فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۶ (بهار ۱۳۹۴) صص۷ تا ۳۶

جبرهای عملگری*

نایجل هیگسون و جان رو

برگردان: سمیه رحیمی و بامداد یاحقی

۱. سرآغاز نظریهٔ عملگرها

دربارهٔ هر معادله یا دستگاه معادلات می‌توان دو سؤال اساسی پرسید: یکی اینکه آیا آن معادله جوابی دارد و دیگر اینکه اگر دارد، آیا جواب آن معادله یگانه است؟ تجربه در مورد دستگاه‌هایی با تعداد متناهی از معادلات خطی نشان می‌دهد که دو سؤال بالا به هم مربوط هستند. برای مثال، معادله‌های زیر را در نظر بگیرید

$$۲x + ۳y - ۵z = a,$$
$$x - ۲y + z = b,$$
$$۳x + y - ۴z = c.$$

توجه کنید که سمت چپ معادلهٔ سوم برابر با مجموع طرف‌های چپ دو معادلهٔ نخست است. در نتیجه دستگاه جواب ندارد مگر اینکه $a + b = c$. اما اگر $a + b = c$، آن‌گاه هر جواب برای دو معادلهٔ اول، یک جواب معادلهٔ سوم نیز هست و در هر دستگاه خطی که تعداد مجهول‌ها از تعداد معادله‌ها بیشتر

عبارات و کلمات کلیدی. جبرهای عملگری، نظریهٔ عملگرها، معادلات انتگرال، فضای هیلبرت، ویژه‌مقدار، ویژه‌بردار، آنالیز تابعی، قضیهٔ میانگین ارگودیک، نظریهٔ کوانتمی، ساختارِ GNS، دترمینان و اثر، جبر فون‌نوی‌من، نمایش‌های تحویل(نا)پذیر، عامل‌ها، نمایش یکانی، نظریهٔ پیمانه‌ای، جبرهای C^*، عملگرهای فردهلم، نظریهٔ K، هندسهٔ ناجابه‌جایی .

*"Operator Algebras" by Nigel Higson and John Roe, pp. 510-523, in "The Princeton Companion to Mathematics" by T. Gowers, et al., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2008.

باشد، جواب‌ها، در صورت وجود، یگانه نیستند. در وضع حاضر، اگر (x, y, z) یک جواب دستگاه باشد، آن‌گاه به‌ازای هر t بردار $(x+t, y+t, z+t)$ نیز یک جواب دستگاه است. بنابراین همان پدیده‌ای (یعنی وجود یک رابطهٔ خطی بین معادله‌ها) که در بعضی موارد مانع وجود جواب‌ها می‌شود، در موارد دیگر، مانع یگانگی جواب‌ها نیز می‌شود.

به‌منظور ایجاد ارتباطی دقیق‌تر بین وجود و یگانگی جواب‌ها، یک دستگاه کلی از معادلات خطی به‌شکل

$$\begin{aligned} k_{۱۱}u_۱ + k_{۱۲}u_۲ + \cdots + k_{۱n}u_n &= f_۱, \\ k_{۲۱}u_۱ + k_{۲۲}u_۲ + \cdots + k_{۲n}u_n &= f_۲, \\ &\vdots \\ k_{n۱}u_۱ + k_{n۲}u_۲ + \cdots + k_{nn}u_n &= f_n, \end{aligned}$$

متشکل از n معادله و n مجهول را در نظر بگیرید. اسکالرهای k_{ji} ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل می‌دهند و مسئله به‌دست آوردن u_iها برحسب f_jهاست. قضیهٔ کلی که در مثال عددی بالا ترسیم شد، این است که تعداد روابط خطی که f_jها باید برای وجود جواب برآورده کنند، اگر معادله دارای جواب باشد، برابر با تعداد ثابت‌های دلخواه موجود در جواب کلی معادله است. به زبان فنی‌تر، بعد هستهٔ ماتریس [I.3 §4.1][۱] $K = \{k_{ji}\}$ با بعد هم‌هسته‌اش برابر است. در مثال بالا، هر دوی این اعداد یک هستند.

کمی بیش از یک صد سال پیش، فردهلم[۲] [VI.66] معادلات انتگرال از نوع زیر را مورد مطالعه قرار داد:

$$u(y) - \int k(y, x)u(x)dx = f(y).$$

خاستگاه این معادلات پرسش‌هایی در فیزیک نظری بود و مسئله، یافتن جواب تابع u برحسب تابع f بود. از آنجا که انتگرال را می‌توان به‌عنوان حدی از مجموع‌های متناهی تصور کرد، معادلهٔ فردهلم، یک همزاد نامتناهی‌بعد برای دستگاه بالا است که در آن، بردارهای n–مؤلفه‌ای با توابعی جایگزین شده‌اند که دارای مقادیری در بی‌نهایت نقطهٔ x هستند. (به بیان دقیق، معادلهٔ فردهلم مشابه یک معادلهٔ ماتریسی از نوع $u - Ku = f$ به‌جای $Ku = f$ است. شکل تغییریافتهٔ سمت راست هیچ تأثیری بر رفتار کلی معادلهٔ ماتریسی ندارد اما به‌طور قابل ملاحظه‌ای رفتار معادلهٔ انتگرال را تغییر می‌دهد. همان طور

[۱] در چنین مواردی، نگارندگان خواننده را به بخش‌های دیگری از کتابنامهٔ ریاضی پرینستون ارجاع می‌دهند.

[۲] Fredholm

که خواهیم دید، فردهلم خوش اقبال بود که با رده‌ای از معادلات کار می‌کرد که رفتارشان به گونه‌ای خیلی نزدیک، منعکس کنندهٔ رفتار معادلات ماتریسی بود.)

یک مثال خیلی ساده، معادلهٔ

$$u(y) - \int_{۰}^{۱} u(x)dx = f(y).$$

است. برای حل این معادله، مشاهده کنید که چون $\int_{۰}^{۱} u(x)dx$ به‌عنوان تابعی از y، تابعی ثابت است، در حالت همگن ($f \equiv ۰$)، تنها جواب‌های ممکن برای $u(y)$ توابع ثابت هستند. از طرف دیگر، به‌ازای یک تابع کلی f معادله دارای جواب است اگر و تنها اگر شرط خطی $\int_{۰}^{۱} f(y)dy = ۰$ برآورده شود. بنابراین در این مثال، بعد هسته و بعد هم‌هسته هر دو یک هستند. فردهلم مطالعه‌ای روشمند را از تشابه بین نظریهٔ ماتریس‌ها و نظریهٔ معادلات انتگرال که در این مثال دیده می‌شود، آغاز کرد. او توانست ثابت کند که در معادلاتی از این نوع، بعد هسته و بعد هم‌هسته همیشه متناهی و برابر هستند.

کار فردهلم، تخیل هیلبرت [VI.63] را برانگیخت. او مطالعهٔ دقیقی از عملگرهای انتگرالی که $u(y)$ را به $\int_{۰}^{۱} k(y,x)u(x)dx$ می‌برند در حالت خاصی که تابع حقیقی‌مقدار k تابعی متقارن است، یعنی $k(x,y) = k(y,x)$ انجام داد. همزاد متناهی‌بعد نظریهٔ هیلبرت نظریهٔ ماتریس‌های متقارن حقیقی است. حال اگر K چنین ماتریسی باشد، آن‌گاه نتیجه‌ای استاندارد در جبرخطی حکم می‌کند که یک پایهٔ متعامدیکه متشکل از ویژه‌بردارهای [I.3 §4.3] K وجود دارد، یا به‌طور معادل، یک ماتریس یکانی[۱] U وجود دارد به‌طوری که $U^{-۱}TU$ ماتریسی قطری است. (یکانی بودن U به این معنی است که U وارون‌پذیر است و طول بردارها را حفظ می‌کند، یعنی به‌ازای هر بردار v داریم $\|v\| = \|Uv\|$.) هیلبرت نظریه‌ای مشابه را برای همهٔ عملگرهای انتگرالی متقارن به‌دست آورد. او نشان داد که توابعی مانند $u_۱(y), u_۲(y), \ldots$ و اعدادی حقیقی مانند $\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots$ وجود دارند به‌طوری که

$$\int k(y,x)u_n(x)dx = \lambda_n u_n(y).$$

بنابراین $u_n(y)$ یک ویژه‌تابع برای عملگر انتگرالی با ویژه‌مقدار λ_n می‌باشد.

در اکثر موارد محاسبهٔ صریح u_n و λ_n بسیار دشوار است، اما در حالتی که به‌ازای تابعی متناوب مانند ϕ داشته باشیم $k(x,y) = \phi(x-y)$ انجام محاسبه امکان‌پذیر است. اگر بازهٔ انتگرال‌گیری $[۰,۱]$ و دورهٔ تناوب ϕ برابر با ۱ باشد، آن‌گاه ویژه‌توابع عبارت‌اند از $\cos(۲k\pi y)$ ($k = ۰,۱,۲,\ldots$) و $\sin(۲k\pi y)$ ($k = ۱,۲,\ldots$). در این حالت، نظریهٔ سری‌های فوریه [VI.27] به ما می‌گوید که

[۱] unitary matrix

تابعی کلی مانند $f(y)$ روی $[\circ, ۱]$ می‌تواند به‌صورت یک سری

$$\sum_{k=\circ}^{\infty}(a_k \cos ۲k\pi y + b_k \sin ۲k\pi y),$$

از کسینوس‌ها و سینوس‌ها بسط داده شود. هیلبرت نشان داد که به‌طور کلی، یک بسط مشابه

$$f(y) = \sum a_n u_n(y)$$

بر حسب ویژه‌توابع برای هر عملگر انتگرالی متقارن وجود دارد. به عبارت دیگر، ویژه‌توابع، درست مانند حالت متناهی‌بعد، یک پایه تشکیل می‌دهند. در حال حاضر این کارِ هیلبرت قضیهٔ طیفی برای عملگرهای انتگرالی متقارن نامیده می‌شود.

۱.۱. از معادلات انتگرال تا آنالیز تابعی. از آنجا که عملگرهای انتگرالی در بسیاری از شاخه‌های مختلف ریاضی (از جمله در مسالهٔ دیریکله [IV.12 §1] در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و نظریهٔ نمایش گروه‌های فشرده [IV.9 §3]) رخ می‌دهند، قضیهٔ هیلبرت منجر به انفجاری از فعالیت‌ها شد. خیلی زودی مشخص شد که بهترین شکل نگرش به این عملگرها به‌عنوان تبدیلات خطی روی فضای هیلبرت [III.37] همهٔ توابع $u(y)$ است به‌طوری که $\int_\circ^۱ |u(y)|^۲ dy < \infty$. چنین توابعی مربع–انتگرال‌پذیر نامیده می‌شوند و مجموعهٔ همهٔ آنها با $L^۲[\circ, ۱]$ نشان داده می‌شود.

با دسترسی به مفهوم مهم فضای هیلبرت، بررسی طیف بسیار گسترده‌تری از عملگرها نسبت به عملگرهای انتگرالی که در ابتدا توسط فردهلم و هیلبرت در نظر گرفته شده بودند، حاصل شد. از آنجا که فضاهای هیلبرت هم فضاهای برداری [I.3 §2.3] و هم فضاهای متریک [III.58] هستند، معقول بود که نخست عملگرهایی را از یک فضای هیلبرت به خودش در نظر بگیرند که هم خطی و هم پیوسته هستند. چنین عملگرهایی معمولاً عملگرهای خطی کراندار نامیده می‌شوند. شرط تقارن $k(x, y) = k(y, x)$ در ارتباط با عملگرهای انتگرالی به شرط خودالحاقی بودنِ عملگر خطی کراندار T تبدیل می‌شود به این معنی که $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ به‌ازای هر بردار u و v در فضای هیلبرت (قلاب‌های زاویه‌ای، ضرب داخلی را نشان می‌دهند). مثال ساده‌ای از یک عملگر خودالحاقی عبارت است از عملگر ضرب در یک تابع حقیقی‌مقدار $m(y)$؛ این عملگر M توسط دستور $(Mu)(y) = m(y)u(y)$ تعریف می‌شود. (همزاد متناهی‌بعد عملگر ضرب، یک ماتریس قطری K است که jامین مؤلفهٔ بردار را در درایهٔ k_{jj} ماتریس ضرب می‌کند.)

قضیهٔ طیفی هیلبرت برای عملگرهای انتگرالی متقارن بیان می‌کند که هر عملگری از این نوع را می‌توان به‌شکل خوبی درآورد: نسبت به یک پایهٔ مناسب برای فضای $L^۲[۰,۱]$، یعنی پایه‌ای مرکب از ویژه‌بردارها، این عملگر یک ماتریس قطری نامتناهی خواهد داشت. به علاوه بردارهای پایه را می‌توان طوری انتخاب کرد که نسبت به هم متعامد باشند. به‌طور کلی این امر برای یک عملگر خودالحاقی درست نیست. برای مثال، عملگر ضرب از $L^۲[۰,۱]$ به خودش را در نظر بگیرید که هر تابع مربع-انتگرال‌پذیر $u(y)$ را به تابع $yu(y)$ می‌برد. این عملگر ویژه‌بردار [I.3 §4.3] ندارد، زیرا اگر λ یک ویژه‌مقدار [I.3 §4.3] باشد، آن‌گاه به‌ازای هر y باید داشته باشیم $yu(y) = \lambda u(y)$ که برای yهایی که برابر λ نیستند ایجاب می‌کند $u(y) = ۰$ و لذا $\int_۰^۱ |u(y)|^۲ dy = ۰$. اما این مثال نگران کننده نیست، زیرا یک عملگر ضرب از این دست به‌نوعی همتای پیوسته‌ای از عملگر تعریف شده توسط یک ماتریس قطری است. معلوم می‌شود که اگر درک‌مان را از مفهوم «قطری» گسترش دهیم تا شامل عملگرهای ضرب هم بشود، آن‌گاه همهٔ عملگرهای خودالحاقی «قطری‌پذیرند» به این معنی که پس از تغییر پایه‌ای مناسب، عملگرهای خودالحاقی، عملگرهای ضرب می‌شوند.

برای بیان دقیق این امر، به مفهوم طیف [III.88] یک عملگر T نیاز داریم. طیف یک عملگر T عبارت است از مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط λ به‌طوری که عملگر $T - \lambda I$ وارون کراندار ندارد (در اینجا I عملگر همانی روی فضای هیلبرت است). در ابعاد متناهی، طیف دقیقاً مجموعهٔ ویژه‌مقادیر است، اما در ابعاد نامتناهی همیشه این طور نیست. در واقع، در حالی که هر ماتریس متقارن حداقل یک ویژه‌مقدار دارد، همان طور که دیدیم، یک عملگر خودالحاقی لازم نیست هیچ ویژه‌مقداری داشته باشد. در نتیجه، قضیهٔ طیفی برای عملگرهای کراندار خودالحاقی نه بر حسب ویژه‌مقادیر بلکه بر حسب طیف بیان می‌شود. یکی از راه‌های فرمول‌بندی قضیهٔ طیفی این است که هر عملگر خودالحاقی T به‌طور یکانی با یک عملگر ضرب $(Mu)(y) = m(y)u(y)$ هم ارز است، که در آن بستار برد تابع $m(y)$ طیف T است. درست همانند حالت متناهی‌بعد، یک عملگر یکانی عبارت است از یک عملگر وارون‌پذیر U که طول بردارها را حفظ می‌کند. اینکه T و M به‌طور یکانی هم ارز هستند به این معنی است که یک نگاشت یکانی U، که به آن به‌عنوان همتایی از ماتریس تغییر پایه می‌نگریم، موجود است به‌طوری که $T = U^{-۱}MU$. این مطلب تعمیمی است از اینکه هر ماتریس متقارن حقیقی به‌طور یکانی هم‌ارز با یک ماتریس قطری است که ویژه‌مقادیرش روی قطر اصلی‌اش واقع هستند.

۲.۱. قضیهٔ میانگین ارگودیک[1]. یک کاربرد زیبا از قضیهٔ طیفی توسط فون نوی‌من[2] [VI.91] پیدا شد. یک صفحهٔ شطرنجی را تصور کنید که در آن تعداد معینی مهره[3] توزیع شده باشد. تصور کنید که برای هر مربع، مربع «جانشین[4]» معین شده باشد (به‌طوری که هیچ دو مربعی جانشین یکسانی نداشته باشند) و در هر دقیقه مهره‌ها با انتقال هر مهره به مربع جانشینش بازچین می‌شوند. حال بر یک مربع متمرکز شوید و هر دقیقه با توجه به بودن یا نبودن مهره‌ای[5] روی مربع اعداد ۱ یا ۰ را ثبت کنید. این امر دنباله‌ای از خوانش‌های $R_۱, R_۲, R_۳, \ldots$ مانند

$$۰۰۱۰۰۱۱۰۰۱۰۱۱۰۱۰۰۱۰۰\ldots$$

تولید می‌کند. با گذشت زمان ممکن است انتظار داشته باشیم که میانگین خوانش‌های مثبت، یعنی $R_j = ۱$، به تعداد مهره‌های روی تخته تقسیم بر تعداد مربع‌ها همگرا شود. اگر قاعدهٔ بازآرایی به اندازهٔ کافی پیچیده نباشد، این اتفاق نخواهد افتاد. برای مثال، در افراطی‌ترین حالت، اگر قاعده جانشین هر مربع را خود آن مربع تعیین کند، بسته به این که مربع را با یک مهره آغاز کرده باشیم یا نه، در بازخوانی خواهیم داشت ۰۰۰۰۰۰... یا ۱۱۱۱۱۱.... اما اگر قاعده به اندازهٔ کافی پیچیده باشد، آن‌گاه در واقع همان طور که انتظار داریم «میانگین زمانیِ» $(۱/n)\sum_{j=۱}^{n} R_j$ به تعداد مهره‌های روی تخته تقسیم بر تعداد مربع‌ها همگرا خواهد شد.

مثال تخته شطرنجی مقدماتی است، چرا که در واقع در این حالت متناهی قواعد به «اندازهٔ کافی پیچیده» تنها جایگشت‌های دوری از مربع‌های تخته هستند و بنابراین همهٔ مربع‌ها به‌طور متوالی از منظر نگاه ما حرکت می‌کنند. اما مثال‌های مرتبطی وجود دارند که در آنها، فرد بخش کوچکی از اطلاعات را مشاهده می‌کند. برای مثال، مجموعهٔ مربع‌های روی یک تخته شطرنجی را با مجموعهٔ نقاط روی یک دایره عوض کنید و به‌جای مهره‌ها تصور کنید که زیرمجموعه‌ای مانند S از دایره با عنوان اشغال‌شده بر چسب زده شود. فرض کنید قاعدهٔ بازآرایی نیز چرخش نقاط روی دایره به اندازهٔ عددی گنگ در مقیاس درجه باشد. با قرارگرفتن در یک نقطه مانند x از دایره، ثبت می‌کنیم که آیا x متعلق به S است، متعلق به نسخهٔ اول دوران‌یافتهٔ S است، متعلق به نسخهٔ دوم دوران‌یافتهٔ S است، و همین طور الی آخر. بدین ترتیب دنباله‌ای از صفر و یک مانند مثال قبل می‌یابیم. می‌توان نشان داد که (تقریبا به‌ازای هر x) میانگین زمانی مشاهدات ما به نسبتِ بخشی از دایره که توسط S اشغال شده است همگراست.

[1]Mean Ergodic Theorem [2]von Neumann [3]checker [4]successor [5]piece

سؤال‌های مشابهی در مورد رابطهٔ بین میانگین‌های زمانی و فضایی در ترمودینامیک و دیگر جاها پیش آمده بود و این انتظار که هرگاه قاعدهٔ بازآرایی به اندازهٔ کافی پیچیده باشد، باید میانگین‌های زمانی و فضایی یکی باشند، به‌عنوان فرض ارگودیک شناخته شده است.

فون نوی‌من نظریهٔ عملگرها را دخیل کرد تا این پرسش را به‌صورت زیر پاسخ گوید. فرض کنید H فضای هیلبرت توابع روی مربع‌های تخته شطرنجی یا فضای هیلبرت توابع مربع-انتگرال‌پذیر[1] روی دایره باشد. قاعدهٔ بازآرایی، یک عملگر یکانی U روی H را با فرمول

$$(Uf)(y) = f(\phi^{-1}(y)),$$

به‌دست می‌دهد که در آن، ϕ تابعی است که بازآرایی را توصیف می‌کند. قضیهٔ ارگودیک فون نوی‌من بیان می‌کند که اگر هیچ تابع غیرثابتی روی H توسط U ثابت نگه داشته نشود (این یکی از راه‌های بیان این مطلب است که قاعدهٔ بازآرایی «به اندازهٔ کافی پیچیده است»)، آن‌گاه به‌ازای هر تابع $f \in H$، حد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} U^j f$$

وجود دارد و برابر با تابع ثابتی است که مقدار آن همه‌جا برابر با مقدار میانگین f است. (برای اعمال این حکم روی مثال‌های ما، $f(x)$ را تابعی بگیرید که اگر نقطهٔ x اشغال شود ۱ و در غیر این صورت، ۰ باشد.)

قضیهٔ فون نوی‌من را می‌توان از یک قضیهٔ طیفی برای عملگرهای یکانی نتیجه گرفت که مشابه قضیهٔ طیفی برای عملگرهای خودالحاقی است. هر عملگر یکانی را می‌توان به یک عملگر ضرب نه با توابع حقیقی‌مقدار بلکه با توابعی مختلط‌مقدار که قدرمطلق مقادیر آنها ۱ هستند، تحویل کرد. در این صورت کلید برهان، حکمی در باب اعداد مختلط با قدرمطلق ۱ خواهد شد: اگر z یک چنین عدد مختلط مخالف ۱ باشد، آن‌گاه عبارت $(1/n)\sum_{j=1}^{n} z^j$ به صفر میل می‌کند هرگاه $n \to \infty$. این امر به‌نوبهٔ خود به‌آسانی با استفاده از دستور مجموع یک سری هندسی، یعنی $\sum_{j=1}^{n} z^j = \frac{z(1-z^n)}{1-z}$، ثابت می‌شود. (جزئیات بیشتر را می‌توان در قضیه‌های ارگویک [V.11] یافت.)

۳.۱. عملگرها و نظریهٔ کوانتمی. فون نوی‌من دریافت که فضاهای هیلبرت و عملگرهای روی آنها ابزار مناسب ریاضی را برای فرمول‌بندی قوانین مکانیک کوانتمی که توسط هایزنبرگ[2] و شرودینگر[3] در دههٔ ۱۹۲۰ معرفی شده بودند، فراهم می‌آورند.

[1] square-integrable functions [2] Heisenberg [3] Schrödinger

حالت یک سیستم فیزیکی در هر لحظهٔ داده شده، فهرست تمام اطلاعات مورد نیاز برای تعیین رفتار آیندهٔ آن است. برای مثال، اگر سیستم متشکل از تعدادی متناهی ذره باشد، آن‌گاه به‌طور کلاسیک حالت آن سیستم شامل فهرست بردارهای وضعیت و بردارهای تکانهٔ (اندازه حرکت) همهٔ ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن است. در مقابل، در صورت‌بندی مکانیک کوانتمی فون نوی‌من، به هر دستگاه فیزیکی یک فضای هیلبرت H مربوط می‌شود و یک حالت از دستگاه با یک بردار واحد u از H نمایش داده می‌شود. (اگر u و v بردارهای واحد باشند و v مضرب اسکالری از u باشد، آن‌گاه u و v حالت یکسانی را معین می‌کنند.)

به هر مقدار مشاهده‌پذیر (مانند انرژی کل دستگاه یا تکانهٔ یک ذره درون دستگاه) یک عملگر خودالحاقی Q در H متناظر می‌شود که طیف آن، مجموعهٔ همهٔ مقادیر مشاهده شدهٔ آن است (که این ریشهٔ واژهٔ طیف[۱] را توجیه می‌کند). حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها به شرح زیر با هم مرتبط هستند: وقتی که یک دستگاه در حالتی است که توسط یک بردار واحد $u \in H$ توصیف می‌شود، امید ریاضی مقدار مشاهده‌پذیر متناظر به یک عملگر داده شدهٔ خودالحاقی Q برابر با ضرب داخلی $\langle Qu, u\rangle$ است. ممکن است این مقداری نباشد که در واقع اندازه‌گیری می‌شود بلکه میانگین مقادیری است که در آزمایش‌های مکرر با دستگاه به‌دست می‌آیند وقتی که دستگاه در حالت داده شدهٔ u است. رابطهٔ بین حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها رفتار تناقض‌آمیز مکانیک کوانتمی را منعکس می‌کند: برای یک دستگاه این امری ممکن و در واقع نوعی است که در یک حالت «برهم‌نهش[۲]» باشد که تحت آن، آزمایش‌های مکرر یکسان نتایج متمایزی ایجاد می‌کنند. اندازه‌گیری مقدار یک مشاهده‌پذیر برآمدی قطعی و معین را ایجاد خواهد کرد اگر و تنها اگر حالت دستگاه یک ویژه‌بردار عملگر مرتبط با آن مقدار باشد.

یکی از ویژگی‌های مشخص نظریهٔ کوانتمی این است که به‌طور معمول عملگرهای مرتبط با مشاهده‌پذیرهای متفاوت با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند. اگر دو عملگر با هم جابه‌جا نشوند، آن‌گاه به‌طور نوعی ویژه‌بردارهای مشترکی نخواهند داشت و در نتیجه اندازه‌گیری همزمان دو مشاهده‌پذیر مختلف به‌طور معمول منجر به مقادیر معینی برای هر دوی آنها نمی‌شود. یک مثال معروف توسط عملگرهای P و Q ارائه می‌شوند که متناظر به مکان و تکانهٔ یک ذرهٔ در حال حرکت در امتداد یک خط هستند. این عملگرها در رابطهٔ جابه‌جاگری هایزنبرگ صدق می‌کنند:

$$QP - PQ = i\hbar I$$

[۱] Spectare به لاتین به معنی «مشاهده کردن» است. ر.ی.

[۲] superposed

که در آن $\hbar$ یک ثابت معین فیزیکی است. (این مثالی از یک اصل کلی است که ناجابه‌جایی مشاهده‌پذیرها در مکانیک کوانتمی را به کروشهٔ پوآسون مشاهده‌پذیرهای متناظر در مکانیک کلاسیک مربوط می‌کند. به تقارن آینه‌ای[۱] [IV.16 §§2.1.3, 2.2.1] مراجعه کنید.) در نتیجه غیرممکن است که یک ذره به‌طور همزمان یک مکان و تکانهٔ معین داشته باشد. این اصل عدم قطعیت[۲] است.

معلوم می‌شود که یک راه اساساً یگانهٔ نمایش دادن رابطهٔ جابه‌جاگری هایزنبرگ با استفاده از عملگرهای خودالحاقی روی فضای هیلبرت وجود دارد. فضای هیلبرت H باید $L^۲(\mathbb{R})$ باشد؛ عملگر P باید $-i\hbar d/dx$ باشد و عملگر Q باید ضرب در x باشد. به‌کمک این قضیه می‌توان عملگرهای مشاهده‌پذیر برای دستگاه‌های فیزیکی ساده را به‌طور صریح تعیین کرد. برای مثال، در یک سیستم متشکل از یک ذره بر روی یک خط که در معرض یک نیروی جهت‌دار به سمت مبدأ که مقدارش با فاصله‌اش از مبدا متناسب است در حال حرکت است (مثل اینکه ذره به یک [سر] فنر متصل شده باشد که [سر دیگرش] در مبدا ثابت شده است)، عملگر انرژی کل عبارت است از

$$E = -\frac{\hbar^۲}{۲m}\frac{d^۲}{dx^۲} + \frac{k}{۲}x^۲$$

که در آن، k ثابتی است که تعیین کننده توان کلی نیرو است. طیف این عملگر عبارت است از مجموعهٔ

$$\{(n+\frac{۱}{۲})\hbar(k/m)^{۱/۲} : n = ۰, ۱, ۲, \ldots\}.$$

در نتیجه این مقادیر تنها مقادیر ممکن برای انرژی کل سیستم هستند. توجه کنید که انرژی‌های دستگاه اعضای یک مجموعهٔ گسسته هستند. این، یکی دیگر از ویژگی‌های برجسته و اساسی نظریهٔ کوانتمی است.

یک مثال مهم دیگر عملگر انرژی کل اتم هیدروژن است. همانند عملگر بالا، انرژی کل این دستگاه به‌صورت یک عملگر دیفرانسیلی با مشتقات جزئی صریح توصیف می‌شود. می‌توان نشان داد که ویژه‌مقادیر این عملگر یک دنبالهٔ متناسب با $\{-۱, -۱/۴, -۱/۹, \ldots\}$ را تشکیل می‌دهد. یک اتم هیدروژن، اگر آشفته شود، یک فوتون آزاد می‌کند که منجر به افتی در انرژی کل آن می‌شود. انرژی فوتون آزادشده برابر با اختلاف بین انرژی‌های حالات اولیه و نهایی اتم خواهد بود و لذا با یک عدد به‌شکل $۱/n^۲ - ۱/m^۲$ متناسب است. هنگامی که نور ناشی از اتم هیدروژن از یک منشور یا توری پراش[۳] گذر داده می‌شود، خطوط روشن در واقع در طول موج‌های مربوط به این انرژی‌های ممکن مشاهده می‌شوند. مشاهدات طیفی از این دست تأیید تجربی برای پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتمی را فراهم می‌کنند.

---

[۱] mirror symmetry [۲] uncertainty principle [۳] diffraction grating

تاکنون حالت‌های یک دستگاه کوانتمی را تنها در یک لحظه مورد بحث قرار داده‌ایم. با این حال، دستگاه‌های کوانتمی درست مانند دستگاه‌های کلاسیک، تحول زمانی دارند. برای توصیف این تحول نیاز به یک قانون حرکت داریم. تحول زمانی یک دستگاه کوانتمی توسط یک خانواده از عملگرهای یکانی $U_t : H \to H$، که با اعداد حقیقی پارامتری شده‌اند، نمایش داده می‌شود. اگر دستگاه در حالت اولیهٔ u باشد، بعد از t واحد زمانی، حالت آن $U_t u$ خواهد بود. از آنجا که حالت دستگاه پس از گذشت s واحد زمانی بعد از t واحد، با حالت آن پس از گذشت $s+t$ واحد یکسان است، عملگرهای یکانی U_t در قانون گروهی $U_s U_t = U_{s+t}$ صدق می‌کنند. قضیهٔ مهمی از مارشال استون[۱] حکم می‌کند که یک تناظر یک‌به‌یک بین عملگرهای یکانی U_t و عملگرهای خودالحاقی E، که توسط فرمول زیر داده می‌شود، وجود دارد

$$iE = \left(\frac{dU_t}{dt}\right)_{t=\circ} = \lim_{t\to\circ} \frac{۱}{t}(U_t - I).$$

قانون کوانتمی حرکت، این است که مولد متناظر E که به‌صورت بالا به‌دست می‌آید، عملگر مربوط به مشاهده‌پذیر «انرژی کل» است. هنگامی که E (همانند مثال بالا) عملگر دیفرانسیلی روی یک فضای هیلبرت از توابع مناسب باشد، قانون کوانتمی حرکت، معادلهٔ شرودینگر[۲]، می‌شود.

۴.۱. ساختار GNS. عملگرهای تحول زمانی U_t در مکانیک کوانتمی در قانون $U_s U_t = U_{s+t}$ صدق می‌کنند. به‌طور کلی بنا به تعریف، یک نمایش یکانی[۳] از یک گروه G [I.3 §2.1] عبارت است از خانواده‌ای از عملگرهای یکانی U_g یک عملگر به‌ازای هر $g \in G$، به‌طوری که $U_{g_۱ g_۲} = U_{g_۱} U_{g_۲}$ به‌ازای هر $g_۱, g_۲ \in G$. نظریهٔ نمایش [IV.9]، که نخستین بار توسط فروبنیوس[۴] [VI.58] به‌عنوان ابزاری برای مطالعهٔ گروه‌های متناهی معرفی شد، در ریاضیات و فیزیک آنجا که تقارن‌های یک سیستم باید در نظر گرفته شود، اجتناب‌ناپذیر می‌شود.

اگر U یک نمایش یکانی از G و v یک بردار باشد، آنگاه $\sigma : g \to \langle U_g v, v\rangle$ یک تابع روی G تعریف می‌کند. رابطهٔ $U_{g_۱ g_۲} = U_{g_۱} U_{g_۲}$ ایجاب می‌کند که σ دارای ویژگی مهم زیر به‌ازای هر اسکالر $a_g \in \mathcal{C}$ باشد

$$\sum_{g_۱, g_۲ \in G} \overline{a_{g_۱}} a_{g_۲} \sigma(g_۱^{-۱} g_۲) = \| \sum a_g U_g v \|^۲ \geq \circ.$$

به تابع تعریف شده روی G که دارای این ویژگی است، معین مثبت[۵] می‌گویند. برعکس، از یک تابع معین مثبت می‌توان یک نمایش یکانی ساخت. این ساخت GNS (به افتخار اسرائیل گلفند[۶]، مارک

[۱] Marshall Stone [۲] Schrödinger [۳] unitary representation [۴] Frobenius [۵] positive definite [۶] Israel Gelfand

نای‌مارک[۱]، و ایروینگ سیگال[۲]) با در نظر گرفتن عناصر گروه به‌عنوان بردارهای پایه در یک فضای برداری مجرد، شروع شد. می‌توان با استفاده از فرمول زیر روی این فضای برداری یک ضرب داخلی تعریف کرد:

$$\langle g_۱, g_۲\rangle = \sigma(g_۱^{-۱}g_۲).$$

شیء (فضای) حاصل از دو جنبه با یک فضای هیلبرت متفاوت است. اول ممکن است بردارهای ناصفری موجود باشند که طولشان که توسط ضرب داخلی اندازه گرفته می‌شود، صفر باشد. (هر چند این فرض که σ معین مثبت است احتمال وجود بردارهایی با طول منفی را رد می‌کند). دوم، اصل تمامیت[۳] [III.64] نظریهٔ فضای هیلبرت ممکن است برقرار نباشد. به هر حال یک فرآیند «کامل‌سازی» وجود دارد که هر دوی این کاستی‌ها را رفع می‌کند. با اعمال فرآیند کامل‌سازی در مورد کنونی، یک فضای هیلبرت H_σ ایجاد می‌شود که یک نمایش یکانی از G را داراست.

روایت‌های ساخت GNS در زمینه‌های مختلفی از ریاضیات به وجود می‌آیند. این روایت‌ها دارای این برتری هستند که توابعی که روی آنها ساخت‌های GNS پایه‌گذاری می‌شوند به‌آسانی دستکاری می‌شوند. برای مثال، ترکیب‌های محدب از توابع معین مثبت خود نیز معین مثبت هستند و این امکان ایجاد می‌شود که بتوان روش‌های هندسی در مطالعهٔ نمایش‌ها را به‌کار گرفت.

۵.۱. دترمینان‌ها و اثرها[۴]. آثار اصلی فردهلم و هیلبرت به شدت از مفاهیم سنتی جبرخطی به‌ویژه نظریهٔ دترمینان‌ها [III.15] وام گرفته‌اند. با توجه به تعریف پیچیدهٔ دترمینان حتی برای ماتریس‌های متناهی، تعجب‌برانگیز نیست که نظریهٔ نامتناهی‌بعد، چالش‌های خارق‌العاده‌ای را ایجاد کرد. خیلی زود، روش‌های خیلی سادهٔ دیگری یافت شد که در آنها کاملاً از نظریهٔ دترمینان‌ها اجتناب می‌شد. اما جالب است توجه کنید که دترمینان، یا به‌طور دقیق‌تر مفهومی که مرتبط با اثر بوده است، نقش مهمی در تحولات اخیر داشته است که بعداً در این مقاله شرح خواهیم داد.

اثر یک ماتریس $n \times n$ عبارت است از حاصل جمع درایه‌های قطری آن. همانند دترمینان، اثر یک ماتریس A با اثر $BAB^{-۱}$ به‌ازای هر ماتریس وارون‌پذیر B برابر است. در واقع اثر توسطِ فرمول $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ با دترمینان در ارتباط است (به‌دلیل ویژگی‌های پایایی اثر و دترمینان، کافی است این برابری را برای ماتریس‌های قطری که آسان‌تر است بررسی کنید.[۵]) در ابعاد نامتناهی، لازم نیست اثر با معنی باشد چراکه حاصل جمع درایه‌های قطری یک ماتریس $\infty \times \infty$

[۵] احتمالاً منظور نگارندگان از ماتریس‌های قطری ماتریس‌های بالامثلثی بوده است. ر.ی.

[۱] Mark Naimark [۲] Irving Segal [۳] completeness axiom [۴] traces

ممکن است همگرا نباشد. (اثر عملگر همانی می‌تواند مثالی از آن باشد: همهٔ درایه‌های قطری ماتریس همانی ۱ هستند و اگر تعدادی نامتناهی از آنها وجود داشته باشد، مجموع آنها خوش‌تعریف نیست.) یک راه مقابله با این مشکل این است که خود را به عملگرهایی محدود کنیم که برای آنها این مجموع خوش‌تعریف است. یک عملگر T از ردهٔ اثردار نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر دو دنباله مانند $\{u_j\}$ و $\{v_j\}$ از بردارهای دوبه‌دو متعامد با طول واحد، سری $\sum_{j=1}^{\infty}\langle Tu_j, v_j\rangle$ مطلقاً همگرا باشد. عملگر اثردار T دارای اثری خوش‌تعریف و متناهی است که عبارت است از جمع $\sum_{j=1}^{\infty}\langle Tu_j, u_j\rangle$ (که مستقل از انتخاب پایهٔ متعامد یکهٔ $\{u_j\}$ است).

عملگرهای انتگرالی مانند آنهایی که در معادلهٔ فردهلم ظاهر شدند، مثال‌هایی طبیعی از عملگرهای اثردار فراهم می‌کنند. اگر $k(y,x)$ یک تابع هموار[1] باشد، آن‌گاه عملگر $Tu(y) = \int k(y,x)u(x)dx$ عملگری اثردار است و اثر آن برابر است با $\int k(x,x)dx$ که می‌توان آن را به‌عنوان «مجموع» عناصر قطری «ماتریس پیوستهٔ[2]» k در نظر گرفت.

۲. جبرهای فون نوی‌من

جابه‌جاشوندهٔ[3] یک مجموعهٔ S از عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت H عبارت است از گردایهٔ S' از عملگرهای خطی روی H که با هر عملگر S جابه‌جا می‌شود. جابه‌جاشوندهٔ هر مجموعه، یک جبر از عملگرها روی H است. یعنی اگر T_1 و T_2 در جابه‌جاشونده باشند، T_1T_2 و هر ترکیب خطی $a_1T_1 + a_2T_2$ نیز در آن خواهند بود.

همان طور که در بخش قبل ذکر شد، یک نمایش یکانی از یک گروه G روی یک فضای هیلبرت H عبارت است از مجموعه‌ای از عملگرهای یکانی U_g، که توسط عناصر G اندیس‌گذاری شده‌اند با این ویژگی که به‌ازای هر دو عنصر مانند g_1 و g_2 از G ترکیب $U_{g_1}U_{g_2}$ با $U_{g_1g_2}$ برابر است. یک جبر فون نوی‌من عبارت است از یک جبر از عملگرها روی یک فضای هیلبرت مختلط H که جابه‌جاشوندهٔ نمایشی یکانی از یک گروه روی H است. هر جبر فون نوی‌من نسبت به عمل الحاق‌گیری و تقریباً تحت هر نوع عمل حدگیری بسته است. برای مثال، نسبت به حد نقطه‌ای بسته است: اگر $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرها در یک جبر فون نوی‌من M باشد و اگر به‌ازای هر بردار $v \in H$ داشته باشیم $T_nv \to Tv$، آن‌گاه $T \in M$.

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که هر جبر فون نوی‌من M برابر با جابه‌جاشوندهٔ مرتبهٔ دومش، یعنی M'' (جابه‌جاشوندهٔ جابه‌جاشوندهٔ M)، است. فون نوی‌من ثابت کرد که اگر یک جبر خودالحاقی M

[1] smooth function [2] continuous matrix [3] commutant

از عملگرها تحت حدگیری نقطه‌ای بسته باشد، آن‌گاه M با جابه‌جاشوندهٔ گروه عملگرهای یکانی در جابه‌جاشونده‌اش برابر است، و لذا یک جبر فون نوی‌من است.

۱.۲. نمایش‌های تجزیه‌شونده[۱]. فرض کنید $g \to U_g$ یک نمایش یکانی از گروه G روی فضای هیلبرت H باشد. اگر یک زیرفضای بسته مانند $H_\circ$ از H توسط همهٔ عملگرهای U_g به‌توی خودش نگاشته شود، آن را زیرفضای پایا برای نمایش می‌خوانیم. اگر $H_\circ$ پایا باشد، آن‌گاه از آنجا که عملگرهای U_g زیرفضای $H_\circ$ را به خودش می‌نگارند، تحدید آنها به $H_\circ$ نمایش دیگری از G را تشکیل می‌دهد که یک زیرنمایش از نمایش اصلی نامیده می‌شود.

زیرفضای $H_\circ$ برای یک نمایش پایاست و در نتیجه یک زیرنمایش تعیین می‌کند، اگر و تنها اگر عملگر تصویر متعامد $P : H \to H_\circ$ متعلق به جابه‌جاشوندهٔ آن نمایش باشد. این امر به ارتباطی نزدیک بین زیرنمایش‌ها و جبرهای فون نوی‌من اشاره دارد. در واقع، نظریهٔ جبرهای فون نوی‌من را می‌توان مطالعهٔ روش‌هایی دانست که در آنها نمایش‌های یکانی می‌توانند به زیرنمایش‌ها تجزیه شوند.

یک نمایش، تحویل‌ناپذیر[۲] است اگر زیرفضای پایای غیربدیهی نداشته باشد. اگر یک نمایش، زیرفضای پایای غیربدیهی $H_\circ$ داشته باشد، می‌توان آن را به دو زیرنمایش تقسیم کرد: آنهایی که به $H_\circ$ مربوط می‌شوند و آنهایی که به مکمل متعامد آن یعنی $H_\circ^\perp$ مربوط می‌شوند. در حالتی که هر دو زیرنمایش مربوط به $H_\circ$ و $H_\circ^\perp$ تحویل‌ناپذیر باشند، دوباره می‌توان یکی از $H_\circ$ یا $H_\circ^\perp$ و یا هر دوی آنها را با تکرار روندی که برای H داشتیم، به بخش‌های کوچکتری تقسیم کنیم. اگر فضای هیلبرت اولیه یعنی H متناهی‌بعد باشد، با ادامهٔ چنین روندی؛ سرانجام آن را به زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر تجزیه خواهیم کرد. به زبان ماتریس‌ها، یک پایه برای H به‌دست می‌آوریم که نسبت به آن همهٔ عملگرهای گروه به‌طور همزمان قطری بلوکی می‌شوند به گونه‌ای که هر بلوک، یک گروه تحویل‌ناپذیر از عملگرهای یکانی روی یک فضای هیلبرت کوچکتر را نشان می‌دهد.

تحویل کردن یک نمایش یکانی روی یک فضای هیلبرت متناهی‌بعد به زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر کمی شبیه تجزیهٔ یک عدد صحیح به حاصلضرب عامل‌های اول آن است. همانند تجزیه به حاصلضرب اعداد اول[۳]، فرآیند تجزیه برای یک نمایش یکانی متناهی‌بعد فقط یک هدف دارد: صرفنظر از ترتیب، فهرستی یگانه از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر وجود دارد که یک نمایش یکانی داده شده به آنها تجزیه می‌شود. اما در ابعاد نامتناهی، فرآیند تجزیه با چندین مشکل مواجه می‌شود. شگفت‌انگیزترین مشکل این است

[۱] decomposing representations [۲] irreducible [۳] prime factorization

که ممکن است دو تجزیهٔ یک نمایش، به مجموعه‌هایی کاملاً متفاوت از زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر تجزیه شوند.

برخلاف این مشکل، شکل جدیدی از تجزیه که به‌طور غیردقیق شبیه تجزیهٔ یک عدد صحیح به حاصلضرب توان‌های اعداد اول به‌جای حاصلضرب اعداد اول است، خود را نمایان می‌کند. به توان‌های اولی که یک عدد صحیح به حاصلضرب آنها تجزیه می‌شود، مؤلفه می‌گوئیم. آنها دو ویژگی بارز دارند: هیچ دو مؤلفه‌ای دارای یک عامل مشترک نیستند و هر دو عامل (سرهٔ) یک مؤلفه دارای یک عامل مشترک هستند. به‌طور مشابه، می‌توان یک نمایش یکانی را به مؤلفه‌های یک‌نوع[1] تجزیه کرد. مؤلفه‌های یک‌نوع دارای این ویژگی مشابه هستند که هیچ دو مؤلفهٔ یک‌نوعی دارای یک زیرنمایش مشترک، یعنی یکریخت، نیستند، و هر دو زیرنمایش یک مؤلفهٔ یک‌نوع دارای یک زیر-زیرنمایش مشترک یکسان هستند. هر نمایش یکانی (متناهی یا نامتناهی‌بعد) می‌تواند به مؤلفه‌های یک‌نوع تجزیه شود، و این تجزیه یگانه است.

در ابعاد متناهی، هر نمایش یک‌نوع به تعدادی (متناهی) از زیرنمایش‌های تحویل‌ناپذیر یکسان (مانند عامل‌های اول توانی از یک عدد اول) تجزیه می‌شود. در ابعاد نامتناهی چنین نیست. در واقع، بیشتر نظریهٔ جبر فون نوی‌من با تجزیه و تحلیل حالت‌های بسیاری که به‌وجود می‌آیند مرتبط است.

۲.۲. عامل‌ها[2]. جابه‌جاشوندهٔ یک نمایش یکانی یک‌نوع، یک عامل نامیده می‌شود. به‌طور مشخص، یک عامل عبارت است از یک جبر فون نوی‌من M که مرکزش (مجموعهٔ همهٔ عملگرها در M که با هر عضو M جابه‌جا می‌شوند) شامل چیزی بیشتر از مضرب‌های اسکالر عملگر همانی نیست. سبب این است که تصاویر در مرکز M به تصاویر به‌روی ترکیبات زیرنمایش‌های هم‌نوع، متناظر می‌شوند. هر جبر فون نوی‌من به‌طور یکتایی به عامل‌ها تجزیه می‌شود.

یک عامل از نوع I نامیده می‌شود اگر جابه‌جاشوندهٔ یک نمایش یک‌نوع باشد که تکراری متناهی از یک نمایش تحویل‌ناپذیر است. هر عامل نوع I با جبر عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت یکریخت است. در بعد متناهی، هر عامل از نوع I است، زیرا همان گونه که اشاره کردیم هر نمایش یک‌نوع به تکراری متناهی از یک نمایش تحویل‌ناپذیر تجزیه می‌شود.

وجود نمایش‌های یکانی با بیش از یک تجزیه به مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر به وجود عامل‌هایی که از نوع I نیستند مربوط می‌شود. فون نوی‌من، همراه با فرانسیس موری[3]، این مطلب را در یک سری از مقالات، که پایه و اساس نظریهٔ جبرهای عملگری را بنیان نهاد، بررسی کرد. آنها یک ساختار ترتیبی

[1] isotypical components [2] factors [3] Francis Murray

روی گردایهٔ زیرنمایش‌های یک نمایش یک‌نوع داده شده یا، بر حسب جابه‌جاشونده، روی گردایهٔ تصاویر در یک عامل داده شده معرفی کردند. اگر H_0 و H_1 زیرنمایش‌های نمایش یک‌نوع H باشند و H_0 با یک زیرنمایش از H_1 یکریخت باشد، آن‌گاه می‌نویسیم $H_0 \preceq H_1$. موری و فون نوی‌من ثابت کردند که این ترتیب، یک ترتیب کلی است، یعنی یا $H_0 \preceq H_1$، یا $H_1 \preceq H_0$، و یا هر دوی آنها برقرار هستند که در این صورت H_0 و H_1 با هم یکریخت هستند. برای مثال، در یک وضعیت متناهی‌بعد از نوع I که H تکراری از n نسخهٔ یک نمایش تحویل‌ناپذیر است، هر زیرنمایش مجموع $m \leq n$ نسخه از نمایش تحویل‌ناپذیر است و ساختار ترتیبی[۱] (کلاسهای یکریختی) زیرنمایش‌ها همانند ساختار ترتیبی اعداد صحیح $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ است.

موری و فون نوی‌من نشان دادند که تنها ساختارهای ترتیبی که می‌توانند از عامل‌ها ناشی شوند، موارد بسیار سادهٔ زیر هستند: نوع I، $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ یا $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$؛ نوع II، $[0, 1]$ یا $[0, \infty]$؛ نوع III، $\{0, \infty\}$. نوع یک عامل با توجه به ساختار ترتیبی تصاویرش بر طبق این جدول معین می‌شود.

در مورد عوامل از نوع II منظور از ساختار ترتیبی، ساختار ترتیبی یک بازهٔ اعداد حقیقی است نه اعداد صحیح. هر زیرنمایش یک نمایش یک‌نوع از نوع II می‌تواند باز هم به زیرنمایش‌های کوچکتر تقسیم شود: در این حالت هرگز به یک «اتم[۲]» تحویل‌ناپذیر نخواهیم رسید. با وجود این، زیرنمایش‌ها را همچنان می‌توان از نظر بزرگی توسط «بعد حقیقی‌مقدار»، که به‌وسیلهٔ قضیهٔ موری و فون نوی‌من فراهم شده است، مقایسه کرد.

یک مثال قابل توجه از یک عامل نوع II به این شرح است. فرض کنید G یک گروه و $H = \ell^2(G)$ یک فضای هیلبرت با بردارهای پایهٔ $[g]$ متناظر به عناصر $g \in G$ باشد. در این صورت یک نمایش طبیعی از G روی H برگرفته از قانون ضرب گروه وجود دارد که نمایش منظم[۳] نامیده می‌شود: به‌ازای عضو داده شدهٔ g از G، نگاشت یکانی متناظرش U_g یک عملگر خطی است که هر بردار پایهٔ $[g']$ در $\ell^2(G)$ را به بردار پایهٔ $[gg']$ می‌برد. جابه‌جاشوندهٔ این نمایش یک جبر فون نوی‌من M است. اگر G یک گروه جابه‌جایی باشد، آن‌گاه همهٔ عملگرهای U_g در مرکز M هستند؛ اما اگر G از جابه‌جایی خیلی دور باشد (به‌عنوان مثال یک گروه آزاد[۴] باشد)، آن‌گاه M مرکز بدیهی خواهد داشت و بنابراین یک عامل خواهد بود. می‌توان نشان داد که این عامل از نوع II است. یک فرمول صریح ساده برای بعد حقیقی‌مقدار یک زیرنمایش متناظر به یک تصویر متعامد $P \in M$ وجود دارد. تصویر P را با

---
[۱] order structure [۲] atom [۳] regular representation [۴] free group

یک ماتریس نامتناهی نسبت به پایهٔ $\{[g]\}$ از H نشان دهید. از آنجا که P با نمایش جابه‌جا می‌شود، به‌آسانی دیده می‌شود که عناصر قطری P همگی یکسان‌اند، یعنی برابر با عددی حقیقی بین ۰ و ۱ هستند. این عدد حقیقی بعد زیرنمایش متناظر با P است.

اخیراً نظریهٔ بعد موری-فون نوی‌من کاربردهای غیرمنتظره‌ای در توپولوژی [64§ I.3] پیدا کرده است. بسیاری از مفاهیم مهم توپولوژی، مانند اعداد بتی[۱]، به‌عنوان ابعاد (صحیح-مقدار) فضاهای برداری خاصی تعریف می‌شوند. با استفاده از جبر فون نوی‌من، می‌توان همزاد حقیقی‌مقدار این مقادیر را تعریف کرد که دارای ویژگی‌های مفید بیشتری هستند. به این ترتیب، می‌توان از نظریهٔ جبر فون نوی‌من برای به‌دست آوردن نتیجه‌گیری‌های توپولوژیکی استفاده کرد. جبرهای فون نوی‌من که در اینجا استفاده شده‌اند به‌طور نوعی توسط روش ساخت پاراگراف قبلی از گروه بنیادی [2§ IV.6] فضای فشردهٔ مناسبی به‌دست می‌آیند.

۳.۲. نظریهٔ پیمانه‌ای[۲]. عامل‌های نوع III برای مدت زمان طولانی خیلی مرموز و ناشناخته باقی ماندند؛ در واقع، در ابتدا موری و فون نوی‌من قادر نبودند تعیین کنند که آیا چنین عامل‌هایی وجود دارند. آنها سرانجام موفق به انجام این کار شدند اما پیشرفت‌های غیرمنتظره و اساسی در این زمینه مدت‌ها بعد از کارهای پیشگامانهٔ[۳] آنها به وجود آمد؛ آن گاه که متوجه شدند که هر جبر فون نوی‌من دارای یک خانوادهٔ خاصی از تقارن‌ها، موسوم به گروه خودریختی پیمانه‌ای آن جبر است.

برای توضیح ریشه و منشأ نظریهٔ پیمانه‌ای، بگذارید یک بار دیگر جبر فون نوی‌من به‌دست آمده از نمایش منظم یک گروه G را در نظر بگیریم. عملگر U_g روی $\ell^2(G)$ را با ضرب از سمت چپ به‌وسیلهٔ عناصر G تعریف کردیم، اما می‌توانیم نمایشی تعریف شده با ضرب از سمت راست را هم در نظر بگیریم. این امر یک جبر فون نوی‌من متفاوتی به‌دست خواهد داد.

تا زمانی که تنها با گروه‌های گسستهٔ G سر و کار داریم این تفاوت بی‌اهمیت است، زیرا نگاشت $S : [g] \mapsto [g^{-1}]$ یک عملگر یکانی روی H است که نمایش‌های منظم چپ و راست را با هم عوض می‌کند. اما برای گروه‌های پیوستهٔ معینی، مشکل از اینجا ناشی می‌شود که ممکن است تابع $f(g)$ مربع-انتگرال‌پذیر باشد در حالی که تابع $f(g^{-1})$ اینچنین نباشد. در این وضعیت، یکریختی یکانیِ ساده‌ای مشابه با یکریختی بالا برای گروه‌های گسسته وجود ندارد. برای اصلاح این موضوع باید یک عامل اصلاحی به نام تابع پیمانه‌ای G را معرفی کرد.

---
[۱] Betti numbers [۲] modular theory [۳] pioneering work

برنامهٔ نظریهٔ پیمانه‌ای این است که نشان دهیم می‌توان چیزی مشابه با تابع پیمانه‌ای را برای هر جبر فون نوی‌من ساخت. این تابع پیمانه‌ای به‌عنوان پایایی برای عامل‌های از نوع III به‌کار گرفته می‌شود، چه آن عامل‌ها به‌طور صریح از گروه‌ها به‌دست آمده باشند و یا نیامده نباشند.

نظریهٔ پیمانه‌ای نوعی از ساخت GNS را مورد استفاده قرار می‌دهد[۱] (بخش ۴-۱). فرض کنید M یک جبر خودالحاقی از عملگرها باشد. یک تابع خطی $\phi : M \mapsto \mathbb{C}$ یک حالت[۲] نامیده می‌شود اگر مثبت باشد، به این معنی که $\phi(T^*T) \geq 0$ به‌ازای هر $T \in M$ (این اصطلاح از ارتباط پیشتر شرح داده شده بین نظریهٔ فضای هیلبرت و مکانیک کوانتمی برگرفته شده است). برای اهداف نظریهٔ پیمانه‌ای توجه‌مان را به حالت‌های وفادار[۳] محدود می‌کنیم، یعنی آن حالت‌هایی که برای آنها $\phi(T^*T) = 0$ برابری $T = 0$ را ایجاب می‌کنند. اگر ϕ یک حالت باشد، آن‌گاه فرمول

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \phi(T_1^* T_2)$$

یک ضرب داخلی روی فضای برداری M تعریف می‌کند. با اعمال فرآیند GNS، یک فضای هیلبرت H_M به‌دست می‌آوریم. نخستین واقعیت مهم در مورد H_M این است که هر عملگر T در M یک عملگر روی H_M تعیین می‌کند. در واقع یک بردار $V \in H_M$ حدی $V = \lim_{n\to\infty} V_n$ از عضوهای M است و می‌توانیم یک عملگر $T \in M$ را بر بردار V با استفاده از فرمول

$$TV = \lim_{n\to\infty} TV_n$$

اعمال کنیم که در سمت راست برابری بالا از عمل ضرب در جبر M استفاده می‌کنیم. به همین دلیل می‌توانیم به M به‌عنوان جبری از عملگرها روی H_M بنگریم نه به‌عنوان جبری از عملگرها روی فضای هیلبرتی که با آن آغاز کردیم.

سپس عملگر الحاقی، فضای هیلبرت را به یک عملگر طبیعی «پادخطی» $S : H_M \to H_M$ با فرمول $S(V) = V^*$ مجهز می‌کند[۴]. از آنجا که برای نمایش منظم داریم $U_g^* = U_{g^{-1}}$، این شبیه عملگر Sای است که در بحث گروه‌های پیوسته با آن مواجه شدیم. قضیهٔ مهمی از مینورو تومیتا[۵] و ماسامیچی تاکساکی[۶] حکم می‌کند به اینکه تا زمانی که حالت اصلی ϕ یک شرط پیوستگی را برآورده می‌کند، توان‌های مختلط $U_t = (S^*S)^{it}$ به‌ازای هر t دارای ویژگی $U_t M U_{-t} = M$ هستند.

---

[۴] تعبیر این دستور دربارهٔ کامل‌سازی H_M از M مطلبی ظریف است.

[۱] exploit [۲] state [۳] faithful states [۵] Minoru Tomita [۶] Masamichi Takesaki

تبدیلات M با دستور $T \mapsto U_t T U_{-t}$ خودریختی‌های پیمانه‌ای M نامیده می‌شوند. آلن کن[۱] ثابت کرد که آنها تنها به حالت وفادار ϕ بستگی دارند. به‌طور دقیق، تغییر ϕ خودریختی‌های پیمانه‌ای را تنها به خودریختی‌های داخلی تغییر می‌دهد، یعنی تبدیلات به‌شکل $T \mapsto UTU^{-1}$ که در آن، U یک عملگر یکانی روی M است. نتیجه قابل توجه این است که هر جبر فون نوی‌من M یک گروه متعارف[۲] یک-پارامتری از «خودریختی‌های بیرونی» دارد که تنها توسط M تعیین می‌شود، نه توسط حالت ϕ که برای تعریف جبر فون نوی‌من استفاده می‌شود.

گروه پیمانه‌ای یک عامل نوع I یا نوع II تنها شامل تبدیل همانی است، اما گروه پیمانه‌ای یک عامل نوع III بسیار پیچیده‌تر است. برای مثال، مجموعهٔ

$$\{t \in \mathbb{R} : \text{یک خودریختی داخلی است.}\ T \mapsto U_t T U_{-t}\},$$

زیرگروهی از $\mathbb{R}$ و پایایی از M است که می‌تواند برای تمییز دادن بین تعداد بی‌شماری عامل‌های نوع III مورد استفاده قرار گیرد.

۴.۲ رده‌بندی[۳]. یک دستاورد مهم نظریهٔ جبر فون نوی‌من، رده‌بندی عامل‌هایی است که به‌طور تقریبی[۴] متناهی‌بعد هستند. اینها عامل‌هایی هستند که به یک معنی، حدهای جبرهای متناهی‌بعد هستند. علاوه بر برد تابع بعد که عامل‌ها را به انواع آنها تفکیک می‌کند، تنها پایا پیمانه (مدول) است. پیمانه، یک شار روی فضای معینی است که از گروه خودریختی پیمانه‌ای گرد آمده است.

در حال حاضر توجه زیادی به مسالهٔ دیرینهٔ تشخیص عوامل نوع II مرتبط با نمایش‌های منظم گروه‌ها می‌شود. یکی از موارد مورد علاقهٔ ویژه، مورد گروه‌های آزاد [IV.10 §2] است که از آن، موضوع نظریهٔ احتمال آزاد شکوفا شده است. با وجود تلاش شدید، برخی از پرسش‌های اساسی باز باقی مانده‌اند: در زمان نگارش این مقاله معلوم نیست که آیا عامل‌های مرتبط با گروه‌های آزاد روی دو و روی سه مولد یکریخت هستند یا نه.

یکی دیگر از پیشرفت‌های مهم، نظریهٔ زیرعامل[۵] بوده است که تلاش می‌کند تا روش‌هایی را رده‌بندی کند که می‌شود عامل‌ها در درون سایر عامل‌ها می‌توانند تحقق یابند. قضیه‌ای قابل توجه و شگفت‌آور از وان جونز[۶] نشان می‌دهد که در وضعیت نوع II که در آن، نرم مقادیرِ پیوستهٔ ابعاد است، در وضعیت‌های معینی ابعاد زیرعامل‌ها می‌توانند تنها مقدارهای گسسته‌ای را بپذیرند. ترکیبیات مرتبط با این نتیجه،

[۱] Alain Connes [۲] canonical group [۳] classification [۴] approximately [۵] subfactor theory [۶] Vaughan Jones

همچنین در دیگر بخش‌های به‌ظاهر کاملاً نامربوط از ریاضیات، به‌ویژه در نظریهٔ گره‌ها[۱] [III.46] ظاهر شده‌اند.

۳. جبرهای C^*[۲]

نظریهٔ جبرهای فون نوی‌من به توصیف ساختار یک نمایش از یک گروه روی فضای هیلبرت کمک می‌کند. اما بسیاری از اوقات هدف، به‌دست آوردن درکی از تمامی نمایش‌های یکانی ممکن است. برای روشن کردن این مسأله، به بخشی مرتبط اما متفاوت از نظریهٔ جبرهای عملگری باز می‌گردیم.

مجموعهٔ $\mathcal{B}(H)$ از همه عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت H را در نظر بگیرید. این مجموعه دارای دو ساختار کاملاً متفاوت است: یکی اعمال جبری، نظیر جمع، ضرب، و تشکیل الحاقی‌ها؛ دیگری ساختارهای تحلیلی، نظیر نرم عملگری

$$\|T\| = \sup\{\|Tu\| : \|u\| \leq ۱\}.$$

این ساختارها مستقل از یکدیگر نیستند. برای مثال، فرض کنید $\|T\| < ۱$ (یک فرض تحلیلی). در این صورت سری هندسی

$$S = I + T + T^۲ + T^۳ + \cdots$$

در $\mathcal{B}(H)$ همگراست و حد S آن در برابری زیر صدق می‌کند:

$$S(I-T) = (I-T)S = I.$$

در نتیجه $I - T$ در $\mathcal{B}(H)$ وارون‌پذیر است (یک نتیجهٔ جبری). از این مطلب به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که شعاع طیفی هر عملگر T، یعنی $r(T)$ (که عبارت است از بزرگترین قدرمطلق اعداد متعلق به طیف T) کوچکتر یا برابر با نرم آن است.

فرمول جالب مربوط به شعاع طیفی، خیلی بیشتر در این جهت به پیش می‌رود [که این ساختارها از هم مستقل نیستند]. این دستور حکم می‌کند که $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{۱/n}$. اگر T نرمال باشد ($TT^* = T^*T$)، و به‌ویژه اگر T خودالحاقی باشد، آن‌گاه می‌توان نشان داد که $\|T^n\| = \|T\|^n$. در نتیجه شعاع طیفی T دقیقاً برابر با نرم T است. بنابراین رابطهٔ بسیار نزدیکی بین ساختار جبری $\mathcal{B}(H)$، مخصوصاً ساختار جبری مرتبط با عملگر الحاقی و ساختار تحلیلی وجود دارد.

[۱]knot theory [۲]C^*-Algebras

همهٔ ویژگی‌های $\mathcal{B}(H)$ دربارهٔ این ارتباط جبری و آنالیزی نیست. یک جبر C^* مانند A ساختاری مجرد است که به اندازهٔ کافی ویژگی دارد تا استدلال دو پاراگراف قبلی معتبر باقی بماند. جای آن نیست که تعریفی دقیق از جبرهای C^* ارائه کنیم، اما شایان گفتن است که یک شرط بسیار مهم که نرم، ضرب، و عمل $*$ را به هم مربوط می‌کند عبارت است از

$$\|a^*a\| = \|a\|^۲, a \in A$$

که اتحاد C^*[۱] برای A نامیده می‌شود. همچنین توجه می‌کنیم که رده‌های خاصی از عملگرها روی فضای هیلبرت (عملگرهای یکانی، تصاویر متعامد و غیره) همگی همزاد خود را در یک جبر C^* کلی دارند. برای مثال، یک عضو یکانی $u \in A$ در $uu^* = u^*u = ۱$ صدق می‌کند و تصویر p در $p = p^۲ = p^*$ صدق می‌کند.

یک مثال ساده از یک جبر C^* به‌وسیلهٔ تنها یک عملگر $T \in \mathcal{B}(H)$ به‌دست می‌آید. مجموعهٔ همهٔ عملگرهای $S \in \mathcal{B}(H)$ که حدهای چندجمله‌ای‌هایی از T و T^* هستند جبر C^* تولید شده توسط T نامیده می‌شود. جبر C^* تولید شده توسط T جابه‌جایی است اگر و تنها اگر T نرمال باشد؛ این امر یکی از دلایل اهمیت عملگرهای نرمال است.

۱.۳. جبرهای C^* جابه‌جایی. اگر X یک فضای توپولوژیک [III.92] فشرده [III.9] باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $\mathcal{C}(X)$ مرکب از توابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{C}$ به اعمال جبری طبیعی (موروثی از اعمال جبری در $\mathbb{C}$) و یک نرم $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ مجهز می‌شود. در حقیقت، این اعمال $\mathcal{C}(X)$ را به یک جبر C^* تبدیل می‌کند. عمل ضرب در $\mathcal{C}(X)$ جابه‌جایی است، زیرا ضرب اعداد مختلط جابه‌جایی است.

یک نتیجهٔ اساسی از گلفند و نای‌مارک حکم می‌کند که هر جبر C^* جابه‌جایی با یک $\mathcal{C}(X)$ یکریخت است. به‌ازای یک جبر C^* جابه‌جایی داده شدهٔ A، X را به‌عنوان گردایهٔ همهٔ همریختی‌های جبری $\xi : A \to \mathbb{C}$ بسازید. در این صورت تبدیل گلفند به هر $a \in A$ تابع $\xi \mapsto \xi(a)$ از X به $\mathbb{C}$ را نسبت می‌دهد.

قضیهٔ گلفند–نای‌مارک یک نتیجه بنیادین نظریهٔ عملگرها است. برای مثال، اثباتی جدید از قضیهٔ طیفی، ممکن است به شرح زیر باشد. فرض کنید T یک عملگر خودالحاقی یا نرمال روی یک فضای هیلبرت H است و فرض کنید A جبر C^* جابه‌جایی تولیده شده توسط T باشد. بنا به قضیهٔ گلفند–نای‌مارک، A با $\mathcal{C}(X)$ به‌ازای یک فضای X یکریخت است که در واقع این فضا را می‌توان با طیف

[۱] C^*-identity

T یکی گرفت. اگر v برداری واحد در H باشد، آنگاه فرمول $S \mapsto \langle Sv, v\rangle$ یک حالت ϕ روی A تعریف می‌کند. فضای GNS مربوط به این حالت، یک فضای هیلبرت از توابع روی X است و اعضای $A = \mathcal{C}(X)$ همانند عملگرهای ضرب در آن اعضا، عمل می‌کنند. به‌ویژه، T به‌عنوان یک عملگر ضرب رفتار می‌کند. با کمی تلاش آشکار می‌شود که T به‌طور یکانی با این عملگر ضرب یا دست‌کم با جمع مستقیمی از چنین عملگرهایی (که خود هر یک، یک عملگر ضرب روی یک فضای بزرگتر است) هم ارز است.

توابع پیوسته می‌توانند ترکیب شوند: اگر f و g توابع پیوسته (با برد g مشمول در دامنهٔ f) باشند، آن‌گاه $f \circ g$ نیز تابعی پیوسته است. از آنجا که قضیهٔ گلفند–نای‌مارک می‌گوید هر عنصر خودالحاقی a از یک جبر C^* مانند A در یک جبر یکریخت با توابع پیوسته روی طیف a می‌نشیند، نتیجه می‌گیریم که اگر $a \in A$ خودالحاقی باشد و اگر f یک تابع پیوستهٔ تعریف شده روی طیف a باشد، آن‌گاه عملگر $f(a)$ در A موجود است. این حسابان تابعی[1] یک ابزار تکنیکی کلیدی در نظریهٔ جبرهای C^* است. مثلاً، فرض کنید $u \in A$ یکانی است و $\|u - ۱\| < ۲$. در این صورت طیف u زیرمجموعه‌ای از دایرهٔ واحد در $\mathbb{C}$ است که شامل -۱ نیست. می‌توان شاخه‌ای پیوسته از تابع لگاریتم مختلط را روی چنین زیرمجموعه‌ای تعریف کرد و نتیجه گرفت که یک عنصر $a = \log u$ از جبر وجود دارد به‌طوری که $a = -a^*$ و $u = e^a$. بنابراین مسیر $t \mapsto e^{ta}, ۰ \leq t \leq ۱$ مسیر پیوسته‌ای از عضوهای یکانی در A است که u را به عضو همانی وصل می‌کند. لذا هر عضو یکانی که به اندازهٔ کافی به عضو همانی نزدیک باشد، به‌وسیلهٔ یک مسیر از عضوهای یکانی به عضو همانی متصل می‌شود.

۲.۳. مثال‌های بیشتری از جبرهای C^*.

۱.۲.۳. *عملگرهای فشرده.* یک عملگر روی یک فضای هیلبرت دارای رتبهٔ متناهی است اگر برد آن زیرفضایی متناهی‌بعد باشد. عملگرهای با رتبهٔ متناهی تشکیل یک جبر می‌دهند و بستار این جبر یک C^*–جبر به نام جبر عملگرهای فشرده است و با $\mathcal{K}$ نشان داده می‌شود. همچنین می‌توان به $\mathcal{K}$ را به‌عنوان «حد» جبرهای ماتریسی

$$M_۱(\mathbb{C}) \to M_۲(\mathbb{C}) \to M_۳(\mathbb{C}) \to \cdots$$

[1] functional calculus

نگاه کرد که در آن هر جبر ماتریسی مشمول جبر بعد از خود توسط

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

است. بسیاری از عملگرهای طبیعی از جمله عملگرهای انتگرالی که از نظریهٔ فردهلم برآمدند، فشرده هستند. عملگر همانی روی یک فضای هیلبرت فشرده است اگر و تنها اگر آن فضای هیلبرت متناهی‌بعد باشد.

۲.۲.۳. جبر CAR. نمایش $\mathcal{K}$ به‌عنوان حدی از جبرهای ماتریسی، ما را به این سمت هدایت می‌کند که «حدهای» دیگری از این دست را نیز در نظر بگیریم. (در اینجا تلاش نمی‌کنیم این حدها را به‌طور رسمی تعریف کنیم، اما مهم است که توجه داشته باشید حد یک دنبالهٔ

$$A_۱ \to A_۲ \to A_۳ \to \cdots$$

به همریختی‌های $A_i \to A_{i+۱}$ و نیز جبرهای A_i بستگی دارد.) یک مثال مهم، حد

$$M_۱(\mathbb{C}) \to M_۲(\mathbb{C}) \to M_۴(\mathbb{C}) \to \cdots ,$$

است که در آن، هر جبر ماتریسی توسط

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & \circ \\ \circ & A \end{bmatrix}$$

مشمول در جبر ماتریسی بعد از خود است. این جبر CAR[۱] نامیده می‌شود، زیرا شامل عضوهایی است که روابط پادجابه‌جاگری متعارف که از نظریهٔ کوانتمی برمی‌آیند را نمایش می‌دهد. جبرهای C^* دارای کاربردهای متعددی در نظریهٔ میدان‌های کوانتمی و مکانیک آماری کوانتمی هستند که فرمول‌بندی فون نوی‌من از نظریهٔ کوانتمی برحسب فضای هیلبرت را تعمیم می‌دهند.

۳.۲.۳. جبر C^* گروهی. اگر G یک گروه و $g \to U_g$ یک نمایش یکانی از G روی فضای هیلبرت H باشد، می‌توان کوچکترین جبر C^* عملگرهای روی H را که شامل همهٔ U_gهاست در نظر گرفت؛ این جبر C^* تولید شده توسط این نمایش نامیده می‌شود. نمایش منظم روی فضای هیلبرت $\ell^۲(G)$ تولید شده توسط G مثال مهمی است که در بخش ۲.۲ آن را تعریف کردیم. جبر C^*ای که G

[۱] canonical anticommutation relations

تولید می‌کند با $C_r^*(G)$ نشان داده می‌شود. زیرنویس «r» اشاره به نمایش منظم دارد. در نظر گرفتن نمایش‌های دیگر به جبرهای C^* گروهی دیگری، که بالقوه متفاوت هستند، رهنمون می‌شود.

برای مثال، حالت $G = \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که این یک گروه جابه‌جایی است، C^*-جبر آن نیز جابه‌جایی است و لذا طبق قضیهٔ گلفند-نای‌مارک به‌ازای یک X مناسب، با $\mathcal{C}(X)$ یکریخت است. در واقع، X دایرهٔ واحد $S^۱$ است و یکریختی

$$\mathcal{C}(S^۱) \cong C_r^*(\mathbb{Z})$$

هر تابع روی دایره را به سری فوریهٔ آن می‌برد.

حالت‌های تعریف شده روی جبرهای C^* گروهی به توابع معین مثبت تعریف شده روی گروه‌ها، و لذا به نمایش‌های گروه‌های یکانی، متناظر می‌شوند. به این ترتیب، نمایش‌های جدید ساخته و مطالعه می‌شوند. به‌عنوان مثال، با استفاده از حالت‌های جبرهای C^* گروهی می‌توان به مجموعهٔ نمایش‌های تحویل‌ناپذیر G ساختار یک فضای توپولوژیک داد.

۴.۲.۳. *جبر دورانی گنگ*[۱]. جبر $C^*(\mathbb{Z})$ با یک عضو یکانی U (متناظر با $۱ \in \mathbb{Z}$) تولید می‌شود. علاوه بر این، این یک مثال جهانی برای چنین C^*-جبری است، به این معنی که به‌ازای هر C^*-جبر A و عضو یکانی $u \in A$، یک و تنها یک همریختی $C^*(\mathbb{Z}) \to A$ وجود دارد که U را به u می‌برد. در واقع این چیزی جز همریختی حسابان تابعی برای عضو یکانی u نیست.

اگر به‌جای مثال بالا، مثال جهانی یک C^*-جبر تولید شده با دو عضو یکانی U و V را در نظر بگیریم منوط به رابطهٔ

$$UV = e^{۲\pi i\alpha} VU,$$

که در آن، α یک عدد گنگ است، آن‌گاه یک C^*-جبر ناجابه‌جایی به‌دست می‌آوریم که آن را جبر دورانی گنگ A_α می‌نامیم. جبرهای دورانی گنگ از دیدگاه‌های متفاوتی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. با استفاده از نظریهٔ K (پایین را ببینید) نشان داده شده است که $A_{\alpha_۱}$ با $A_{\alpha_۲}$ یکریخت است اگر وتنها اگر $\alpha_۱ \pm \alpha_۲$ یک عدد صحیح باشد.

می‌توان نشان داد که جبر دورانی گنگ ساده است که این امر ایجاب می‌کند که هر جفت از عضوهای یکانی V و U که در رابطهٔ جابه‌جاگری بالا صدق کند، یک نسخه از A_α را تولید خواهند کرد. (به تضاد در حالت یک عضو یکانی توجه کنید: ۱ یک عملگر یکانی است اما یک نسخه از $C^*(\mathbb{Z})$ را تولید

[۱] the irrational rotation algebra

نمی‌کند.) این به ما اجازه می‌دهد که یک نمایش ملموس از A_α روی فضای هیلبرت $L^{۲}(S^{۱})$ به‌دست دهیم که در آن، U عملگر دوران به اندازهٔ زاویهٔ $۲\pi\alpha$ و V عملگر ضرب توسط $z : S^{۱} \to \mathbb{C}$ است.

۴. عملگرهای فردهلم

یک عملگر فردهلم بین فضاهای هیلبرت، یک عملگر کراندار T است که هسته و هم‌هستهٔ آن متناهی‌بعد هستند. این مطلب به این معنی است که معادلهٔ همگن $Tu = ۰$ تنها تعدادی متناهی جواب مستقل خطی دارد در حالی که معادلهٔ ناهمگن $Tu = v$ دارای جواب است اگر v تعدادی متناهی شرایط خطی را برآورده کند. این اصطلاحات از کار فردهلم در زمینهٔ معادلات انتگرال ناشی می‌شود؛ او نشان داد که اگر K یک عملگر انتگرالی باشد، آن‌گاه $I + K$ یک عملگر فردهلم است.

برای عملگرهایی که فردهلم در نظرگرفته بود، بعدهای هسته و هم‌هسته باید برابر باشند، اما به‌طور کلی لازم نیست که چنین باشد. عملگر شیفت یکطرفهٔ[۱] S که «بردار سطری» نامتناهی $(a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}, \ldots)$ را به $(۰, a_{۱}, a_{۲}, \ldots)$ می‌نگارد یک مثال از این دست است. معادلهٔ $Su = ۰$ تنها دارای جواب صفر است اما معادلهٔ $Su = v$ یک جواب دارد تنها اگر مختص اول بردار v صفر باشد.

شاخص یک عملگر فردهلم با تفاضل زیر، که عددی صحیح است، تعریف می‌شود:

$$\operatorname{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \dim(\operatorname{coker}(T)).$$

مثلاً هر عملگر وارون‌پذیر یک عملگر فردهلم با شاخص ۰ است، در حالی که عملگر انتقال یکطرفه یک عملگر فردهلم با شاخص ۱− است.

۱.۴. قضیهٔ اتکینسون[۲]. دو دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\left\{ \begin{array}{c} ۲/۱x + y = ۰ \\ ۴x + ۲y = ۰ \end{array} \right\} \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{c} ۲x + y = ۰ \\ ۴x + ۲y = ۰ \end{array} \right\}.$$

هر چند که ضرایب این معادلات خیلی به هم نزدیک هستند، اما بعدهای هسته‌های آنها کاملاً متفاوت هستند: دستگاه دست چپ تنها جواب صفر دارد، در حالی که دستگاه دست راست جواب غیربدیهی $(t, -۲t)$ دارد. بنابراین بعد هسته یک ثابت ناپایدار دستگاه معادلات است. تبصره‌ای مشابه برای بعد هم‌هسته اعمال می‌شود. در مقابل، شاخص، بر خلاف تعریفش به‌عنوان تفاضل دو مقدار ناپایدار، پایدار است.

[۱] unilateral shift operator [۲] Atkinson's theorem

قضیهٔ مهم فردریک اتکینسون به این خواص پایداری بیان دقیقی می‌دهد. قضیهٔ اتکینسون بیان می‌کند که عملگر T فردهلم است اگر و تنها اگر به پیمانهٔ عملگرهای فشرده وارون‌پذیر باشد. این ایجاب می‌کند که هر عملگری که به اندازهٔ کافی نزدیک به یک عملگر فردهلم است خود فردهلم بوده و دارای شاخصی یکسان با آن عملگر فردهلم باشد. همچنین ایجاب می‌کند که اگر T یک عملگر فردهلم و K یک عملگر فشرده باشد، آنگاه $T+K$ نیز یک عملگر فردهلم با شاخصی یکسان با شاخص T است. توجه کنید از آنجا که عملگرهای انتگرالی عملگرهای فشرده هستند، این قضیهٔ اصلی فردهلم را به‌عنوان یک حالت خاص در بر دارد.

۲.۴. قضیهٔ شاخص توپلیتس[1]. توپولوژی [I.3 §6.4] آن دسته از ویژگی‌های دستگاه‌های ریاضی را مطالعه می‌کند که تحت اختلال‌های پیوستهٔ آن دستگاه پایا باقی می‌مانند. قضیهٔ اتکینسون می‌گوید که شاخص فردهلم، یک مقدار توپولوژیکی است. در زمینه‌های بسیاری، به‌دست آوردن فرمول برای شاخص یک عملگر فردهلم برحسب مقادیر توپولوژیکِ به‌ظاهر کاملاً متفاوتِ دیگر امکان‌پذیر است. این نوع فرمول‌ها اغلب نشان دهندهٔ روابطی عمیق بین آنالیز و توپولوژی هستند و اغلب کاربردهای قدرتمندی دارند.

ساده‌ترین مثال شامل عملگرهای توپلیتس است. یک عملگر توپلیتس دارای ماتریسی به‌شکل خاص زیر است:

$$T=\begin{pmatrix} b_۰ & b_۱ & b_۲ & b_۳ & \cdots \\ b_{-۱} & b_۰ & b_۱ & b_۲ & \cdots \\ b_{-۲} & b_{-۱} & b_۰ & b_۱ & \cdots \\ b_{-۳} & b_{-۲} & b_{-۱} & b_۰ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

به عبارت دیگر، درایه‌ها در طول هر قطر ماتریس ثابت باقی می‌مانند. دنبالهٔ ضرایب $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ تابع $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{-n}$ را روی دایرهٔ واحد در صفحهٔ مختلط تعریف می‌کند که نماد عملگر توپلیتس نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد یک عملگر توپلیتس که نمادش تابعی پیوسته است که هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، فردهلم است. شاخص آن چیست؟

جواب با نگاه کردن به نماد به‌عنوان نگاشتی از دایرهٔ واحد به اعداد مختلط غیر صفر داده می‌شود: به عبارت دیگر، به‌عنوان یک مسیر بسته در صفحهٔ مختلط غیرصفر. ثابت توپولوژیکی بنیادی چنین مسیری

[1] Toeplitz index theorem

عدد چرخشی[۱] آن است: تعداد دفعاتی که دور مبدأ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخد. می‌توان ثابت کرد که شاخص یک عملگر توپلیتس با نماد غیرصفر f قرینهٔ عدد چرخشی f است. برای مثال اگر f تابع $f(z) = z$ (با عدد چرخشی ۱+) باشد، آن‌گاه عملگر توپلیتس مربوطه، انتقال یکطرفهٔ S است که پیش‌تر با آن مواجه شدیم (با شاخص ۱−). قضیهٔ شاخص توپلیتس یک مورد بسیار خاص از قضیهٔ شاخص آتیا–سینگر[۲] [V.2] است که یک فرمول توپولوژیکی برای شاخص‌های عملگرهای مختلف فردهلم می‌دهد که در هندسه رخ می‌دهند.

۳.۴. عملگرهای اساساً نرمال[۳]. قضیهٔ اتکینسون نشان می دهد که اختلال‌های فشرده از یک عملگر به یک معنی ”کوچک“ هستند. این امر منجر به مطالعهٔ خواصی از یک عملگر می‌شود که با اختلال فشرده ثابت باقی می‌مانند. برای مثال، طیف اساسی یک عملگر T عبارت است از مجموعهٔ اعداد مختلط λ که $T - \lambda I$ فردهلم نیست (یعنی، وارون‌پذیر به پیمانه عملگرهای فشرده). دو عملگر T_1 و T_2 به‌طور اساسی هم‌ارز هستند اگر یک عملگر یکانی U وجود داشته باشد به‌طوری که UT_1U^* و T_2 با تقریب یک عملگر فشرده یکی باشند (یعنی $T_2 - UT_1U^*$ فشرده باشد). قضیه‌ای زیبا از هرمان وایل[۴] [VI.80] حکم می‌کند که دو عملگر خودالحاقی یا نرمال به‌طور اساسی هستند اگر و تنها اگر دارای طیف اساسی یکسانی باشند.

ممکن است استدلال شود که محدود شدن به عملگرهای نرمال در این قضیه نامناسب است. از آنجا که با خواصی در ارتباط هستیم که با اختلال فشرده تغییر نمی‌کنند، آیا مناسب‌تر نیست که عملگرهای اساساً نرمال را در نظربگیریم – یعنی، عملگرهایی مانند T که برای آن $T^*T - T^*T$ فشرده است؟ این تغییر به‌ظاهر ناچیز منجر به نتیجه‌ای غیر منتظره می‌شود. انتقال یکطرفهٔ S مثالی از یک عملگر اساساً نرمال است. طیف اساسی آن دایرهٔ واحد است، همان گونه که طیف اساسی الحاقی آن نیز اینچنین است؛ اما S و S^* نمی‌توانند اساساً هم‌ارز باشند، زیرا S شاخص ۱− و S^* شاخص ۱+ دارد. بنابراین اجزای جدیدی، ورای طیف اساسی، برای رده‌بندی عملگرهای به‌طور اساسی نرمال مورد نیاز است. در واقع به‌راحتی از قضیهٔ اتکینسون نتیجه می‌شود که اگر عملگرهای اساساً نرمال T_1 و T_2 اساساً هم‌ارز باشند، آنگاه نه تنها باید طیف اساسی یکسانی داشته باشند بلکه به‌ازای هر λ که در طیف اساسی نیست، شاخص فردهلم $T_1 - \lambda I$ باید با شاخص فردهلم $T_2 - \lambda I$ برابر باشد. عکس این گزاره در دههٔ ۱۹۷۰ توسط لری براون[۵]، رون داگلاس[۶]، و پیتر فیلمور[۷] با استفاده از روش‌های کاملاً جدیدی که منجر به عصر جدیدی از تعاملات بین نظریهٔ C^*–جبر و توپولوژی گردید، ثابت شد.

[۱]winding number [۲]Atiyah–Singer index theorem [۳]essentially normal operators [۴]Hermann Weyl
[۵]Larry Brown [۶]Ron Douglas [۷]Peter Fillmore

۴.۴. نظریهٔ K. یک ویژگی قابل توجه کار براون–داگلاس–فیلمور حضور ابزار توپولوژی جبری [IV.6] در کار آنها است؛ به‌ویژه نظریهٔ K. به یاد داشته باشید که بر اساس قضیهٔ گلفند–نای‌مارک، مطالعهٔ فضاهای توپولوژیک (مناسب) و مطالعهٔ C^*–جبرهای جابه‌جایی یکی و یکسان هستند؛ همهٔ روش‌های توپولوژیکی را می‌توان از طریق یکریختی گلفند–نای‌مارک به C^*–جبرهای جابه‌جایی انتقال داد. با این مشاهده، طبیعی است که بپرسید کدام‌یک از این روش‌ها را می‌توان بیشتر تعمیم داد تا اطلاعاتی دربارهٔ همهٔ C^*–جبرها اعم از جابه‌جایی یا ناجابه‌جایی فراهم آورد. اولین و بهترین مثال نظریهٔ K است.

در ابتدایی‌ترین شکل آن، نظریهٔ K به هر C^*–جبر A یک گروه آبلی $K(A)$ و به هر همریختی C^*–جبرها یک همریختی گروه‌های آبلی متناظر می‌سازد. بلوک‌های سازندهٔ $K(A)$ را می‌توان به‌عنوان عملگرهای فردهلم تعمیم‌یافتهٔ مرتبط با A نگریست؛ تعمیم این است که این عملگرها روی فضاهای هیلبرتی عمل می‌کنند که در آن اسکالرهای مختلط با عناصر C^*–جبر A جایگزین شده‌اند. گروه $K(A)$ عبارت است از گردایهٔ مؤلفه‌های همبندی فضای همهٔ چنین عملگرهای فردهلم تعمیم‌یافته. بنابراین اگر به‌عنوان مثال، $A = \mathbb{C}$ (که در این صورت با عملگرهای فردهلم کلاسیک سر و کار داریم)، آن‌گاه $K(A) = \mathbb{Z}$. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که دو عملگر فردهلم با یک مسیر از عملگرهای فردهلم به هم وصل می‌شوند اگر و تنها اگر دارای شاخص یکسانی باشند.

یکی از نقاط قوت بزرگ نظریهٔ K این است که کلاس‌های نظریهٔ K ممکن است از انواعی از اجزای گوناگون ساخته شده باشند. مثلاً هر تصویر $p \in A$ یک کلاس در $K(A)$ تعریف می‌کند که می‌توان آن را به‌عنوان یک ''بعد'' برای برد P در نظر گرفت. این امر نظریهٔ K را به رده‌بندی عامل‌ها (بخش ۲.۲) ارتباط می‌دهد و ابزاری مهم در رده‌بندی خانواده‌های مختلف C^*–جبرها مانند جبرهای دورانی گنگ شده است. (زمانی تصور می‌شد که جبر دورانی گنگ ممکن است اصلاً شامل هیچ تصویری غیربدیهی نباشد: ساخت چنین تصاویری توسط مارک ریفل[۱] گامی مهم در توسعهٔ نظریهٔ K جبرهای C^* بود. یکی دیگر از مثال‌های زیبا، قضیهٔ رده‌بندی جورج الیوت برای C^* جبرهای به‌طور موضعی متناهی‌بعد مانند جبر CAR است. چنین جبرهایی کاملاً توسط پایاهای نظریهٔ K تعیین می‌شوند.

مشخص شده است که مسألهٔ محاسبهٔ گروه‌های نظریهٔ K برای C^*–جبرهای ناجابه‌جایی مخصوصاً برای C^*–جبرهای گروهی، دارای ارتباط‌های مهمی با توپولوژی است. در واقع، برخی پیشرفت‌های کلیدی در توپولوژی از طریق نظریهٔ جبرهای C^* به این صورت رخ داده‌اند. بدین طریق به متخصصین جبرهای عملگری این امکان را می‌دهد که بخشی از دینی را که به توپولوژی‌دان‌ها برای نظریهٔ K داشتند،

[۱] Marc Rieffel

ادا کنند. مشکل اصلی سازماندهی در این زمینه حدس باوم-کن[۱] است که توصیفی از نظریهٔ K برای C^*-جبرهای گروهی بر حسب پایاهای آشنا در توپولوژی جبری پیشنهاد می‌کند. بسیاری از پیشرفت‌های این حدس تا به امروز نتیجهٔ کارگنادی کاسپاروف[۲] است که به طرز چشمگیری اکتشافات براون، داگلاس، و فیلمور را گسترش داد؛ نه تنها برای پوشش دادن مجموعه‌های تک‌عضوی عملگرهای اساساً نرمال بلکه برای دستگاه‌های ناجابه‌جایی عملگرها، یعنی برای جبرهای C^*. کار کاسپاروف در حال حاضر مؤلفهٔ مرکزی نظریهٔ جبرهای عملگری است.

۵. هندسهٔ ناجابه‌جایی

ابداع دکارت[۳] [VI.11] نشان داد که می‌توان هندسه را با فکر کردن در مورد توابع مختصاتی به‌جای فکر کردن مستقیم در مورد نقاط در فضا و روابط متقابل آنها انجام داد: این توابع مختصاتی آشنا x، y، و z هستند. قضیهٔ گلفند-نای‌مارک را می‌توان به چشم نمونه‌ای از این ایدهٔ گذر از «تصویر نقطه‌ای» فضای X به «تصویر میدانی» جبر $\mathcal{C}(X)$ متشکل از توابع پیوسته روی X نگریست. موفقیت نظریهٔ K در جبرهای عملگری ما را به این امر فرا می‌خواند که ببینیم آیا تصویر میدانی ممکن است از تصویر نقطه‌ای قوی‌تر باشد، زیرا نظریهٔ K را می‌توان بر جبرهای C^* ناجابه‌جایی که دارای هیچ «نقطه‌ای» (همریختی‌های به $\mathbb{C}$) نیستند، اعمال کرد.

یکی از هیجان انگیزترین بخش‌های پژوهش در نظریهٔ جبرهای عملگری حرکت در امتداد راهی است که این افکار را گسترش داده است. در برنامهٔ هندسهٔ ناجابه‌جایی کن[۴] این ایده را که یک C^*-جبر کلی را باید به‌سان جبری از توابع روی یک «فضای ناجابه‌جایی» در نظر گرفت، می‌گیرد و پیش می‌رود تا روایت‌های «ناجابه‌جایی» بسیاری از ایده‌های هندسی و توپولوژیکی و همچنین ساختارهای کاملاً جدیدی که هیچ همزاد جابه‌جایی ندارند را ارائه دهد. هندسهٔ ناجابه‌جایی از صورت‌بندی خلاق ایده‌های هندسهٔ معمولی شروع می‌شود ولی تنها با عملگرها و توابع، نه با نقطه‌ها، سروکار دارد.

مثلاً دایرهٔ S^1 را در نظر بگیرید. جبر $\mathcal{C}(S^1)$ همهٔ ویژگی‌های توپولوژیکی S^1 را منعکس می‌کند، اما برای لحاظ کردن ویژگی‌های متریک (مربوط به فاصلهٔ) آن نه تنها به $\mathcal{C}(S^1)$ بلکه به زوج متشکل از جبر $\mathcal{C}(S^1)$ و عملگر $D = i\frac{d}{d\theta}$ روی فضای هیلبرت $H = L^2(S^1)$ می‌نگریم. توجه کنید که اگر f یک تابع روی دایره (به‌دیدِ یک عملگر ضرب روی H) باشد، آنگاه جابه‌جاگر $Df - fD$ نیز یک عملگر ضرب در $i\frac{df}{d\theta}$، است. در نتیجه فاصلهٔ زاویه‌ای بین نقاط روی دایره را می‌توان $\mathcal{C}(S^1)$ و D

[۱] Baum–Connes conjecture [۲] Gennadi Kasparov [۳] Descarte [۴] Connes

به‌کمک فرمول زیر به‌دست آورد:

$$d(p,q) = \max\{|f(p) - f(q)| : \|Df - fD\| \leq ۱\}.$$

کن استدلال می‌کند که عملگر $|D|^{-۱}$ نقش «واحد طول قوس ds» را در این و بسیاری از وضعیت‌های پیچیده‌تر دیگر بازی می‌کند.[۱]

جنبهٔ دیگری از مثال‌هایی که کن در نظر می‌گیرد و اهمیتی مرکزی در هندسهٔ ناجابه‌جایی دارد، این است که عملگر $|D|^{-k}$ یک عملگر اثردار (بخش ۵.۱ را نگاه کنید) است وقتی که k به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. در مورد دایره، لازم است که k بزرگ‌تر از ۱ باشد. محاسبات با اثرها، هندسهٔ ناجابه‌جایی را به نظریهٔ کوهمولوژی [IV.6 §4] مرتبط می‌کند. اکنون دو نوع «توپولوژی جبری ناجابه‌جایی» به نام‌های نظریهٔ K و نوع جدیدی از همولوژی که کوهمولوژی دوری[۲] نامیده می‌شود را داریم؛ ارتباط بین این دو توسط یک قضیهٔ شاخص بسیار کلی فراهم شده است.

فرآیندهای متعددی وجود دارند که C^*-جبرهای ناجابه‌جایی را (که روش‌های کن را می‌شود بر آنها اعمال کرد) از داده‌های کلاسیک هندسی می‌سازند. جبرهای دورانی گنگ A_θ نمونه‌هایی از آن هستند؛ تصویر کلاسیکی که به آن جبرهای دورانی گنگ اعمال می‌شوند فضای خارج قسمتی [I.3 §3.3] دایره نسبت به گروه دوران‌های با مضرب‌های [صحیح] θ است. در روش‌های کلاسیک هندسه و توپولوژی، قادر نیستیم این فضای خارج‌قسمتی را به‌کار بریم، اما رویکرد ناجابه‌جایی از طریق A_θ بسیار موفق‌تر است.

یک امکان هیجان‌انگیز اما گمانه‌زنانه این است که باید قوانین اصلی فیزیک از دیدگاه هندسه ناجابه‌جایی مطالعه کرد. گذر به C^*-جبرهای ناجابه‌جایی می‌تواند مشابه گذر از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتمی باشد. به هر روی، کن استدلال کرده است که C^*-جبرهای ناجابه‌جایی نقشی در توصیف دنیای فیزیکی بازی می‌کنند حتی پیش از اینکه گذر به فیزیک کوانتمی انجام پذیرد.

مراجع

[1] A. Connes, Noncommutative Geometry. (1995), Boston, MA: Academic Press.

[2] K. Davidson, C^*-Algebras by Example. (1996), Providence, RI: American Mathematical Society.

[۱] عملگر D کاملاً وارون‌پذیر نیست، زیرا روی توابع ثابت صفر می‌شود. قبل از در نظر گرفتن عملگرهای وارون، اصلاحی مختصر باید انجام داد. عملگر $|D|$، بنا به تعریف، ریشهٔ مثبت $D^۲$ است.

[۲] cyclic cohomology

[3] P. Fillmore, A User's Guide to Operator Algebras. (1996), Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. New York: John Wiley.

[4] P. R. Halmos, What does the spectral theorem say? American Mathematical Monthly (1963), 70: 241–247.

سمیه رحیمی: دانشگاه گلستان، دانشکده علوم، گروه ریاضی
رایانامه: somiko1365@ymail.com
بامداد یاحقی: دانشگاه گلستان، دانشکده علوم، گروه ریاضی
رایانامه: bamdad5@hotmail.com