

نرمال‌سازی نوتر و پایه گربنر

امیر هاشمی و نازنین رحمانی

چکیده

یکی از روش‌هایی که در بهبود محاسبات مربوط به ایدال‌های حلقه چندجمله‌ای‌ها مطرح است، قرار دادن یک ایدال در موقعیتی است که یک مجموعه مولد مناسب برای آن به دست آید. به عنوان مثال برای محاسبه چندگونای متناظر، بعد و رادیکال یک ایدال با قرار دادن آن در یک موقعیت مناسب به نام موقعیت نوتر می‌توان سرعت محاسبات را ارتقاء داد. در این مقاله، یک الگوریتم برای پیدا کردن تنک‌ترین ماتریس تغییر مختصات برای قرار دادن یک ایدال در موقعیت نوتر معرفی می‌کنیم. برای این منظور، از مفهوم پایه گربنر که ابزاری قوی در علوم محاسباتی محسوب می‌شود، استفاده می‌کنیم. در این راستا ابتدا مفهوم‌های نرمال‌سازی نوتر و پایه گربنر را به تفصیل یادآوری و برخی از کاربردها و ارتباط‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم. در پایان نیز الگوریتم مورد نظر را با ارائه مثال‌هایی شرح می‌دهیم.

۱. مقدمه

فرض کنید K یک میدان و $R = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای x_1, \dots, x_n و با ضرایب در K و I یک ایدال R باشد. برای محاسبه کمیت‌های مربوط به I ، شکل ارائه ایدال از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده و در حجم محاسبات حائز اهمیت است. بنابراین یکی از مباحث مهم در هندسه جبری و جبر محاسباتی یافتن موقعیت مناسب ایدال I عبارات و کلمات کلیدی. نرمال‌سازی نوتر، پایه گربنر.

برای محاسبه کمیت مورد نظر است. منظور از تغییر شکل ارائه یک ایدآل، پیدا کردن یک موقعیت مناسب برای آن و در نتیجه یافتن یک مجموعه مولد مناسب برای ایدآل است. لازم به ذکر است که برخی از کمیت‌های مربوط به یک ایدآل مانند بعد آن تحت تغییر شکل ایدآل پایا هستند. برای مثال ایدآل $I = \langle xy - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y]$ را در نظر بگیرید. با جایگذاری $x + \tilde{y}$ به جای y در $xy - 1$ شکل ارائه ایدآل به صورت $\langle x^2 + x\tilde{y} - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, \tilde{y}]$ خواهد بود، اما بعد ایدآل تغییر نمی‌کند. یکی از شکل‌های مناسب برای یک ایدآل، نرمال‌سازی نوتر^۱ یعنی قرار دادن یک ایدآل در موقعیت نوتر^۲ است. نرمال‌سازی نوتر در محاسبه رادیکال یک ایدآل، بعد ایدآل و تصویر چندگونای مستوی^۳ کاربرد دارد. در این مقاله روش محاسباتی کارایی برای قرار دادن یک ایدآل در موقعیت نوتر بیان می‌کنیم. در این روش به کمک پایه گربنر^۴ می‌توان یک الگوریتم قطعی برای محاسبه نرمال‌سازی نوتر با تنک‌ترین ماتریس تغییر مختصات ارائه داد؛ در حالی که بقیه الگوریتم‌های محاسبه نرمال‌سازی نوتر از روش‌های تصادفی استفاده می‌کنند [۵]. مفهوم پایه گربنر یکی از مفهومی‌های اساسی در هندسه جبری و جبر محاسباتی است که حدود نیم قرن پیش توسط بوخبرگر^۵ در پایان‌نامه دکترایش معرفی شد. او بعدها به احترام استاد راهنمایش این مفهوم جدید را پایه گربنر نامید [۲]. با توجه به جنبه‌های محاسباتی، پایه گربنر به یکی از ابزارهای مهم در علوم و مهندسی تبدیل شده است. تاکنون ۶ کتاب و بالغ بر ۳۰۰۰ مقاله در زمینه پایه گربنر و کاربردهای آن نگاشته شده است که نشان از اهمیت و کاربردی بودن این مفهوم دارد.

ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش دوم مفهوم‌های نرمال‌سازی نوتر و پایه گربنر را معرفی و برخی کاربردهای آن‌ها را بیان می‌کنیم. در پایان، در بخش سوم با ارائه یک الگوریتم ارتباط این دو مفهوم را بیان می‌کنیم.

۲. نرمال‌سازی نوتر، پایه گربنر و کاربردها

در این بخش ابتدا به بیان برخی مفهوم‌ها و اصطلاحات جبری می‌پردازیم که برای معرفی مفهوم نرمال‌سازی نوتر به آن‌ها نیاز داریم. برای مطالعه کامل‌تر این مفاهیم مرجع [۸] توصیه می‌شود. ابتدا مفهوم توسیع صحیح را با ارائه چند مثال معرفی می‌کنیم و در قسمت کاربردهای پایه گربنر محک مهمی را برای تشخیص صحیح بودن توسیع یک حلقه ارائه می‌دهیم. فرض کنید S

^۱Noether normalization ^۲Noether position ^۳Affine variety ^۴Groebner basis ^۵Buchberger

یک حلقه جابجایی و یکدار و R زیرحلقه‌ای از آن باشد. در این صورت S را یک توسیع حلقه‌ای R گوئیم و می‌نویسیم $R \subseteq S$. در ادامه، S را یک توسیع حلقه‌ای R در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲. عنصر $s \in S$ را روی R صحیح گوئیم هرگاه یک چندجمله‌ای $f \in R[x]$ وجود داشته باشد به طوری که ضریب بزرگترین توان x برابر ۱ باشد و $f(s) = 0$. اگر تمام اعضای S روی R صحیح باشند، S را یک توسیع حلقه‌ای صحیح R می‌نامیم.

مثال ۲.۲. برای هر $d \in \mathbb{Q}$ ، $\sqrt{d} \in \mathbb{R}$ روی \mathbb{Q} صحیح است.

مثال ۳.۲. \mathbb{C} و \mathbb{R} توسیع‌های حلقه‌های \mathbb{Q} و \mathbb{Z} هستند، اما صحیح نیستند، زیرا $\pi \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ریشه هیچ چندجمله‌ای با ضرایب در \mathbb{Q} یا \mathbb{Z} نیست.

تعریف ۴.۲. فرض کنید R یک K -جبر مستوی باشد. در این صورت $y_1, y_2, \dots, y_n \in R$ را روی K مستقل جبری می‌نامیم هرگاه به ازای هر چندجمله‌ای n متغیره مانند f که $f(y_1, \dots, y_n) = 0$ داشته باشیم $f = 0$.

اکنون قضیهٔ نرمال‌سازی نوتر را (که اولین بار امی نوتر^۱ ریاضیدان آلمانی در سال ۱۹۲۶ معرفی کرد) بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۲ (نرمال‌سازی نوتر). فرض کنید K یک میدان، n یک عدد صحیح مثبت و I یک ایدئال سره در حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $R = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد. در این صورت $d \leq n$ و $y_1, \dots, y_n \in R$ وجود دارند به قسمی که

$$(A) \quad \{y_1, \dots, y_n\} \text{ روی } K \text{ مستقل جبری هستند،}$$

$$(B) \quad R \text{ یک } B\text{-مدول متناهی مولد است که } B = K[y_1, \dots, y_n]$$

$$(P) \quad I \cap B = \langle y_{d+1}, \dots, y_n \rangle \subseteq B$$

(ت) به علاوه اگر $|K| = \infty$ آن‌گاه y_1, \dots, y_d چندجمله‌ای‌های خطی برحسب x_1, \dots, x_n هستند.

تعریف ۶.۲. اگر $I \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n]$ یک ایدئال و $y_1, \dots, y_d \in R/I$ روی K مستقل جبری و R/I روی $K[y_1, \dots, y_d]$ صحیح باشد، آن‌گاه $K[y_1, \dots, y_d]$ را یک نرمال‌سازی نوتر برای R/I می‌نامیم.

^۱ Emmy Noether

مثال ۷.۲. $K[x]$ یک نرمال‌سازی نوتر برای $\langle x^3 - y^2 \rangle / K[x, y]$ است. واضح است که x روی K مستقل جبری است. از طرفی $\langle x^3 - y^2 \rangle$ و $x + \langle x^3 - y^2 \rangle$ به ترتیب ریشه‌های $X - x(1 + \langle x^3 - y^2 \rangle) = 0$ و $X^2 - x^3(1 + \langle x^3 - y^2 \rangle) = 0$ در نتیجه روی $K[x]$ صحیح هستند. بنابراین $\langle x^3 - y^2 \rangle / K[x, y]$ روی $K[x]$ صحیح است.

در بعضی مراجع از مفهوم موقعیت نوتر به جای نرمال‌سازی نوتر استفاده می‌شود که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم. لازم به ذکر است که این مفهوم معادل نرمال‌سازی نوتر است. یادآوری می‌کنیم که طول بزرگترین زنجیر از ایدال‌های اول حلقه R که شامل ایدال I هستند را بعد ایدال I می‌نامیم.

تعریف ۸.۲. فرض کنید $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ یک ایدال از بعد d باشد. ایدال I را در موقعیت نوتر می‌نامیم هرگاه

$$(\bar{A}) \quad K[x_1, \dots, x_d] \cap I = \{0\}$$

(ب) برای هر $i = 1, \dots, n - d$ ، یک چندجمله‌ای $h_{d+i} \in K[x_1, \dots, x_{d+i}] \cap I \setminus \{0\}$ برحسب x_{d+i} وجود داشته باشد که ضریب بزرگترین توان x_{d+i} برابر ۱ باشد.

در ادامه، مفهوم پایه‌گرینر را معرفی می‌کنیم و سپس به بیان برخی از کاربردهای مرتبط با موضوع این مقاله می‌پردازیم. برای توضیحات تکمیلی به [۱، ۳] مراجعه کنید. فرض کنید \mathbb{M} مجموعه تمام تک‌جمله‌ای‌ها در $R = K[x_1, \dots, x_n]$ باشد. یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی R یک ترتیب کلی $<$ روی \mathbb{M} است که در شرایط زیر صدق کند:

$$(A) \quad \text{برای هر } m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{M} \text{ که } m_1 < m_2 \text{ داشته باشیم } m_1 m_3 < m_2 m_3.$$

$$(B) \quad \text{به‌ازای هر } m, m \in \mathbb{M} \text{، } 1 < m.$$

مثال مهمی از ترتیب تک‌جمله‌ای ترتیب الفبایی است. فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ و x^α و x^β دو تک‌جمله‌ای باشند. x^α را نسبت به ترتیب الفبایی از x^β بزرگتر گوئیم (و می‌نویسیم $x^\alpha \succ_{lex} x^\beta$) هرگاه سمت چپ‌ترین مؤلفه ناصفر $\alpha - \beta$ مثبت باشد. برای هر $f \in R$ بزرگترین تک‌جمله‌ای f نسبت به ترتیب $<$ را تک‌جمله‌ای پیشرو، ضریبش را ضریب پیشرو و حاصلضرب آن‌ها را جمله پیشرو می‌نامیم و به ترتیب با نمادهای $LM(f)$ ، $LC(f)$ ، $LT(f)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $I \subseteq R$ یک ایدال و $<$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی R باشد. ایدال پیشروی I را با نماد $LT(I)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$LT(I) = \langle LT(f) \mid f \in I \rangle.$$

تعریف ۹.۲. فرض کنید $I \subseteq R$ یک ایدال و \prec یک ترتیب تکجمله‌ای روی R باشد. زیرمجموعه متناهی $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq I$ را یک پایه گربنر I نسبت به \prec می‌نامیم هرگاه

$$LT(I) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle$$

تعریف ۱۰.۲ (ایدال حذفی). فرض کنید $I \subseteq R$ یک ایدال و $0 \leq l < n$ یک عدد صحیح باشد. l -امین ایدال حذفی I عبارت است از $I_l = I \cap K[x_{l+1}, \dots, x_n]$.

قضیه ۱۱.۲ (قضیه حذف). اگر $I \subseteq R$ یک ایدال و G یک پایه گربنر برای I نسبت به ترتیب $x_1 \succ_{lex} x_2 \succ_{lex} \dots \succ_{lex} x_n$ باشد، آنگاه برای هر $0 \leq l < n$ مجموعه $G_l = G \cap K[x_{l+1}, \dots, x_n]$ یک پایه گربنر برای ایدال حذفی I_l است.

به‌عنوان کاربردی از قضیه حذف یک روش محاسباتی برای حذف متغیرها از دستگاه معادلات چندجمله‌ای برای یافتن جواب دستگاه ارائه می‌کنیم. در ادامه با یک مثال این روند را معرفی می‌کنیم.

مثال ۱۲.۲. دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1 \\ x + y^2 + z = 1 \\ x + y + z^2 = 1 \end{cases}$$

ایدال متناظر با این دستگاه، یعنی $I = \langle x^2 + y + z - 1, x + y^2 + z - 1, x + y + z^2 - 1 \rangle$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت پایه گربنر I نسبت به ترتیب $x \succ_{lex} y \succ_{lex} z$ مجموعه چندجمله‌های زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} g_1 &= x + y + z^2 - 1, & g_2 &= y^2 - y - z^2 - z, \\ g_3 &= 2yz^2 + z^4 - z^2, & g_4 &= z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2. \end{aligned}$$

از طرفی جواب‌های دستگاه مورد نظر همان جواب‌های دستگاه بالا است. همان طور که مشاهده می‌شود، g_4 یک چندجمله‌ای برحسب z است. با حل معادله $0 = z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2$ مقدار z را $0, 1, \sqrt{2}, -1$ به دست می‌آوریم. با جایگزینی این مقادیر در g_3 و g_2 جواب‌های ممکن

برای y و در آخر نیز با جایگزینی مقادیر y و z در g_1 ، مقدار x را به دست می آوریم. به این ترتیب مجموعه زیر جواب دستگاه معادلات خواهد بود:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}), (-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})\}$$

در حالت کلی جواب های یک دستگاه معادلات را به کمک دو مرحله زیر می توانیم به دست آوریم.

(مرحله حذف): در این مرحله همه متغیرها را جز یکی حذف می کنیم تا یک چندجمله ای تک متغیره به دست آوریم.

(مرحله توسیع): در این مرحله ابتدا ریشه چندجمله ای تک متغیره را به دست می آوریم. سپس با جایگزینی هر یک از این جواب ها در معادلات دیگر، مقدار بقیه متغیرها را به دست می آوریم.

همان طور که در بخش قبل گفتیم با استفاده از پایه گریبنر محکی برای تشخیص صحیح بودن یک توسیع حلقه ای ارائه می دهیم. فرض کنید K یک میدان، $R = K[x_1, \dots, x_n]$ یک $I \subseteq R$ یک ایدال و f_1, \dots, f_k چندجمله ای در R باشد. برای هر $1 \leq i \leq k$ قرار می دهیم $\bar{f}_i = f_i + I$ و تعریف می کنیم $B = K[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k]$. در این صورت واضح است که B یک زیرحلقه R/I است. اکنون می خواهیم بررسی کنیم در چه صورت چندجمله ای $h \in R$ روی $K[f_1, \dots, f_k]$ به پیمانه I صحیح است یا به عبارت دیگر، در چه صورت $h + I$ روی B صحیح است؟ محک زیر به این سؤال پاسخ می دهد.

گزاره ۱۳.۲ (محک صحیح بودن). فرض کنید $h, f_1, \dots, f_k \in R$

$$I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subseteq R,$$

یک ایدال و t, y_1, \dots, y_k متغیرهای کمکی باشند. ایدال

$$J = \langle t - h, y_1 - f_1, \dots, y_k - f_k, g_1, \dots, g_s \rangle,$$

را در نظر می گیریم. فرض کنید \prec یک ترتیب تک جمله ای به صورت

$$x_1 \succ_{lex} \dots \succ_{lex} x_n \succ_{lex} t \succ_{lex} y_1 \succ_{lex} \dots \succ_{lex} y_k,$$

روی $K[x_1, \dots, x_n, t, y_1, \dots, y_k]$ و G یک پایه گربنر برای J نسبت به این ترتیب باشد. در این صورت h روی $K[f_1, \dots, f_k]$ به پیمانه I صحیح است اگر و تنها اگر یک $g \in G$ وجود داشته باشد به طوری که تک جمله ای پیشروی آن به صورت $LM(g) = t^p$ باشد که در آن، $p > 0$. به علاوه g یک چندجمله ای صحیح برای h روی $K[f_1, \dots, f_k]$ به پیمانه I تعریف می کند.

مثال ۱۴.۲. فرض کنید $K = \mathbb{Q}$ ، $I = \langle x_1^2 - x_3^2 \rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ، $f_1 = x_3^2 - 1$ و $f_2 = x_1^2 x_2$ می خواهیم صحیح بودن x_3 و x_4 را روی $K[f_1, f_2]$ به پیمانه I بررسی کنیم. ایدال های

$$I_1 = \langle t - x_3, y_1 - f_1, y_2 - f_2, I \rangle, \quad \text{و} \quad I_2 = \langle t - x_4, y_1 - f_1, y_2 - f_2, I \rangle,$$

را در $K[x_1, \dots, x_4, t, y_1, y_2]$ در نظر می گیریم. پایه گربنر این ایدال ها نسبت به ترتیب

$$x_1 \succ_{lex} \dots \succ_{lex} t \succ_{lex} \dots \succ_{lex} y_2,$$

مجموعه های

$$G_1 = \{t^2 - y_1 - 1, x - 3 - t, x_2^4 - y_2, x_1^2 - x_2^3\},$$

$$G_2 = \{x_4 - t, x_2^4 - y_2, x_3^2 - y_1 - 1, x_1^2 - x_2^3\}$$

است. بنابراین با توجه به گزاره قبل، چون t^2 تک جمله ای پیشروی $t^2 - y_1 - 1$ است، پس x_3 روی $K[f_1, f_2]$ به پیمانه I با $x_3^2 - f_1 - 1$ صحیح است در حالی که x_4 روی $K[f_1, f_2]$ به پیمانه I صحیح نیست.

اکنون با توجه به تعریفی که برای بعد ایدال بیان می کنیم، به کمک پایه گربنر آن را محاسبه می کنیم.

تعریف ۱۵.۲. فرض کنید $I \subseteq R$ یک ایدال باشد. بعد ایدال I را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\dim(I) = \max\{|u| \mid u \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}, I \cap K[u] = \{0\}\}.$$

برای محاسبه بعد یک ایدال I با استفاده از این تعریف، برای هر زیر مجموعه $u \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ یک ترتیب $u \prec_{lex} \{x_1, \dots, x_n\} \setminus u$ تعریف می کنیم و با استفاده

از این ترتیب، پایه‌گیرنر G_u را برای ایدآل I به‌دست می‌آوریم. در این صورت اندازه بزرگترین زیرمجموعه $\{0\} \subseteq K[u] = G_u \cap K[u]$ بعد ایدآل I است. این تعریف از بعد ایدآل با تعریفی که قبلاً از آن ارائه کردیم، معادل است (برای توضیحات بیشتر به مرجع [۴] قضیه ۳-۵-۱ مراجعه کنید).

در پایان این بخش، برخی از کاربردهای نرمال‌سازی نوتر را به‌طور مختصر بیان می‌کنیم. ابتدا به کاربرد آن در محاسبه رادیکال یک ایدآل اشاره می‌کنیم (برای توضیحات بیشتر به [۶] مراجعه کنید). فرض کنید $I = \langle G \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ یک ایدآل از بعد d و G پایه‌گیرنر ایدآل I باشد. فرض کنید I در موقعیت نوتر باشد. ضرایب چندجمله‌ای‌های G را در $K[x_1, \dots, x_d]$ در نظر می‌گیریم. $\mu = LCM(LC(g) \mid g \in G)$ را کوچکترین مضرب مشترک ضرایب پیشروی چندجمله‌ای‌های G و μ^* را $I : \mu^*$ را

$$\{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid \exists N \in \mathbb{N} : \mu^N f \in I\},$$

تعریف می‌کنیم. چندجمله‌ای‌های ناصفر $h_{d+i} \in K[x_1, \dots, x_d, x_{d+i}]$ که $1 \leq i \leq n - d$ را در I به‌صورت

$$h_{d+i} = cont(h_{d+i}).pp(h_{d+i}),$$

در نظر می‌گیریم که در آن $cont(h_{d+i}) \in K[x_1, \dots, x_d]$ محتوای h_{d+i} (بزرگترین مقسوم علیه مشترک ضرایب h_{d+i}) و $pp(h_{d+i})$ چندجمله‌ای اولیه h_{d+i} (چندجمله‌ای که بزرگترین مقسوم علیه مشترک ضرایب آن یک است) باشد. فرض کنید $L_{d+i} = sqfrr(pp(h_{d+i}))$ چندجمله‌ای خالی از مربع $pp(h_{d+i})$ باشد. قرار می‌دهیم $P_{d+i} = cont(h_{d+i})L_{d+i}$. اگر $P = \{P_{d+1}, \dots, P_n\}$ آن‌گاه

$$\sqrt{I} = \sqrt{I + \langle P, \mu \rangle} \cap (I + \langle P \rangle) : \mu^*,$$

رادیکال ایدآل I خواهد بود. با توجه به تعریف μ و P ، ایدآل $I + \langle P, \mu \rangle$ یک ایدآل از بعد صفر خواهد بود و در این صورت طبق لم سیدنبرگ^۱ [۴] اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ یک چندجمله‌ای خالی از مربع f_i که $\langle f_i \rangle = (I + \langle P, \mu \rangle) \cap K[x_i]$ را به ایدآل اضافه کنیم، آن‌گاه رادیکال ایدآل به‌دست می‌آید. برای مثال، اگر ایدآل $I = \langle x^2y - 2x^2y + y, y^2 - y \rangle \subseteq K[x, y]$ را در نظر بگیریم با توجه به این که I از بعد یک است $I = \langle x^2y - 2x^2y + y, y^2 - y \rangle \cap K[x] = \{0\}$

^۱Seidenberg

و $y^2 - y$ یک چندجمله‌ای تکین برحسب y است، طبق تعریف، I در موقعیت نوتر است. اگر $\mu = x^4 - 2x^2 + 1$ را در نظر بگیریم، آنگاه

$$I + \langle P, \mu \rangle = \langle x^4 y - 2x^2 y + y, y^2 - y, x^4 - 2x^2 + 1 \rangle,$$

یک ایدآل از بعد صفر است و در نتیجه

$$\sqrt{I + \langle P, \mu \rangle} = \langle x^4 y - 2x^2 y + y, y^2 - y, x^4 - 2x^2 + 1, x^2 - 1, y^2 - 1 \rangle.$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sqrt{I} &= \sqrt{I + \langle P, \mu \rangle} \cap (I + \langle P \rangle) : \mu^* \\ &= \langle x^4 y - 2x^2 y + y, y^2 - y, x^4 - 2x^2 + 1, x^2 - 1, y^2 - 1 \rangle \cap \langle y \rangle \\ &= \langle y^2 - y, xy^2 - y \rangle. \end{aligned}$$

کاربرد دیگر نرمال‌سازی نوتر در تصویر چندگونای مستوی است. می‌دانیم که تصویر یک چندگونای مستوی تحت نگاشت تصویر الزاماً یک مجموعه بسته جبری نیست. اما اگر ایدآل در موقعیت نوتر باشد، تصویر آن یک مجموعه بسته ضربی خواهد بود. برای مثال، ایدآل

$$I = \langle xy - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y],$$

و نگاشت تصویر $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $y \mapsto (x, y)$ را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که تصویر مجموعه جبری $V(I)$ تحت π_1 مجموعه $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ است که یک مجموعه جبری نیست. اما با جایگذاری $x + \tilde{y}$ به جای y در $xy - 1$ ایدآل

$$\langle x^2 + x\tilde{y} - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, \tilde{y}],$$

را خواهیم داشت و در این صورت $\pi_1(V(x^2 + x\tilde{y} - 1)) = \mathbb{R}$ یک مجموعه جبری است.

۳. الگوریتم نرمال‌سازی نوتر

در مقدمه بیان کردیم که الگوریتم‌هایی که تاکنون برای محاسبه نرمال‌سازی نوتر ارائه شده‌اند، با استفاده از روش‌های تصادفی ماتریس تغییر مختصات را پیدا می‌کنند که این مستلزم محاسبات طولانی و پیچیده است که قطعاً به زمان بیشتری نیز نیاز دارد. اما الگوریتمی که در این بخش ارائه

می‌شود با استفاده از یک روش قطعی، تغییر مختصاتی که یک ایدال نیاز دارد که با آن در موقعیت نوتر قرار بگیرد یا به عبارت دیگر، یک ماتریس تنکتر (نسبت به روشهای دیگر) برای ماتریس تغییر مختصات ایدال را محاسبه می‌کند.

الگوریتم ۱ نرمال سازی نوتر

ورودی: ایدال $I = \langle F \rangle \subseteq R = K[x_1, \dots, x_n]$ و متغیرهای $V = [x_1, \dots, x_n]$.

خروجی: یک مجموعه ψ از نگاشت‌های خطی طوری که $\langle \psi(I) \rangle$ در موقعیت نوتر باشد.

۱: ψ را مجموعه تهی در نظر می‌گیریم.

۲: چندجمله‌ای $f \in F$ را از درجه m به صورت $f = f_m + \dots + f_0$ در نظر می‌گیریم که f_i از درجه i است.

۳: b_1, \dots, b_{n-1} را طوری انتخاب می‌کنیم که $f_m(b_1, \dots, b_{n-1}, 1) \neq 0$.

$$4: \text{قرار دهید } M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & -b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & -b_{n-1} \\ \vdots & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

۵: برای هر $i = 1, \dots, n-1$ را با $M[i]$ در F جایگذاری می‌کنیم و آن را \tilde{F} می‌نامیم.

۶: با استفاده از پایه گرینر $K[y_1, \dots, y_{n-1}] \cap \langle \tilde{F} \rangle$ را محاسبه می‌کنیم و آن را F' می‌نامیم.

۷: ψ را اجتماع ψ و نگاشت خطی $x_i \rightarrow x_i - b_i x_n$ برای $i = 1, \dots, n-1$ در نظر می‌گیریم.

۸: اگر $F' \neq \{0\}$ آنگاه قرار می‌دهیم ψ برابر با اجتماع ψ و خروجی نرمال سازی نوتر روی

$\langle F' \rangle$ و $[y_1, \dots, y_{n-1}]$ باشد.

۹: ψ را برمی‌گردانیم.

روند الگوریتم ۱ به این صورت است که ابتدا $n-1$ متغیر y_i را برحسب متغیر x_n به صورت

$$y_1 = x_1 - b_1 \cdot x_n, \dots, y_{n-1} = x_{n-1} - b_{n-1} \cdot x_n$$

چندجمله‌ای $y_n = cx_n^m + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{f}_i x_n^i$ مقادیر مناسب برای b_i ها را به دست می‌آوریم. سپس

به کمک پایه گرینر ایدال $I' := I \cap K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ را محاسبه می‌کنیم و در هر مرحله یکی از

تعداد متغیرها کم می‌کنیم. این روند را حداکثر $n-d$ بار که d بعد ایدال است تکرار می‌کنیم، زیرا

در این صورت با توجه به این که بعد ایدآل d است، خواهیم داشت

$$I' = I \cap K[y_1, \dots, y_d] = \{0\}.$$

لازم به ذکر است که بعد ایدآل با تغییر متغیر خطی تغییر نمی‌کند. از طرفی، $n - d$ چندجمله‌ای تکین روی $K[y_1, \dots, y_d]$ در ایدآل I می‌سازیم. بنابراین با توجه به تعریف نرمال‌سازی نوتر، ایدآل مورد نظر در موقعیت نوتر قرار می‌گیرد.

اثبات درستی الگوریتم ۱ از لم نرمال‌سازی نوتر نتیجه می‌شود. برای اثبات پایان‌پذیری الگوریتم از نتایجی استفاده می‌کنیم که در ادامه می‌آیند.

(۱) فرض کنید $R = K[x_1, \dots, x_n]$ و $f(x_1, \dots, x_n) \in R$ به صورت

$$f = f_0 + \dots + f_m,$$

باشد که در آن f_i ها چندجمله‌ای‌های همگن از درجه i باشند. متغیرهای جدید $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}$ را در نظر می‌گیریم که $\tilde{x}_i = x_i - b_i x_n$ و $b_i \in K$. در این صورت چندجمله‌ای‌های $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{m-1}$ در $K[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}]$ موجودند که

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_m(b_1, \dots, b_{n-1}, 1)x_n^m + \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{f}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})x_n^i.$$

(۲) فرض کنید K یک میدان نامتناهی باشد و $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. در این صورت

$$f = 0 \iff (b_1, \dots, b_n) \in K^n, (b_1, \dots, b_n) \neq 0.$$

(۳) اگر K یک میدان نامتناهی و $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ یک چندجمله‌ای همگن از

درجه m باشد طوری که به‌ازای هر $(b_1, \dots, b_{n-1}, 1) \in K^n$ ، $f(b_1, \dots, b_{n-1}, 1) = 0$ آن‌گاه f یک چندجمله‌ای صفر است.

برای اثبات ادعاهای ۱ و ۳ به [۸] و ادعای ۲ به [۴] صفحه ۳ مراجعه کنید.

برای درک بهتر روند الگوریتم، مثال زیر را بیان می‌کنیم.

مثال ۱۰.۳. ایدآل

$$I = \langle y^2z - wxy^2, xyz - wz^2, y^2z - wx^2yz \rangle \subseteq R = \mathbb{R}[w, x, y, z],$$

و ترتیب $z \succ_{lex} \dots \succ_{lex} w$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم چندجمله‌ای تکینیتی بر حسب کوچکترین متغیر به دست آوریم. برای این منظور، ابتدا متغیرهای

$$w = y_1 + b_1 z, x = y_2 + b_2 z, y = y_3 + b_3 z,$$

را در یک چندجمله‌ای مانند $f = xyz - wz^2$ جایگزین می‌کنیم. با جایگذاری این تغییر متغیرها در f چندجمله‌ای زیر را خواهیم داشت:

$$(b_2 b_3 - b_1) z^3 + (y_1 b_3 + b_2 y_2 - y_1) z^2 + y_2 y_3 z.$$

حال b_1, b_2, b_3 را طوری انتخاب می‌کنیم که ضریب z^3 صفر نشود. قرار می‌دهیم $b_1 = 1$ و $b_2 = b_3 = 0$. اکنون با استفاده از روش حذفی، پایه گریبنر ایدال

$$I' = I \cap \mathbb{R}[y_1, y_2, y_3] =$$

$$\langle y_2^2 y_3^2 y_1 - y_2^3 y_2 y_1, y_2^4 y_3^3 y_1 - y_2^2 y_3^3 y_1 + y_1^2 y_3^3 y_2, y_2^2 y_3^2 y_1^2 + y_2^3 y_2 y_1 - y_2^4 y_3^2 y_1 \rangle,$$

را محاسبه می‌کنیم. چون اشتراک ناتهی شد، پس طبق الگوریتم در مرحله بعد باید چندجمله‌ای تکینیتی بر حسب y_3 بسازیم. در این مرحله نیز متغیرهای $y_1 = z_1 + b_1 y_3$ و $y_2 = z_2 + b_2 y_3$ را در $g = y_2^2 y_3^2 y_1^2 + y_2^3 y_2 y_1 - y_2^4 y_3^2 y_1$ جایگزین می‌کنیم. در این صورت g به چندجمله‌ای زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & -b_2^4 b_1 y_3^4 + (b_2^2 b_1^2 - 4z_2 b_2^3 b_1 - b_2^4 z_1) y_3^6 \\ & + (2z_2 b_2 b_1^2 + 2b_2^2 z_1 b_1 + b_2 b_1 - 6z_2^2 b_2^2 b_1 - 4z_2 b_2^3 z_1) y_3^8 \\ & + (z_2^2 b_1^2 + 4z_2 b_2 z_1 b_1 + b_2^2 z_1^2 + z_2 b_1 + b_2 z_1 - 4z_2^2 b_2 b_1 - 6z_2^2 b_2^2 z_1) y_3^4 \\ & + (2z_2^2 z_1 b_1 + 2z_2 b_2 z_1^2 + z_2 z_1 - z_2^2 b_1 - 4z_2^2 b_2 z_1) y_3^6 \\ & + (z_2^2 z_1^2 - z_2^4 z_1) y_3^8. \end{aligned}$$

در این مرحله نیز مانند مرحله قبل برای این که ضریب y_3 صفر نشود قرار می‌دهیم $b_1 = b_2 = 1$ و به کمک پایه گریبنر داریم $I'' = I' \cap \mathbb{R}[z_1, z_2] = \{0\}$. اگر تعریف کنیم

$$B = \mathbb{R}[w - y - z, x - y, f(w - y - z, x - y, y, z), g(w - y - z, x - y, y, z)],$$

آن‌گاه با توجه به این که $y_3 = y$ و $R = B[y, z]$ ، یک R -مدول متناهی مولد است. بنابراین

$$R/I = B[y, z] / \langle -y^4 + (w - z + x)y^3 + (z - (w - z)x)y^2, \\ z^3 + (-w + y)z^2 + (x - y)yz, y^2z - (w - y - z)(x - y)^2yz \rangle$$

روی $B/(I \cap B) = \mathbb{R}[w - y - z, x - y]$ صحیح است. در نتیجه طبق تعریف $\mathbb{R}[w - y - z, x - y]$ یک نرمال‌سازی نوتر R/I است.

مثال ۲.۳. در سال ۲۰۰۹، روبرتز [۷] الگوریتمی مؤثر با استفاده از پایه‌های تودرتو برای محاسبه نرمال‌سازی نوتر ارائه کرد. به‌عنوان مثال، ایدآل I را به‌صورت

$$\langle yz - yc - xb + ab, zc - zx - yb + ab, yc - zb + ab, xy - zx - cb + ab \rangle \\ \subseteq \mathbb{Q}[a, b, c, x, y, z],$$

در نظر می‌گیریم. الگوریتم روبرتز تغییر متغیرهای

$$a \mapsto a, b \mapsto b - a, c \mapsto c - b, x \mapsto x - c, y \mapsto y - a, z \mapsto z + c,$$

را برای قرار دادن I در موقعیت نوتر محاسبه می‌کند، در حالی که الگوریتم ارائه شده در این مقاله، تغییر متغیرهای

$$a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto c, x \mapsto x - z - 2y, y \mapsto y, z \mapsto z,$$

را به‌دست می‌دهد که به‌روشنی تنک‌تر از تغییر متغیرهای ارائه شده توسط الگوریتم روبرتز است.

مثال ۳.۳. ایدآل

$$\langle x_1x_3 + x_3u_1 - x_3u_2 - u_1u_3, x_1u_3 - u_1u_3 - u_2u_3, \\ x_2u_3 + x_3u_1 - x_3u_2 - u_1u_3, x_3u_1 - x_3u_2 - u_1u_3 + u_2u_3, \\ x_3u_1u_3 - u_1u_3^2 \rangle \subseteq K[u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3],$$

را با ترتیب $x_3 \succ_{drl} x_2 \succ_{drl} x_1 \succ_{drl} u_3 \succ_{drl} u_2 \succ_{drl} u_1$ در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم روبرتر برای قرار دادن ایدال بالا در موقعیت نوتر به تغییر متغیرهای زیر نیاز داریم

$$u_1 \mapsto u_1, u_2 \mapsto u_2, u_3 \mapsto u_3 - u_1, x_1 \mapsto x_1 + u_2, x_2 \mapsto x_2 - u_1, x_3 \mapsto x_3 - u_2,$$

در حالی که با الگوریتم بهبود یافته اخیر تنها با تغییر متغیرهای

$$u_1 \mapsto u_1, u_2 \mapsto u_2, u_3 \mapsto u_3 - u_1, x_1 \mapsto x_1, x_2 \mapsto x_2, x_3 \mapsto x_3 - u_2.$$

ایدال در موقعیت نوتر قرار می‌گیرد که به روشنی تنک‌تر است.

مراجع

- [۱] رشید زارع نهندی، بوخیرگر و پایه‌های گرینر، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۴۴، (۱۳۸۹).
- [2] B. Buchberger, *An algorithm for finding the bases elements of the residue class ring modulo a zero dimensional polynomial ideal (German)*, PhD thesis, Universität Innsbruck, 1965.
- [3] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag, New York, third edition, 2007.
- [4] G.M. Greuel, and G. Pfister, *A SINGULAR introduction to commutative algebra*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.
- [5] A. Hashemi, *Efficient algorithms for computing Noether normalization*, Lecture Notes in Computer Science, **5081**, (2008) 97–107.
- [6] T. Krick, and A. Logar, *An algorithm for the computation of the radical of an ideal in the ring of polynomials*, AAEC9, Springer LNCS 539, (1991) 195–205.
- [7] D. Robertz, *Noether normalization guided by monomial cone decompositions*, Journal of Symbolic Computation, **44** (2009) 1359–1373.
- [8] R.Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

امیر هاشمی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، کد پستی ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱

رایانامه: Amir.Hashemi@cc.iut.ac.ir

نازنین رحمانی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، کد پستی ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱

رایانامه: n.rahmani@math.iut.ac.ir