌طور یکنواخت جداشده باشد ([۲۰]).

توصیف دنباله‌های نمونه‌گیری و درونیابی برای فضاهای برگمن در سال ۱۹۹۴ توسط کریستیان زیپ[2] صورت پذیرفت. برای بیان نتایج زیپ در این مورد، به چند نماد نیاز داریم. فرض کنید

$$\rho(z, \xi) = \left| \frac{\xi - z}{1 - \overline{\xi} z} \right|$$

متریک شبه‌هذلولوی در قرص یکه باشد. قرص شبه‌هذلولوی $\rho(z, \xi) < r$ را با $\Delta(\xi, r)$ نشان می‌دهیم. مساحت هذلولوی زیرناحیهٔ Ω از قرص یکه به‌صورت

$$a(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{dx\, dy}{(1-|z|^2)^2}$$

تعریف می‌شود. برای عدد $1 > s > 0$، تعداد نقاط دنبالهٔ به‌طور یکنواخت جداشدهٔ $\Gamma = \{z_k\}$ واقع در قرص شبه‌هذلولوی $\Delta(\xi, r)$ را با نماد $n(\Gamma, \xi, s)$ نشان می‌دهیم. از این‌رو تعداد متوسط نقاط Γ در واحد سطح هذلولوی برابر است با

$$E(\Gamma, \xi, r) = \frac{\int_0^r n(\Gamma, \xi, s)\, ds}{2 \int_0^r a(\Delta(\xi, s))\, ds}.$$

سرانجام، تعریف می‌کنیم

$$D^-(\Gamma) = \liminf_{r \to 1} \inf_{\xi \in \mathbb{D}} E(\Gamma, \xi, r),$$

$$D^+(\Gamma) = \limsup_{r \to 1} \sup_{\xi \in \mathbb{D}} E(\Gamma, \xi, r).$$

$D^-(\Gamma)$ و $D^+(\Gamma)$ را به‌ترتیب چگالی یکنواخت پایینی[3] و چگالی یکنواخت بالایی[4] می‌نامند. روشن است که $0 \leq D^-(\Gamma) \leq D^+(\Gamma)$. قبل از بیان توصیف زیپ از دنباله‌های نمونه‌گیری و درونیابی برای A^p، متذکر می‌شویم که دنبالهٔ $\{z_k\}$ را یکنواخت‌گسسته[5] نامند هرگاه عدد مثبت δ موجود باشد به‌طوری که

$$\rho(z_j, z_k) \geq \delta > 0, \qquad j \neq k.$$

1) uniformly separated 2) K. Seip 3) lower uniform density 4) upper uniform density
5) uniformly discrete

قضیهٔ ۱. Γ یک دنبالهٔ درونیابی برای A^p است اگر و تنها اگر Γ یکنواخت‌گسسته باشد و $D^+(\Gamma) < \frac{1}{p}$.

قضیهٔ ۲. Γ یک دنبالهٔ نمونه‌گیری برای A^p است اگر و تنها اگر Γ اجتماعی متناهی از دنباله‌های یکنواخت‌گسسته باشد، به‌علاوه زیردنباله‌ای یکنواخت‌گسسته مانند Γ' موجود باشد که $D^-(\Gamma') > \frac{1}{p}$.

این قضیه‌ها، در حالت $p = 2$، توسط زیپ و در حالت $0 < P < \infty$، توسط شوستر[1] [۱۰] ثابت شد.

توصیف هندسی جامعی از صفردنباله‌های فضای برگمن وجود ندارد، هرچند که شرایطی وجود دارند که لازم‌اند و شرایطی نیز وجود دارند که کافی‌اند. لیکن فاصلهٔ بین لازم بودن و کافی بودن هنوز پر نشده است و یک مسألهٔ باز است.

۴. زیرفضاهای ناوردا

فرض کنیم B یک فضای باناخ متشکل از توابع تحلیلی بر قرص یکه باشد. به‌عنوان مثال، B را فضای هاردی یا فضای برگمن تصور کنید. زیرفضای بستهٔ M در B راناوردا گوییم اگر به‌ازای هر $f \in M$، $zf(z) \in M$. این، هم‌ارز است با این‌که به‌ازای هر $f \in M$ و هر چندجمله‌ای Q، $Qf \in M$. یکی از مسائل مهم در این زمینه، توصیف زیرفضای‌های ناوردا و ساختار مشبکهٔ آن‌ها تحت عمل‌های اشتراک و اجتماع است. در مورد فضای هاردی، ساختار زیرفضاهای ناوردا کاملاً معلوم و مشخص است. این توصیف، مرهون کار پیشروانهٔ آرنه برلینگ [٦] است (به قسمت اول مقاله رجوع کنید). در این بخش، به بررسی موضوع برای فضای برگمن می‌پردازیم.

فرض کنید $f \in B$ تابعی دلخواه باشد. کوچکترین زیرفضای ناوردای شامل f را با نماد $[f]$ نشان می‌دهند. در واقع، $[f]$ برابر است با بستار مجموعهٔ $\{Qf :$ یک چندجمله‌ای است $Q\}$. $[f]$ را زیرفضای تولید شده توسط f می‌نامند. کلی‌تر، اگر $E \subseteq B$ زیرمجموعه‌ای دلخواه باشد، منظور از زیرفضای تولیدشده توسط E که با نماد $[E]$ نشان داده می‌شود، کوچکترین زیرفضای ناوردای شامل E است. زیرفضای M را دوری[2] گوییم هرگاه $M = [f]$. چنین زیرفضایی را تک‌مولد هم می‌گویند. در این حالت، f را مولد M می‌نامند. تابع $f \in B$ را دوری نامند هرگاه $[f]$ برابر B باشد. قضیهٔ برلینگ برای فضاهای هاردی بیان می‌کند که هر زیرفضای ناوردای $M \neq \{0\}$، زیرفضایی دوری است، یعنی‌تابع درونی[3] φ وجود دارد که $M = [\varphi] = \varphi.H^p$. به‌علاوه، اعضای دوری H^p دقیقاً توابع برونی[4] هستند. این وضع برای فضای برگمن متفاوت است. خواهیم دید که توابع درونی هم می‌توانند فضای برگمن را تولید کنند. برای بیان دقیق قضیهٔ مربوطه، لازم است مفهوم یک مجموعهٔ کارلسون[5] را تعریف کنیم. مرز قرص یکه را با $\mathbb{T}$ نشان دهید و فرض کنید $K \subseteq \mathbb{T}$ زیرمجموعه‌ای بسته و با اندازهٔ صفر باشد، یعنی $|K| = 0$. قرار دهید $\mathbb{T} \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ که در آن I_nها مجموعه‌هایی باز و مجزا هستند.

---

1) A. Schuster 2) cyclic 3) inner function 4) outer function 5) Carleson set

K را یک مجموعهٔ کارلسون نامیم اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \log |I_n| > -\infty;$$

یا معادلاً

$$\int_{\mathbb{T}} \log \ \rho_K(\xi) \ |d\xi| > -\infty$$

که در آن $\rho_K(\xi)$ فاصلهٔ ξ تا مجموعهٔ K است. درواقع، مجموعه‌های کارلسون، صفرمجموعه‌های مرزی آن دسته از توابع تحلیلی در قرص یکه هستند که در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کنند. حال فرض می‌کنیم μ اندازه‌ای منفرد بر $\mathbb{T}$ است و قرار می‌دهیم

$$S_\mu(z) = \exp \ \Big\{ -\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} \ d\mu(\xi) \Big\}.$$

در این صورت، S_μ برای A^p دوری است اگر و تنها اگر به‌ازای هر مجموعهٔ کارلسون K، $\mu(K) = 0$. به عبارت دیگر، بعضی توابع درونی منفرد می‌توانند فضای A^p را پدید آورند. یک تفاوت اساسی دیگرِ زیرفضاهای ناوردا در فضاهای برگمن و هاردی این است که زیرفضاهای فضای برگمن الزاماً تک‌مولد نیستند. ما این موضوع را در بخش بعدی مورد بررسی قرار خواهیم داد. بنابراین به پرسش اساسی زیر رهنمون می‌شویم: مطلوب است ارائهٔ توصیفی از توابع دوری A^p؛ یعنی تعیین آن توابعی که می‌توانند فضای برگمن را پدید آورند. توجه کنید که به‌دلیل چگال بودنِ چندجمله‌ای‌ها در A^p، ۱ تابعی دوری است. علاوه بر این، یک تابع دوری نمی‌تواند در $\mathbb{D}$ صفر شود، زیرا در این صورت، هر عضو $[f]$ نیز در آن نقطه صفر خواهد شد. نکتهٔ دیگر این است که اگر $1 \in [f]$، آن‌گاه f دوری است. در سال ۱۹۷۴، آلن شیلدز[1] حدس زد که اگر f و $\frac{1}{f}$ هر دو در A^p باشند، آن‌گاه f دوری است. بعدها معلوم شد که این گزاره می‌تواند درست باشد اگر فرض کنیم $f \in H^\infty$، زیرا در این صورت، می‌توان چندجمله‌ای‌های Q_n را طوری یافت که $\|Q_n - \frac{1}{f}\|_{A^p} \to 0$، در نتیجه $\|Q_n f - 1\|_{A^p} \to 0$، یعنی $1 \in [f]$. بنابراین f دوری است.

موضوع مهم دیگر، مبحث توابع درونی و برونی است که ارتباط نزدیکی با نظریهٔ تجزیهٔ توابع دارد. یک پرسش عمده این است که مفاهیم تابع درونی و تابع برونی را در فضای برگمن چگونه تعریف کنیم؟

می‌دانیم که هر تابع $f \in H^p$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب $f = \varphi F$ نوشت که در آن، φ یک تابع درونی و F یک تابع برونی است. تابع $\varphi \in H^p$ رادرونی نامند هرگاه $\varphi \in H^\infty$ و تقریباً همه‌جا روی مرز قرص یکه داشته باشیم $|\varphi(e^{i\theta})| = 1$. از آنجا که توابع عضو فضای برگمن الزاماً حد شعاعی ندارند (به قسمت اول مقاله رجوع کنید)، این مفهوم قابل تعمیم به فضای برگمن نیست.

---

1) Allen Shields

خوشبختانه توصیف دیگری از توابع درونی در H^p وجود دارد که می‌تواند قابل تعمیم باشد. تابع $\varphi \in H^p$ درونی است هرگاه $\|\varphi\|_{H^p} = 1$ و

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p \, e^{in\theta} \, d\theta = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

از برابری بالا نتیجه می‌شود که همهٔ ضرایب فوریهٔ $|\varphi(e^{i\theta})|^p$ به‌جز ضریب نظیر $n = 0$ برابر صفرند. لذا $|\varphi(e^{i\theta})|$ ثابت است. با الهام از این مطلب، می‌توان گفت که تابع $\varphi \in A^p$ درونی است اگر $\|\varphi\|_{A^p} = 1$ و

$$\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^p \, z^n \, dx \, dy = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

نکتهٔ جالب این است که تابع فرینی متناظر با هر زیرفضای ناوردا، یک تابع درونی فضای برگمن است و برعکس هر تابع درونی فضای برگمن، با تقریب یک دوران، برابر تابع فرینی یک زیرفضای ناوردا است. گام بعدی، یافتن مفهوم مناسبی برای تعریف مفهوم تابع برونی بود. از نظریهٔ فضاهای هاردی می‌دانیم که $F \in H^p$ یک تابع برونی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $g \in H^p$،

$$|g(e^{i\theta})| \le |F(e^{i\theta})| \Rightarrow |g(0)| \le |F(0)|.$$

اما این نابرابری بین توابع مرزی هم‌ارز است با این‌که به‌ازای هر چندجمله‌ای Q،

$$\|Qg\|_{H^p} \le \|QF\|_{H^p}.$$

با الهام از این مطلب، بوریس کورنبلوم[1] [۱۹] به تعریف زیر رهنمون شد: تابع $F \in A^p$ بر تابع $g \in A^p$ غالب است (با نماد $g \prec F$) اگر به‌ازای هر چندجمله‌ای مانند Q،

$$\|Qg\|_{A^p} \le \|QF\|_{A^p}.$$

تابع $F \in A^p$ را یک تابع برونی نامیم هرگاه به‌ازای هر $g \in A^p$،

$$g \prec F \Rightarrow |g(0)| \le |F(0)|.$$

دو قضیهٔ زیر نشان می‌دهند که این تعریف‌ها، به‌واقع همان چیزهایی بودند که دنبال‌شان بودیم:

قضیهٔ ۱. یک تابع در A^p دوری است اگر و تنها اگر تابعی برونی باشد.

قضیهٔ ۲. هر تابع $f \in A^p$ دارای تجزیه‌ای به‌صورت $f = \varphi F$ است که در آن، φ تابعی درونی و F تابعی برونی است.

برای دیدن اثبات این قضیه‌ها خواننده را به منابع [۱۰] و [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

1) Boris Korenblum

۵. شاخص زیرفضاهای ناوردا

فضای هیلبرت A^2 را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم M و N دو زیرفضای ناوردای A^2 باشند به‌طوری که $N \subseteq M$. مکمل‌متعامد[1] N در M عبارت است از

$$M \ominus N = M \cap N^{\perp}$$

که در آن،

$$N^{\perp} = \{g \in A^2 : \quad \langle f, g \rangle = 0, \ \forall f \in N\}$$

پوچساز[2] N است. شاخص[3] زیرفضای ناوردای M به‌صورت

$$\text{ind } (M) = \dim \ (M \ominus zM)$$

تعریف می‌شود. در حالت کلی، در فضای A^p، شاخص M عبارت است از

$$\text{ind } (M) = \dim \ (\frac{M}{zM}).$$

هر زیرفضای صفربنیاد دارای شاخص ۱ است، همین‌طور هر زیرفضای تک‌مولد شاخصی برابر ۱ دارد. این موضوع در سال ۱۹۸۶، توسط بوردون [۷] و جاناس [۱۸] مورد توجه قرار گرفته بود. چون بنابر قضیهٔ برلینگ، هر زیرفضای ناوردای H^p تک‌مولد است، پس شاخص هر زیرفضای ناوردای H^p برابر ۱ است. در تضاد آشکار با این مطلب، در فضای برگمن زیرفضاهای ناوردای با شاخص دلخواه وجود دارند. این حقیقت از مدت‌ها قبل بر اساس یافته‌های آپوستل و دیگران [۵] معلوم بود لیکن هیچ ایده‌ای که چگونه این زیرفضاها ساخته می‌شوند، وجود نداشت. اولین زیرفضای ناوردای با شاخص ۲ در سال ۱۹۹۳، توسط هدنمالم ساخته شد [۱۵]. روش معرفی شده توسط هدنمالم، برای هدنمالم، ریشتر و زیپ این امکان را فراهم آورد تا در A^p زیرفضاهای ناوردای با شاخص دلخواه بسازند ([۱۷]).

مسألهٔ وجود زیرفضاهای ناوردای با شاخص دلخواه ارتباط نزدیکی با مسألهٔ زیرفضای ناوردا[4] دارد: اگر T یک عملگر خطی کراندار روی یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با بعد بزرگتر از ۱ باشد، آیا T یک زیرفضای ناوردای غیربدیهی دارد؟ به عبارت دیگر، یعنی زیرفضای ناوردای M، غیر از $\{0\}$ و H وجود دارد که $TM \subseteq M$. معلوم می‌شود که این پرسش هم‌ارز است با مسأله‌ای خاص در مورد مشبکهٔ زیرفضاهای ناوردای فضای برگمن A^2 تحت عملگر انتقال. به‌ویژه، اگر M و N دو زیرفضای ناوردای A^2 باشند به‌طوری که $N \subseteq M$ و $dim \ (M \ominus N) = \infty$، آیا زیرفضای ناوردای دیگری در A^2 چون L وجود دارد که $N \subseteq L \subseteq M$؟ هر پاسخ مثبت به این پرسش به معنی پاسخ مثبتی به مسألهٔ زیرفضای ناوردا است و برعکس. برای بحث بیشتر به [۱۷] رجوع کنید.

1) orthocomplement 2) annihilator 3) index 4) invariant subspace problem

۶. قضیهٔ برلینگ برای فضای برگمن

در بخش قبل دیدیم که ساختار زیرفضاهای ناوردا در فضاهای برگمن خیلی پیچیده است. قضیهٔ برلینگ برای فضاهای هاردی بیان می‌کند که هر زیرفضای ناوردا در H^p تک‌مولد است. به‌واقع، هر زیرفضای ناوردا به‌وسیلهٔ یک تابع درونی پدید می‌آید، یعنی $M = [\varphi]$. توجه کنید که اگر M زیرفضایی در H^2 باشد، آن‌گاه $\varphi \in (zM)^{\perp}$ زیرا هر عضو M به‌شکل φf است که در آن، $f \in H^2$. به‌علاوه، $|\varphi(e^{i\theta})| = 1$ و لذا

$$\begin{aligned} \langle z\varphi f, \varphi\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}|\varphi(e^{i\theta})|^2 f(e^{i\theta})\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta \\ &= 0.f(0) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین $\varphi \in M \cap (zM)^{\perp} = M \ominus zM$. از طرف دیگر، $\text{ind }(M) = 1$ (چون M دوری است)، پس $M = [\varphi] = [M \ominus zM]$. این مطلب را می‌توان به فضاهای برگمن تعمیم داد. با وجود این که همهٔ زیرفضاهای ناوردا دارای شاخص ۱ نیستند، همواره می‌توان مجموعه‌ای از مولدهای M را در $M \ominus zM$ جستجو کرد. به‌عبارت دیگر، M توسط $M \ominus zM$ پدید می‌آید. این مطلب توسط اَلِمان، ریشتر، و ساندبرگ مورد توجه قرار گرفت [۴]؛ قضیه‌ای خیلی مهم و با ظرافت‌های تکنیکی بسیار که در مجلهٔ وزین اکتا متمتیکا[1] چاپ شد.

قضیه ۱. هر زیرفضای ناوردای M از A^2 دارای ویژگی $M = [M \ominus zM]$ است.

این قضیه که به یک معنی تعمیم قضیهٔ برلینگ به فضای A^2 است، دارای نتایج بسیاری است. از جمله، اگر G تابع فرینی متناظر با زیرفضای صفربنیاد M در A^2 باشد، آن‌گاه $M = [G]$. این حکم بدون توسل به قضیهٔ بالا و به‌طور مستقیم، توسط نویسندهٔ حاضر ثابت شده است (رجوع کنید به [۱] و [۲]). همچنین می‌توان نشان داد که هر زیرفضای با شاخص ۱ در A^2 نیز دارای ویژگی مذکور در قضیهٔ برلینگ است. به‌ویژه، اگر M زیرفضایی دوری باشد، آن‌گاه M به‌وسیلهٔ تابع فرینی کانونی خود پدید می‌آید. این مطلب قابل تعمیم به A^p است.

مسئلهٔ باز ۳. هر زیرفضای ناوردای M از A^p $(0 < p < \infty)$ دارای ویژگی $M = [M \ominus zM]$ است.

در همین رابطه، لازم است توجه خواننده را به مسأله‌های باز بخش ۲ جلب کنیم. در A^1، یکتایی تابع فرینی نتیجهٔ اکیداً محدب بودن است. اگر M زیرفضایی دوری باشد، وجود و یکتایی تابع فرینی برای $0 < p \le 1$ ثابت شده است. در مقالهٔ [۴] با پذیرش ضمنی وجود تابع فرینی ثابت شد که

---

1) Acta Mathematica

قضیه ۲. اگر $0 < p < \infty$ و $M = [\psi]$ یک زیرفضای دوری A^p باشد و اگر φ تابع فرینی متناظر با زیرفضای M باشد، آن‌گاه $M = [\varphi]$.

با استفاده از این قضیه می‌توان حکم مشابهی برای زیرفضاهای صفربنیاد در A^p ثابت کرد:

قضیه ۳. اگر G مقسوم‌علیه صفر متناظر با یک صفرمجموعه در A^p و M زیرفضای ناوردای صفربنیاد متناظر باشد، آن‌گاه $M = [G]$.

برای مشاهدهٔ اثباتی مستقیم از این حکم، نگاه کنید به مقالهٔ [۳] از نویسندهٔ حاضر.

تبصره پایانی. مباحث ارائه شده در این مقاله بخش بسیار کوچکی از نظریهٔ فضاهای برگمن با رهیافت نظریهٔ عملگرها بود. برای آشنایی با سایر موضوع‌های مرتبط، و همچنین آشنایی با رهیافت مبتنی بر نظریهٔ توابع، خواننده را به [۱۰] و [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[1] Abkar, A., "Norm approximation by polynomials in some weighted Bergman spaces", *J. Funct. Anal.*, **191**(2002), 224-240.

[2] Abkar, A.,"Application of a Riesz-type formula to weighted Bergman spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**(2003), 155-164.

[3] Abkar, A.,"A Beurling-type theorem in Bergman spaces", *Turk. J. Math.*, **35**(2011), 711-716.

[4] Aleman, A., Richter, S., Sundberg, C., "Beurling's theorem for the Bergman space", *Acta Math.*, **177**(1996), 275-310.

[5] Apostol, C., Bercovici, H., Foias, C., Pearcy, C., "Invariant subspaces, dilation theory, and the structure of the predual of dual algebras, I", *J. Funct. Anal.*, **63**(1985), 369-404.

[6] Beurling, A., "On two problems concerning linear transformations in Hilbert space", *Acta Math.*, **81**(1949), 239-255.

[7] Bourdon, P., "Cellular-indecomposable operators and Beurling's theorem", *Michigan Math. J.*, **33**(1986), 187-193.

[8] Carleson, L., "An interpolation problem for bounded analytic functions", *Amer. J. Math.*, **80**(1985), 921-930.

[9] Duren, P. L., *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[10] Duren, P. L., Schuster, A., *Bergman spaces*, American Mathematical Society, 2004.

[11] Duren, P., Khavinson, D., Shapiro, H., Sundberg, C., "Contractive Zero- divisors in Bergman spaces", *Pacific J. Math.*, **157**(1993), 37-56.

[12] Duren, P., Khavinson, D., Shapiro, H., Sundberg, C., "Invariant subspaces in Bergman spaces and the biharmonic equation",*Michigan Math. J.*, **41**(1994), 247-259.

[13] Hedenmalm, H., "A factorization theorem for square area-integrable analytic functions", *J. Reine Angew. Math.*, **422**(1991), 45-68.

[14] Hedenmalm, H., "A factoring theorem for the Bergman space",*Bull. London Math. Soc.*, **26**(1994), 113-126.

[15] Hedenmalm, H., "An invariant subspace of the Bergman space having the codimension two property", *J. Reine Angew. Math.*, **443**(1993), 1-9.

[16] Hedenmalm, H., Korenblum, B., Zhu, K., *Theory of Bergman spaces*, Springer, New York, 2000.

[17] Hedenmalm, H., Richter, S., Seip, K., "Interpolating sequences and invariant subspaces of given index in the Bergman spaces", *J. Reine Angew. Math.*, **477**(1996), 13-30.

[18] Janas, J., "A note on invariant subspaces under multiplication by z in Bergman spaces", *Proc. Roy. Irish Acad.*, **83A**(1983), 157-164.

[19] Korenblum, B., "Outer functions and cyclic elements in Bergman spaces", *J. Funct. Anal.*, **115**(1993), 104-118.

[20] Shapiro, H. S., Shields, A. L., "On some interpolation problems for analytic functions", *Amer. J. Math.*, **83**(1961), 513-532.

[21] Seip, K., "Regular sets of sampling and interpolation for weighted Bergman spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117**(1993), 213-220.

[22] Seip, K., "Beurling type density theorems in the unit disk", *Invent. Math.*, **113**(1994), 21-39.

علی آبکار
قزوین، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)— صندوق پستی ۲۸۸
abkar@sci.ikiu.ac.ir