فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۶ (بهار ۱۳۹۴) صص. ۴۹ تا ۶۸

یادداشتی بر مجموعه‌های حدّی در دستگاه‌های دینامیکی

ابوالحسن رزمی‌نیا

تقدیم به برادرم کامبیز که ذهن خلاقش به روی همه زمینه‌ها همواره باز است.

چکیده

دستگاه‌های دینامیکی به‌عنوان یکی از مباحث مشترک در حوزهٔ ریاضیات و مهندسی، امروزه به‌عنوان یکی از میدان‌های باز پژوهشی، توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف داشته است. از جمله ویژگی‌های مهم این دستگاه‌ها، وضعیت رفتار مانای آن‌ها در گذر زمان است که موضوع این نوشتار است. ما وضعیت حالت ماندگار این دستگاه‌ها را در چارچوب مجموعه‌های حدّی صورت‌بندی می‌کنیم. مجموعه‌های حدی رفتار حالت مانای دستگاه‌های خطی یا غیرخطی را نشان می‌دهند و عمدهٔ تحقیقات، روی این بخش از رفتار دستگاه‌های فیزیکی (در مقابل رفتار گذرا) تمرکز یافته است. چهار نوع مجموعهٔ حدی عبارت‌اند از: نقطهٔ تعادل، رفتار تناوبی، رفتار شبه‌تناوبی و آشوب. در این مقاله هر یک از این چهار نوع مجموعه را از دید فضای حالت، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. سرآغاز

مطالعهٔ دستگاه‌های دینامیکی به سال‌های بسیار دور بر می‌گردد، اما طی چهار دههٔ اخیر که مطالعات جدی و گسترده‌ای در زمینهٔ آشوب و کاربردهای آن انجام گرفته، این مبحث پررنگ‌تر از گذشته در جامعهٔ علمی ظاهر گشته است. در آغاز، پدیدهٔ آشوب به‌عنوان یک مفهوم کاملاً ریاضی

عبارات و کلمات کلیدی. دستگاه دینامیکی، مجموعه‌های حدی، آشوب.

در نظر گرفته می‌شد و یا در دستگاه‌های فیزیکی، بسیاری از رفتارهایی که امروزه آشوبی بودن آنها ثابت شده است، به‌صورت نوفه‌ها و سیگنال‌های ناخواسته تصادفی دیده و رفتارها یا ویژگی‌های نامطلوبی شناخته می‌شدند. متعاقب کارهایی که توسط لورنتس[۱] ، فایگن‌باوم[۲] ، اسمیل[۳] و مای[۴] انجام شد، مطالعات وسیعی در این حوزه به‌ویژه از نوع شبیه‌سازی صورت گرفت که به‌عنوان نمونه، کارهایی که یوئدا[۵] در مهندسی برق انجام داد، نشان داد که پدیدهٔ آشوب برخلاف مشاهدات اولیه، یک پدیدهٔ قطعی[۶] است که در بسیاری از دستگاه‌های فیزیکی با ماهیت غیرخطی می‌تواند رخ دهد. این فقط نمونه‌ای از صدها پیشرفتی بود که در مطالعهٔ کیفی دستگاه‌های دینامیکی شکل گرفته است.

همهٔ داستان دستگاه‌های دینامیکی در سالهای ۱۹۶۰ تحت تأثیر کارهای موزر[۷] و اسمیل در ایالات متحده، پشوتو[۸] در برزیل و کولموگروف[۹] ، آرنولد[۱۰] و سینای[۱۱] در اتحاد جماهیر شوروی، به‌کلی دگرگون شد. روش‌های توپولوژی دیفرانسیلی، افراد مبرّزی همچون اسمیل و پشوتو و تابعین آن‌ها را قادر به درک ماهیت رفتار آشوبی در دستهٔ وسیعی از دستگاه‌های دینامیکی موسوم به دستگاه‌های هذلولوی نمود. کولموگروف، آرنولد و موزر با استفاده از ایده‌ای مرکب از روش‌های هندسی و روش‌های آنالیزی سنگین، توانستند نخستین گام تحلیلی مهم را با توسعهٔ نظریهٔ معروف KAM بردارند. نظریهٔ ارگودیک هموار، دینامیک‌های توپولوژیکی، مکانیک همیلتونی، و مطالعهٔ هندسی و کیفی معادلات دیفرانسیل، همگی مولود تلاش‌هایی بود که طی شناخت ساختار دستگاه‌های دینامیکی توسط دانشمندان صورت می‌گرفت [۶].

ساختار این نوشتار به قرار زیر است: در بخش ۲ انواع دستگاه‌های دینامیکی خودگردان و غیرخودگردان و برخی ویژگی‌های مهم آن‌ها را به‌عنوان پیشنیاز، مرور خواهیم کرد. در بخش ۳ بعضی از نیازهای اولیه در قالب تعاریف و نکاتی در زمینهٔ مجموعه‌های حدی بیان خواهد شد. نقطهٔ تعادل به‌عنوان اولین مجموعهٔ حدی در بخش ۴ معرفی خواهد شد. بخش ۵، به بحثی مختصر دربارهٔ دومین مجموعهٔ حدی یعنی جواب‌های متناوب تخصیص یافته است. سومین و چهارمین مجموعه‌های حدی با نام‌های جواب‌های شبه‌متناوب و آشوب به‌ترتیب در بخش‌های ۶ و ۷ بررسی خواهند شد که احتمالاً پیچیده‌ترین ساختار مجموعه‌های حدی را در بین انواع چهارگانه مجموعه‌های حدی دارا می‌باشند.

[۱]Lorenz [۲]Figenbaum [۳]Smale [۴]May [۵]Ueda [۶]Deterministic [۷]Moser [۸]Peixoto
[۹]Kolmogrov [۱۰]Arnold [۱۱]Sinai

۲. انواع دستگاه‌های دینامیکی مورد مطالعه

معادلات دیفرانسیل معمولی یکی از اساسی‌ترین ابزارهای تحلیل دستگاه‌های فیزیکی به‌شمار می‌رود. در حالت کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ r به‌صورت ضمنی زیر بیان می‌شود:

$$F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(r)}) = 0; \quad y \in \mathbb{R}^m \tag{۱.۲}$$

که در آن، F روی یک مجموعهٔ باز از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m(r+1)}$ تعریف شده و مقداری در $\mathbb{R}^m$ را به‌دست می‌دهد. قضیهٔ تابع ضمنی ما را قادر می‌سازد تا m معادلهٔ بیان شده در ۱.۲ را (دست‌کم به‌صورت موضعی) به‌شکل یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی صریح مانند زیر بنویسیم به این شرط که ژاکوبین میدان برداری F غیرصفر باشد:

$$y^{(r)} = G(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(r-1)}) \tag{۲.۲}$$

تعریف ۱.۲. (جواب) یک جواب برای معادلهٔ $\dot{x} = f(t, x)$ با شرط آغازی $x(t_0) = x_0$ در واقع هر تابع پیوسته مانند ϕ است که روی مجموعهٔ ناتهی $I(t_0, x_0) \subset I \subset \mathbb{R}$ به همراه t_0 با خصوصیات زیر تعریف می‌گردد:

$$\phi : I(t_0, x_0) \subset I \subset \mathbb{R} \to D \subset \mathbb{R}^n \tag{۳.۲}$$

$$t \mapsto \phi(t; t_0, x_0) \tag{۴.۲}$$

جواب با نماد $\phi(t)$ نشان داده می‌شود و به‌ازای هر $t \in I(t_0, x_0)$ در معادلهٔ $\dot{x} = f(t, x)$ صدق می‌کند و $\phi(t_0) = x_0$.

در این مقاله، ما دستگاه‌های دینامیکی پیوسته‌زمان را در قالب دو ردهٔ کلی بحث می‌کنیم: دستگاه‌های دینامیکی خودگردان[۱] و غیرخودگردان[۲]. در اینجا فقط به معرفی سریعی از مفاهیم می‌پردازیم؛ برای مطالعه بیشتر به [۷] و [۵] رجوع کنید. در زیر برای سادگی، از نمادهایی استفاده می‌کنیم که در نوشتجات مهندسی بیشتر کاربرد دارند.

تعریف ۲.۲. یک دستگاه دینامیکی خودگردان با معادلهٔ $\dot{x} = f(x)$ همراه با شرط آغازی $x(t_0) = x_0$ تعریف می‌شود که در آن، $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ نگاشت

$$\phi_t : D \to \mathbb{R}^n \tag{۵.۲}$$

[۱] autonomous [۲] nonautonomous

که بر اساس رابطهٔ $x(t) = \phi_t(x(t_\circ))$ به جواب این معادله نسبت داده می‌شود، شار یا جریان این دستگاه دینامیکی نام دارد و در دو ویژگی $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$ و $\phi_\circ = x$ صدق می‌کند. همچنین مجموعهٔ $\{\phi_t(x_\circ) : -\infty < t < \infty\}$ را مسیر[1] گذرنده از نقطهٔ $x_\circ$ می‌خوانیم.

در این تعریف از آنجا که میدان برداری $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ وابسته به زمان نیست، همواره می‌توان زمان آغازی را $t_\circ = \circ$ در نظر گرفت. علاوه بر این، اگر میدان برداری خطی باشد، دستگاه دینامیکی را خطی و در غیر این صورت، غیرخطی می‌نامیم.

تعریف ۳.۲. یک دستگاه دینامیکی غیرخودگردان با معادلهٔ $\dot{x} = f(t, x)$ همراه با شرط آغازی $x(t_\circ) = x_\circ$ تعریف می‌شود که در آن، $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ نگاشت

$$\phi_t : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n \tag{۶.۲}$$

که بر اساس رابطهٔ $x(t) = \phi_t(t_\circ, x(t_\circ))$ به جواب این معادله نسبت داده می‌شود، شار یا جریان این دستگاه دینامیکی نام دارد.

در دستگاه‌های غیرخودگردان، میدان برداری به زمان وابسته است و بنابراین زمان آغازی را نمی‌توان در حالت کلی صفر در نظر گرفت. همچنین دستگاه غیرخودگردان را خطی می‌گوییم هرگاه میدان برداری نسبت به x خطی باشد؛ در غیر این صورت، دستگاه را غیرخطی می‌خوانیم.

تعریف ۴.۲. دستگاه غیرخودگردان $\dot{x} = f(t, x)$ را متناوب گوییم هرگاه وجود داشته باشد یک $T > \circ$ به‌طوری که برای همهٔ xها و tها داشته باشیم

$$f(t, x) = f(t + T, x) \tag{۷.۲}$$

کوچکترین $T > \circ$ ممکن را دورهٔ تناوب دستگاه متناوب می‌نامیم.

به دیگر سخن، جواب $\phi_t(t_\circ, x_\circ)$ را متناوب با دورهٔ تناوب T گوییم هرگاه دامنهٔ تغییرات زمان برابر $\mathbb{R}$ بوده و عددی حقیقی مانند $\nu > \circ$ وجود داشته باشد که برای همه زمان‌های t داشته باشیم: $\phi_{t+\nu}(t_\circ, x_\circ) = \phi_t(t_\circ, x_\circ)$. همچنین کوچکترین مقدار برای چنین $\nu > \circ$هایی را با T نشان می دهیم و آن را دورهٔ تناوب می‌نامیم. در این صورت، مدار متناظر را مدار متناوب با دورهٔ تناوب T–متناوب می‌نامیم.

[1]trajectory

تعریف ۵.۲. منحنی γ را یک مدار بسته[۱] می‌نامیم اگر γ یک مدار منحنی ژردان[۲] باشد. منظور از منحنی ژردان، منحنی است که همسانریخت با یک دایره باشد.

بدین ترتیب هر مدار متناظر با یک جواب T–متناوب، یک مدار بسته است. همچنین برای دستگاه‌های خودگردان، عکس این نکته نیز صحیح است.

ملاحظه ۶.۲. در این نوشتار، همه دستگاه‌های دینامیکی غیرخودگردان را متناوب فرض می‌کنیم مگر این که به‌طور صریح غیر از این گفته شود.

یکی از نکات مهم در مطالعهٔ دستگاه‌های دینامیکی، ارتباط تنگاتنگی است که بین دستگاه‌های خودگردان و غیرخودگردان وجود دارد. برای روشن شدن موضوع، فرض کنید دستگاه غیرخودگردان $\dot{x} = f(t, x)$ با دورهٔ T متناوب باشد. حال متغیر جدیدی به‌صورت $\theta = ۲\pi t/T$ تعریف می‌کنیم. در این صورت می‌توان فرم فضای حالت دستگاه غیرخودگردان مذکور را به‌شکل زیر نوشت:

$$\dot{x} = f(\theta T/(۲\pi), x); \quad x(t_\circ) = x_\circ \tag{۸.۲}$$

$$\dot{\theta} = ۲\pi/T; \quad \theta(t_\circ) = ۲\pi t_\circ/T \tag{۹.۲}$$

به روشنی دیده می‌شود که با این تبدیل، می‌توان دستگاه غیرخودگردان از مرتبهٔ n با نگاشتی به یک دستگاه خودگردان از مرتبهٔ $n + ۱$، تبدیل نمود. توجه کنید که در معادلهٔ ۸.۲ چون f نسبت به زمان، با دورهٔ T متناوب است، دستگاه تبدیل‌شده نیز نسبت به θ با دورهٔ ۲π متناوب است. بنابراین فضای حالت اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+۱}$، با این تبدیل، به فضای حالت استوانه‌ای $\mathbb{R}^n \times S^۱$ تبدیل می‌شود که در آن، $S^۱ = [\circ, ۲\pi)$ مبین یک دایره است. بدین‌ترتیب با این تبدیل، همهٔ ایده‌هایی که در مطالعهٔ دستگاه‌های خودگردان وجود دارد را می‌توان روی دستگاه‌های غیرخودگردان متناوب نیز اعمال کرد.

۳. پیش‌نیازهای اساسی

به زبانی ساده، منظور از حالت مانای یک دستگاه دینامیکی، رفتار آن دستگاه برای $t \to \infty$ است. در واقع نوعی از حالت مانای یک دستگاه برای ما محل توجه است که کراندار باشد. به

[۱] closed orbit [۲] Jordan curve

عبارت دیگر، رفتار دستگاه در $t \to \infty$ که به‌صورت بی‌کران بزرگ می‌شود به‌عنوان حالت مانا در نظر نمی‌گیریم. همچنین تفاضل یک جواب از دستگاه دینامیکی و حالت مانای آن جواب را حالت گذرا می‌نامیم.

تعریف ۱.۳. نقطه‌ای مانند y را یک نقطهٔ ω-حدی از x می‌نامیم هرگاه برای هر همسایگی U از y، شار $\phi_t(x)$ برای $t \to \infty$ به‌صورت مکرر به این همسایگی (U) وارد شود. به عبارت دیگر، یک دنباله از زمان مانند $\{t_n\}$ چنان موجود باشد که

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x) = y \tag{۱.۳}$$

مفهوم شهودی این تعریف این است که منحنی جواب گذرنده از نقطهٔ x با گذشت زمان سرانجام به نقطهٔ y میل کند[۱].

تعریف ۲.۳. مجموعهٔ $\Omega(x)$ مرکب از همهٔ نقاط ω-حدی از x را مجموعهٔ ω-حدی از x می‌نامیم. چنان‌که از نماد بر می‌آید، مجموعهٔ $\Omega(x)$ به x وابسته است.

تعریف ۳.۳. یک مجموعهٔ ω-حدی مانند Ω را جاذب[۲] گوییم اگر یک همسایگی باز مانند U از Ω چنان وجود داشته باشد که برای هر $x \in \Omega$ داشته باشیم $\Omega(x) = \Omega$

بنابراین در حالت کلی یک مجموعهٔ حدی در $\mathbb{R}^n$ بسته است و تحت جریان شار جواب، ناورداست. در واقع همین مجموعه‌های حدی جاذب هستند که از نظر کاربردی محل توجه ویژه هستند، زیرا مجموعه‌های حدی غیرجاذب را نمی‌توان مستقیماً در شبیه سازی‌ها یا دستگاه‌های فیزیکی مشاهده نمود.

تعریف ۴.۳. پهنهٔ جذب[۳] یک مجموعه مانند L که با نماد B_L نشان داده می‌شود را به‌صورت اجتماع همه همسایگی‌هایی مانند U (گفته شده ۳.۳) تعریف می‌کنیم. در واقع B_L مجموعهٔ همه شرایط آغازی است که در نهایت به L همگرا می‌شوند.

ذکر این نکته خالی از فایده نیست که تعریف مجموعهٔ حدی برای یک دستگاه غیرخودگردان در حالت کلی بی‌معنی است مگر این که بتوانیم این دستگاه را با تبدیلاتی به دستگاه خودگردانی تبدیل

[۱] چنان‌که بعداً خواهیم دید، هر نقطهٔ تعادل مجموعهٔ ω و α حدی خودش است

[۲] Attracting [۳] Basin of attraction

نماییم. گفتنی است در مقابل نقاط ω-حدی، نقاط α-حدی نیز قابل تعریف است که در واقع نقاط حدی زمان معکوس هستند. به زبانی گویاتر، این نقاط همانند نقاط ω-حدی هستند جز این که در تعریف آن باید داشته باشیم $t \to -\infty$. بدین ترتیب مجموعهٔ همه نقاط α-حدی از نقطهٔ x را با نماد $A(x)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۳. مجموعهٔ $J \subset I$ مفروض است. یک مجموعهٔ فشرده ناتهی مانند $A \subset X$ را J-ناوردا[۱] گوییم هرگاه

$$\forall t_\circ \in J, \forall x_\circ \in I(t_\circ, x_\circ) : \phi_t(t_\circ, x_\circ) \in A \tag{۲.۳}$$

ملاحظه ۶.۳. در پایان این قسمت چند نکتهٔ مهم را فهرست وار بیان می‌کنیم:

(آ) اگر x و z روی یک منحنی جواب باشند، آنگاه $\Omega(x) = \Omega(z)$ و $A(x) = A(z)$.

(ب) یک مجموعهٔ ناوردای بسته، به‌ویژه یک مجموعهٔ حدی، مجموعه‌های ω-حدی و α- حدی هر نقطهٔ خودش را شامل می‌شود.

(پ) برای هر لحظه مانند t داریم $\phi_t(x) = \phi_t(z)$ اگر و فقط اگر $x = z$. بیان شهودی این نکته این است که یک مسیر از یک دستگاه خودگردان از روی شرایط آغازی به‌صورتی یکتا قابل محاسبه است و مسیرهای مجزا هرگز همدیگر را قطع نمی‌کنند.

چنان‌که از نظریهٔ دستگاه‌های خطی به خاطر داریم، برای یک دستگاه خطی پایدار مجانبی، تنها یک مجموعهٔ حدی وجود دارد [۳]. علاوه بر این، پهنهٔ جذب یک چنین مجموعهٔ حدی نیز تمام فضای حالت است که این بیانگر این نکته است که پایداری مجانبی برای دستگاه خطی، سرتاسری است. به عبارت دیگر، حالت مانا برای این دسته دستگاه‌ها، مستقل از شرایط آغازی است. اما برای دستگاه‌های غیرخطی این ویژگی وجود ندارد و همین انگیزهٔ اصلی نگارش این مقاله است. در واقع وجود مجموعه‌های حدی مختلف، یکی از وجوه تمایز دستگاه‌های خطی و غیرخطی می‌باشد. به عبارت دیگر، در یک دستگاه غیرخطی می‌توان چندین مجموعهٔ حدی با نواحی جذب گوناگونی یافت که محل شرایط آغازی در فضای حالت، معین‌کننده ناحیه جذب نهایی است. در حالی که برای دستگاه خطی چنین وضعی وجود ندارد. برای دستگاه‌های غیرخطی نوعاً چهار نوع مجموعهٔ حدی قابل مشاهده است که در این مقاله به بررسی اجمالی هر یک می‌پردازیم. نحوه ارائه این مجموعه‌ها، به‌ترتیب از ساده به پیچیده خواهد بود. البته برخی از این مفاهیم در [۱] بحث شده است.

[۱] J-invariant

۴. نقطهٔ تعادل

تعریف ۱.۴. برای دستگاه دینامیکی خودگردان $\dot{x} = f(x)$ نقطهٔ x^* را یک نقطهٔ تعادل[1] گوییم اگر در هر زمان داشته باشیم $x^* = \phi_t(x^*)$.

این تعریف به زبان شهودی می‌گوید با شروع از نقطهٔ تعادل، همواره در همان نقطه باقی خواهیم ماند که این خود بیانگر عدم تغییرات زمانی این نقطه می‌باشد یعنی: $\dot{x}^* = ۰$. بنابراین برای یافتن نقطهٔ تعادل دستگاه مزبور کافی است معادلهٔ جبری $f(x) = ۰$ را حل کنیم[2]. علاوه بر این، در حالت کلی نقطهٔ تعادل با این تعریف نمی‌تواند به‌صورت یک مجموعهٔ حدی برای دستگاه‌های غیرخودگردان در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر، برای دستگاه غیرخودگردان $\dot{x} = f(t, x)$ لزوماً نقطهٔ تعادل از حل معادلهٔ $f(t, x) = ۰$ به‌دست نمی‌آید [۹].

برای این مجموعهٔ حدی خاص (یعنی نقطهٔ تعادل)، طیف فرکانسی فقط شامل یک اسپایک در فرکانس صفر است. به عبارت دیگر، از آنجا که این نقطه یک جواب ثابت است، بنابراین از نظر فرکانسی فقط دارای مؤلفهٔ DC بوده و در دیگر فرکانس‌ها، مقدار نداریم. همچنین مجموعهٔ حدی متناظر با نقطهٔ تعادل، به‌روشنی خود نقطهٔ تعادل است. برای دستگاه $\dot{x} = f(x)$ اگر x^* نقطهٔ تعادل باشد، این نقطهٔ تعادل به یکی از اشکال زیر خواهد بود:

هذلولوی: نقطهٔ تعادل x^* را هذلولوی گوییم اگر ماتریس ژاکوبین میدان برداری f در این نقطه، دارای مقادیر ویژهٔ موهومی خالص نباشد.

غیرهذلولوی: نقطهٔ تعادل x^* را غیرهذلولوی گوییم اگر ماتریس ژاکوبین میدان برداری f در این نقطه، دارای حداقل یک مقدار ویژهٔ موهومی خالص باشد.

این دسته‌بندی برای دستگاه‌های خودگردان بسیار مهم و کاربردی است [۲].

۵. جواب‌های متناوب

جواب‌های متناوب را برای دستگاه‌های خودگردان و غیرخودگردان به‌صورت جداگانه تعریف می‌کنیم و در مورد هر کدام از این دو تعریف، به‌صورت اجمالی بحث خواهیم کرد.

[2] البته می‌توان مثال‌های ویژه‌ای ارائه کرد که جواب‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$، نمایندهٔ نقطهٔ تعادل نباشند. ولی از آنجا که این موارد در عمل به‌ندرت رخ می‌دهند و بیشتر جنبه آموزشی دارند از بررسی آن‌ها چشم‌پوشی کرده و فرض می‌کنیم همهٔ جواب‌های معادلهٔ جبری بیانگر نقاط تعادل دستگاه است.

[1] equilibrium

۱.۵. دستگاه‌های خودگردان.

تعریف ۱.۵. برای یک دستگاه خودگردان، جواب $\phi_t(x^*)$ را متناوب گوییم هرگاه برای همه زمان‌ها و یک $T > ۰$ کمینه، داشته باشیم

$$\phi_t(x^*) = \phi_{t+T}(x^*) \tag{۱.۵}$$

توجه به این نکته ضروری است که چون هر نقطه روی مسیر متناوب (در فضای حالت) خود جزء جواب است، نقطهٔ x^* در تعریف فوق یکتا نیست. تغییر این x^* به تغییر در مبدا زمان می‌انجامد. این مسئله را می‌توان به‌سادگی از روی نمودار فضای حالت به‌صورت شهودی درک کرد.

تعریف ۲.۵. یک جواب متناوب را منفرد[۱] گوییم اگر بتوان یک همسایگی از آن را چنان یافت که آن همسایگی شامل هیچ جواب متناوب دیگر نباشد. برای دستگاه‌های دینامیکی خودگردان، یک جواب متناوب منفرد را یک چرخه حدی[۲] می‌نامند.

طیف فرکانسی یک چرخهٔ حدی به‌عنوان یک جواب متناوب از یک دستگاه دینامیکی خودگردان شامل اسپایکی[۳] در فرکانس صفر (مؤلفه DC) و اسپایک‌هایی در مضارب صحیح فرکانس پایه، با نماد $f := T^{-۱}$، است. البته برخی از این مؤلفه‌های فرکانسی می‌توانند دارای اندازه دامنهٔ صفر باشند[۴].

مجموعهٔ حدی متناظر با یک چرخهٔ حدی در واقع یک منحنی بسته است که توسط شار یا جریان مسیری $\phi_t(x^*)$ روی یک دورهٔ تناوب پیموده می‌شود. این مجموعهٔ حدی وابرریخت با $S^۱$ است و البته متداول است که چرخه‌های حدی را با نام دایره‌ها نیز بخوانیم. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳.۵. معادلهٔ وندر پل[۵] به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

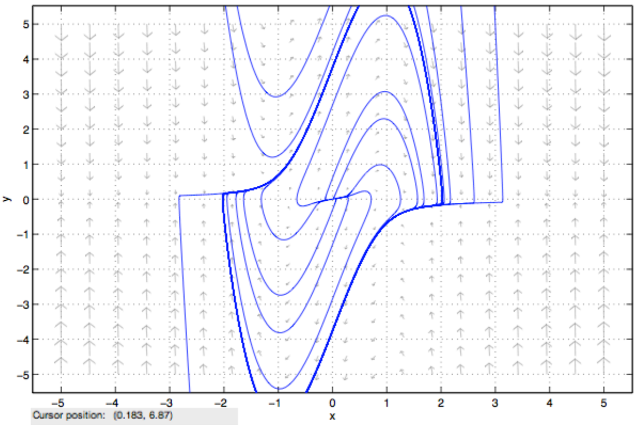
$$\dot{x} = y \tag{۲.۵}$$

$$\dot{y} = ۴(۱ - x^۲)y - x \tag{۳.۵}$$

[۴] این مسئله ممکن است برای خود فرکانس پایه نیز رخ دهد، یعنی اندازهٔ دامنهٔ اسپایک در فرکانس پایه صفر شود. نتیجهٔ فوری این نکته این است که فرکانس یک شکل موج متناوب را نمی‌توان به‌تنهایی از روی اولین فرکانس غیرصفر آن محاسبه کرد؛ فاصلهٔ فرکانسی اسپایک‌های غیرصفر باقیمانده را نیز باید بررسی کرد.

[۱] isolated [۲] limit cycle [۳] spike [۵] Van der Pol

نمودار فضای فاز آن در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱: نمودار فضای فاز دستگاه ون در پل

در مطالعهٔ دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی، عموماً با دو دستهٔ کلی مدار مواجه می‌شویم:

(۱) مدارهای بسته که در واقع تعمیمی از نقاط تعادل هستند.

(۲) مدارهای هوموکلینیک[۱] و هتروکلینیک[۲] که نقاط تعادل را به هم وصل می‌کنند[۳].

در این زیربخش، چرخهٔ حدی را به‌عنوان یک مجموعهٔ حدی برای دستگاه‌های خودگردان معرفی کردیم. دیدیم یک مدار بسته منفرد است. در ادامه کمی بیشتر در مدارها تعمق می‌کنیم.

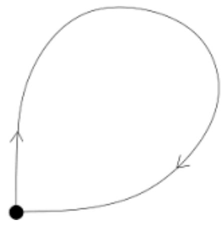
تعریف ۴.۵. یک مدار هوموکلینیک مداری است که یک نقطهٔ تعادل را به خودش وصل می‌کند. همچنین مداری را که دو نقطهٔ تعادل را به هم وصل کند، هتروکلینیک می‌گوییم.

نمونه‌هایی از این مدارها را می‌توان در شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده نمود.

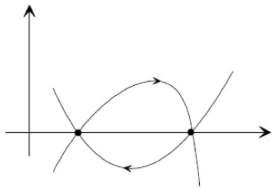
۲.۵. دستگاه‌های غیرخودگردان. یک دستگاه غیرخودگردان متناوب را می‌توان با تبدیلی که پیش از این مطرح شد، به یک دستگاه خودگردان بازنویسی کرد. بنابراین می‌توان مطالب زیربخش قبل را مستقیماً به این دسته دستگاه‌ها اعمال نمود. با وجود این، از آنجا که خود این گونه دستگاه‌ها

[۳] در واقع این دو نوع مدار، مدارهای خاصی هستند که به بحث نقاط تعادل مربوطاند.

[۱] Homoclinic [۲] Heteroclinic



شکل ۲: نمودار یک مدار هموکلینیک



شکل ۳: نمودار یک مدار هتروکلینیک

به وفور در موارد فیزیکی یافت می‌شوند، بجاست که به‌عنوان یک مورد، به‌صورت مجزا مورد بحث قرار گیرد.

تعریف ۵.۵. $\phi_t(x^*, t_\circ)$ را یک جواب متناوب از یک دستگاه غیرخودگردان متناوب مانند $\dot{x} = f(t, x)$ می‌نامیم هرگاه برای همه زمان‌ها داشته باشیم

$$\phi_t(t_\circ, x^*) = \phi_{t+T}(t_\circ, x^*) \tag{۴.۵}$$

که در آن، $T > \circ$ دورهٔ تناوب کمینه است.

هرگاه با تبدیلی که در بخش قبل معرفی شد، یک دستگاه غیرخودگردان متناوب با دورهٔ تناوب کمینه T_f به یک دستگاه خودگردان تبدیل شود، جواب متناوب از این دستگاه، به یک چرخهٔ حدی در فضای حالت استوانه‌ای تبدیل می‌شود که دورهٔ تناوب این چرخهٔ حدی مضربی صحیح از T_f خواهد بود، یعنی $T = KT_f$. در این صورت جواب $\phi_t(t_\circ, x^*)$ را یک جواب تناوب–K[۱] می‌نامیم.

[۱] K-period

یک جواب تناوب-۱ را اغلب جواب پایه می‌گوییم و اگر $K > ۱$ از یک جواب تناوب-K با نام زیرهارمونیک مرتبه kام یاد می‌کنیم[۱].

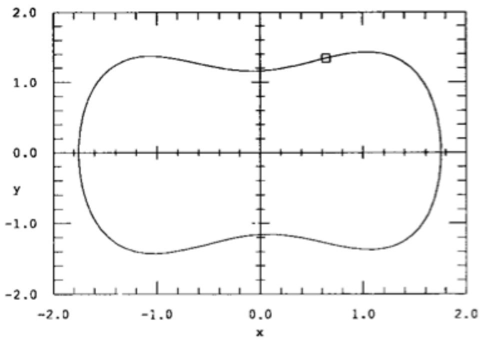
طیف فرکانسی هر مؤلفه از یک جواب تناوب-۱ شامل اسپایکی در فرکانس صفر و اسپایک‌هایی در مضارب صحیح $T_f^{-۱}$ است. به همین ترتیب طیف یک زیرهارمونیک مرتبه K شامل اسپایکی در فرکانس صفر و اسپایک‌هایی در مضارب صحیح $(KT_f)^{-۱}$ می‌باشد. بدین ترتیب مشاهده می‌شود هرچه مرتبهٔ زیرهارمونیک بالاتر باشد، مؤلفه‌های فرکانسی غیرصفر در فواصل کمتری در طیف فرکانسی پخش می‌شوند. البته ممکن است دامنهٔ برخی از مؤلفه‌های فرکانسی در طیف صفر باشد.

مثال ۶.۵. معادلهٔ دافینگ به‌صورت زیر است:

$$\dot{x} = y \tag{۵.۵}$$

$$\dot{y} = x - x^۳ - \epsilon y + \gamma \cos \omega t \tag{۶.۵}$$

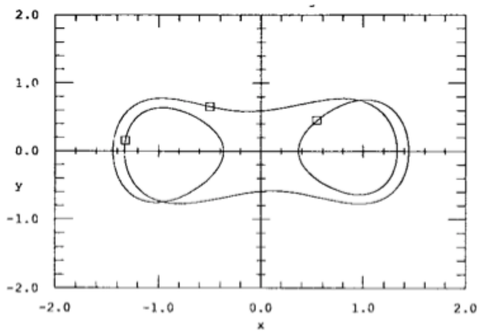
نمودار فضای فاز این دستگاه به‌ازای $\epsilon = ۰/۱۵$، $\gamma = ۰/۳$ و $\omega = ۱$ در شکل ۴ نمایش داده شده است. نمودار دیگری از این دستگاه برای مقادیر $\epsilon = ۰/۲۲$، $\gamma = ۰/۳$ و $\omega = ۱$ در شکل ۵ آورده شده است.



شکل ۴: نمودار فضای فاز دستگاه دافینگ برای $\epsilon = ۰/۱۵$

---

[۱] این وجه تسمیه با الهام از آنالیز فوریه انجام گرفته است.



شکل ۵: نمودار فضای فاز دستگاه دافینگ برای $\epsilon = ۰/۲۲$

توجه کنید که برای یک جواب پایه، x^* منحصر به‌فرد است. این در واقع نقطه‌ای است روی منحنی جواب متناوب که از $t = t_۰$ عبور می‌کند. روی نمودار در شکل ۴ به‌صورت علامتی نشان داده شده است. در واقع برای یک زیرهارمونیک از مرتبهٔ K که یک x^* داده شده است، تعداد $(K - ۱)$ مقدار دیگر به‌صورت زیر وجود دارند:

$$x_j^* = \phi_{t_۰+(j-۱)T_f}(t_۰, x^*); \quad j = ۱, \ldots, K \tag{۷.۵}$$

که می‌توانند برای شناسایی زیرهارمونیک مورد استفاده قرار بگیرند. به زبانی ساده‌تر، هرکدام از این مقادیر به جابجایی در مبدأ زمان از دورهٔ تناوب پایه T_f می‌انجامد؛ یعنی برای همه زمان‌ها

$$\phi_t(t_۰, x^*) = \phi_t(t_۰ + jT_f, x_j^*); \quad j = ۱, \ldots, K - ۱ \tag{۸.۵}$$

در شکل ۵ این x_j^* با نشانه‌هایی روی شکل مشخص شده‌اند.

ملاحظه ۷.۵. برای اغلب دستگاه‌های خودگردان مفهوم زیرهارمونیک بی‌معناست چراکه هیچ فرکانس پایه‌ای مانند T_f وجود ندارد. با وجود این، در بحث دوشاخگی تناوب مضاعف[۱]، با این دید که می‌توان جواب را دارای دورهٔ تناوبی با مقدار دو برابر جواب اولیه در نظر گرفت، می‌شود این جواب را یک زیرهارمونیک مرتبهٔ دوم در نظر گرفت.

[۱] Period-doubling bifurcation

۶. جواب‌های شبه‌متناوب

تعریف ۱.۶. یک تابع شبه‌متناوب، تابعی است که می‌توان آن را به‌صورت مجموع شمارایی از توابع متناوبی نوشت:

$$x(t) = \sum_i h_i(t) \tag{۱.۶}$$

که در آن، h_i دارای دورهٔ تناوب کمینه T_i و فرکانس $f_i = T_i^{-1}$ است. علاوه بر این، یک مجموع متناهی از فرکانس‌های پایه مانند $\{\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p\}$ با ویژگی‌های زیر بایستی وجود داشته باشد:

(۱) این مجموعه مستقل خطی است.

(۲) برای هر i (اندیس توابع تشکیل‌دهندهٔ مجموع)، وجود داشته باشد اعداد صحیحی مانند $\{k_i, \ldots, k_p\}$ به‌طوری که $f_i = |\sum_{j=1}^{p} k_j \hat{f}_j|$.

به معنای شهودی، یک شکل موج شبه‌متناوب در واقع مجموعی از شکل موج‌های متناوب است که هر کدام از جمعوندها، دارای فرکانسی است که از مجموع و تفاضل یک مجموعهٔ متناهی از فرکانس‌های پایه‌ای ساخته شده است.

تعریف ۲.۶. یک جواب شبه‌متناوب با تعداد فرکانس پایه p را p−متناوب می گوییم.

مثال ۳.۶. یک بار دیگر معادلهٔ وندر پل را در نظر بگیرید. چنان‌که دیدیم این دستگاه دینامیکی دارای یک چرخهٔ حدی با دورهٔ تناوب T_1 یا فرکانس $f_1 = T_1^{-1}$ است که به پارامترهای دستگاه بستگی دارد. حال با اضافه کردن یک جملهٔ سینوسی زمانی، خواهیم داشت

$$\dot{x} = y \tag{۲.۶}$$

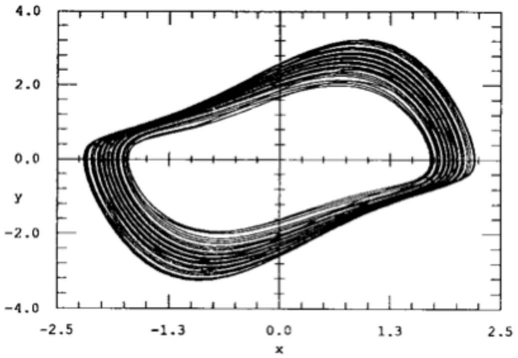
$$\dot{y} = (1 - x^2)y - x + A\cos 2\pi f_2 \tag{۳.۶}$$

جواب این دستگاه جدید می‌تواند با برخی از مضارب دورهٔ تناوب ورودی T_2 همزمان شود که به یک زیرهارمونیک منجر می‌شود.[1] علاوه بر این، با فرض نامتناسب بودن[2] فرکانس‌های f_1 و f_2 می‌توان به رفتاری شبه‌متناوب دست یافت. نمونه‌ای از نمودار فضای حالت و طیف فرکانسی این معادلهٔ تحریک شده وندر پل در شکل ۶ و ۷ آورده شده است.

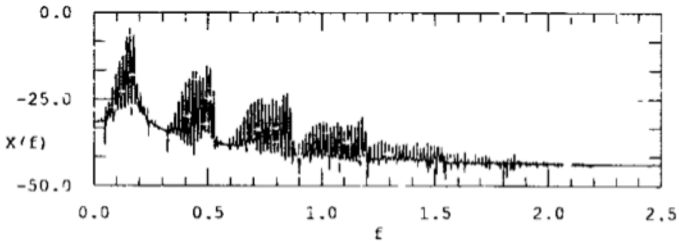
---

[1] خواننده آشنا با دستگاه‌های مخابراتی در می‌یابد این مشابه همان است که در حلقهٔ قفل‌شده فاز رخ می‌دهد.

[2] incommensurate



شکل ۶: نمودار فضای فاز معادلهٔ وندر پل تحریک شده با ورودی سینوسی



شکل ۷: طیف فرکانسی معادلهٔ وندر پل تحریک شده با ورودی سینوسی

چنان‌که از نمودار فضای فاز دیده می‌شود، مسیرها به یک منطقه حلقه مانند محدود شده‌اند و به‌صورت یکنواختی در این محدوده توزیع شده است. البته توجه کنید که همهٔ مسیرهای ۲- متناوب چنین ویژگی ندارند ولی عموماً چنین نمایشی از مسیرها در فضای حالت می‌تواند نشانه‌ای خوب از رفتار ۲-متناوب باشد. همچنین با الهام از ایدهٔ مدولاسیون[۱] در دستگاه‌های مخابراتی، می‌توان دید که شکل موج زمانی توابع $x(t)$ و $y(t)$ از معادلهٔ وندر پل تحریک شده در دامنه مدوله شده‌اند و از آنجا که محل‌های عبور از صفر روی محور افقی به‌صورت نامنظمی پخش شده‌اند، می‌توان آن را به‌صورت مدولاسیون فرکانس نیز در نظر گرفت. با توجه به طیف فرکانسی این دستگاه، مشاهده می‌شود که طیف دستگاه تحریک شده از طیف دستگاه خودگردان به علاوه کنار باندهای توزیع شده‌ای متناظر با یک مدولاسیون نسبتاً ضعیف ناشی از یک جمله سینوسی، تشکیل شده است.

[۱]Modulation

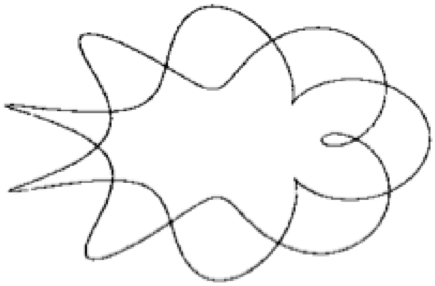
رفتار ۲-متناوب در دستگاه‌های خودگردان نیز می‌تواند ظاهر گردد. برای درک این موضوع دو نوسانگر با دورهٔ تناوب نامتناسبی مانند T_1 و T_2 را در نظر بگیرید. اگر این دو نوسانگر به‌صورت ضعیفی تزویج شده باشند، به دستگاهی خواهیم رسید که در آن دو فرکانس برای نمایش غالب در دستگاه مرکب، مبارزه می‌کنند که یکی خود را به‌عنوان فرکانس غالب دستگاه به نمایش بگذارد. اما اگر نوسانگرهای مذکور با یک دورهٔ تناوب قفل شده باشند به‌طوری که این دورهٔ تناوب نزدیک مضربی صحیح از T_1 و نزدیک مضربی صحیح از T_2 باشد، در این صورت جواب نهایی دستگاه مرکب، متناوب خواهد بود. بدین‌ترتیب اگر چنین دورهٔ تناوبی وجود نداشته باشد که تولید رفتار متناوب نماید، بایستی منتظر بروز یک رفتار شبه‌متناوب باشیم.

در یک دستگاه خودگردان یک مسیر ۲-متناوب در واقع روی نسخهٔ وابرریخت از ۲-چنبره $T^2 := S^1 \times S^1$ قرار می‌گیرد که در آن، S^1 نشان‌دهندهٔ یکی از فرکانس‌های پایه است. از آنجا که مسیرها منحنی‌های تک بعدی هستند و ۲-چنبره یک رویهٔ دو بعدی است، قاعدتاً همهٔ نقاط این رویه نباید توسط منحنی پوشانده شود. با این همه می‌توان نشان داد که به‌ازای هر نقطهٔ دلخواه روی چنبره، مسیر منحنی همواره به‌طور مکرر از کنار آن نقطه عبور می‌کند و بنابراین ۲-چنبره یک مجموعهٔ حدی برای رفتار ۲-متناوب خواهد بود[1] .

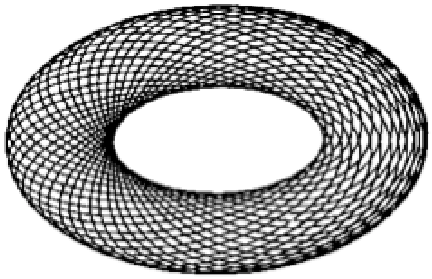
حال اجازه دهید با نگاهی هندسی ببینیم چرا یک رفتار ۲-متناوب به فرکانس‌های نامتناسب نیازمند است. مسیری را در نظر بگیرید که روی یک چنبره می‌چرخد و در جهت‌های ω_1 با دورهٔ تناوب T_1 و ω_2 با دورهٔ تناوب T_2 دور می‌زند. اگر T_1 و T_2 متناسب باشند، آنگاه اعدادی صحیح مانند r و s وجود دارند به‌طوری که $rT_1 = sT_2$. این یعنی مسیر مذکور دقیقاً r دور در جهت اول و s دور در جهت دوم در هر ثانیه می‌زند و یک بار کامل منحنی بسته خواهد شد. نتیجه یک چرخهٔ حدی است با دورهٔ تناوب rT_1. گفتنی است هرقدر زمان اجرای شبیه سازی زیاد باشد باز در شکل منحنی تغییری دیده نمی‌شود. این مسئله در شکل ۸ قابل مشاهده است. اما اگر T_1 و T_2 متناسب نباشند، چنین اعداد صحیح r و s وجود ندارند و مسیر مذکور هیچگاه بسته نخواهد شد و زمان اجرای شبیه‌سازی هرقدر زیاد باشد، منحنی به‌صورت چگال‌تری روی چنبره پخش می‌شود. این مورد در شکل ۹ قابل مشاهده است. مسیرهای شبه‌متناوب با مراتب بالاتر در دستگاه‌های مرتبه بالا رخ می‌دهد. یک جواب شبه‌متناوب با بعد پایه p دارای یک مجموعهٔ حدی است اگر نسخه‌ای وابرریخت از یک p-چنبره باشد.

---

[1] تا اینجا این اولین مثالی است که در آن یک مجموعهٔ حدی یک مسیر تنها نیست. در ادامهٔ بحث با مجموعه‌های حدی عجیب‌تری آشنا خواهیم شد.



شکل ۸: مسیر متناوب برای دوره‌های تناوب متناسب



شکل ۹: مسیر شبه‌متناوب برای دوره‌های تناوب نامتناسب

۷. آشوب

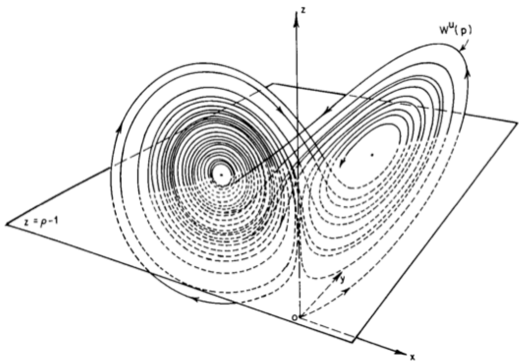
پس از گذشت سال‌ها از ظهور آشوب در دنیای مهندسی و علوم، هنوز تعریفی جامع از آشوب که مورد قبول همگان باشد، ارائه نشده است. ما در اینجا به معرفی آشوب از نگاهی عام می‌پردازیم که نیازهای مدل‌سازی در مهندسی را برآورده می‌کند. در واقع آشوب رفتار مانایی از یک دستگاه دینامیکی است که هیچ‌کدام از سه حالت مانای پیشین نیست. به عبارت دیگر، آشوب رفتار مانای کرانداری از یک دستگاه است که نه نقطهٔ تعادل است، نه متناوب و نه شبه‌متناوب. در این بخش سعی می‌کنیم آشوب را بیشتر با خصوصیات فیزیکی آن تشریح نماییم.

مثال ۱.۷. نمودار فضای حالت دستگاه لورنز با معادلهٔ زیر در شکل ۱۰ رسم شده است که در آن، $\sigma, \rho, \beta > 0$

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{۱.۷}$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz \tag{۲.۷}$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy \tag{۳.۷}$$



شکل ۱۰: نمودار فضای فاز سه بعدی معادلهٔ لورنز

چنان‌که از تصاویر این مثال برمی آید، مسیرهای دستگاه در عین کرانداری، نامتناوب هستند. واقعیت این است که از روی تصاویر نمی‌توان تشخیص داد که این رفتار، شبه‌متناوب است یا نه.

از روی مثال‌های متنوعی که در [۵] آورده شده، دیده می‌شود یک طیف آشوبی از طیف‌های توابع متناوب و شبه‌متناوب کاملاً متمایز است. در واقع طیف یک سیگنال آشوبی دارای یک ماهیت پیوسته و پهن-باند است. این طیف شبه نویز مشخصهٔ همهٔ دستگاه‌های آشوبناک است. همچنین علاوه بر پهن-باند بودن، معمولاً در طیف یک تابع یا سیگنال آشوبی، اسپایک‌هایی دیده می‌شود که نشان‌دهندهٔ فرکانس‌های غالب در طیف است.

تعریف ۲.۷. شئ هندسی در فضای حالت که مسیرهای آشوبناک به آن جذب می‌شوند را یک ربایندهٔ غریب[۱] می‌نامیم.

[۱] strange attractor

دلایل منطقی مبنی بر این که چرا تعریف یک مجموعهٔ حدی جاذب برای تعریف آشوبناکی کافی نیست، از همان ابتدای مطالعهٔ دستگاه‌های آشوبی مطرح شده است. به‌عنوان نمونه، مراجع [۴] و [۸] را ببینید. با این همه هنوز تعریفی که مورد اقبال همگن باشد ارائه نشده است. توجه شود نمی‌توان تفاوت جاذب‌ها و مجموعه‌های جذب کننده را نادیده گرفت.

جذب‌کننده یک دستگاه آشوبناک، به سادگیِ اشیاء هندسی مانند دایره یا چنبره نیست؛ اگر بخواهیم یک گام پیشتر بگذاریم، باید گفت جذب‌کننده‌های آشوبی حتی در حالت کلی منیفلد هم نیستند. پیچیدگی این اشیاء هندسی با وارد کردن مجموعه‌های کانتور و ابعاد غیرصحیح، به اوج می‌رسد.

یکی از ویژگی‌های اساسی دستگاه‌های آشوبناک علاوه بر طیف گسترده و مجموعهٔ حدی پیچیده، حساسیت فوق‌العادهٔ این دسته دستگاه‌ها به شرایط آغازی است. مفهوم این جمله این است: دو شرط اولیه به‌طور دلخواه نزدیک به هم (اما متمایز) را در نظر بگیرید. مسیرهای آغازشونده از این دو شرط آغازی در زمانی متناهی از هم واگرا می‌شوند به‌طوری که پس از کوتاه زمانی، برای اهداف فیزیکی مورد مطالعه، این دو مسیر کاملاً ناهمبسته می‌شوند.

تعریف ۳.۷. شار ϕ روی فضای متریک M را فوق‌حساس نسبت به شرایط اولیه روی M گوییم هرگاه یک عدد حقیقی مانند $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in M$ و $\epsilon > \circ$، وجود داشته باشد $y \in M$ و $T > \circ$ به‌طوری که $d(x, y) < \epsilon$ و $d(\phi(T, x), \phi(T, y)) > \delta$.

به‌عنوان پایان بخش این نوشتار، تعریفی رسمی از آشوب ارائه می‌دهیم:

تعریف ۴.۷. شار ϕ را روی یک مجموعهٔ ناوردای فشرده مانند Λ آشوبناک گوییم اگر:

(آ) روی Λ به‌صورت توپولوژیکی متعدی باشد

(ب) روی Λ نسبت به شرایط اولیه فوق حساس باشد.

مراجع

[۱] ا. رزمی نیا، مروری بر نگاشت پوانکاره. فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۵۴، (۱۳۹۳) صص. ۷۷ تا ۹۹، انجمن ریاضی ایران.

[2] E. Canon, On some hyperbolic systems of temple class, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75(11), (2012), 4241-4250.

[3] C. T. Chen, Linear Systems, theory and design, Oxford University Press. (1999).

[4] J. P. Eckmann, D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, Reviews of Modern Physics, 57 (3), (1985), 617-656.

[5] J. Guckenheimer, P. Homes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York (1983).

[6] B. Hasselblatt, H. W. Broer, F. Takens, Handbook of Dynamical Systems, 3, Elsevier, (2010) .

[7] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, Prentice Hall, NJ, USA. (1996).

[8] J. Milnor, On the concept of attractor, Commun. Math. Phys., 99, (1985), 177-195.

[9] J. J. Slotine, W. Li, Applied nonlinear control, Prentice Hall, (1994).

ابوالحسن رزمی‌نیا: بوشهر، دانشگاه خلیج فارس، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی برق

رایانامه: razminia@pgu.ac.ir