فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شماره ۵۶ (بهار ۱۳۹۴) صص. ۸۳ تا ۱۰۰

مجموعهٔ دستاوردِ دنبالهٔ همساز و دنبالهٔ معکوس اعداد فیبوناتچی

صدیقه بلادی، جواد بهبودیان، و پریسا ترابیان

چکیده

در این مقاله ضمن تعریف دنبالهٔ کامل، شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک دنباله از اعداد صحیح مثبت را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که دنبالهٔ فیبوناتچی یک دنبالهٔ کامل است. برای دنبالهٔ (x_n) از اعداد حقیقی، مجموعهٔ دستاورد (x_n) را مجموعهٔ همهٔ مقادیر حقیقی $\sum_{i\in I} x_i$ که در آن I هر زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ می‌باشد، در نظر گرفته و با $AS(x_n)$ نمایش می‌دهیم. برای نمونه، با استفاده از بسط دودویی نشان می‌دهیم $AS(\frac{۱}{۲^n}) = [۰, ۱]$. در ادامه، شرایط کافی را بررسی می‌کنیم که به‌موجب آن‌ها مجموعهٔ دستاورد دنباله‌ای به‌صورت یک بازه و یا مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. سرانجام، مجموعهٔ دستاورد دنبالهٔ همساز و دنبالهٔ معکوس اعداد فیبوناتچی را به‌دست می‌آوریم.

۱. سرآغاز

دلبستگی دیرپای بشر به اعداد طبیعی تمایلی را برای نشان دادن آن‌ها به‌صورت نمادین فراهم کرده است. پس از تلاش‌هایی به‌وسیلهٔ مصری‌ها، بابلی‌ها، و رومی‌ها ریاضی‌دان‌های هندی در حدود ۱۰۰۰ سال بعد از میلاد مسیح، سیستمی شبیه به سیستم مدرن امروز و در دستگاه اعشاری

عبارات و کلمات کلیدی. دنبالهٔ کامل، عدد دست‌یافته، مجموعهٔ دستاورد، دنبالهٔ دست‌آور برتر.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 40A05;11B50; 11B39.

ابداع کردند. هرچند که نفوذ این سیستم از علاقه برای ایجاد سیستم‌های دیگر نکاسته است. برای نمونه، سیستم دودویی توجه ریاضی‌دانان را از گذشتهٔ بسیار دور یعنی از زمان لایب‌نیتز (قرن ۱۷ میلادی) به خود جلب کرده است. از آن‌جا که این سیستم تنها ارقام صفر و یک استفاده می‌کند، نمایش دودویی یک عدد صحیح مثبت n، معادل با نوشتن n به‌عنوان حاصل‌جمعی از توان‌های دو می‌باشد. به‌عبارت دیگر، n را به‌عنوان حاصل‌جمع جملات زیر دنباله‌ای از $\{۱, ۲, ۲^۲, ۲^۳, \ldots\}$ می‌نویسند. این موضوع آشکار می‌سازد که می‌توان سیستم‌های دودویی بیشماری از نمایش اعداد را با استفاده از جایگزین کردن دنباله‌های دیگر با دنبالهٔ $\{۱, ۲, ۲^۲, ۲^۳, ...\}$ ساخت. البته، نیاز اولیهٔ یک سیستم نمایش اعداد برای این‌که ارزشمند باشد این است که اگر $\mathbb{M}$ را به‌عنوان مجموعه‌ای از اعداد در نظر بگیریم، هر عدد در این مجموعه قابل نمایش با آن سیستم باشد. از این‌جهت، دنبالهٔ $\{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$ از اعداد صحیح مثبت را *کامل*[۱] می‌نامند هرگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، زیردنباله‌ای متناهی مانند $\{x_{i_۱}, x_{i_۲}, \ldots, x_{i_k}\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که مجموع جملات آن مساوی n باشد [۵]. مایلیم بدانیم چه شرایطی باعث می‌شود تا دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت، کامل باشد و در حالت کلی‌تر، چه نوع از دنباله‌ها مجموع جملات زیردنباله‌هایشان، همهٔ اعداد حقیقی را تولید می‌کنند.

در راستای پاسخ‌گویی به سؤال اوّل، در بخش دوّم این مقاله شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک دنباله را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که دنبالهٔ فیبوناتچی یک دنبالهٔ کامل می‌باشد. در بخش سوّم عدد *دست‌یافته*[۲] توسط دنبالهٔ حقیقی (x_n)، یعنی عددی که بتوان آن را به‌صورت مجموع جملات زیردنباله‌ای (احتمالاً متناهی) از (x_n) نوشت، تعریف می‌کنیم. سپس مجموعهٔ تمام این اعداد دست‌یافته را *مجموعهٔ دستاوردِ*[۳] دنبالهٔ (x_n) می‌نامیم و شرایطی را بررسی می‌کنیم که به‌موجب آن‌ها مجموعهٔ دستاورد یک دنباله، بازه باشد. سرانجام، در بخش چهارم به روشنی به سؤال دوّم پاسخ می‌گوییم و مجموعه‌های دستاورد دنبالهٔ همساز و دنبالهٔ معکوس اعداد فیبوناتچی را تعیین می‌کنیم.

تعدادی از ریاضی‌دانان مطالبی را در خصوص دنبالهٔ کامل و مجموعهٔ دستاورد بیان کرده‌اند. ابتدا، هگات[۴] و کینگ[۵] در [۱۱] دنبالهٔ کامل را تعریف و مسائلی را در این خصوص بیان کردند. سپس براون[۶] در [۴] به این مسائل به‌وضوح پاسخ گفت. افزون بر این، دیکین[۷] در [۱] نتایج مشخصی را دربارهٔ کامل بودن در ارتباط با معرفی و مطالعهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی تعمیم‌یافته بررسی

---
[۱] Complete [۲] Achieved Number [۳] Achievement set [۴] Hoggatt [۵] King [۶] Brown [۷] Daykin

نموده است. در خصوص مجموعهٔ دستاورد، هورنیچ[۱] [۲]، کاکیا[۲] [۱۰] و ریبنبویم[۳] [۷] مطالبی در راستای بخش سوّم و چهارم بیان کرده‌اند. جونز[۴] در [۸] دو نوع مجموعهٔ دستاورد را تعیین و با توجه به اختلاف در ماهیت این دو مجموعه، خواص توپولوژیک آن‌ها را مشخص کرده است. جونز شرایطی را بررسی می‌کند که به‌موجب آن‌ها، مجموعهٔ دستاورد یک دنباله همبند باشد. وی همچنین شرایطی را که تحت آن مجموعهٔ دستاورد دنباله‌ای مجموعهٔ کانتور و درنتیجه کلاً ناهمبند باشد، تعیین می‌کند. جونز سرانجام نتیجه می‌گیرد که مجموعهٔ دستاورد هر دنباله از اعداد حقیقی یا مجموعه‌ای از رستهٔ اول می‌باشد و از این‌رو درونِ تهی دارد و یا درونِ مجموعهٔ دستاورد در خودش چگال است.

۲. دنبالهٔ کامل

در این بخش نخست به معرفی دنبالهٔ کامل می‌پردازیم. سپس شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک دنباله را بررسی می‌کنیم. به‌دنبال آن، نشان می‌دهیم که دنبالهٔ فیبوناتچی کامل است و این خاصیت را پس از حذف یک جملهٔ دلخواه از دنباله حفظ می‌کند. اما هرگاه از این دنباله دو جملهٔ دلخواه را حذف کنیم، ویژگی کامل بودن را از دست خواهد داد [۴]. افزون بر این، نشان می‌دهیم که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به‌طور یکتا، به‌صورت مجموع جملات زیردنبالهٔ خاصی از دنبالهٔ فیبوناتچی نوشت [۵] و [۶].

تعریف ۱.۲ (دنبالهٔ کامل). دنبالهٔ (x_n) از اعداد صحیح مثبت را کامل می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت m، زیرمجموعهٔ I از اعداد صحیح مثبت وجود داشته باشد به‌طوری‌که $m = \sum_{i \in I} x_i$.

بدیهی است که تنها مجموع جملات زیردنباله‌های متناهی (x_n) به یک عدد صحیح همگرا می‌باشند؛ از این‌رو، مجموعهٔ I متناهی می‌باشد.

لم ۲.۲. *(x_n) را دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت (نه الزاماً با جملات متمایز) با شرط $x_1 = 1$ و به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$، $x_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت به‌ازای $0 < m < 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i$، زیرمجموعهٔ I از $\{1, 2, \ldots, k\}$ وجود دارد به‌طوری‌که*

$$m = \sum_{i \in I} x_i.$$

[۱] Hornich [۲] Kakeya [۳] Ribenboim [۴] Jones

اثبات. درستی لم به‌ازای $k = ۱$ بدیهی است. فرض می‌کنیم لم به‌ازای $k \leq N$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم که

$$\circ < m < ۱ + \sum_{i=۱}^{N+۱} x_i,$$

نتیجه می‌دهد که زیرمجموعهٔ J از $\{۱, ۲, \ldots, N + ۱\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $m = \sum_{j\in J} x_j$. برای این منظور تنها نیاز داریم که مقادیر mی را در نظر بگیریم که در رابطهٔ $۱ + \sum_{i=۱}^{N} x_i \leq m < ۱ + \sum_{i=۱}^{N+۱} x_i$، صدق می‌کنند. زیرا حالت $m < ۱ + \sum_{i=۱}^{N} x_i$ با توجه به فرض استقرا پوشش داده می‌شود. بنابراین، با استفاده از فرض داریم:

$$m - x_{N+۱} \geq ۱ + \sum_{i=۱}^{N} x_i - x_{N+۱} \geq \circ.$$

اگر $m - x_{N+۱} = \circ$، نتیجه حاصل می‌شود. در غیر این‌صورت، $\circ < m - x_{N+۱} < ۱ + \sum_{i=۱}^{N} x_i$، وجود زیرمجموعهٔ I از $\{۱, ۲, \ldots, N\}$ را نتیجه می‌دهد به‌طوری‌که $m - x_{N+۱} = \sum_{i\in I} x_i$. سرانجام با انتقال $x_{N+۱}$ به طرف دیگر تساوی و قرار دادن $J = I \cup \{N + ۱\}$، نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۳.۲. *(x_n) را دنباله‌ای نانزولی از اعداد صحیح مثبت با شرط $x_۱ = ۱$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت شرط لازم و کافی برای کامل بودن (x_n) این است که به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots$ داشته باشیم:*

$$x_{n+۱} \leq ۱ + \sum_{i=۱}^{n} x_i.$$

اثبات. فرض می‌کنیم به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، $x_{n+۱} \leq ۱ + \sum_{i=۱}^{n} x_i$. در این‌صورت دنبالهٔ (x_n) با توجه به لم ۲.۲، یک دنبالهٔ کامل می‌باشد. برای اثبات شرط لازم قضیه، فرض می‌کنیم $n_\circ \geq ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_{n_\circ+۱} > ۱ + \sum_{i=۱}^{n_\circ} x_i$. آن‌گاه،

$$x_{n_\circ+۱} > x_{n_\circ+۱} - ۱ > \sum_{i=۱}^{n_\circ} x_i$$

نتیجه می‌دهد که هیچ $J \subseteq \mathbb{N}$ وجود ندارد به‌طوری‌که بتوان عدد صحیح مثبت $x_{n_\circ+۱} - ۱$ را به‌صورت $\sum_{j\in J} x_j$ نمایش داد. □

تعریف ۴.۲ (دنبالهٔ فیبوناتچی). دنبالهٔ (u_n) را دنبالهٔ فیبوناتچی گوییم هرگاه به‌صورت $u_1 = 1$، $u_2 = 2$ و به‌ازای $n \geq 2$، $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ تعریف شده باشد.

امروزه دنبالهٔ (F_n) را اگر به‌صورت $F_1 = F_2 = 1$ و به‌ازای $n \geq 2$، $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ تعریف شده باشد، دنبالهٔ فیبوناتچی می‌گویند. ما در این مقاله، از آن تحت عنوان *دنبالهٔ فیبوناتچی تعمیم‌یافته* استفاده می‌کنیم.

مثال ۵.۲. با استفاده از استقرای ریاضی به‌آسانی می‌توان نشان داد، نامساوی $u_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} u_i$، بین جملات دنبالهٔ فیبوناتچی برقرار است؛ از این‌رو، دنبالهٔ فیبوناتچی با توجه به قضیهٔ قبل کامل می‌باشد.

قضیه ۶.۲. *(x_n) را دنباله‌ای کامل و نانزولی از اعداد صحیح مثبت در نظر می‌گیریم. شرط زیر:*

$$x_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

لازم و کافی است برای این‌که کامل بودن (x_n) پس از حذف یک جملهٔ دلخواه از دنباله حفظ شود.

اثبات. با استفاده از قضیهٔ ۳.۲ به‌آسانی اثبات می‌گردد. □

مثال ۷.۲. با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان نشان داد که بین جملات دنبالهٔ فیبوناتچی تعمیم‌یافته، رابطهٔ $F_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} F_i$، برقرار است. بنابراین، پس از حذف یک جملهٔ دلخواه از جملات این دنباله، کامل بودن خود را حفظ می‌کند.

قضیه ۸.۲. *(x_n) را دنباله‌ای کامل و نانزولی از اعداد صحیح مثبت با شرط*

$$x_{n+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

در نظر می‌گیریم. حذف دو جملهٔ دلخواه x_j و x_m $(m \neq j)$ کافی است برای این‌که کامل بودن دنباله از بین برود.

اثبات. بدون از دست دادن کلیّت، فرض می‌کنیم $j < m$. اگر $j = 1$ و $m = 2$، با توجه به این‌که هر دنبالهٔ کامل از اعداد صحیح مثبت باید یک جملهٔ مساوی با یک داشته باشد؛ پس کامل

بودن دنباله در این‌حالت از بین می‌رود. به‌ازای $m > ۲$، داریم:

$$x_{m+۱} \geq ۱ + \sum_{i=۱}^{m-۱} x_i = ۱ + \sum_{i=۱}^{j-۱} x_i + \sum_{i=j+۱}^{m-۱} x_i + x_j$$
$$> ۱ + \sum_{i=۱}^{j-۱} x_i + \sum_{i=j+۱}^{m-۱} x_i.$$

نامساوی اخیر، شرط قضیهٔ ۳.۲ برای کامل بودن یک دنباله را نقض می‌کند. بدین ترتیب، در این‌حالت نیز دنبالهٔ حاصل، یک دنبالهٔ کامل نمی‌باشد. □

مثال ۹.۲. دنبالهٔ فیبوناتچی تعمیم‌یافته شرایط قضیهٔ ۸.۲ را دارد. بنابراین، با حذف دو جملهٔ دلخواه از جملات این دنباله، کامل بودن آن از بین می‌رود.

در مثال ۵.۲ نشان دادیم که هر عدد صحیح مثبت توسط مجموع جملات زیردنباله‌ای از دنبالهٔ فیبوناتچی قابل نمایش است. سؤالی که در ذهن ایجاد می‌شود این است که آیا این نمایش یکتا می‌باشد. قضیهٔ زخندورف[۱] به‌طور آشکار به این سؤال پاسخ می‌دهد.

لم ۱۰.۲. *رابطهٔ زیر بین جملات دنبالهٔ فیبوناتچی، (u_n)، برقرار است.*

$$u_n = ۱ + u_{n-۱} + u_{n-۳} + \cdots + u_{۱,۲},$$

که در آن برای nهای فرد، $u_{۱,۲} = u_۱$ و برای nهای زوج، $u_{۱,۲} = u_۲$.

اثبات. با استفاده از استقرای ریاضی، درستی رابطه را می‌توان بررسی کرد. □

قضیه ۱۱.۲ (قضیهٔ زخندورف). *دنبالهٔ فیبوناتچی، (u_n)، را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت هر عدد صحیح مثبت N دارای یک و تنها یک نمایش به‌صورت*

$$N = \sum_{i \in I} u_i \tag{۱.۲}$$

می‌باشد که در آن I زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت است و شامل هیچ دو عدد متوالی نمی‌باشد.

[۱] Zechendorf

اثبات. نخست نشان می‌دهیم به‌ازای هر عدد صحیح مثبت N نمایش ۱.۲ تحت شرایط قضیه، یکتا می‌باشد. فرض می‌کنیم چنین نباشد. در این‌صورت زیرمجموعه‌های متمایز I و J از اعداد صحیح مثبت وجود دارند به‌طوری‌که شامل هیچ دو عدد متوالی نیستند و

$$N = \sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_j. \tag{۲.۲}$$

فرض می‌کنیم u_{j_k} و u_{i_k} بزرگ‌ترین جمله با شرط $u_{i_k} \neq u_{j_k}$ باشد. بدون کاسته شدن از کلیّت، فرض می‌کنیم $u_{i_k} > u_{j_k}$ و برای جلوگیری از نوشتن اندیس‌های توأم $i_k = m$ و $j_k = p$ را قرار می‌دهیم. بنابراین، $m > p$ و با توجه به رابطهٔ (۲.۲) داریم:

$$\sum_{\substack{i\in I\\ i\leq m}} u_i = \sum_{\substack{j\in J\\ j\leq p}} u_j. \tag{۳.۲}$$

سمت چپ رابطهٔ (۳.۲) بزرگ‌تر یا مساوی u_m است در حالی‌که برای سمت راست این رابطه داریم:

$$\sum_{\substack{j\in J\\ j\leq p}} u_j \leq u_p + u_{p-۲} + \cdots + u_{۱,۲} = u_{p+۱} - ۱ < u_m$$

که این تناقض است؛ بنابراین، نمایش (۱.۲) یکتا می‌باشد.

اینک وجود نمایش (۱.۲) را به‌ازای هر عدد صحیح مثبت N و تحت شرایط قضیه بررسی می‌کنیم. با استفاده از استقرای ریاضی روی n، نشان می‌دهیم که $۰ \leq N < u_n$ نتیجه می‌دهد که زیرمجموعهٔ I از $\{۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ وجود دارد به‌طوری‌که شامل هیچ دو عدد متوالی نیست و $N = \sum_{i\in I} u_i$. گزاره به‌ازای $n = ۱$ بنابه انتفای مقدم برقرار است. به‌آسانی می‌توان نشان داد که این گزاره به‌ازای $n = ۲$ و $n = ۳$ نیز برقرار است. حال فرض می‌کنیم که گزاره به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, k$، که در آن $k \geq ۳$ درست باشد. نشان می‌دهیم که این گزاره به‌ازای $n = k + ۱$ نیز صحیح است یا به‌طور معادل $۰ \leq N < u_{k+۱}$ نتیجه می‌دهد که زیرمجموعهٔ I از $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ وجود دارد به‌طوری‌که شامل هیچ دو عدد متوالی نیست و $N = \sum_{i\in I} u_i$. با توجه به فرض استقرا نتیجه برای N در محدودهٔ $۰ \leq N < u_k$ برقرار است. بنابراین، تنها نیاز داریم که حالت $u_k \leq N < u_{k+۱}$ را مورد بررسی قرار دهیم. برای این‌حالت،

$$۰ \leq N - u_k < u_{k+۱} - u_k = u_{k-۱}$$

و فرض استقرا نتیجه می‌دهد که زیرمجموعهٔ J از $\{۱, ۲, \ldots, k-۲\}$ وجود دارد به‌طوری‌که شامل هیچ دو عدد متوالی نیست و

$$N - u_k = \sum_{j \in J} u_j;$$

بنابراین، $N = \sum_{j \in J} u_j + u_k$ و از این‌رو نتیجهٔ مطلوب با قرار دادن $I = J \cup \{k\}$ حاصل می‌شود. □

قضیهٔ زخندورف بیان می‌کند که هر عدد صحیح مثبت با مجموع جملات یک زیردنبالهٔ متناهی از دنبالهٔ فیبوناتچی با شرط حضور نداشتن جملات متوالی، به‌طور یکتا متناظر است. افزون بر این، براون در [۶] نشان داد که هر عدد صحیح مثبت را می‌توان با جملات یک زیردنبالهٔ متناهی از دنبالهٔ فیبوناتچی با شرط حضور داشتن حداقل یکی از هر دو جملهٔ متوالی، به‌طور یکتا متناظر کرد.

۳. مجموعهٔ دستاورد

در این بخش تنها دنباله‌هایی مورد نظر هستند که تمام جملات آن‌ها ناصفر باشند. همچنین، تمام دنباله‌ها نامتناهی هستند مگر این‌که به‌صراحت بیان شده باشد. مایلیم اعداد حقیقی را همانند اعداد صحیح به‌صورت مجموعی از جملات یک زیردنبالهٔ (x_n) نمایش دهیم. بنابراین، به‌جای دنباله‌هایی از اعداد صحیح دنباله‌هایی از اعداد حقیقی را به‌کار می‌بریم. اما بر خلاف دنباله‌های اعداد صحیح می‌توانیم زیردنباله‌های نامتناهی با مجموع جملات متناهی را نیز در نظر بگیریم [۸].

تعریف ۱.۳ (عدد دست‌یافته). عدد حقیقی r را عدد دست‌یافته توسط دنبالهٔ حقیقی (x_n) گوییم هرگاه زیردنباله‌ای (احتمالاً متناهی) از (x_n) وجود داشته باشد به‌طوری‌که مجموع جملات آن به r همگرا باشد. عدد صفر را مجموع جملات زیردنبالهٔ تهی قرار می‌دهیم.

تعریف ۲.۳ (مجموعهٔ دستاورد). مجموعهٔ تمام اعداد دست‌یافته توسط دنبالهٔ حقیقی (x_n) را مجموعهٔ دستاورد دنبالهٔ (x_n) گوییم و با $AS(x_n)$ نمایش می‌دهیم.

با استفاده از تعریف ۲.۳ و با توجه به تعریف دنبالهٔ کامل گفته شده در بخش قبل می‌توان تعریف جدید و البته معادل برای دنبالهٔ کامل را به‌صورت زیر بیان کرد.

تعریف ۳.۳ (دنبالهٔ کامل). دنبالهٔ (x_n) از اعداد صحیح مثبت را کامل گوییم هرگاه هر عدد صحیح مثبت یک عدد دست‌یافته توسط (x_n) باشد.

به‌عبارت دیگر می‌توان گفت: دنبالهٔ (x_n) از اعداد صحیح مثبت کامل است اگر و تنها اگر $AS(x_n)=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

مثال ۴.۳. دنبالهٔ $(x_n)=\{1,-1,1,-1,\dots\}$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که تنها مجموع جملات زیردنباله‌های متناهی این دنباله همگرا می‌باشند و به‌آسانی دیده می‌شود که $AS(x_n)=\mathbb{Z}$.

مثال ۵.۳. با توجه به قضیهٔ ۳.۲ دنبالهٔ $(x_n)=\{1,2,4,\dots,2n,\dots\}$ یک دنبالهٔ کامل است؛ یعنی، $AS(x_n)=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

تعریف ۶.۳ (دنبالهٔ دست‌آور برتر). دنبالهٔ حقیقی (x_n) را دست‌آور برتر[1] گوییم هرگاه $AS(x_n)$ به‌صورت یک بازه از اعداد حقیقی باشد.

مثال ۷.۳. دنبالهٔ $(x_n)=\left(\frac{1}{2^n}\right)$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ به عدد یک همگرا می‌باشد؛ بنابراین، $AS(x_n)\subseteq[0,1]$. برای نشان دادن شمول معکوس از این حقیقت استفاده می‌کنیم که تمام اعداد حقیقی بین صفر و یک دارای بسط دودویی هستند؛ یعنی به‌ازای هر $r\in[0,1]$،

$$r=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\frac{1}{2^i} \tag{1.3}$$

که در آن ضرایب a_i صفر یا یک می‌باشند. اکنون زیرمجموعهٔ I از $\mathbb{N}$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$I=\{i\in\mathbb{N}:a_i=1\}.$$

به‌آسانی دیده می‌شود که $\sum_{i\in I}x_i=r$. بنابراین، $r\in AS(x_n)$ و درنتیجه $AS(x_n)=[0,1]$. پس دنبالهٔ $\left(\frac{1}{2^n}\right)$، یک دست‌آور برتر می‌باشد.

لم ۸.۳. *فرض می‌کنیم (x_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی است که مجموع جملات منفی آن به $s_N\leq 0$ همگرا باشد.*

الف) هرگاه $I_p=\{i:x_i>0\}$ و $I_N=\{i:x_i<0\}$، آن‌گاه داریم:

$$AS(x_n)=AS\left(x_i:i\in I_P\right)+AS\left(x_i:i\in I_N\right); \tag{2.3}$$

ب) $AS(|x_n|)=AS(x_n)+s_N-$.

[1] High Achiever

اثبات. الف) نشان می‌دهیم که هر زیردنباله از (x_n) با مجموع جملات همگرا، مجموع به‌طور مطلق همگرا دارد. بدون کاسته شدن از کلیّت، می‌توان فرض کرد که مجموع جملات دنبالهٔ (x_n) به عدد s همگرا باشد. فرض می‌کنیم $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$ واگرا باشد. می‌دانیم

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i| = \sum_{i\in I_P} x_i + \sum_{i\in I_N}(-x_i).$$

سری $\sum_{i\in I_N}(-x_i)$ به $-s_N$ همگرا است؛ بنابراین، سری $\sum_{i\in I_P} x_i$ واگرا می‌باشد. پس به‌ازای هر $M\in\mathbb{R}^+$، $n_M\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\sum\limits_{i\in I_p, i\le n_m} x_i > M$؛ درنتیجه می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n_M} x_i = \sum_{\substack{i\in I_p\\ i\le n_m}} x_i + \sum_{\substack{i\in I_N\\ i\le n_m}} x_i > M + s_N.$$

اکنون اگر از طرفین این رابطه وقتی‌که $M\to\infty$ حد گرفته شود، داریم $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \to \infty$. این نتیجه با فرض تناقض ایجاد می‌کند. بنابراین، سری $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ به‌طور مطلق همگراست و درنتیجه هر تجدید آرایش آن همگرا و همه به یک مجموع همگرا می‌باشند؛ از این‌رو، رابطهٔ (۲.۳) برقرار می‌باشد.

ب) با استفاده از قسمت (الف) داریم:

$$AS(|x_n|) = AS\left(x_i : i\in I_P\right) - AS\left(x_i : i\in I_N\right). \tag{۳.۳}$$

فرض می‌کنیم که $r\in AS(x_n)$؛ پس $K\subseteq\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $r=\sum_{k\in K} x_k$. بنابراین، زیرمجموعه‌های $K_P\subseteq I_P$ و $K_N\subseteq I_N$ وجود دارند به‌طوری‌که $K=K_P\cup K_N$؛ از این‌رو داریم:

$$r - s_N = \left(\sum_{i\in K_P} x_i + \sum_{i\in K_N} x_i\right) - \sum_{i\in I_N} x_i = \sum_{i\in K_P} x_i - \sum_{i\in I_N\setminus K_N} x_i.$$

با استفاده از (۳.۳) آخرین جمله یک عضو از $AS(|x_n|)$ می‌باشد؛ بنابراین نشان داده‌ایم که:

$$-s_N + AS(x_n) \subseteq AS(|x_n|).$$

برای نشان دادن شمول معکوس، فرض می‌کنیم که $r \in AS(|x_n|)$. با استفاده از (۳.۳)، باید زیرمجموعه‌های $J_P \subseteq I_P$ و $J_N \subseteq I_N$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$r = \sum_{i \in J_P} x_i - \sum_{i \in J_N} x_i.$$

با اضافه و کم کردن $\sum_{i \in I_N} x_i$ به سمت راست رابطهٔ اخیر داریم:

$$r = \left(\sum_{i \in J_P} x_i + \sum_{i \in I_N \setminus J_N} x_i \right) - s_N,$$

بنابراین $r \in -s_N + AS(x_n)$ [۹]. □

قضیه ۹.۳. *دنبالهٔ* (x_n) *از اعداد حقیقی را چنان در نظر می‌گیریم که* $x_n \to 0$*. هرگاه به‌ازای هر* $k \geq 1$*،*

$$|x_k| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|, \tag{۴.۳}$$

آن‌گاه (x_n) *یک دست‌آور برتر می‌باشد.*

اثبات. I_N و I_P را به‌همان صورت مطرح شده در لم ۸.۳ در نظر می‌گیریم. نخست فرض می‌کنیم که $\sum_{i \in I_N}$ همگرا باشد؛ بنابراین، مطابق لم ۸.۳، $AS(|x_n|)$ انتقال یافتهٔ $AS(x_n)$ است. پس کافی است نشان دهیم که $(|x_n|)$ یک دست‌آور برتر است؛ بنابراین، می‌توان فرض کرد که تمام جملات (x_n) مثبت هستند.

فرض می‌کنیم $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = s \leq \infty$. چون برای هر (x_n)، $0 \in AS(x_n)$ و چنانچه سری $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ به s همگرا باشد، $s \in AS(x_n)$؛ کافی است نشان دهیم $r \in AS(x_n)$ اگر و تنها اگر $0 < r < s$.

اگر $r \in AS(x_n)$، بدیهی است که $0 < r < s$. حال برعکس، فرض می‌کنیم $0 < r < s$. اندیس‌های i_1، i_2، i_3، ... را با استفاده از الگوریتم حریصانه[۱] تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم i_1

[۱] Greedy Algorithm: الگوریتم حریصانه روشی است که در هر مرحلهٔ انتخاب عضوی انتخاب شود که بر اساس ویژگی مشخص، بهترین به نظر برسد. این انتخاب بدون توجه به انتخاب‌هایی که در مراحل قبل انجام شده و یا انتخاب‌هایی که در مراحل بعدی انجام خواهد شد، صورت می‌گیرد.

کوچک‌ترین اندیس صادق در $x_{i_1} \leq r$ باشد. به‌طور قیاسی، هرگاه i_1، i_2، ... ، i_m انتخاب شده باشند، $i_m + 1$ را کوچک‌ترین اندیس اختیار می‌کنیم به‌طوری‌که $i_m + 1 > i_m$ و

$$x_{i_{m+1}} + \sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \leq r,$$

به‌شرطی که حداقل یک چنین اندیسی وجود داشته باشد.

هرگاه این روند به‌پایان برسد، آن‌گاه باید mی وجود داشته باشد به‌طوری‌که i_1، i_2، ... ، i_m تعریف شده باشند، اما به‌ازای هر $n > i_m$ داشته باشیم

$$x_n + \sum_{j=1}^{m} x_{i_j} > r.$$

اگر از طرفین رابطهٔ اخیر وقتی‌که $n \to \infty$ حد بگیریم، داریم:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \geq r.$$

از طرفی با توجه به فرض $\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \leq r$؛ بنابراین، $\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} = r$ و درنتیجه $r \in AS(x_n)$.

اکنون فرض می‌کنیم که روند ساخت i_j به‌پایان نرسد و افزون بر این فرض می‌کنیم که

$$A = \mathbb{N} \setminus \{i_1, i_2, i_3, \ldots\}$$

مجموعه‌ای ناتهی و متناهی باشد. چون $r < s$، مجموعهٔ A باید شامل حداقل یک عدد صحیح مثبت باشد. فرض می‌کنیم k بزرگ‌ترین این‌چنین عدد صحیح باشد. $t = \sum_{i_j<k} x_{i_j}$ را در نظر می‌گیریم (فرض می‌کنیم $t = 0$ اگر هیچ $i_j < k$ وجود نداشته باشد.)، آن‌گاه داریم:

$$x_k + t > r, \quad t + \sum_{h=1}^{\infty} x_{k+h} \leq r;$$

بنابراین، داریم:

$$x_k > \sum_{h=1}^{\infty} x_{k+h}$$

که با رابطهٔ (۴.۳) تناقض دارد. اگر روند ساخت i_j به‌پایان نرسد، آن‌گاه $A = \mathbb{N}\setminus\{i_1, i_2, i_3 \ldots\}$، مجموعه‌ای ناتهی و نامتناهی از اعداد صحیح مثبت است. فرض می‌کنیم $A = \{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$

با ترتیب صعودی باشد. این بدین معنی است که به‌ازای هر k_l،

$$x_{k_l} + \sum_{i_j < k_l} x_{i_j} > r \geq \sum_{i_j < k_l} x_{i_j}. \tag{۵.۳}$$

با توجه به فرض $\lim\limits_{l\to\infty} x_{k_l} = ۰$ و همچنین با حدگرفتن از (۵.۳) وقتی‌که $l \to \infty$ نتیجه می‌شود:

$$r = \sum_{j=۱}^{\infty} x_{i_j};$$

بنابراین، $r \in AS(x_n)$. این نتیجه قضیه را در حالتی‌که $\sum_{i\in I_N} x_i$ همگرا باشد، اثبات می‌کند.

هرگاه $\sum_{i\in I_N} x_i$ واگرا باشد، آن‌گاه دنبالهٔ با جملات مثبت $(-x_i : i \in I_N)$ به‌ازای هر k در رابطهٔ (۴.۳) صدق می‌کند. بنابراین، $AS\,(-x_i : i \in I_N) = [۰, \infty)$ از این‌رو داریم:

$$AS(x_n) = \begin{cases} (-\infty, c] & \sum_{i\in I_P} x_i = c < \infty, \\ (-\infty, \infty) & \sum_{i\in I_p} x_i = \infty. \end{cases}$$

که در هر حالت، (x_n) یک دست‌آور برتر است. $\square$

۴. نتایج

در این بخش مجموعهٔ دستاورد دنبالهٔ همساز و دنبالهٔ معکوس اعداد فیبوناتچی تعمیم‌یافته را به‌دست می‌آوریم. همچنین شرایطی را بررسی می‌کنیم که به‌موجب آن‌ها مجموعهٔ دستاورد دنباله‌ای، مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد [۸].

نتیجه ۱.۴. $AS\left(\frac{۱}{n}\right) = [۰, \infty)$.

اثبات. دنبالهٔ $\left(\frac{۱}{n}\right)$ تمام شرایط قضیه ۹.۳ را دارد؛ پس یک دست‌آور برتر می‌باشد. افزون بر این، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگرا است؛ بنابراین، $AS\left(\frac{۱}{n}\right) = [۰, \infty)$. $\square$

نتیجهٔ ۱.۴ ایجاب می‌کند که هرعدد حقیقی در بازهٔ $[۰, \infty)$ می‌تواند به‌صورت یک کسر مصری[۱] (احتمالاً نامتناهی) نمایش داده شود. حتی، برای تولید اعداد حقیقی نامنفی، می‌توان کسرهای مصری را به‌صورتی در نظر گرفت که مخرج هر یک از جمعوندها یک عدد اوّل باشد. این نتیجه از لم زیر

[۱] Egyptian Fraction: مجموع کسرهای واحد (کسرهایی که صورت آن یک و مخرج آن یک عدد صحیح مثبت باشد.) متمایز نظیر $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}$ را کسر مصری می‌گویند.

پیروی می‌کند که سری $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ که در آن $\mathbb{P}$ مجموعهٔ اعداد اوّل می‌باشد، واگراست. این مطلب در [۳] نشان داده شده است.

لم ۲.۴. *سری $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ واگراست.*

اثبات. فرض می‌کنیم سری $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ همگرا باشد. بنابراین، برای عدد اوّلی مانند q، $\sum_{p\geq q} \frac{1}{p} = s < 1$. قرار می‌دهیم $t = \prod_{p<q} p$. از این‌رو، به‌ازای هر $n \geq 1$، هرگاه p یک عدد اوّل و $p < q$، آن‌گاه $p \nmid (1 + nt)$. زیرا با توجه به این‌که $p \mid nt$ نتیجه می‌شود که $p \mid 1$ و این ممکن نیست. از این‌جهت، برای $n \geq 1$، $1 + nt$ حاصل‌ضرب اعداد اوّل بزرگ‌تر از q می‌باشد؛ بنابراین:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+nt} \leq \sum_{p\geq q} \frac{1}{p} + \sum_{p_1,p_2\geq q} \frac{1}{p_1p_2} + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq q} \frac{1}{p_1p_2p_3} + \cdots$$
$$= s + s^2 + s^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} s^n < \infty.$$

پس با توجه به آزمون مقایسه‌ای نتیجه می‌شود که سری $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+nt}$ همگراست. از طرف دیگر داریم:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+nt} \geq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+nt} = \frac{1}{1+t} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

که نتیجه می‌شود سری $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+nt}$ واگراست و این تناقض ایجاد می‌کند؛ بنابراین، سری $\sum \frac{1}{p}$ واگرا می‌باشد. □

نتیجه ۳.۴. $AS\left(\frac{1}{p}\right) = [0, \infty)$.

اثبات. دنبالهٔ $\left(\frac{1}{p}\right)$ تمام شرایط قضیهٔ ۹.۳ را دارد. از طرفی، بنابر لم ۲.۴ سری $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ واگراست؛ بنابراین، $AS\left(\frac{1}{p}\right) = [0, \infty)$. □

اکنون به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که تشابهی با قضیهٔ تجدید آرایش ریمان دارد؛ اما باید توجه داشت که در بحث ما تنها حذف جملات و نه تجدید آرایش جملات، مجاز هستند.

قضیه ۴.۴. *هرگاه (x_n) دنباله‌ای باشد که جملاتش یک سری همگرای شرطی را ایجاد کند، آن‌گاه $AS(x_n) = \mathbb{R}$.*

اثبات. فرض می‌کنیم I_P و I_N به ترتیب مجموعه‌های اندیس‌های جملات مثبت و منفی دنبالهٔ (x_n) باشند. همگرایی شرطی، $\sum_{i\in I_P} x_i = \infty$ و $\sum_{i\in I_N} x_i = -\infty$ را نتیجه می‌دهد و قضیه ۹.۳ نشان می‌دهد که $AS\,(x_i : i \in I_P) = [۰, \infty)$ و $AS\,(x_i : i \in I_N) = (-\infty, ۰]$. بدین ترتیب، نتیجهٔ مورد نظر فوراً به‌دست می‌آید. $\square$

عکس قضیهٔ ۴.۴ درست نیست. برای نمونه، دنبالهٔ $\{-۱, \frac{۱}{۲}, -۲, \frac{۱}{۳}, -۳, \frac{۱}{۴}, \ldots\}$ را می‌توان در نظر گرفت. مجموعهٔ دستاورد این دنباله $\mathbb{R}$ است، در حالی‌که شامل هیچ زیردنبالهٔ همگرای شرطی نمی‌باشد.

نتیجه ۵.۴. $AS\Big((-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n}\Big) = \mathbb{R}$.

اثبات. دنبالهٔ $\left(\frac{۱}{n}\right)$، نزولی و همگرا به صفر است؛ بنابراین، با توجه به آزمون لایب‌نیتز (آزمون سری متناوب)، $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n}$ همگراست. از طرفی، این سری به‌طور مطلق همگرا نیست. پس جملات دنبالهٔ $\Big((-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n}\Big)$ یک سری همگرای شرطی را می‌سازد. بدین ترتیب، نتیجهٔ مورد نظر با استفاده از قضیهٔ ۴.۴ حاصل می‌شود. $\square$

قضیهٔ پایانی یک روش کاربردی برای نشان دادن این است که بسیاری از دنباله‌هایی که جملات آن‌ها یک سری به‌طور مطلق همگرا می‌سازند، دست‌آور برتر هستند.

قضیه ۶.۴. *دنبالهٔ (x_n) از اعداد حقیقی را چنان در نظر می‌گیریم که $x_n \to ۰$ و فرض می‌کنیم به‌ازای هر n، $|x_{n+۱}| \geq \frac{۱}{۲}|x_n|$، آن‌گاه (x_n) یک دست‌آور برتر می‌باشد.*

اثبات. ابتدا با توجه به فرض و با استفاده از استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم رابطهٔ $|x_{n+i}| \geq \frac{۱}{۲^i}|x_n|$ به‌ازای هر n و i برقرار می‌باشد.

به‌ازای $i = ۱$ رابطه به‌وضوح درست است. فرض می‌کنیم رابطه به‌ازای $i \leq k$ برقرار باشد؛ یعنی: $|x_{n+k}| \geq \frac{۱}{۲^k}|x_n|$.

اکنون صحت درستی رابطهٔ داده شده را به‌ازای $i = k + ۱$ به‌صورت زیر بررسی می‌کنیم.

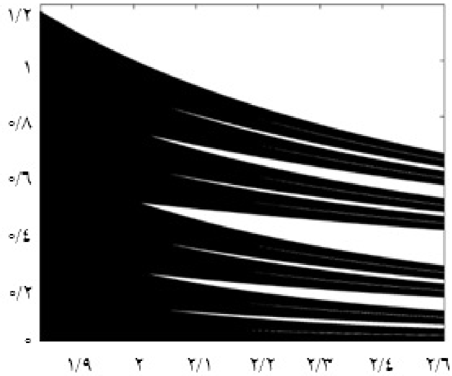
$$|x_{n+k+۱}| \geq \frac{۱}{۲}|x_{n+k}| \geq \frac{۱}{۲}\Big(\frac{۱}{۲^k}|x_n|\Big) = \frac{۱}{۲^{k+۱}}|x_n|.$$

بنابراین؛ به‌ازای هر n،

$$\sum_{i=۱}^{\infty}|x_{n+i}| \geq \sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^i}|x_n| = |x_n|\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^i} = |x_n|.$$

بدین ترتیب، با استفاده از قضیهٔ ۹.۳ نتیجه می‌شود که (x_n) یک دست‌آور برتر می‌باشد. $\square$

یک کاربرد فوری قضیهٔ ۶.۴ این است که دنبالهٔ $\left(\frac{۱}{c^n}\right)$ یک دست‌آور برتر می‌باشد هرگاه $۱ < c \leq ۲$، که این توضیحی برای نمودار (۱) است. در این نمودار، محور افقی تغییرات c را نشان می‌دهد. مجموعهٔ دستاورد به‌ازای $c > ۲$ کلاً ناهمبند می‌باشد. بیشتر شکاف‌ها خیلی باریک هستند و از این‌جهت قابل رؤیت نیستند.



نمودار (۱)

لم ۷.۴. *سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{F_n}$ که در آن F_n نمایش nاُمین عدد دنبالهٔ فیبوناتچی تعمیم‌یافته است، همگرا می‌باشد.*

اثبات. با استفاده از استقرای ریاضی به‌آسانی می‌توان نشان داد که اگر $\varphi = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\overline{\varphi} = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n رابطهٔ

$$F_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \left(\varphi^n - \overline{\varphi}^n\right)$$

که به فرمول بینه[۱] معروف می‌باشد، برقرار است. حال به این مطلب توجه می‌کنیم که $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{۵}}{\varphi^n}$ یک سری هندسی با قدرنسبت $\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$ و درنتیجه همگراست. از طرف دیگر،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{۵}/\varphi^n}{\sqrt{۵}/(\varphi^n - \overline{\varphi}^n)} = ۱.$$

اکنون با استفاده از آزمون مقایسهٔ حدی می‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{F_n}$ همگراست. $\square$

[۱] Binet

از آن‌جا که برای به‌دست آوردن مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ نیاز به مقدمات زیادی داریم، با استفاده از [۹]، تنها به بیان این نکته بسنده می‌کنیم که این مقدار عددی گنگ و تقریباً برابر ۳/۳۶ می‌باشد.

نتیجه ۸.۴. *دنبالهٔ $\left(\frac{1}{F_n}\right)$ که در آن F_n بیانگر nاُمین جملهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی تعمیم‌یافته است، یک دست‌آور برتر می‌باشد.*

اثبات. با توجه به تعریف دنبالهٔ فیبوناتچی تعمیم‌یافته داریم: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq 2F_n$؛ بنابراین، $\frac{1}{2}\frac{1}{F_n} \geq \frac{1}{F_{n+1}}$. بدین‌ترتیب، از قضیهٔ ۶.۴ درمی‌یابیم که $\left(\frac{1}{F_n}\right)$ یک دست‌آور برتر می‌باشد؛ یعنی $AS\left(\frac{1}{F_n}\right) = [0, \beta]$، که در آن $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$. □

این بخش را با بیان کاربرد دیگری از قضیهٔ ۶.۴ به‌پایان می‌بریم.

تعریف ۹.۴ (دنبالهٔ لوکاس). دنبالهٔ $(L_n)_{n\geq 0}$ که جملات آن به‌صورت

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

تعریف می‌شوند، دنبالهٔ لوکاس[1] می‌نامند.

لم ۱۰.۴. *$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n}$ که در آن L_n بیانگر nاُمین جملهٔ دنبالهٔ لوکاس است، همگرا می‌باشد.*

اثبات. دنبالهٔ $(F_n)_{n\geq 0}$ را به‌صورت $\{0, 1, 1, 2, 3, \ldots\}$ در نظر می‌گیریم. بدیهی است که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطهٔ $L_n = F_n + 2F_{n-1}$ بین جملات دنبالهٔ لوکاس و جملات دنبالهٔ (F_n) برقرار است. از این‌رو، به‌ازای هر $n \geq 1$ داریم:

$$\frac{1}{L_n} = \frac{1}{F_n + 2Fn - 1} < \frac{1}{F_n}.$$

اکنون آزمون مقایسه نتیجه می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n}$ همگرا است. □

نتیجه ۱۱.۴. *دنبالهٔ $\left(\frac{1}{L_n}\right)_{n\geq 0}$ یک دست‌آور برتر می‌باشد.*

اثبات. دنبالهٔ $\left(\frac{1}{L_n}\right)_{n\geq 0}$ در شرایط قضیهٔ ۶.۴ صدق می‌کند؛ از این‌رو، $\left(\frac{1}{L_n}\right)$ یک دست‌آور برتر است. افزون بر این، با استفاده از لم ۱۰.۴ اگر $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n}$، داریم $AS\left(\frac{1}{L_n}\right) = [0, \alpha]$. □

---
[1] Lucas

تشکر و قدردانی

بدین‌وسیله از سردبیر محترم مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی جناب آقای دکتر احمد صفاپور جهت پی‌گیری مداوم وضعیت مقاله و همچنین از داوران محترم که نکات سودمندی را جهت اصلاح مقاله متذکر شدند، سپاسگزاری می‌نماییم.

مراجع

[1] D. E. Daykin, *Representaion of natural numbers as sums of generalized Fibonacci numbers*, Journal London Math. Soc., **35** (1960), 143-160.

[2] H. Hornich, *Über beliebige Teilusmmen absolut konvergenter Reihen*, Monatsh. Math. Phys., **49** (1941), 316-320.

[3] J. Owing, $\sum \frac{1}{p}$ *Diverges*, Amer. Math. Monthly, **117** (2010), 231.

[4] J. L. Brown Jr., *Note on complete sequence of integers*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), 557-560.

[5] J. L. Brown Jr., *Zechendorf's therorem and some applications*, The Fibonacci Quarterly, **2** (1964), 163-168.

[6] J. L. Brown Jr., *A new characterization of the Fibonacci numbers*, The Fibonacci Quarterly, **3** (1965), 1-8. **35** (1960), 143-160.

[7] P. Ribenboim, *My Numbers, My Friends*, Springer-Berlag, New York, (2000).

[8] R. Jones, *Achievement Sets of Sequence*, Amer. Math. Monthly, **118** (2011), 508-521.

[9] R. A. Jeannin, *Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I math., **308** (1989), 539-541.

[10] S. Kakeya, *On the partial sums of an infinite series*, Sci. Rep. Tôhoku Imperial Univ., **3** (1914), 159-163.

[11] V. E. Hoggatt and C. King, *Problem E 1424*, Amer. Math. Monthly, **67** (1960), 593.

صدیقه بلادی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد استهبان، گروه ریاضی

رایانامه: sedigheh.beladi@yahoo.com

جواد بهبودیان، دانشگاه شیراز، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: Behboodian@Susc.ac.ir

پریسا ترابیان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد استهبان، گروه ریاضی

رایانامه: parisatorabian@yahoo.com