فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شماره ۵۶ (بهار ۱۳۹۴) صص. ۳۷ تا ۴۷

تعمیم در ریاضیات

مارال روئین، رستم محمدیان، و نوراله نژاد صادقی

چکیده

هدف مقالهٔ پیش‌رو، بررسی نقش و اهمیت تعمیم در یادگیری و آموزش ریاضیات است و این‌که چگونه تعمیم به‌عنوان یکی از راهیاب‌های معرفی شده توسط شونفیلد[1]، می‌تواند در حل مسئله و ایجاد تفکر ریاضی در یادگیرندگان کمک کند. در این مقاله، سعی شده است که مفهوم کلی تعمیم و تعریف آن، هم از دیدگاه منطقی و هم از دیدگاه روان‌شناختی مطرح گردد و با بیان الگوهایی، انواع آن مورد بحث قرار گیرد. در واقع به بررسی این گزاره که «تاریخ ریاضیات چیزی جز ثبت تعمیم‌های متوالی در ریاضی نمی‌باشد» می‌پردازیم. نقش تجسم را در تعمیم ریاضی بررسی کرده و با ذکر مثال‌هایی از جبر و هندسه به کاربردهایی از تعمیم پرداخته و نشان می‌دهیم که استفاده از راهیاب «حالت خاص» همواره نمی‌تواند در حل مسائل، مورد استفاده قرار گیرد بلکه برعکس، گاهی اوقات با تغییر مسئله در حالت کلی‌تر و عمومی‌تر و با تعمیم آن، می‌توان مسئله را آسان‌تر حل کرد.

۱. مقدمه

یکی از راه‌های ایجاد تفکر ریاضی در دانشجویان و دانش‌آموزان سال‌های آخر دبیرستان این است که به آنها اجازه داده شود و آنها را ترغیب کنیم که خود، قضیه یا مسئلهٔ جدیدی را ارائه دهند. مهم نیست که قضیه یا مسئلهٔ ارائه شده چقدر ساده و ابتدایی است، بلکه مهم این است که فکری

عبارات و کلمات کلیدی. تعمیم، آموزش ریاضی، حل مسئله، راهیاب، تجسم.

تازه باشد، چون در علم، سؤال تازه و مناسب از پاسخ آن مهم‌تر است. یک راه رسیدن به این هدف این است که به آن‌ها فکر تعمیم دادن را بیاموزیم و تا آنجا که می‌توانیم مطالب را به‌صورت تعمیمی ارائه دهیم و بخواهیم که دربارهٔ تعمیم هر مطلب ریاضی قابل فهم فکر کنند. باید به آنها یاد داد که تمام تاریخ ریاضیات چیزی نیست جز ثبت تعمیم‌های متوالی در ریاضی. باید برای دانشجویان و دانش‌آموزان خاطرنشان کرد که شاید راز تمام پیشرفت‌های علمی بشر، تاکنون به شکلی در مفهوم تعمیم نهفته است، البته در بیانی خاص‌تر، منظور تعمیم سیستم اعداد، از اعداد طبیعی به اعداد صحیح، به اعداد گویا، به اعداد جبری و سیستم‌های جبری نهفته است. بیشتر کارهای ریاضی حتی نتایج ریاضی‌دانان برجسته، معمولاً تعمیم کارها و مفاهیمی است که وجود داشته‌اند. البته بعضی افراد با مهارتی خاص، نتایج خود را طوری ارائه می‌دهند که این تعمیم آشکار نیست، درنتیجه کارشان مهم‌تر به نظر می‌رسد [۱]. ریاضیات با تعمیم ایده‌های انتزاعی سروکار دارد، بنابراین نقش تعمیم در پیشبرد دانش ریاضی در آموزش ریاضی بسیار مهم است [۱۲].

۲. مفهوم تعمیم

این بحث را با طرح این سؤال آغاز می‌کنیم:

> مثلث متساوی‌الاضلاعی داریم؛ هر ضلع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. چند پاره‌خط جدید ایجاد می‌شود؟

توجه می‌کنیم که هدف از طرح این پرسش، حل آن به‌وسیلهٔ شمردن پاره‌خط‌ها توسط دانش‌آموزان نیست زیرا با این روش، دانش‌آموزان به معلومات جدیدی دست پیدا نمی‌کنند و به تفکر واداشته نمی‌شوند. حال اگر هر یک از پاره‌خط‌های ایجاد شده را دوباره به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم و این روند طرح پرسش را مرحله به مرحله ادامه دهیم تا دانش‌آموزان از شمردن پاره‌خط‌ها ناتوان شوند و تلاش کنند یک پاسخ کلی برای مرحله‌ی nام پیدا کنند، در این حالت، می‌توان گفت که محصل به یک مسئلهٔ پایه‌ای و مفهوم‌دار دست پیدا کرده است. احساس رضایت از حل مسئله در حالت خاص و رسیدن به پاسخ، شرط ما نیست، بلکه یادگیرنده باید توان آن را پیدا کند که راه حل مسئله را در حالت کلی بیابد و تنها به یک یا چند حالت خاص بسنده نکند؛ در این حالت است که می‌توان با رضایت از حل مسئله سخن گفت [۱۰]. تعمیم، یکی از راهیاب‌های حل مسئله است و تاریخ ریاضیات را می‌توان از نتایج شناخت، توصیف و الگوهای تعمیم دانست. در واقع تعمیم، یک کنش منطقی است و دو مفهوم زیر را بیان می‌کند:

(۱) از دیدگاه روان‌شناسی، یک عملیاتِ فکریِ انتزاعی است که توسط آن، کیفیت مشترک گروهی از اشیا یا پدیده‌ها، به‌صورت ذهنی بسط داده می‌شود [۷].

(۲) از دیدگاه منطقی، حرکت از تصورات ریز یک حوزه‌ی محدود با محتوای غنی، به تصوراتی با حوزه‌ی وسیع‌تر و محتوای ضعیف‌تر می‌باشد [۷].

تعمیم، تعریفی است که شامل دستهٔ بزرگ‌تری از اشیائی شود که از تعریف اولیه به دست آید. تعمیم یک قضیه مانند A، قضیه‌ای است که با همان فرض قضیه، نتیجهٔ وسیع‌تری بدهد، به‌طوری‌که قضیهٔ A از آن به دست می‌آید، یا با فرض کمتری از قضیهٔ A، همان نتیجهٔ قضیهٔ A یا بیشتر از آن به دست آید (مانند تعمیم قضیهٔ رول به قضیهٔ مقدار میانگین یا اعداد حقیقی به اعداد مختلط). در این‌جا منظور از تعمیم، این موضوع نیز می‌باشد که بتوانیم یک قضیه یا نتیجه‌ای را از یک قسمت ریاضی به قسمت دیگری برده و در آن‌جا آن را بررسی و حل کنیم [۱]. به‌طور مثال، اثبات مسئلهٔ زیر مستلزم اثبات آن با اعداد مختلط می‌باشد:
«در یک چهارضلعی مفروض، مربعی روی هر ضلع ترسیم کنید، ثابت کنید خطوطی که از مرکز مربعات ترسیم می‌شوند، متقاطع و دارای طول برابر هستند (قضیهٔ وان آبل[۱])» [۵].
میچلمور[۲] معنی تعمیم را در سه گروه به نام‌های G_1 و G_2 و G_3 طبقه‌بندی کرده است:

G_1: **مترادفی برای تجرد یا مفهوم:** دیویدوف[۳] آن را به‌عنوان «فهم مستقل از خواص اشیا یکسان در یک کلاس کامل» تعریف می‌کند [۸]. (به‌عنوان نمونه، هر حلقهٔ تعویض‌پذیر و یکدار دارای ایده‌آل ماکسیمال است.) و دریفیوز[۴] آن را به‌عنوان اولین گام تجرید در نظر گرفته است. میچلمور و وایت[۵] همین معنی را برای مفهوم «تجرید–تعمیم»[۶] به کار می‌گیرند [۸].

G_2: **یک توسیع از مفهوم موجود:** این بسط دادن‌ها سه نمود دارند:

- اولی، بسط تجربی است و هنگامی اتفاق می‌افتد که شخص، مواردی دیگر بیابد که مفهوم موجود را در بر بگیرد [۸].
- دومی، تعمیم ریاضی است و زمانی اتفاق می‌افتد که یک کلاس از اشیاء ریاضی در کلاس بزرگ‌تر بر اساس تشابهات متفاوت جاسازی شده باشد [۸]. (به‌عنوان نمونه هر تابع مشتق‌پذیر، پیوسته است.)

[۱] Van Aubel's theorem [۲] Mitchelmore [۳] Davydov [۴] Dreyfus [۵] White [۶] Abstract-General

– سومی، ابداع ریاضی است و زمانی اتفاق می‌افتد که یک ریاضی‌دان با تأمل، مشخصات و ویژگی‌های یک مفهوم را تغییر دهد یا حذف کند، تا مفهوم جامع‌تری را به دست بیاورد [۸]. (به‌عنوان نمونه می‌توان به قضیهٔ کوشی که تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین است اشاره کرد.)

$G_۳$: **قضیه‌ای در ارتباط با مفاهیم موجود:** دابینسکی[۱] تعمیم را به‌صورت روندی تعریف می‌کند که در آن یک الگوی موجود، دوباره بیان می‌شود و در شرایطی متفاوت به‌کار می‌رود. همچنین اسکمپ[۲] نوشته است: روند تعمیم ریاضی، فعالیتی پیچیده و قدرتمند است. پیچیده به این دلیل که متأثر از ساختار سبک است، در حالی که موقتاً محتوای آن نادیده انگاشته می‌شود، قدرتمند به این دلیل که هوشیاری را کنترل می‌کند تا الگویی موجود را بازسازی کند [۸].

دو نوع الگو از تعمیم که در ریاضیات استفاده می‌شود به شرح زیر است:

۱.۲. تعمیم مبتنی بر نتیجه[۳].

تعمیمی که با شناخت یک الگوی عمومی از خودِ نتیجه به دست می‌آید از تعمیم مبتنی بر نتیجه گویند. با محاسبهٔ یک سری از اعداد، دنبال کردن و مشاهدهٔ قاعده و نظمی مشخص، از نتیجهٔ محاسبات به دست می‌آید [۶]. مثلاً در محاسبهٔ مجموع تعداد متناهی از اعداد طبیعی، از ۱ تا عددی معلوم، فرمولی را برای چند حالت خاص به دست می‌آوریم و طبق آن، فرمول کلی‌تری را برای حالت nام حدس می‌زنیم:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۱۰ = \frac{۱۰ \times (۱۰ + ۱)}{۲} \tag{۱.۲}$$

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n \times (n + ۱)}{۲} \tag{۲.۲}$$

۲.۲. تعمیم مبتنی بر فرآیند[۴].

تعمیم حاصل از فرآیندی که به نتیجه ختم می‌شود را تعمیم مبتنی بر فرآیند گویند، یعنی یک راه که زنجیری خاص از مراحل وابسته به نتایج قبلی را در خود دارد [۶]. برای مثال، در محاسبهٔ تعداد قطرهای یک n ضلعی ابتدا از مثلث آغاز می‌کنیم، سپس آن را برای ۴ ضلعی و ۵ ضلعی محاسبه می‌کنیم، در طی این فرآیندها به نتایجی می‌رسیم که به فرآیندهای قبل وابسته است و از این‌رو می‌توانیم تعداد قطرها را برای یک n ضلعی نیز محاسبه کنیم.

---
[۱] Dubinsky [۲] Skemp [۳] Result pattern generalisation [۴] Process pattern generalisation

۳. کاربرد تعمیم

نخست با ذکر مثال، کاربردهایی از تعمیم را در جبر و هندسه نشان می‌دهیم، سپس به بررسی نقش تجسم در تعمیم می‌پردازیم. در آخر به بیان تاریخچه‌ای از قضیهٔ فیثاغورث و فکر تعمیم آن پرداخته و همچنین نشان می‌دهیم که استفاده از راهیاب «حالت خاص» همواره نمی‌تواند در حل مسائل، مورد استفاده قرارگیرد بلکه برعکس، گاهی اوقات با تغییر مسئله به حالت کلی‌تر و عمومی‌تر و با تعمیم آن، می‌توان مسئله را آسان‌تر حل کرد.

۱.۳. مثالی در جبر. *یک فرمول کلی برای حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم بیابید.* به‌طور معمول فرمول آشنای $\frac{c}{a}$ برای حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ در کتاب‌های درسی آمده است که با استفاده از فرمول مزدوج دو ریشه و ضرب آن‌ها به نتیجهٔ دلخواه می‌رسیم:

$$\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \times \frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} = \frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲} = \frac{c}{a} \tag{۱.۳}$$

مشکل اینجاست که این روش محدودیت دارد زیرا اگر بخواهیم حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم، چهارم و یا بالاتر را بیابیم این روش نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به هر حال برای حل مسئله در حالت کلی‌تر، معادلهٔ درجه nام را در نظر می‌گیریم:

$$a_۱x^n + a_۲x^{n-۱} + \cdots + a_nx + a_{n-۱} = ۰ \tag{۲.۳}$$

فرض کنید که ریشه‌های معادلهٔ (۲.۳)، $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_{n-۱}, \alpha_n$ باشند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(x-\alpha_۱)(x-\alpha_۲)\ldots(x-\alpha_{n-۱})(x-\alpha_n) = ۰ \tag{۳.۳}$$

با ضرب کردن عوامل در معادلهٔ (۳.۳) به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^n + \cdots - \alpha_۱\alpha_۲\ldots\alpha_{n-۱}\alpha_n = ۰ & \text{برای } n\text{های فرد؛} \\ x^n + \cdots + \alpha_۱\alpha_۲\ldots\alpha_{n-۱}\alpha_n = ۰ & \text{برای } n\text{های زوج؛} \end{cases} \tag{۴.۳}$$

با تقسیم معادله‌ی (۲.۳) بر $a_۱$ داریم:

$$x^n + \frac{a_۲}{a_۱}x^{n-۱} + \cdots + \frac{a_n}{a_۱}x + \frac{a_{n+۱}}{a_۱} = ۰ \tag{۵.۳}$$

با مقایسه‌ی جمله به جملهٔ معادلات (۴.۳) و (۵.۳) به این نتیجه می‌رسیم که حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلات چندجمله‌ای برای nهای فرد $\frac{-a_{n+1}}{a_1}$ و برای nهای زوج $\frac{a_{n+1}}{a_1}$ می‌باشد. حال نه تنها یک فرمول کلی برای هر معادلهٔ چندجمله‌ای داریم، بلکه روش بالا به هیچ گونه دانش جبری خاص یا فرمولی نیاز ندارد [۵].

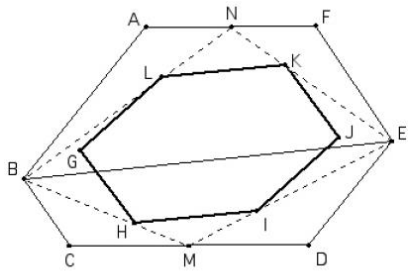
۲.۳. نقش تجسم در تعمیم. به طور کلی محققان ایده‌های مفید و متفاوتی از تجسم ارائه داده‌اند. تجسم قابلیت پیشرفت تدریجی و تولید خلاقیت است. تعبیر تجسم، به‌کارگیری عکس‌ها، تصاویر، نمودارها در ذهن، روی کاغذ یا هر وسیله و ابزار تکنولوژی، با هدف تشریح و مبادلهٔ اطلاعات و تفکر دربارهٔ ایده‌های ناشناختهٔ پیشین و ترقی درک‌ها و گسترش آنهاست. پرسمگ[۱] بیان می‌کند که تجسم، کمکی است به درک یا حرکت به سوی یک نتیجه‌گیری نهایی. بنابراین می‌توان دربارهٔ تجسم یک مفهوم و یا یک مسئله صحبت کرد، اما نمی‌توان راجع به تجسم یک نمودار چیزی گفت. تجسم یک مفهوم یا یک مسئله، مربوط به تصویر فکری یک مسئله است و مجسم کردن مسئله به این معناست که مسئله در شرایط یک نمودار یا یک تصویر ادراک شود. بنابراین روند تجسم، آن است که شامل تصویرسازی با نمودار –یا بدون نمودار– به عنوان قسمتی از روش راه حل شود. تورنتون[۲] ذکر می‌کند که تفکر بصری، باید نقشی کامل در تجربهٔ ریاضی دانش‌آموزان داشته باشد و به عنوان توسعه دهندهٔ فهم جبری، وسیله‌ای قدرتمند برای حل مسئله و ارزشمند در روش‌های یادگیری متفاوت مطرح گردد. بنا به گفته‌های آرکاوی[۳] تجسم، هم محصول و هم حاصل خلاقیت، ترجمه و تأثیرات تصاویر و عکس‌هاست. فیشبین[۴] ادعا می‌کند که تجسم نه تنها اطلاعات را به‌صورت معنایی منظم می‌کند، بلکه عامل مهمی در رسیدن به راه حل مسائل نیز هست و همچنین گفته شده که نقش تجسم حتی از این هم فراتر می‌رود: *می‌تواند روندی باشد که به جوابی عمومی و رسمی ختم می‌شود* [۱۲].

ییلماز[۵] و همکارانش برای بررسی نقش تجسم در تعمیم ریاضی، مسئلهٔ زیر را در اختیار تعدادی از دانش‌آموزان خود قرار دادند: «چند خط راست از n نقطه که سه‌تای آن‌ها روی یک خط راست واقع نباشند می‌گذرد؟» این مسئله مستقیماً به دانش‌آموزان داده نشد، بلکه ابتدا دو نقطه، سپس سه نقطه و ... به آنها داده شد تا خودشان متوجه تعمیم مسئله شوند. از نظر ییلماز و همکارانش، برخی از دانش‌آموزان در فهم روابط و کشف تعمیم دچار مشکل شدند، بنابراین به سختی توانستند تعمیم‌ها را فرمول‌بندی کنند. این مسئلهٔ ساده به دانش‌آموزان داده شد تا بتوانند این موضوع را بررسی کنند

[۱] Presmeg [۲] Tornton [۳] Arcavi [۴] Fishbien [۵] Yilmaz

که چگونه از تجسم، در روند فکر خود استفاده می‌کنند تا بتوانند مسئله‌ای را تعمیم دهند و آن را فرمول‌بندی کنند. آنها به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان از طریق تجسم به مسائل انتزاعی فکر می‌کنند و تجسم، نقش مهمی در تعمیم ریاضی دارد. همان‌طور که فیشبین [۱۲] گفته است: *تجسم عاملی ضروری برای ایجاد حس وضوح و ساختن تعمیم در کمترین زمان و به دست آوردن فرمول است.*

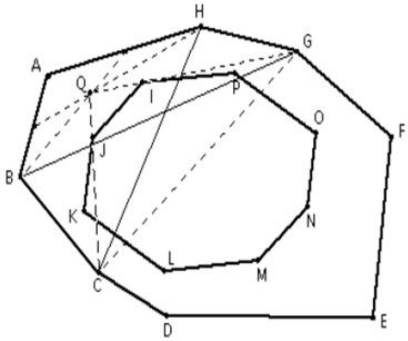
۳.۳. مثالی در هندسه. حال مسئلهٔ زیر و تعمیم آن را مورد توجه قرار می‌دهیم: اگر $ABCDEF$ یک شش ضلعی با اضلاع مقابل موازی (نه لزوماً مساوی) باشد، آنگاه $GHIJKL$ مراکز ثقل مثلث‌های FAB، EFA، DEF، CDE، BCD و ABC، تشکیل یک شش ضلعی با اضلاع روبروی با هم مساوی و موازی را می‌دهند. اثبات این مسئله با رسم قطر BE و استفاده از تشابه در مثلث‌ها خیلی ساده‌تر می‌شود.



حال از خود می‌پرسیم که آیا می‌توان این مسئله را به حالت‌های هشت ضلعی، ده ضلعی و ... تعمیم دهیم؟ اگر به‌جای شش ضلعی حالت قبل، هشت ضلعی $ABCDEFGH$ با اضلاع مقابل موازی را در نظر بگیریم، آنگاه یک هشت ضلعی با اضلاع مقابل موازی و مساوی حادث می‌شود.

در حقیقت نتیجه در حالت کلی برای $2n$ ضلعی‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ برقرار است که مراکز ثقل n ضلعی‌های $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ و $A_2A_3A_4 \ldots A_{n+1}$ و ... زیرتقسیماتش، یک $2n$ ضلعی با اضلاع مقابل موازی و مساوی را تشکیل می‌دهند [۳]. در اینجا برای اثبات از قضیه‌ای که یاگلوم[1] [۱۱]، در مورد مرکز ثقل n ضلعی‌ها اثبات کرده است استفاده می‌کنیم و مسئله را برای $2n$ ضلعی‌ها تعمیم می‌دهیم.

[1] Yaglom



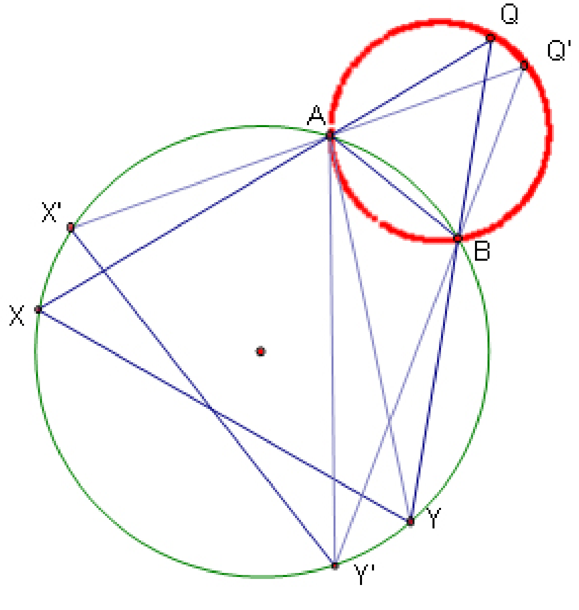
۴.۳. سیر هندسی و شکستن شروط[۱]. گاهی در بحث تعمیم، بعضی از ایده‌ها و نتایج را از تحلیل و بررسی ساختار هندسی نتایج موجود استخراج می‌کنیم. به‌طور مثال، در قضیهٔ رول که به خوبی شناخته شده است: «فرض کنید که $f \in C[a,b]$ و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(a) = f(b)$، آنگاه حداقل یک نقطه مانند c وجود دارد که $c \in (a,b)$ و $f'(c) = ۰$ است.» با شکستن شرط قضیهٔ رول، به قضیهٔ مقدار میانگین می‌رسیم: «اگر $f \in C[a,b]$ و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه حداقل یک نقطه مانند c وجود دارد که $c \in (a,b)$ به‌طوری‌که $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.» در اینجا با شکستن شرط $f(a) = f(b)$ در قضیهٔرول به این نتیجه رسیدیم. در نهایت به این فکر می‌افتیم که چه می‌توان گفت اگر مخرج کسر، تابع دلخواه g باشد؟ پاسخ را می‌توان در قضیهٔلاگرانژ جستجو کرد: «اگر $f, g \in C[a,b]$ و در (a,b) مشتق‌پذیر باشند و فرض کنیم که به‌ازای هر $x \in (a,b)$، $g'(x) \neq ۰$ و $g(a) \neq g(b)$، آنگاه حداقل نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$» [۹].

۵.۳. تعمیم یا حالت خاص؟. در استفاده از راهیاب «حالت خاص» در حل بعضی مسائل ریاضی، ما معمولاً مسئله را در حالت خاص‌تر حل می‌کنیم و سپس حل مسئلهٔ اصلی را در آن جستجو می‌کنیم. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا حل مسئله با راهبرد حالت خاص همیشه راه حل را آسان می‌کند؟ در اینجا توجه‌مان را به گفتهٔ بعضی ریاضی‌دانان معطوف می‌کنیم:
«بیایید ببینیم آیا می‌توان مسئلهٔ کلی‌تری مطرح کرد که شامل مسئلهٔ اصلی باشد و حل آن نیز آسان‌تر باشد؟» (لایب‌نیز[۲] به نقل از پولیا[۳]) [۵].

[۱]Breaking condition and geometric evolution [۲]Leibnitz [۳]Polya

«گاهی اوقات حل مسئلهٔ کلی‌تر از این که مسئلهٔ خاصی را مستقیم حل کنیم ساده‌تر است.» (دیریکله و ددکیند[۱] به نقل از پولیا) [۵].

ممکن است حل مسئلهٔ کلی‌تر آسان باشد؛ این گفته محال‌نما به نظر می‌رسد، در اینجا با یک مثال نشان می‌دهیم که دیگر در نظر ما محال نمی‌آید [۲]. به مسئلهٔ زیر توجه کنید: «اگر A و B نقاط ثابت روی دایره‌ی مفروض باشند و xy قطر همان دایره باشد، مکان هندسی نقاط تلاقی AX و BY را تعیین کنید (AB قطر نیست).» حل این مسئله در این حالت مشکل است. حال اگر مسئله را به شکل کلی زیر بیان کنیم اثبات آن بسی راحت‌تر از مسئلهٔ اصلی، که حالت خاصی از آن است می‌باشد: اگر A و B نقاط ثابت در نظر گرفته شده روی دایرهٔ مفروض باشند و XY وتر قابل حرکت روی همان دایره باشد، آنگاه مکان هندسی تلاقی خطوط AX و BY یک دایره است. (AB و XY در طول، نامساوی هستند) [۴].



اثبات این مسئله با رسم وترهای XY و $X'Y'$ و استفاده از تشابه مثلث‌ها امکان‌پذیر می‌باشد.

۶.۳. قضیهٔ فیثاغورث. در ابتدا قضیهٔ فیثاغورث (۵۰۰ سال قبل از میلاد) به تمام مثلث‌های درون صفحه تعمیم داده شد و تعمیم آن توسط پاپوس[۲] (۳۰۰ سال قبل از میلاد) بیان شد و بسط آن به فضای سه بعدی توسط دکارت (۱۶۱۹) انجام گرفت. شاگردان فیثاغورث یافتند که سه عدد

[۱] Dirichlet & Dedekind [۲] Papus

صحیح را می‌توان یافت به‌طوری‌که $x^۲ + y^۲ = z^۲$. سپس ریاضی‌دانان به دنبال سه‌تایی از اعدادی بودند که $x^۳ + y^۳ = z^۳$ و چیزی نیافتند و فرما بیان کرد که هیچ سه‌تایی از اعداد طبیعی نیست که در معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ $(n > ۲)$ صدق کند؛ (قضیهٔ آخر فرما[1]). (او در زیرتصویری از علم اعداد دیوفانت[2] نوشت که اثبات جالبی کشف کرده‌ام ولی جای کافی برای نوشتن ندارم.) در طول ۳۵۸ سال، ریاضی‌دانان تلاش بسیاری برای اثبات آن کردند و قضیهٔ بخش‌پذیری اعداد صحیح، در ارتباط با قضیهٔ فرما به وجود آمد که برای جبر مدرن ضروری است. در نهایت در سال ۱۹۹۵ اندرو ویلز[3] در مقاله‌ای ۱۳۰ صفحه‌ای قضیهٔ فرما را اثبات کرد [۷]. توجه می‌کنیم که چگونه قضیهٔ فیثاغورث و تعمیم آن چندین قرن ریاضی‌دانان را به کار واداشت و نتایج آن موجب پیدایش شاخه‌های جدیدی در ریاضیات گردید.

۴. نتیجه‌گیری

در آموزش ریاضیات، همواره سعی بر آن بوده که راهی آسان‌تر و قابل فهم را در حل مسائل، به دانش‌آموزان ارائه دهیم. به‌طور کلی اگر به خوبی روش حل‌های موفق و کاربردی را برای یک مسئله شناسایی کنیم و فکر دانش‌آموزان را به مسائل مشابه آن، با فرضیات کمتر سوق دهیم و این پرسش را مطرح کنیم که آیا مسئلهٔ داده شده قابل تعمیم است؟ یا می‌توان مسئله را در حالت عمومی‌تر حل نمود؟ آنگاه آن‌ها را با مسئلهٔ جدیدی مواجه کرده‌ایم و به این طریق یک مسئلهٔ ساده و چالش برانگیز برای دانش‌آموزان به وجود آورده‌ایم که موجب ایجاد تفکر ریاضی در آن‌ها می‌شود. تعمیم و فکر تعمیم دادن یک مسئله و حل آن، همواره در ریاضیات وجود داشته است، به‌طوری‌که تاریخ ریاضیات و بسیاری از شاخه‌های ریاضی چیزی جز تعمیم‌های متوالی و ایده‌های تعمیم دادن مسئله و نتایج نمی‌باشد.

مراجع

[۱] ممتحن، احسان. نتایج باور نکردنی در ریاضیات: گزیدهٔ مقالات و گفتگوهای همگانی امیدعلی شهنی کرمزاده. انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۰.

[۲] پولیا، جورج. چگونه مسئله حل کنیم؟. ترجمهٔ احمد آرام، انتشارات کیهان، چاپ نهم، ۱۳۸۸.

[3] M. De Villirs, A Hexagon result and its generalization via proof, TMME **4** no. 2, (2007) 188.

[1] Fermat's last Theorem [2] Diofant [3] Andrew Wiles

[4] M. De Villirs, Solving a locus problem via generalization, Published in Reflection, *Georgia Council of teachers of mathematics*, (2008) 20-21.

[5] M. De Villirs, M. Garner, Problem solving and proving via generalization, *Learning and teaching mathematics*, no. 5, (2008) 19-25.

[6] M. A. Mariotti, Proof and proving in mathematics education, *Handbook of research in the Psychology of Mathematics Education*, (2006) 173-204.

[7] G. Miclaus, About generalization in mathematics, *Creative Math*, (2005) 117-120.

[8] M. Mitchelmor. C, The role of abstraction and generalization in the development of mathematical knowledge, *EARCOME 2002 proceedings* **1**, plenary and regular lectures, (2002) 157-167.

[9] J. B. Ramundo de Sampio, S. Yuan, J. Y. Yuan, Generalization: One technique of compulatational and applied mathematical methodology, *Applied Mathematics and Computation 200*, (2008) 574-582.

[10] A. Sheonfeld, Mathematical Problem Solving, Published by Academic press, 1985.

[11] I. M. Yaglom, Geometric Transformation II, Translated from the Russian by Allen Shelds, The L. W singer Company New Mathematical Library, 1968.

[12] R. Yilmaz, Z. Argun, M. O. Keskin, What is the role of visualization in generalization processes: The case of preservice secondary teachers, *humanity and social science journal* **4(2)**, (2009) 130-137.

مارال روئین: دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی

رایانامه: Maral.rooien@gmail.com

رستم محمدیان: دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی

رایانامه: Mohamadian_R@scu.ac.ir

نوراله نژاد صادقی: دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی

رایانامه: Sadeghi_n@scu.ac.ir