فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۱۱ تا ۲۸

استخراج فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله در مدل هستون

بهناز زرگری، شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، راما کنت

چکیده

قیمت‌گذاری اختیارهای معامله از مسائل مطرح در حوزه‌ی ریاضیات مالی است. نوشته‌ی حاضر شامل مروری بر حل این مسأله در بازارهای کامل، توضیح روش می‌نیمم سازی موضعی ریسک به عنوان یک روش پوشش ریسک در بازارهای ناکامل و سرانجام به‌کارگیری این روش برای تعیین تابع قیمت‌گذاری در مدل هستون است.

۱. مقدمه

فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ سهامی را به قیمت S_0 بخرید و قصد داشته باشید آن را تا زمان $T > 0$ نگه دارید و سپس به قیمت S_T بفروشید. از آنجایی که نوسانات قیمت سهام تصادفی است، در لحظه‌ی $t = 0$ مقدار S_T معلوم نیست. پس این امکان وجود دارد که به علت کاهش قیمت سهام، متضرر شوید.

اکنون یک قرارداد مالی بدین صورت در نظر بگیرید: اگر در لحظه‌ی $t = 0$ مبلغ π_0 را بپردازید، در لحظه‌ی T می‌توانید (در صورت تمایل) سهام خود را به قیمت (از پیش تعیین شده‌ی) K بفروشید. در صورت انعقاد چنین قراردادی، در لحظه‌ی T، دو حالت ممکن است: اگر $S_T < K$، سهام را به قیمت K به طرف قرارداد می‌فروشید و با پرداخت مبلغ S_T سهام را از بازار خریداری می‌کنید و بدین ترتیب سود $K - S_T$ عاید شما خواهد شد و چنانچه $S_T \geq K$ از قرارداد استفاده نخواهید کرد و لذا سود شما برابر صفر خواهد بود. به عبارت دیگر با پرداخت مبلغ تعیینی π_0 در زمان $t = 0$، مبلغ تصادفی $\max\,(K - S_T, 0)$ را در زمان T دریافت خواهید کرد. سؤال این است که مقدار «عادلانه» برای π_0 چقدر است؟ چنین قراردادی در ریاضیات مالی، اختیار فروش اروپایی[1] نامیده

1) European put option

می‌شود. به طور کلی منظور ما از اختیار معامله، قراردادی است که در زمان T مبلغ تصادفی $H(\omega)$ را به دارنده‌ی آن پرداخت می‌کند؛ در مورد اختیار فروش اروپایی، $H(\omega) = \max(K - S_T(\omega), 0)$.
در بازارهای مالی علاوه بر دارایی پایه نظیر سهام و ورق قرضه، اختیار معامله نیز خرید و فروش می‌شود. منظور از حل مسأله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله H، تعیین قیمت «عادلانه‌ی» آن در لحظه‌ی $t \in [0, T]$ است که با $\pi_t(H)$ نشان داده می‌شود.
بخش ۱ بیانی است توصیفی درباره‌ی «قیمت‌گذاری عادلانه». در بخش ۲ مدل هستون را معرفی می‌کنیم. خواهیم دید که بازار در این مدل ناکامل است. بخش ۳ به توضیح روشی برای پوشش ریسک در بازارهای ناکامل اختصاص دارد. در بخش ۴ این روش را برای قیمت‌گذاری اختیارهای معامله در مدل هستون به کار می‌بریم.

۱.۱. قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ

این بخش مروری است بر نحوه‌ی به‌دست آوردن فرمول قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ. بدین منظور چارچوب ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن زمان‌های خرید و فروش گسسته و فضای نمونه‌ای، متناهی است.
فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فضای نمونه‌ای Ω متناهی باشد و برای هر $\omega \in \Omega$، $P(\omega) > 0$؛ بنابراین سرمایه‌گذاران مدل ما در مورد ممکن (ناممکن) بودن پیشامدها متفق‌القولند، هر چند ممکن است احتمال‌های متفاوتی را به این پیشامدها نسبت دهند.
تاریخ سررسید[1] همه‌ی قراردادهای منعقد شده در این مدل را T و زمان‌های خرید و فروش را $t = 0, 1, \dots, T$ در نظر می‌گیریم. با گذشت زمان اطلاعات ما راجع به بازار افزایش می‌یابد و ما این جریان اطلاعات را با پالایهٔ[2] $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_T\}$ نشان می‌دهیم. به لحاظ شهودی $\mathcal{F}_t$ عبارت است از اطلاعات ما از بازار تا لحظه‌ی t. معمولاً فرض می‌شود $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ و $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
فرض می‌کنیم در این بازار دو نوع دارایی خرید و فروش می‌شود: یکی دارایی بدون ریسک (مثلاً ورق قرضه) و دیگری دارایی ریسکی (مثلاً سهام). قیمت این دو دارایی را به ترتیب با فرایندهای تصادفی مثبت و $\mathbb{F}$ ــ سازگار $S_t^{(0)}$ و $S_t^{(1)}$ نشان می‌دهیم. $\mathbb{F}$ ــ سازگار بودن این دو فرایند بدین معنی است که با داشتن اطلاعات بازار تا زمان t، $S_t^{(0)}$ و $S_t^{(1)}$ تعیین می‌شوند. در این جا تنها یک دارایی ریسکی در نظر گرفته‌ایم در حالی که می‌توان تمام نتایج را به حالتی که در بازار بیش از یک دارایی ریسکی موجود است تعمیم داد. معمولاً برای سهولت بازار را نرمال می‌کنند؛ یعنی تمام قیمت‌ها را به قیمت دارایی بدون ریسک تقسیم می‌کنند. بدین‌ترتیب قیمت (تنزیل شده‌ی) دارایی بدون ریسک همواره برابر ۱ و قیمت (تنزیل شده‌ی) دارایی ریسک دار برابر $S_t = \frac{S_t^{(1)}}{S_t^{(0)}}$ است. از این پس منظور ما از قیمت، همین قیمت‌های تنزیل شده خواهد بود.

1) maturity 2) filtration

یک سبد مالی[1] عبارت است از فرایند تصادفی پیش‌بینی‌پذیری چون $\varphi = (\varphi_t)_{t=0}^{T}$ که $\varphi_t = (\theta_t, \xi_t)$. پیش‌بینی‌پذیر بودن φ یعنی $\varphi_t \in \mathcal{F}_{t-1}$ برای هر $t = 1, \cdots, T$. θ_t و ξ_t به ترتیب تعداد سهام و اوراق قرضه موجود در سبد مالی را در لحظه‌ی t نشان می‌دهند. ارزش سبد مالی عبارت است از فرایند تصادفی $V = (V_t)_{t=0}^{T}$ که $V_t = \theta_t S_t + \xi_t$. در لحظه‌ی t پس از مشاهده‌ی قیمت‌ها (با استفاده از پیش‌بینی‌پذیر بودن φ)، φ_{t+1} تعیین می‌شود که ارزش آن برابر $\theta_{t+1} S_t + \xi_{t+1}$ است. در لحظه‌ی $t + 1$ پس از مشاهده‌ی قیمت‌ها (و قبل از تعیین سبد سرمایه‌ی جدید) ارزش سبد مالی $\theta_{t+1} S_{t+1} + \xi_{t+1}$ است. پس سود حاصل از این سبد مالی روی بازه‌ی $[t, t+1)$ برابر است با $\theta_{t+1}(S_{t+1} - S_t)$. بنابراین تعریف سود به عنوان فرایند تصادفی $G = (G_t)_{t=0}^{T}$ که $G_t(\varphi) = \sum_{i=0}^{t-1} \theta_{i+1}(S_{i+1} - S_i)$ مناسب به نظر می‌رسد. توجه می‌کنیم که سود ممکن است منفی باشد!

در برخورد با مسأله‌ی قیمت‌گذاری اختیارهای معامله، سبدهای مالی خودتأمین[2] از اهمیت خاصی برخوردارند. منظور از یک استراتژی خودتأمین، سبد مالی‌ای است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها منحصر به خرید سهام و اوراق قرضه و درآمدها ناشی از فروش سهام و اوراق قرضه باشد. به عبارت دیگر هیچ‌گاه پولی به سبد مالی تزریق نمی‌شود و پولی از آن برداشت نمی‌شود. برای فرمول بندی ریاضی این مفهوم توجه می‌کنیم که ارزش سبد مالی در لحظه‌ی t برابر است با $\theta_t S_t + \xi_t$ و این مبلغ صرف تشکیل سبد مالی جدید به ارزش $\theta_{t+1} S_t + \xi_{t+1}$ می‌شود، سبد مالی $\varphi = (\theta, \xi)$ را خودتأمین می‌نامیم هرگاه

$$\forall t = 0, 1, \ldots, T-1 \qquad \Delta\theta_t S_t + \Delta\xi_t = 0$$

که $\Delta\theta_t = \theta_{t+1} - \theta_t$. به آسانی می‌توان بررسی کرد که این تعریف معادل است با ثابت بودن فرایند هزینه‌ی $C(\varphi) := V(\varphi) - G(\varphi)$. به عبارت دقیق‌تر، خودتأمین بودن سبد مالی معادل است با این که

$$\forall t = 1, \ldots, T \qquad C_t(\varphi) = \text{ثابت} = V_0(\varphi). \tag{1}$$

یک فرصت آربیتراژ[3] عبارت است از سبد مالی خودتأمین φ که

$$P(\forall t = 0, 1, \ldots, T, V_t(\varphi) \geq 0) = 1 \quad \text{و} \quad P(V_T(\varphi) > V_0(\varphi)) \neq 0$$

به طور شهودی فرصت آربیتراژ، امکان به دست آوردن سود بدون متحمل شدن ریسک است.
یک مطالبه‌ی مشروط[4] چیزی نیست جز یک متغیر تصادفی نامنفی و $\mathcal{F}_T$ —اندازه‌پذیر H. هدف ما یافتن عملگر قیمت‌گذاری $\pi = (\pi_t)_{t=0}^{T}$ است طوری که $\pi_t(H)$ قیمت مطالبه‌ی مشروط H در لحظه‌ی t باشد.
ابتدا ببینیم که از π به عنوان عملگر قیمت‌گذاری چه انتظاراتی داریم:

1) portfolio 2) self-financed 3) arbitrage apportunity 4) contingent claim

(i) عملگر قیمت‌گذاری تنها وقتی قابل استفاده است که با اطلاعات موجود تا لحظه‌ی t بتوان $\pi_t(H)$ را محاسبه نمود، پس π باید $\mathcal{F}$ ـ سازگار باشد.

(ii) ارزش هر مطالبه‌ی مشروط با عایدی منفی[1] باید نامنفی باشد:

$$\forall\omega \in \Omega \quad H(\omega) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall t \in \{0, 1, \dots, T\} \quad \pi_t(H) \geq 0$$

(iii) خطی باشد: $\pi_t(\sum_{i=1}^n c_i H_i) = \sum_{i=1}^n c_i \pi_t(H_i)$

(iv) فرصت آربیتراژ ایجاد نکند.

فرض کنیم $A \in \mathcal{F}$ یک پیشامد و 1_A قراردادی باشد که در صورت رخ دادن A یک دلار به دارنده‌ی آن پرداخت کند و در غیر این صورت چیزی پرداخت نکند. در واقع 1_A شرط‌بندی به مبلغ یک دلار روی پیشامد A است. تعریف می‌کنیم $Q(A) = \pi_0(1_A)$. چون $0 \leq 1_A \leq 1$ از (ii) نتیجه می‌شود $0 \leq Q(A) \leq 1$. اگر پیشامدهای $A_1, \dots, A_n$ مجزا باشند، $1_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}$ و از خطی‌بودن π نتیجه می‌شود $Q(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n Q(A_i)$. پس Q روی $(\Omega, \mathcal{F})$ یک اندازه احتمال است. برای مطالبه‌ی مشروطی چون $H = \sum_{i=1}^n c_i 1_{A_i}$ با استفاده از خاصیت خطی بودن π داریم:

$$\pi_0(H) = \sum_{i=1}^n c_i \pi_0(1_{A_i}) = \sum_{i=1}^n c_i Q(A_i) = E^Q(H)$$

که E^Q امید ریاضی نسبت به احتمال Q است.

اگر A پیشامدی ناممکن باشد؛ یعنی $P(A) = 0$، مطالبه‌ی مشروط 1_A برای سرمایه‌گذار فاقد ارزش است. از طرف دیگر عملگر قیمت گذاری π در لحظه‌ی $t = 0$ ارزش $Q(A) = \pi_0(1_A)$ را به آن نسبت می‌دهد. پس باید داشته باشیم $Q(A) = 0$. برعکس هر گاه $Q(A) = 0$، عملگر قیمت‌گذاری π بهای صفر را به 1_A نسبت می‌دهد و لذا در صورتی که $P(A) \neq 0$، خرید چنین مطالبه‌ی مشروطی (به قیمت صفر) آربیتراژ ایجاد می‌کند. بنابراین بدون آربیتراژ بودن بازار ایجاب می‌کند که اندازه‌های احتمال P و Q معادل باشند:

$$P \sim Q \quad : \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad Q(A) = 0 \iff P(A) = 0$$

اگر π در شرط زیر صدق کند

(v) **پیوستگی:** برای دنباله‌ی مطالبات مشروط $\{H_n\}_{n=1}^\infty$، از $H_n \longrightarrow H \quad P - a.s.$ بتوان نتیجه گرفت $\pi_0(H) = \lim_n \pi_0(H_n)$ ،

1) pay off

آنگاه، برای هر مطالبه‌ی مشروط کران‌دار H (با استفاده از قضیه‌ی همگرایی تسلطی) خواهیم داشت $\pi_\circ(H) = E^Q(H)$ و اگر H کران دار نباشد، تعریف می‌کنیم

$$H_n(\omega) = \begin{cases} H(\omega) \quad ; \quad H(\omega) \leq n \text{ اگر } \\ \circ \quad ; \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت $H_n \uparrow H$، $P - a.s.$ و قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد

$$\pi_\circ(H) = \lim_{n\to\infty} \pi_\circ(H_n) = \lim_{n\to\infty} E^Q(H_n) = E^Q(H).$$

اگر π در خاصیت سازگاری در زمان نیز صدق کند:

(vi) **سازگاری در زمان:** اگر $H_۱$ مطالبه‌ی مشروطی با عایدی H در زمان T و $H_۲$ مطالبه‌ی مشروط دیگری با پرداخت $\pi_t(H)$ در زمان t باشد، $\pi_\circ(H_۱) = \pi_\circ(H_۲)$.

آنگاه، $\pi_t(H) = E^Q(H|\mathcal{F}_t)$.

در لحظه‌ی t، یک سهم به قیمت S_t در بازار معامله می‌شود. پس اگر در لحظه‌ی t یک سهم خریداری کنیم و تا لحظه‌ی T نگه داریم، عایدی نهایی آن S_T خواهد شد. بنابراین عملگر قیمت‌گذاری در لحظه‌ی t ارزش $E^Q[S_T|\mathcal{F}_t]$ را به آن نسبت می‌دهد. از بدون آربیتراژ بودن بازار نتیجه می‌شود:

$$S_t = t \text{ بهای این کالا در لحظه‌ی } = E^Q[S_T|\mathcal{F}_t]$$

پس در یک بازار عاری از آربیتراژ فرایند قیمت کالای مورد معامله یک Q ـ مارتینگل است. اگر $P \sim Q$ و فرایند قیمت $(S_t)_{t=\circ}^T$ یک Q ـ مارتینگل باشد، Q را اندازه‌ی مارتینگل معادل[۱] می‌نامند. بحث فوق نشان می‌دهد که اگر π یک عملگر قیمت‌گذاری با خواص (i) تا (vi) باشد،

$$\pi_t(H) = E^Q(H|\mathcal{F}_t). \qquad (۲)$$

که Q اندازه‌ی مارتینگل معادل است. رابطه‌ی (۲)، فرمول قیمت‌گذاری بدون آربیتراژ نامیده می‌شود. به آسانی می‌توان بررسی کرد که عکس این مطلب نیز صحیح است؛ یعنی اگر Q یک اندازه‌ی مارتینگل معادل باشد، آنگاه عملگر قیمت‌گذاری تعریف شده توسط (۲)، در خواص (i) تا (vi) صدق می‌کند.

نتیجه‌ی ۱. بین اندازه‌های مارتینگل معادل و عملگرهای قیمت‌گذاری با ویژگی‌های (i) تا (vi)، یک تناظر یک به یک موجود است.

بحث بعدی ما راجع به وجود اندازه‌ی مارتینگل معادل است. فرض کنیم Q یک اندازه‌ی مارتینگل معادل و φ یک سبد مالی خودتأمین باشد. با استفاده از (۱) داریم:

1) equivalent martingale measure

$$V_t(\varphi) = V_\circ(\varphi) + G_t(\varphi).$$

چون S تحت Q مارتینگل است، $G_t(\varphi)$ نیز یک Q ـــ مارتینگل است و در نتیجه $E^Q(G_t(\varphi)) = \circ$ که نشان می‌دهد متغییر تصادفی $G_t(\varphi)$ هم مقادیر مثبت را اتخاذ میکند و هم مقادیر منفی. بنابراین

$$Q(\forall t = \circ, \ldots, T \quad V_t(\varphi) - V_\circ(\varphi) = G_t(\varphi) \geq \circ) \neq ۱$$

و چون $P \sim Q$،

$$P(\forall t = \circ, \ldots, T \quad V_t(\varphi) \geq V_\circ(\varphi)) < ۱.$$

پس φ یک فرصت آربیتراژ نیست. به عبارت دیگر وجود اندازه‌ی مارتینگل، وجود بازار بدون آربیتراژ را تضمین می‌کند. در واقع عکس این مطلب هم برقرار است:

قضیه‌ی ۱. (قضیه‌ی اساسی اول قیمت‌گذاری) *بازار تعریف شده با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ و فرایند قیمت $(S_t)_{t=\circ}^T$ بدون آربیتراژ است اگر و تنها اگر اندازه‌ی احتمال $Q \sim P$ موجود باشد که S تحت Q یک مارتینگل است.*

این قضیه بین یک مفهوم اقتصادی (وجود بازار بدون آربیتراژ) و یک مفهوم ریاضی (وجود اندازه مارتینگل معادل) ارتباط ایجاد می‌کند.
مطالبه مشروط H را دست یافتنی[1] می‌نامیم هرگاه سبد مالی خودتأمین φ موجود باشد که $V_T(\varphi) = H$، P-a.s. دراین‌صورت φ یک پوشش ریسک[2] یا سبد مالی بازساز[3] برای H نامیده می‌شود. هرگاه φ یک استراتژی بازساز برای H باشد، از خودتأمین بودن φ نتیجه می‌شود

$$H = V_\circ(\varphi) + G_T(\varphi), \qquad P - a.s. \tag{۳}$$

با محاسبه‌ی امید ریاضی دو طرف (۳) نسبت به اندازه‌ی مارتینگل معادل Q، خواهیم داشت

$$E^Q(H|\mathcal{F}_t) = V_t(\varphi).$$

یعنی ارزش نسبت داده شده به مطالبه‌ی مشروط H توسط عملگر قیمت‌گذاری متناظر با اندازه‌ی مارتینگل معادل Q در لحظه‌ی t، برابر است با ارزش سبد مالی بازساز H در این لحظه. توجه می‌کنیم که اگر $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ دو سبد مالی بازساز H باشند، بنا بر تعریف $V_T(\varphi_۱) = V_T(\varphi_۲)$ و از بدون آربیتراژ بودن بازار نتیجه می‌شود که $V_t(\varphi_۱) = V_t(\varphi_۲)$ برای هر t.
بازار را کامل می‌نامیم هرگاه هر مطالبه‌ی مشروط، دست یافتنی باشد. از بحث فوق نتیجه می‌شود که در یک بازار کامل تنها یک راه برای ارزش‌گذاری مطالبات مشروط وجود دارد و همه‌ی

1) attainable 2) hedging 3) replicating portfolio

اندازه‌های مارتینگل معادل، منجر به یک عملگر قیمت‌گذاری می‌شوند. از تناظر یک به یک میان عملگرهای قیمت‌گذاری و اندازه‌های مارتینگل معادل نتیجه می‌شود که در یک بازار کامل، اندازه‌ی مارتینگل معادل یکتاست. در واقع عکس این مطلب هم درست است:

قضیه‌ی ۲. (**قضیه‌ی اساسی دوم قیمت‌گذاری**) *بازار تعریف شده با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ و فرایند قیمت $(S_t)_{t=0}^{T}$ کامل است اگر و تنها اگر اندازه‌ی مارتینگل معادل یکتا باشد.*

این قضیه پُلی است میان مفهوم اقتصادی بازار کامل و مفهوم ریاضی یکتایی اندازه مارتینگل معادل.

مطالب مذکور در این بخش را می‌توان به حالت کلی که خرید و فروش در هر زمان از بازه‌ی $[0, T]$ مجاز است، تعمیم داد. طبیعتاً این تعمیم مستلزم قراردادن شرایطی روی فرایند قیمت S، سبد مالی φ و مطالبه‌ی مشروط H است. بخش ۳ از [۴] شامل بیان دقیق این شرایط است.

۲.۱. مدل هستون

یکی از شناخته‌شده‌ترین مثال‌های بازار کامل، مدل بلک ــ شولز است. در این مدل فرض می‌شود قیمت کالای بدون ریسک در معادله‌ی دیفرانسیل عادی $dS_t^0 = rS_t^0 dt$ صدق می‌کند که عدد ثابت r معرف نرخ بهره است. همچنین دینامیک قیمت کالای ریسک دار با معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t^1 = \alpha S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dW_t$$

توصیف می‌شود که در آن W_t یک فرایند وینر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است. α و $\sigma > 0$ اعداد ثابت هستند و σ تلاطم نامیده می‌شود. از محاسن مدل بلک ــ شولز این است که برای بسیاری از اختیارهای معامله می‌توان تابع قیمت اختیار معامله را به طور تحلیلی به‌دست آورد. اما شواهد تجربی نشان می‌دهد که این مدل در همخوانی با واقعیت‌های بازار چندان موفق نیست. به همین علت در بسیاری از موارد تعمیم‌هایی از این مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد که از میان آنها می‌توان به مدل تلاطم تصادفی اشاره کرد. در این مدل، تلاطم به عنوان یک فرایند تصادفی مثبت در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر فرض می‌شود که قیمت (تنزیل شده‌ی) کالای دارای ریسک در معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$$

صدق می‌کند که در آن $(\sigma_t)_{0\leq t\leq T}$ خود، یک فرایند تصادفی مثبت است. با انتخاب‌های مختلف برای فرایند $(\sigma)_t$ مدل‌های تلاطم تصادفی مختلفی بدست می‌آیند. مدل مورد استفاده ما حالتی از مدل هستون [۸] است. در این مدل فرض می‌شود که تلاطم یک پخش ایتو از نوع

ککس ــ اینگرسل ــ راس[1] است که فرایندی نامنفی و دارای خاصیت بازگشت به میانگین است.

همچنین فرایندهای وینر هدایت کننده قیمت سهام و تلاطم، همبسته درنظر گرفته می‌شوند. به عبارت دقیق‌تر

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t\big(\mu\sqrt{Y_t}dt + \sqrt{Y_t}dW_t\big) \\ dY_t &= \kappa(\eta - Y_t)dt + \nu\sqrt{Y_t}dW'_t \end{aligned} \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (۴)$$

که در آن μ یک عدد ثابت است و ν، η و κ ثابت‌های مثبت‌اند. W_t و W'_t دو فرایند وینر با همبستگی ثابت $\rho \in (-1, 1)$ هستند. فرایند Y در (۴) فرایندی نامنفی است و فرض می‌کنیم $\kappa\eta \geq \frac{\nu^2}{2}$ مثبت بودن Y را تضمین می‌کند. قرار می‌دهیم

$$dW_t = dW_t^{(1)}, \qquad dW'_t = \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^{(2)}$$

که $W_t^{(1)}$ و $W_t^{(2)}$ دو فرایند وینر مستقل‌اند و بدین‌ترتیب می‌توان (۴) را به‌صورت

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu\sqrt{Y_t}S_t dt + \sqrt{Y_t}S_t dW_t^{(1)} \\ dY_t &= \kappa(\eta - Y_t)dt + \rho\nu\sqrt{Y_t}dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\nu\sqrt{Y_t}dW_t^{(2)} \end{aligned} \qquad 0 \leq t \leq T \quad (۵)$$

بازنویسی کرد. $\mathbb{F}$ را پالایه‌ی تولید شده توسط $W^{(1)}$ و $W^{(2)}$ در نظر می‌گیریم. اکنون به یافتن اندازه‌ی مارتینگل معادل می‌پردازیم. بدین منظور باید با استفاده از تبدیل گیرسانف[2] اندازه Q را به‌گونه‌ای بیابیم که ضریب رانش دینامیک S نسبت به Q صفر باشد. قضیه‌ی گیرسانف دینامیک $W^{(1)}$ را نسبت به Q به طور یکتا مشخص می‌کند اما دینامیک $W^{(2)}$ را نسبت به Q به طور یکتا تعیین نمی‌کند. بنابر این با انتخاب‌های مختلف برای ضریب رانش $W^{(2)}$، اندازه‌های مارتینگل متفاوتی به‌دست می‌آید. پس بنابر قضیه‌ی اساسی دوم قیمت‌گذاری، بازار در این مدل ناکامل است.

۳.۱. پوشش ریسک در بازارهای ناکامل

فرض کنیم پالایهٔ $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ کامل و از راست پیوسته باشد و همچون گذشته فرایند حقیقی مقدار (یک بعدی) و $\mathbb{F}$ ــ سازگار $S = (S_t)_{0\leq t\leq T}$، نشان‌دهنده‌ی قیمت (تنزیل شده‌ی) کالای ریسک‌دار باشد. برای این که بازار بدون آربیتراژ باشد، فرض می‌کنیم اندازه مارتینگل معادل Q برای S موجود باشد؛ با این فرض S تحت P نیم مارتینگل خواهد بود. در اینجا حالت خاص‌تری را در نظر می‌گیریم که S فرایندی پیوسته با تجزیه دوب ــ میر $S = S_0 + A + M$ باشد، که در آن M تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی است و $M_0 = 0$، و A یک فرایند پیوسته و سازگار با تغییرات کران‌دار است و $A_0 = 0$.

1) Cox, Ingersoll, Ross 2) Girsanov

از این پس مطالبات مشروطی را درنظر می‌گیریم که انتگرال‌پذیر مربعی نیز هستند، یعنی $H \in \mathcal{L}^{2}(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

نماد Θ را به‌عنوان مجموعه فرایندهای پیش‌بینی‌پذیر θ در نظر می‌گیریم که در

$$E\left(\int_{0}^{T} \theta_u^{2}\, d\langle S\rangle_u + \left(\int_{0}^{T} |\theta_u|\, d|A|_u\right)^{2}\right) < \infty$$

صدق می‌کنند. ($|A|$ تغییرات کلی A و $\langle S\rangle$ تغییرات مجذوری S را نشان می‌دهد.)

تعریف ۱. *یک استراتژی سبد مالی عبارت است از فرایند دو بعدی $\varphi = (\theta, \xi)$ به طوری که*

(i) $\theta = (\theta_t)_{0\le t\le T} \in \Theta$،

(ii) $\xi = (\xi_t)_{0\le t\le T}$ فرایندی $\mathbb{F}$ ـ سازوار است،

(iii) فرایند ارزش $(V_t)_{0\le t\le T}$ از راست پیوسته و انتگرال‌پذیر مربعی است.

برای پوشش ریسک در بازارهای ناکامل روش‌های مختلفی وجود دارد. فصل دهم از [۲] شامل بحثی خواندنی درباره‌ی این روش‌هاست.

در یک بازار ناکامل (طبق تعریف) به‌ازای برخی مطالبات مشروط همچون H، سبد مالی خودتأمینی که در عین حال شرط $P(V_T = H) = 1$ را نیز برآورده کند، موجود نیست.

برای پیشبرد مسأله در این حالت یک روش این است که برای مطالبه‌ی مشروط داده شده‌ی H ، سبدهای سرمایه‌ی خودتأمین φ را درنظر بگیریم، که البته ممکن است هیچ یک از آنها در شرط $V_T(\varphi) = H$، P-a.s. صدق نکند. در این‌صورت یک سبد سرمایه‌ی «خوب» آن است که $V_T(\varphi) - H$ را نسبت به یک نرم می‌نیمم کند. هرگاه این نرم، نرم $\mathcal{L}^{2}(P)$ باشد مسأله‌ی ما تبدیل می‌شود به یافتن سبد سرمایه‌ی خودتأمینی که $E\big[\big(V_T(\varphi) - H\big)^{2}\big]$ را می‌نیمم کند. تحت شرایط مناسب، این مسأله می‌نیمم‌سازی جوابی مثل $\widetilde{\varphi}$ دارد و به‌علاوه اندازه‌ی مارتینگل معادل $\widetilde{P}$ موجود است که $V_0(\widetilde{\varphi}) = E^{\widetilde{P}}[H]$. این روش را پوشش میانگین ــ واریانس[1] می‌نامند.

روش دیگر این است که فقط استراتژی‌هایی را در نظر بگیریم که ارزش نهایی آنها برابر H است؛ یعنی $V_T(\varphi) = H$، P-a.s. اما چون بازار ناکامل است چنین استراتژی ممکن است خودتأمین نباشد؛ یعنی فرایند هزینه متناظر با آن ثابت نباشد. پس در این حالت یک استراتژی «خوب» آن است که «تغییرات فرایند هزینه‌اش کوچک باشد». در سال ۱۹۸۶ فولمر و ساندرمن $E\big[\big(C_T(\varphi) - C_t(\varphi)\big)^{2}\big|F_t\big]$ را به‌عنوان معیاری از تغییرات فرایند هزینه به کار بردند و روش می‌نیمم‌سازی ریسک را برای حالتی که S یک P ــ مارتینگل است معرفی نمودند. این روش در سال ۱۹۹۱ توسط شوایتزر و با نام می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک به حالتی که S تحت P نیم‌مارتینگل است تعمیم داده شد. اگر $\hat{\varphi}$ استراتژی به‌دست آمده از روش می‌نیمم‌سازی (موضعی)

1) mean-variance hedging

ریسک باشد، می‌توان $V_t(\hat{\varphi})$ را به‌عنوان ارزش H در لحظه‌ی t درنظر گرفت. تحت شرایط مناسب اندازه مارتینگل معادل $\hat{P}$ موجود است که $V_t(\hat{\varphi}) = \hat{E}(H|\mathcal{F}_t)$. ($\hat{E}$ امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال $\hat{P}$ است.)

در مورد مدل‌های تلاطم تصادفی غالباً استفاده از روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک ساده‌تر است، چراکه چگالی $\hat{P}$ نسبت به P به‌طور صریح مشخص می‌شود و می‌توان با بکار بردن قضیه‌ی گیرسانف، دینامیک تلاطم را تحت $\hat{P}$ به‌دست آورد.

در مورد مدل مورد استفاده ما، معادله‌ی (۵) ، $\hat{P} = \widetilde{P}$ (لم ۱.۲ از [۷]) و بنابراین در این مدل قیمت‌های نسبت داده شده به یک مطالبه‌ی مشروط توسط دو روش پوشش میانگین ــ واریانس و می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک یکی است. در [۷] این دو روش برای چهار مثال از مدل تلاطم تصادفی، به‌طور عددی مقایسه شده‌اند. نتایج تجربی نشان می‌دهد که حتی درصورت وجود فرمول صریحی برای $\frac{d\widetilde{P}}{dP}$، محاسبه قیمت با استفاده از روش پوشش میانگین ــ واریانس حدوداً ۲۰% کندتر از روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک است. (بخش ۵.۵ از [۷]) از این رو ما در این‌جا روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک را در پیش می‌گیریم.

۱.۳.۱ حالت مارتینگل

در این بخش روش می‌نیمم سازی ریسک را در حالتی که S یک P ــ مارتینگل است توضیح می‌دهیم.

فرایند ریسک استراتژی φ را به وسیلهٔ $R_t(\varphi) = E\left[\left(C_T(\varphi) - C_t(\varphi)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]$ تعریف می‌کنیم.

توجه می‌کنیم که اگر φ خودتأمین باشد، $C(\varphi)$ ثابت است و درنتیجه $R(\varphi) \equiv 0$.

استراتژی $\bar{\varphi} = (\bar{\theta}, \bar{\xi})$ را ادامه‌ی قابل قبول[1] φ از t به بعد می‌نامیم هرگاه $V_T(\varphi) = V_T(\bar{\varphi})$، P-a.s. و نیز برای هر $u < t$، $\xi_u = \bar{\xi}_u$ و $\theta_u = \bar{\theta}_u$.

تعریف ۲. استراتژی φ را می‌نیمم‌ساز ریسک می‌نامیم هرگاه برای هر $t \in [0, T]$ و هر ادامه‌ی قابل قبول φ از t به بعد مثل $\bar{\varphi}$ داشته باشیم $R_t(\varphi) \le R_t(\bar{\varphi})$، P-a.s.

با این تعریف هر استراتژی خودتامین، می‌نیمم‌ساز ریسک هم هست.

تعریف ۳. استراتژی φ را در میانگین خودتأمین گوییم هرگاه $C(\varphi)$ یک P ـ مارتینگل باشد. یعنی برای یک استراتژی در میانگین خود تأمین φ، گرچه ممکن است $C(\varphi)$ ثابت نباشد، امید ریاضی $C(\varphi)$ ثابت است.

لم ۱. هر استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک، در میانگین خودتأمین است.

1) admissible extension

برهان. فرض کنیم φ یک استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک باشد و $t_\circ \in [\circ, T]$. $\bar{\varphi} = (\bar{\theta}, \bar{\xi})$ را یک ادامه‌ی قابل قبول φ از $t_\circ$ به بعد درنظر می‌گیریم که روی $[t_\circ, T]$ با $\bar{\theta}_t = \theta_t$ و $\bar{\xi}_t = E(C_T|\mathcal{F}_t) + \int_\circ^t \theta_u dS_u - \theta_t S_t$ تعریف می‌شود. پس برای $t \in [t_\circ, T]$، $C_t(\bar{\varphi}) = E\big(C_T(\varphi)\big|\mathcal{F}_t\big)$.

از طرفی

$$\begin{aligned} R_{t_\circ}(\varphi) &= E\big[\big(C_T(\varphi) - C_{t_\circ}(\varphi)\big)^{\text{۲}}\big|\mathcal{F}_{t_\circ}\big] \\ &= E\big[\big(C_T(\bar{\varphi}) - C_{t_\circ}(\bar{\varphi})\big)^{\text{۲}}\big|\mathcal{F}_{t_\circ}\big] + \big(C_{t_\circ}(\bar{\varphi}) - C_{t_\circ}(\varphi)\big)^{\text{۲}} \geq R_{t_\circ}(\bar{\varphi}) \end{aligned}$$

و چون φ می‌نیمم‌ساز ریسک است $R_{t_\circ}(\varphi) = R_{t_\circ}(\bar{\varphi})$ که نتیجه می‌دهد $C_{t_\circ}(\bar{\varphi}) = C_{t_\circ}(\varphi)$.

نتیجه‌ی ۲. فرایند ارزش یک استراتژی مینیمم‌ساز ریسک، مارتینگل است.

برهان. اگر φ یک استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک باشد، طبق لم ۱، $C(\varphi)$ مارتینگل است و چون S نیز مارتینگل است، حکم از رابطه‌ی $V_t(\varphi) = C_t(\varphi) + \int_\circ^t \theta_u dS_u$ به‌دست می‌آید.

اگر $\hat{\varphi}$ یک استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک باشد به طوری که $V_T(\hat{\varphi}) = H$، P-a.s. بنا بر نتیجه‌ی ۲ داریم

$$V_t(\hat{\varphi}) = E\big(V_T(\hat{\varphi})\big|\mathcal{F}_t\big) = E(H|\mathcal{F}_t).$$

بدین‌ترتیب اگر S تحت P مارتینگل باشد، قیمت تعیین شده توسط روش می‌نیمم‌سازی ریسک برای مطالبه‌ی مشروط H در لحظه‌ی t برابر است با $E(H|\mathcal{F}_t)$.

با استفاده از قضیه زیر می‌توان نشان داد که استراتژی $\hat{\varphi}$ موجود و یکتاست.

قضیه‌ی ۳. **(تجزیه گالچوک ـ کنیتا ـ واتانابه[1])** اگر S تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی باشد و $H \in \mathcal{L}^{\text{۲}}(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$، آنگاه P ــ مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی $L^H = (L_t^H)_{\circ \leq t \leq T}$ که $L_\circ^H = \circ$ و $\theta^H \in \Theta$ موجودند به طوری که

$$H = H_\circ + \int_\circ^T \theta_u^H dS_u + L_T^H \qquad P - a.s.$$

به علاوه L^H بر $\left\{ \int \theta dS \;\; : \;\; \theta \in \Theta \right\}$ قویاً عمود است؛ یعنی برای هر $\theta \in \Theta$، $\left(L_t^H \int_\circ^t \theta_u dS_u\right)_{\circ \leq t \leq T}$ یک P ـ مارتینگل است.

گزارهٔ ۱. استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک $\hat{\varphi}$ که $V_T(\hat{\varphi}) = H$، P-a.s. موجود و یکتاست و به وسیلهٔ $\hat{\varphi} = (\hat{\theta}, \hat{\xi})$ که در آن

$$\hat{\theta}_t = \theta_t^H, \qquad \hat{\xi}_t = H_\circ + \int_\circ^t \theta_u^H dS_u + L_t^H - \theta_t^H S_t$$

---

1) Galtchouk-Kunita-Watanabe decomposition

تعیین می‌شود. (θ^H و L^H در قضیه ۳ معرفی شده‌اند.)

برهان. روشن است که $V_T(\hat{\varphi}) = H$، P-a.s.. برای نشان دادن این که استراتژی $\hat{\varphi}$ می‌نیمم‌ساز ریسک است فرض کنیم $\varphi = (\theta, \xi)$ یک ادامه قابل قبول $\hat{\varphi}$ از t به بعد باشد. داریم:

$$\begin{aligned} C_T(\varphi) - C_t(\varphi) &= V_T(\varphi) - V_t(\varphi) - \int_t^T \theta_u dS_u \\ &= V_\circ(\hat{\varphi}) + \int_\circ^T \hat{\theta}_u dS_u + L_T^H - V_t(\varphi) - \int_t^T \theta_u dS_u \\ &= \int_t^T (\hat{\theta}_u - \theta_u) dS_u + (L_T^H - L_t^H) + \big(V_t(\hat{\varphi}) - V_t(\varphi)\big) \end{aligned}$$

با توجه به این که L^H بر S قویاً عمود است و انتگرال تصادفی نسبت به S مارتینگل است و $L_T^H - L_t^H = C_T(\hat{\varphi}) - C_t(\hat{\varphi})$، داریم:

$$\begin{aligned} R_t(\varphi) &= E\big[\big(C_T(\varphi) - C_t(\varphi)\big)^{۲} \big| \mathcal{F}_t\big] \\ &= E\Big[\int_t^T (\hat{\theta}_u - \theta_u)^{۲} d\langle S\rangle_u \Big| \mathcal{F}_t\Big] + E\big[\big(C_T(\hat{\varphi}) - C_t(\hat{\varphi})\big)^{۲} \big| \mathcal{F}_t\big] + \big(V_t(\hat{\varphi}) - V_t(\varphi)\big)^{۲} \\ &\geq E\big[\big(C_T(\hat{\varphi}) - C_t(\hat{\varphi})\big)^{۲} \big| \mathcal{F}_t\big] = R_t(\hat{\varphi}) \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که $\hat{\varphi}$، می‌نیمم‌ساز ریسک است.

برای اثبات یکتایی، فرض کنیم $\varphi = (\theta, \xi)$ هم یک استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک باشد و $V_T(\varphi) = H$، P-a.s.. پس نامساوی فوق به‌ازای این φ و $t = \circ$ تبدیل به تساوی می‌شود که نتیجه می‌دهد $\hat{\theta}_t = \theta_t$، P-a.s. برای هر $t \in [\circ, T]$. از طرف دیگر $V_T(\varphi) = H = V_T(\hat{\varphi})$، P-a.s. و طبق نتیجه ۲، $V(\varphi)$ و $V(\hat{\varphi})$ هر دو مارتینگل هستند که ایجاب می‌کند $V_t(\varphi) = V_t(\hat{\varphi})$، P-a.s. و بنابراین $\xi_t = \hat{\xi}_t$، P-a.s. برای هر $t \in [\circ, T]$.

۲.۳.۱. حالت کلی

اکنون می‌پردازیم به حالت کلی که در آن S تحت P مارتینگل نیست. اولین سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا در این حالت نیز برای هر مطالبه مشروط H، استراتژی می‌نیمم‌ساز ریسک φ موجود است که $V_T(\varphi) = H$، P-a.s.؟ متاسفانه پاسخ این سؤال منفی است. برای مثال نقض به گزاره ۱.۳ از [۱۰] مراجعه کنید.

به لحاظ شهودی علت ناکارآمد بودن روش می‌نیمم‌سازی ریسک در حالت غیر مارتینگل را می‌توان چنین توضیح داد: درلحظه‌ی t، $R_t(\varphi)$ را نسبت به همه‌ی ادامه‌های قابل قبول φ از t به بعد می‌نیمم می‌کنیم. گیریم این می‌نیمم به ازای φ_t حاصل شود. به‌همین ترتیب فرض کنیم که برای $u > t$ استراتژی φ_u در میان همه ادامه‌های قابل قبول φ از u به بعد، $R_u(\varphi)$ را می‌نیمم کند؛ یعنی φ_u نشانگر استراتژی است که باید روی $[u, T)$ در پیش بگیریم. در حالت کلی ممکن است تحدید φ_u به بازه‌ی $(t, T]$ با φ_t متفاوت باشد. بحث بخش قبل تضمین می‌کند که اگر S تحت P مارتینگل باشد، چنین مشکلی رخ نمی‌دهد.

کلید حل این مشکل در استفاده از مفهوم می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک نهفته است. برای توضیح ایده‌ی این روش حالتی را در نظر می‌گیریم که زمان (خرید و فروش)، گسسته باشد و بیان تعریف دقیق در حالت زمان پیوسته را به پیوست (الف) موکول می‌کنیم.

فرض کنیم خرید و فروش تنها در زمان‌های $k = 0, 1, \dots, T \in \mathbb{N}$ ممکن باشد. در زمان k، θ_{k+1} و ξ_k را که به‌ترتیب مبین تعداد سهام در بازه‌ی $(k, k+1]$ و تعداد ورق قرضه در بازه‌ی $[k, k+1)$ هستند، تعیین می‌کنیم. توجه می‌کنیم که پیش‌بینی‌پذیر بودن θ ایجاب می‌کند که θ_{k+1} در زمان k تعیین شود. درحالی که سبد مالی در زمان k عبارت است از $\varphi_k = (\theta_k, \xi_k)$.
برخلاف روش می‌نیمم‌سازی ریسک که در آن $R_k(\varphi) = E\big[\big(C_T(\varphi) - C_k(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big]$ نسبت به همه‌ی ادامه‌های قابل قبول φ از k به بعد می‌نیمم می‌شود، در روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک، $R_k(\varphi)$ را به‌عنوان تابعی از دو متغیر θ_{k+1} و ξ_k می‌نیمم می‌کنیم؛ به‌عبارت دیگر «ریسک»، «موضعاً» می‌نیمم می‌شود.

می‌توان نشان داد که می‌نیمم کردن $E\big[\big(C_T(\varphi) - C_k(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big]$ نسبت به θ_{k+1} و ξ_k معادل است با می‌نیمم کردن $E\big[\big(C_{k+1}(\varphi) - C_k(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big]$ نسبت به θ_{k+1} و ξ_k.

با استفاده از این واقعیت شرایطی برای فرایند هزینه‌ی $C(\varphi)$ می‌یابیم که معادل است با این که φ یک استراتژی موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک باشد و $H = V_T(\varphi)$، P-a.s.:
نمادگذاری $\Delta U_{k+1} := U_{k+1} - U_k$ را در مورد $C(\varphi)$ به کار می‌بریم و به دست می آوریم

$$\Delta C_{k+1}(\varphi) = \Delta V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1}.$$

با توجه به این که $V_k(\varphi)$، $\mathcal{F}_k$ ـ اندازه‌پذیر است، داریم:

$$\begin{aligned} E\big(\big(\Delta C_{k+1}(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big) = & \ \operatorname{Var}\ \big(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1} \big| \mathcal{F}_k\big) \\ & + \Big(E\big(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1} \big| \mathcal{F}_k\big) - V_k(\varphi)\Big)^2. \end{aligned}$$

چون جمله اول سمت راست به ξ_k بستگی ندارد، انتخاب بهینه برای ξ_k انتخابی است که جمله دوم را صفر کند؛ یعنی

$$V_k(\varphi) = E\big(V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1} \big| \mathcal{F}_k\big) \tag{6}$$

که معادل است با

$$0 = E\big(\Delta V_{k+1}(\varphi) - \theta_{k+1}\Delta S_{k+1} \big| \mathcal{F}_k\big) = E\big(\Delta C_{k+1}(\varphi) \big| \mathcal{F}_k\big)$$

پس φ باید در میانگین خود تامین باشد.
از طرف دیگر $H = V_T(\varphi)$ و رابطه‌ی (۶) نشان می‌دهد که برای می‌نیمم‌کردن $E\big(\big(\Delta C_{k+1}(\varphi)\big)^2 \big| \mathcal{F}_k\big)$، می‌توان در زمان k، $V_{k+1}(\varphi)$ را معلوم فرض کرد. پس کافی است

$\text{Var}\ \left(V_{k+1}(\varphi)-\theta_{k+1}\Delta S_{k+1}\middle|\mathcal{F}_k\right)$ را نسبت به θ_{k+1} می‌نیمم کنیم. با توجه به این که θ_{k+1}، $\mathcal{F}_k$ ــ اندازه‌پذیر است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\text{Var}\ \left(V_{k+1}(\varphi)-\theta_{k+1}\Delta S_{k+1}\middle|\mathcal{F}_k\right) = &\ \text{Var}\ \left(V_{k+1}(\varphi)\middle|\mathcal{F}_k\right)+\theta_{k+1}^{2}\ \text{Var}\ (\Delta S_{k+1}|\mathcal{F}_k)\\ &-2\theta_{k+1}\ \text{Cov}\ \left(V_{k+1}(\varphi),\Delta S_{k+1}|\mathcal{F}_k\right).\end{aligned}$$

مشتق این عبارت نسبت به θ_{k+1} را برابر با صفر قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم $\theta_{k+1}=\frac{\text{Cov}\ \left(V_{k+1}(\varphi),\Delta S_{k+1}\middle|\mathcal{F}_k\right)}{\text{Var}\ (\Delta S_{k+1}|\mathcal{F}_k)}$ که معادل است با

$$\text{Cov}\ \left(V_{k+1}(\varphi)-\theta_{k+1}\Delta S_{k+1},\Delta S_{k+1}\middle|\mathcal{F}_k\right)=0. \tag{7}$$

با به‌کار بردن تجزیه‌ی دوب S را به مارتینگل $\bar{M}$ و فرایند پیش‌بینی‌پذیر $\bar{A}$ تجزیه می‌کنیم که توسط روابط زیر

$$\begin{aligned}&\bar{A}_0=0,\quad \bar{A}_{k+1}=\bar{A}_k+E(\Delta S_{k+1}|\mathcal{F}_k),\\ &\bar{M}_0=0,\quad \bar{M}_{k+1}=\bar{M}_k+\Delta S_{k+1}-\Delta\bar{A}_{k+1}\end{aligned}$$

تعیین می‌شوند. می‌توان (۷) را به صورت

$$0=\ \text{Cov}\ \left(\Delta C_{k+1}(\varphi),\Delta\bar{M}_{k+1}|\mathcal{F}_k\right)=E\left(\Delta C_{k+1}(\varphi)\Delta\bar{M}_{k+1}\middle|\mathcal{F}_k\right)$$

ساده کرد که نشان می‌دهد حاصل‌ضرب دو مارتینگل $C(\varphi)$ و $\bar{M}$ یک مارتینگل است یا (یا به طور معادل) $C(\varphi)$ و $\bar{M}$ تحت P قویاً متعامدند. مشابه این نتایج برای حالت زمان پیوسته هم برقرار است: تحت «شرایط مناسب»، استراتژی φ که در $V_T(\varphi)=H$ P-a.s. صدق می‌کند موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک است اگر و تنها اگر فرایند هزینه $C(\varphi)$ مارتینگل باشد و بر قسمت مارتینگل S (یعنی M) قویاً متعامد باشد.

این «شرایط مناسب» در قضیه ۳.۳ از [۱۰] بیان شده است. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که مدل ما (معادله (۲))، شرایط این قضیه را برآورده می‌کند.

گزاره‌ی ۲. دو حکم زیر معادل‌اند.

(i) استراتژی خودتأمین φ موجود است که $C(\varphi)$ بر M قویاً عمود است و $V_T(\varphi)=H$، P-a.s.

(ii) H را می‌توان به‌صورت

$$H=H_0+\int_0^T\theta_u^H dS_u+L_T^H\qquad P-a.s.$$

تجزیه کرد که $H_0\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_0,P)$، $\theta^H\in\Theta$، L^H تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی و قویاً عمود بر M است و $L_0=0$. (این تجزیه، تجزیه‌ی فولمر ــ شوایتزر نامیده می‌شود.)

برهان. $(i) \leftarrow (ii)$ با توجه به

$$H = V_T(\varphi) = C_T(\varphi) + \int_{\circ}^{T} \theta_u dS_u = C_{\circ}(\varphi) + \int_{\circ}^{T} \theta_u dS_u + C_T(\varphi) - C_{\circ}(\varphi)$$

کافی‌است بگیریم $H_{\circ} = C_{\circ}(\varphi)$ و $\theta_t^H = \theta_t$ و $L_t^H = C_t(\varphi) - C_{\circ}(\varphi)$.
$(i) \rightarrow (ii)$ قرار می‌دهیم $\varphi = (\theta, \xi)$ که $\theta_t = \theta_t^H$ و $\xi_t = H_{\circ} + \int_{\circ}^{t} \theta_u^H dS_u + L_t^H - \theta_t^H S_t$.

فرض کنیم $\hat{P}$ اندازه‌ی مارتینگل معادل P باشد با دو خاصیت زیر

(i) روی $\mathcal{F}_{\circ}$، $P = \hat{P}$.

(ii) هر فرایند L که تحت P یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی و قویاً عمود بر L است و $L_{\circ} = \circ$، یک $\hat{P}$ ـ مارتینگل باشد.

با توجه به این خواص، تجزیه‌ی فولمر ـ شوایتزر H تحت P، همان تجزیه گالچوک ـ کنیتا ـ واتانابه H تحت $\hat{P}$ است. پس اگر استراتژی φ موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک باشد و $V_T(\varphi) = H$، P-a.s. فرایند $V(\varphi)$ یک $\hat{P}$ ـ مارتینگل است و بنابراین $V_t(\varphi) = \hat{E}\big(V_t(\varphi)\big|\mathcal{F}_t\big) = \hat{E}(H|\mathcal{F}_t)$. $\hat{P}$ را اندازه مارتینگل می‌نیمال می‌نامند.

می‌توان نشان داد (ص ۹ از [۳] که تحت مفروضات ما، فرایند پیش‌بینی‌پذیر $\lambda = (\lambda_t)_{\circ \le t \le T}$ موجود است که $A_t = \int_{\circ}^{t} \lambda_u d\langle M \rangle_u$.
گزاره‌ی زیر (قضیه‌ی ۵.۳ از [۳]) علاوه بر این که شرایطی برای وجود و یکتایی $\hat{P}$ ارائه می‌نماید، چگالی $\hat{P}$ را نیز نسبت به P مشخص می‌کند.

گزارهٔ ۳. $\hat{P}$ موجود است اگر و تنها اگر

$$G_t = \exp\Big(- \int_{\circ}^{t} \lambda_u dM_u - \frac{۱}{۲} \int_{\circ}^{t} \lambda_u^{۲} d\langle M \rangle_u \Big) \qquad \circ \le t \le T \tag{۸}$$

یک P ـ مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی باشد. تحت این شرایط، $\hat{P}$ به‌طور یکتا به وسیله‌ی $\frac{d\hat{P}}{dP} = G_T$ تعیین می‌شود.

استخراج فرمول قیمت‌گذاری

در این بخش برای قیمت‌گذاری مطالبات مشروط در مدل هستون روش می‌نیمم‌سازی موضعی ریسک را به‌کار می‌بریم: با نمادگذاری‌های فصل قبل داریم

$$A_t = \int_{\circ}^{t} \mu\sqrt{Y_u} S_u du \text{ و } M_t = \int_{\circ}^{t} \sqrt{Y_u} S_u dW_u^{(۱)}.$$

پس به ازای $\lambda_t = \frac{\mu}{\sqrt{Y_t S_t}}$ می‌توان نوشت $A_t = \int_0^t \lambda_u d\langle M\rangle_u$.
با جایگذاری λ_t در (۸) خواهیم داشت $G_t = \exp\big(-\frac{\mu^2}{2}t - \mu W_t\big)$. بنابر فرمول ایتو داریم

$$dG_t = -\mu G_t dW_t,$$

پس G مارتینگل است و هم‌چنین

$$E(G_t^2) = e^{\mu t} \leq e^{\mu T}$$

یعنی G انتگرال‌پذیر مربعی است. بنابراین طبق گزاره ۳ ، اندازه مارتینگل می‌نیمال $\hat{P}$ موجود است و $\frac{d\hat{P}}{dP} = G_T = \exp\big(-\frac{\mu^2}{2}T - \mu W_T\big)$. بنابر قضیه گیرسانف داریم

$$\begin{aligned} dS_t &= \sqrt{Y_t} S_t d\hat{W}_t^{(1)} \\ dY_t &= \Big(\kappa(\eta - Y_t) - \rho\nu\mu\sqrt{Y_t}\Big)dt + \rho\nu\sqrt{Y_t}d\hat{W}_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}\nu\sqrt{Y_t}d\hat{W}_t^{(2)} \end{aligned} \tag{9}$$

که در آن $\hat{W}_t^{(1)} = W_t^{(1)} + \mu t$ و $\hat{W}_t^{(2)} = W_t^{(2)}$ دو فرایند وینر مستقل تحت $\hat{P}$ هستند.
با استفاده از خاصیت مارکوفی فرایند دو بعدی (S, Y) داریم

$$v(t, s, y) := E^{\hat{P}}\big(H|\mathcal{F}_t\big) = E^{\hat{P}}\big(H|S_t, Y_t\big)$$

و بدین ترتیب برای محاسبه‌ی $v(t, s, y)$ می‌توان از روش مونت ـ کارلو یا روش زنجیر مارکوف [1] استفاده کرد.
اگر H یک مطالبه‌ی مشروط اروپایی باشد؛ یعنی $H = H(S_T)$، بنابر قضیه فینمن ـ کتس [2] تابع v روی $(0,T)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ در معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \big(\kappa(\eta - y) - \rho\nu\mu\sqrt{y}\big)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{y}{2}\Big(s^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2\rho\nu s\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial y} + \nu^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big) = 0$$

با شرط پایانی $v(T, s, y) = H(s)$، صدق می‌کند.
برای حل این معادله می‌توان روش تفاضل‌های متناهی را به کار برد. می‌توان نشان داد که در مورد مطالبات مشروط اروپایی روش زنجیر مارکوف حالت خاصی از روش تفاضل‌های متناهی است و هر دو روش نسبت به نرم بی‌نهایت از مرتبه‌ی اول همگرا هستند.

پیوست الف.

این پیوست به تعریف استراتژی موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک اختصاص دارد. قبل از بیان تعریف، ذکر برخی مقدمات لازم است: برای افراز $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = T\}$ از بازه‌ی $[0, T]$

1) markov chain approximation method 2) Feynman-Kac

اندازهٔ افراز عبارت است از $|\pi| = \max_{t_i, t_{i+1} \in \pi} (t_{i+1} - t_i)$. دنباله‌ی $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر n، $\pi_n \subseteq \pi_{n+1}$ و می‌گوییم این دنباله به همانی همگراست اگر $\lim_{n\to\infty} |\pi_n| = 0$. یک پریشیدگی کوچک عبارت است از استراتژی $\Delta = (\delta, \varepsilon)$ که δ کران‌دار است، $\int \delta dA$ (به‌طور یکنواخت نسبت به t و w) کران‌دار است و $\delta_T = \varepsilon_T = 0$.

برای هر زیربازه‌ی $(u, t]$ از $[0, T]$ تحدید Δ به $(u, t]$ عبارت است از

$$\Delta\Big|_{(u,t]} := (\delta I_{(u,t]}, \varepsilon I_{[u,t)})$$

برای استراتژی φ و پریشیدگی کوچک Δ و افراز π از $[0, T]$، تعریف می‌کنیم

$$r^{\pi}(\varphi, \Delta) := \sum_{t_i, t_{i+1} \in \pi} \frac{R_{t_i}\left(\varphi + \Delta\big|_{(t_i, t_{i+1})}\right) - R_{t_i}(\varphi)}{E\left(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \big| \mathcal{F}_{t_i}\right)} I_{(t_i, t_{i+1}]}$$

استراتژی φ را موضعاً می‌نیمم‌ساز ریسک می‌نامیم هرگاه برای هر پریشیدگی کوچک Δ و هر دنباله صعودی از افرازها مثل $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ که به‌همانی همگراست داشته باشیم $\liminf_n r^{\pi_n}(\varphi, \Delta) \geq 0$ با احتمال یک نسبت به $P \otimes \langle M\rangle$ روی $\Omega \times [0, T]$.

یعنی هر تغییری در استراتژی بهینه، لااقل به لحاظ مجانبی باعث افزایش ریسک می‌شود.

مراجع

[1] Biagini, F., Guasoni, P., Pratelli, M., *Mean-variance hedging for stochastic volatility models*, Mathematical Finance, 10(2), 2000, pp. 109-123. Available from `http://math.bu.edu`

[2] Cont, R., Tankov, P., *Financial Modeling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC Press, 2003.

[3] Föllmer, H., Schweizer, M., *Hedging of contingent claims under incomplete information*, in Applied Stochastic Analysis, Davis, M. and Elliot R., eds., Vol. 5, Gordon and Breach: London, 1991, pp. 389-414.

[4] Harrison, J.M., Pliska, S.R., *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Process. Appl., 11(1981), pp. 215-260.

[5] Henderson, V., Hobson, D., Howison, S., Kluge, T., *A comparison of option prices under different pricing measures in a stochastic volatility model with correlation*, Available from `http://www.finance.ox.ac.uk`, 2004.

[6] HENDERSON, V., *Analitical comparison of option prices in stochastic volatility models*, Available from `http://www.finance.ox.ac.uk`, 2004.

[7] HEATH, D., PLATEN, E., SHWEIZER, M., *A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets*, Mathematical Finance, 11(4), 2001, pp. 385-413.

[8] HESTON, S., *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Rev. Fin. studies, 6(1993), pp. 327-343.

[9] PROTTER, P., *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer: Berlin, 2004.

[10] SCHWEIZER, M., *A guided tour through quadratic hedging approaches*, Available from `http://www.sci.ch`

بهناز زرگری، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی behnazzargari@yahoo.com

شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مدیریت و اقتصاد zamani@sina.sharif.ir

بیژن ظهوری زنگنه، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی zangeneh@sharif.edu

راما کنت، دانشگاه کلمبیا، آمریکا Rama.Cont@columbia.edu