فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۳) صص. ۳۱ تا ۶۰

سی سال حدس L^p و مسائل وابسته به آن

سعید مقصودی

چکیده

در این مقاله، شرح نسبتاً مفصلی از حدسِ مشهور به حدس L^p را بازگو خواهیم کرد. این حدس مشهور در سال ۱۹۶۱ مطرح شد و تنها در سال ۱۹۹۰ پس از سعی و تلاش بسیاری از ریاضیدانان جواب نهایی یافت. همچنین، نتایجی را دربارهٔ عمل پیچش روی فضاهای لبگ وابسته به گروه موضعاً فشرده، که به خودی خود اهمیت دارند، و نامساوی معروف یانگ، که پیوند مستقیمی با حدس مذکور دارد، عرضه خواهیم کرد. در پایان نیز به برخی مسائل حل نشده اشاره می‌کنیم.

۱ مقدمه

پ. هالموس زمانی گفته بود: «مسائل قلب ریاضیات هستند». این گفته نه فقط در ریاضیات که در دیگر معارف بشری نیز صادق است. در این مقاله به شرح و تفصیل یکی از مسائل جالب در آنالیز هارمونیک، معروف به حدس L^p، خواهیم پرداخت. حدس L^p پس از ۳۰ سال تلاش مداوم سرانجام در سال ۱۹۹۰ به‌دست ساِکی حل شد. اما این پایان داستان نبود چرا که بعد از آن، حدس L^p برای فضاهای وزندار مطرح شد، مسئله‌ای که هنوز هم به‌طور کامل حل نشده است و در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است.

در این مقاله، پس از این مقدمه، در بخش ۲، اندکی آنالیز هارمونیک و نظریهٔ جبرهای باناخ را که برای فهم مقاله ضروری است بیان خواهیم کرد. در بخش ۳، فضاهای لبگ L^p را معرفی و برخی خواص جزئیت بین آن‌ها را بررسی می‌کنیم. همچنین، در این بخش بسته بودن فضاهای L^p تحت ضرب نقطه‌ای را مطالعه می‌کنیم. در بخش ۴ به نامساوی معروف یانگ که یکی از مهم‌ترین نامساوی‌ها در آنالیز فوریه است می‌پردازیم، و گسترش‌های مخلتف این نامساوی و صورت‌های بهینه آن را معرفی‌می‌کنیم. این نامساوی نقطهٔ شروع بسیاری از نتایج مهم در آنالیز فوریه و آنالیز هارمونیک مجرد بوده است و ربط وثیقی با حدس مورد بررسی ما دارد. عملگرهایی که برحسب

پیچش تعریف می‌شوند و همچنین برخی مسائل وابسته به تجزیهٔ جبرهای گروهی را در بخش ۵ بررسی خواهیم کرد. پیش‌زمینه‌های حدس L^p و اهم نتایج مربوط را با برخی ایده‌هایِ اثبات آن‌ها در بخش ٦ خواهیم آورد. سرانجام در بخش ۷، به برخی مسائل و تعمیم‌های مربوط به حدس L^p که تا این زمان حل نشده‌اند و می‌توانند پرسش‌هایی برای تحقیقات دیگر باشند اشاره خواهیم کرد.

۲ اندکی آنالیز هارمونیک و جبرهای باناخ

برای فهم این مقاله پیش‌نیازهای کمی از آنالیز هارمونیک مورد نیاز است که آن‌ها را می‌توان در هر کتاب مقدماتیِ آنالیز هارمونیک یا آنالیز تابعی یافت؛ مثلاً به [۲۱] ، [۳۱] یا [۷٦] مراجعه کنید. همچنین، در این باره مقالهٔ روشن‌گر [۷۷]، که شامل مثال‌های متنوعی نیز هست، مفید است.

منظور از یک گروه توپولوژیک عبارت است از یک گروه که مجهز به یک توپولوژی موضعاً فشرده هاسدورف است به طوری که اعمال ضرب و وارون تحت آن توپولوژی پیوسته‌اند. فضای n بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با عمل جمع و توپولوژی معمولی و همچنین، هر گروه جبری با توپولوژی گسسته، مثال‌هایی از یک گروه توپولوژیک هستند. یکی از بنیادی‌ترین حقیقت‌ها در آنالیز هارمونیک، که آن را اساساً آ. هار[1] ثابت کرد، این است که هر گروه توپولوژیک موضعاً فشرده دارای یک اندازه بورل منظم انتقال پایای چپ است که تا حد یک مضرب ثابت یکتاست. اندازه مذکور را با λ نشان می‌دهیم و آن را اندازه هار چپ می‌نامیم. پس λ یک اندازه بورل است که روی مجموعه‌های باز، منظم درونی و روی هر مجموعه بورل، منظم بیرونی و روی مجموعه‌های فشرده دارای مقداری متناهی است و همچنین، اندازه هر مجموعهٔ باز اکیداً مثبت است. و مهم‌تر این که برای هر مجموعه بورل E و هر $x \in G$ داریم $\lambda(xE) = \lambda(E)$. به طریق مشابه می‌توان اندازه هار راست را تعریف کرد. اندازه لبگ n بعدی روی گروه جمعی $\mathbb{R}^n$ در واقع همان اندازه هار چپ و راست روی $\mathbb{R}^n$ است. چنانچه اندازه‌های هار چپ و راست یکی باشند گروه مذکور را تک پیمانه‌ای می‌نامیم. به طریق دیگری می‌توانیم تفاوت اندازه هار چپ و راست را بسنجیم: برای مجموعه بورل با اندازه اکیداً مثبت A تابع $\Delta(x) = \frac{\lambda(Ax)}{\lambda(A)}$ را روی G تعریف می‌کنیم. تابع Δ یک تابع اکیداً مثبت و پیوسته روی G است و آن را تابع پیمانه‌ای می‌نامند. چنانچه $\Delta = ۱$ گوییم G تک‌پیمانه‌ای است؛ البته این با تعریف بالا معادل است. گروه‌های آبلی و فشرده دو نمونه از گروه‌های تک پیمانه‌ای هستند. همچنین، برای آن‌هایی که از گروه‌های لی وحشتی ندارند، یادآوری می‌کنیم که گروه‌های لی پوچ‌توان همبند و نیم‌ساده همبند هردو تک پیمانه‌ای هستند. درباره گروه‌های میانگین‌پذیر و لی می‌توانید، به‌ترتیب، در [۴٦] و [۳۵] اطلاعات بسیاری بیابید.

فضای اندازه‌های رادون کراندار روی گروه موضعاً فشرده G را با $M(G)$ نشان می‌دهیم و آن را با نرم تغییرات کلی $\|\cdot\|$ مجهز می‌کنیم. اگر f, g دو تابع اندازه‌پذیر بورل و $\mu \in M(G)$، عمل

1) A. Haar

پیچش بین آن‌ها را (به‌شرط وجود) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})\, d\lambda(y), \quad \mu * f(x) = \int_G f(y^{-1}x)\, d\mu(y) \quad (y \in G).$$

فرض کنید A یک فضای برداری (روی میدان اعداد مختلط یا حقیقی) باشد. همچنین فرض کنید A مجهز به یک عمل ضرب باشد که با آن تشکیل یک جبر به مفهوم معمول بدهد. گوییم A یک جبر نرم‌دار است اگر A مجهز به یک نرم $\|.\|$ باشد به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. توجه کنید شرط اخیر می‌تواند با $\|ab\| \leq k\|a\|\,\|b\|$ که در آن k عدد ثابت مثبتی است، جایگزین شود و در این حالت به لحاظ توپولوژیکی و جبری چیزی از دست نخواهد رفت. اگر جبر نرم‌دار A نسبت به نرم داده شده کامل باشد آن را جبر باناخ می‌نامند. برای نمونه، اگر فضای توابع پیوسته کراندار مختلط مقدار روی G را با $C_b(G)$ نشان دهیم، $C_b(G)$ با اعمال معمولی جمع و ضرب توابع به همراه نرم یکنواخت تشکیل یک جبر باناخ می‌دهد. مجموعهٔ تمام توابع پیوسته روی G که در بی‌نهایت صفر شوند را با $C_\circ(G)$ نشان می‌دهیم، $C_\circ(G)$ یک زیر جبر باناخ از $C_b(G)$ است. زیرمجموعه متشکل از توابع در $C_\circ(G)$ با محمل فشرده را با $C_{\circ\circ}(G)$ نشان می‌دهیم.

فضای نرمدار $\mathcal{L}$ را که مجهز به یک رابطه ترتیب جزئی $\leq$ باشد به‌طوری که اعمال جمع و ضرب عددی با رابطه ترتیب داده‌شده سازگار باشد؛ یعنی برای هر $a, b, c \in \mathcal{L}$ و هر عدد حقیقی مثبت k، اگر $a \leq b$ آن‌گاه $a + c \leq b + c$، $ka \leq kb$ و برای $\circ \leq c$، $ac \leq bc$ و به‌علاوه، هر زیرمجموعهٔ دو عضوی از $\mathcal{L}$ دارای سوپریمم و اینفیمم (به معنای معمول در مجموعه‌های مرتب) باشد را یک شبکه نرمدار و اگر $\mathcal{L}$ فضای باناخ باشد شبکهٔ باناخ می‌نامند. اگر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{V}$ دو شبکه نرمدار باشند عملگر خطی $T : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{V}$ را مثبت می‌نامیم هرگاه برای هر $v \geq \circ$، $T(v) \geq \circ$.

اثبات قضیه مقدماتی زیر را می‌توان در هر کتاب مقدماتی درباره شبکه‌های برداری یافت؛ مثلاً به [٦] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲ اگر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{V}$ دو شبکه باناخ و T یک عمگر خطی مثبت از $\mathcal{L}$ به $\mathcal{V}$ باشد، آن‌گاه T پیوسته است.

۳ فضاهای لبگ L^p: جزئیت و حاصل ضرب نقطه‌ای

آنچه را از نظریه اندازه و انتگرال نیاز داریم در هر کتاب آنالیز حقیقی می‌توانید بیابید؛ مثلاً به [۷۴] یا [٧٦] مراجعه کنید. فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. برای $\circ < p < \infty$ قرار می‌دهیم

$$L^p(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_p := \int_X |f|^p\, d\mu < +\infty \text{ و اندازه‌پذیر } f\}$$

و برای $p = \circ, \infty$ به‌ترتیب تعریف می‌کنیم

$$L^\circ(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \mu(\{x \in X : f(x) \neq \circ\}) < \infty \text{ و اندازه‌پذیر } f\}$$

$$L^\infty(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty := \text{ess sup}_X |f| < +\infty \text{ و اندازه‌پذیر } f\}$$

گاهی اوقات به‌جای $L^p(X,\mu)$ می‌نویسیم $L^p(\mu)$. نکته‌ای را که همگان می‌دانند ولی هیچ‌گاه آن را درنظر نمی‌گیرند و البته در موارد نادری هم به خطاهای عجیبی می‌انجامد، متذکر می‌شویم و آن اینکه اعضای $L^p(\mu)$ توابع نیستند بلکه ردهٔ هم‌ارزی از توابع هستند؛ توابعی را که تقریباً همه‌جا برابرند یکی می‌گیریم. اگر $1 \leq p < \infty$، می‌دانیم $L^p(\mu)$ با اعمال نقطه‌ایِ جمع و ضرب اسکالر و نرم $\|.\|_p$ فضای باناخ است.

برای $0 < p < 1$، تابع $\|\cdot\|_p$ نرم تعریف نمی‌کند. در واقع دراین حالت

$$\|f\|_p + \|g\|_p \leq \|f+g\|_p \leq 2^{(1/p)-1}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

اما اگر برای $0 < p < 1$، تعریف کنیم $d(f,g) = \int_X |f-g|^p \, d\mu$ و برای $p = 0$، $d(f,g) = \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\})$، در این صورت یک متریک کامل روی $L^p(\mu)$ برای $0 \leq p < 1$ به‌دست می‌آید. نکتهٔ دانستنی دربارهٔ $L^p(\mu)$ برای $0 < p < 1$ این است که دوگان توپولوژیک آن فقط از صفر تشکیل می‌شود اگر و تنها اگر μ غیر اتمی باشد؛ یعنی، مجموعهٔ اندازه‌پذیر E موجود نباشد به طوری که $\mu(E) > 0$ و اگر $F \subseteq E$ اندازه‌پذیر باشد آن‌گاه $\mu(F) = 0$ یا $\mu(E \setminus F) = 0$.

پس از این مقدمات به مسئلهٔ ارتباط بین فضاهای L^p می‌پردازیم. این نتایج اساساً به ب. سابرامانیان[1] [۶۰] متعلق‌اند. اثبات‌های دیگری در [۶۲] ارائه شده است. همچنین تعمیم آن‌ها در [۷،۱۸،۴۱] آمده است؛ [۴۳] را نیز ببینید.

در قضیهٔ زیر بستار زیر مجموعهٔ A از اعداد حقیقی گسترش یافته را با $\mathrm{cl}(A)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۳ [**آلوارز ــ ۱۹۸۸**] فرض کنید (X,Σ,μ) فضای اندازه دلخواه باشد و $p,q \in [0,+\infty]$.

۱ــ فرض کنید $p \neq \infty$. در این صورت $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ اگر و تنها اگر $p = q$ یا $p < q$ و $0 \notin \mathrm{cl}(\{\mu(A) : A \in \Sigma, 0 < \mu(A) < \infty\})$ یا $p > q$ و $\infty \notin \mathrm{cl}(\{\mu(A) : A \in \Sigma, 0 < \mu(A) < \infty\})$.

۲ــ $L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ اگر و تنها اگر $q = \infty$ یا $\mu(X) < \infty$.

از قضیهٔ بالا به‌راحتی شرایط لازم و کافی برای تساوی فضاهای L^p به‌دست می‌آید که از بیان صریح آن‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. نتیجهٔ زیر حالت خاصی از قضیهٔ بالا است که شاید صورت آن آشناتر و برای استفاده راحت‌تر باشد.

قضیه ۲.۳ [**سابرامانیان ــ ۱۹۷۸**] فرض کنید (X,Σ,μ) فضای اندازه دلخواه باشد و $p,q \in (0,+\infty)$. عبارت‌های زیر معادل‌اند.

۱) به‌ازای برخی $p < q$ها داریم $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

۲) به‌ازای هر $p < q$ داریم $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

---

1) B. Subramanian

۳) $\sup\{\mu(A): A\in\Sigma, \mu(A)<\infty\}<\infty$.

اکنون به بسته بودن $L^p(\mathrm{X},\mu)$ تحت عمل ضرب نقطه‌ای توابع می‌پردازیم. بد نیست بدانیم س. آلوارز[1] در [۸] چیزی موسوم به حساب فضاهای L^p را بسط داده است. در اینجا ما فقط یک نمونه از آن قضیه‌ها را ذکر می‌کنیم. اثبات این قضیه کاربرد سرراستی از نامساوی هلدر است.

گزاره ۳.۳ [آلوارز ــ ۱۹۹۲] فرض کنید (X,Σ,μ) فضای اندازه دلخواه باشد و $p,q\in[\circ,\infty]$. در این صورت

$$L^p(\mu).L^q(\mu):=\{fg: f\in L^p(\mu), g\in L^q(\mu)\}=L^{\frac{pq}{p+q}}(\mu).$$

با این قرارداد که اگر مثلاً $q=\infty$ قرار می‌دهیم $pq/(p+q)=p$ و برای $q=\circ$، $pq/(p+q)=\circ$.

حکم زیر نتیجهٔ مستقیمی از قضیهٔ ۱.۳ و گزارهٔ ۳.۳ است.

نتیجه ۴.۳ فرض کنید (X,Σ,μ) فضای اندازه دلخواه باشد و $p\in(\circ,\infty)$. در این صورت $L^p(\mu)$ تحت ضرب نقطه‌ای بسته است اگر و تنها اگر $\inf\{\mu(A): A\in\Sigma, \mu(A)>\circ\}>\circ$.

حال اجازه دهید به ساختار فضای اندازهٔ مورد بحث اندکی توپولوژی و جبر اضافه کنیم و ببینیم چه نتایج جالبی حاصل می‌شود. یعنی اجازه دهید برگردیم به آنالیز هارمونیک!

اگر G گروه موضعاً فشرده و λ اندازهٔ هار چپ روی آن باشد، فضای لبگ $L^p(G,\lambda)$ را با $L^p(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین به تفاوتِ تعریف فضای $L^\infty(G)$ در آنالیز هارمونیک و حقیقی توجه کنید: $L^\infty(G)$ فضای باناخ توابع مختلط ــ مقدار و بورل اندازه‌پذیر است که موضعاً تقریباً همه جا روی G کراندار هستند. به عبارت دیگر، اعضای $L^\infty(G)$ خارج از یک مجموعه موضعاً پوچ، کراندار هستند.

به یاد بیاورید که گروه موضعا فشرده، گسسته است اگر و تنها اگر اندازهٔ هر مجموعهٔ تک نقطه‌ای اکیداً مثبت باشد. این نکته و نتیجهٔ ۴.۳ گزارهٔ جالب زیر را نتیجه می‌دهد.

گزاره ۵.۳ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و $p\in(\circ,\infty)$. در این صورت $L^p(G)$ نسبت به عمل ضرب نقطه‌ای توابع بسته است اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

حقیقت‌هایی مثل گزارهٔ بالا نشان می‌دهند چرا ضرب نقطه‌ای خیلی بر سر زبان آنالیز هارمونیک‌دان‌ها نمی‌آید. حقیقت این است که ضرب نقطه‌ای توابع نقش ساختار گروه را به‌شدت کم‌رنگ می‌کند و اجازه نمی‌دهد جبرهای جذابی روی گروه‌ها بنا کنیم؛ البته گاهی اوقات هم چاره‌ای نیست و ضرب نقطه‌ای تنها عمل دردسترس است. بنابراین، این عمل، عملِ مناسبی برای ساخت جبرهای توابع نیست و نمی‌توان آنالیز هارمونیک را روی آن بنا کرد. عمل مناسب برای آنالیز هارمونیک همان عمل پیچش است (حداقل تا این هنگام که این مقاله نوشته می‌شود!) که در

1) Sergio Andres Alvarez

بخش بعد دربارهٔ گسترهٔ وسیعی از مسائلی که به آن مربوط می‌شوند صحبت خواهیم کرد؛ دراین‌باره [۷۵] را ببینید. بازهم نتیجهٔ دیگری از قضیهٔ ۱.۳:

گزاره ۶.۳ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و $p,q \in (0,\infty)$. در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند.

۱− برای $p<q$، $L^p(G) \subseteq L^q(G)$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

۲− برای $p<q$، $L^q(G) \subseteq L^p(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

۳− برای $p \neq q$، $L^q(G) = L^p(G)$ اگر و تنها اگر G متناهی باشد.

بی‌مناسبت نیست که به روابط فضاهای $L^p(G)$ با فضای توابع پیوسته اشاره کنیم. مقایسهٔ این فضاها در برخی موارد آسان و در برخی دیگر بسیار دشوار است. بازهم خاطر نشان می‌کنیم که فضاهای L^p فضای رده‌های هم‌ارزی از توابع هستند. بنابراین توابعی که تقریباً همه جا (یا در $L^\infty(G)$، موضعاً تقریباً همه‌جا) با هم برابرند را یکی می‌گیریم.

قضیهٔ زیر حالت‌های پر کاربرد را شامل می‌شود و قضیهٔ جالبی به‌نظر می‌رسد.

قضیه ۷.۳ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد. احکام زیر برقرارند.

۱− اگر $C_b(G) = L^\infty(G)$؛ یعنی هر تابع در $L^\infty(G)$ موضعاً تقریباً همه‌جا با یک تابع پیوسته برابر باشد، در این صورت G گسسته است.

۲− اگر همسایگی U از عضو همانی G موجود باشد به‌طوری‌که هر تابع در $L^\infty(G)\chi_U := \{f\chi_U : f \in L^\infty(G)\}$، موضعاً تقریباً همه‌جا با یک تابع پیوسته روی G برابر باشد در این صورت G فشرده است.

۳− $C_0(G) \subseteq L^1(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

۴− $L^1(G) \subseteq C_0(G)$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

۵− برای $1 \leq p < q \leq \infty$، $L^1(G) \cap L^p(G) \subseteq L^q(G)$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

۶− برای $1 \leq p \leq \infty$، $L^1(G) \cap L^p(G) \subseteq C_b(G)$ اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

برهان. اثبات (۱) را در [۳۲]، قضیهٔ ۲۰.۳۷، می‌توانید ببینید؛ اثبات آن مبتنی بر استفاده ظریف و البته معمول از قضیهٔ کاکوتانی ــ کدیرا است. قسمت (۲) تعمیمی از (۱) است با اثباتی نه‌چندان ساده که ایدهٔ آن تحویل به حالت (۱) است؛ برای اثبات به [۵۸] مراجعه کنید.

دیگر قسمت‌ها می‌توانند تمرین‌های آموزنده (و شاید قدری دشوار) باشند؛ اثباتی از آن‌ها را

می‌توانید در [۲۵،۵۸] بیابید.

۴ صورت بهینهٔ نامساوی یانگ و مسائل وابسته به آن

نابرابری‌ها یکی از ابزارهای پایه‌ای در آنالیز فوریه هستند. قضیه هاسدورف ـ یانگ نتیجه‌ای کلاسیک است که تقریبی برای تابع و تبدیل فوریهٔ آن در نرم$\|.\|_p$ به‌دست می‌دهد. به یاد بیاورید که اگر f یک تابع انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$ باشد تبدیل فوریهٔ آن با دستور

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi xy} f(y)dy$$

برای $x \in \mathbb{R}^n$ داده می‌شود. تبدیل فوریه برای $1 \leq p \leq 2$ در نامساوی $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$ صدق می‌کند؛ که در اینجا و در سراسر این بخش p' مزدوج نمایی p را نشان می‌دهد. این نتیجه را می‌توان با قضیهٔ تحدب ریس به‌دست آورد. نامساوی فوق را اولین بار و. هـ. یانگ[1] درسال ۱۹۱۲ به‌منظور تعمیم قضیهٔ پارسوال برای سری‌های فوریه برای فضاهای L^p روی گروه دایرهٔ یکه $\mathbb{T}$، که همان گروه خارج قسمتی $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ است، اثبات کرد. از آنجایی که رابطه‌ای اساسی بین تبدیل فوریه و عمل پیچش برقرار است، یانگ مشاهده کرد که می‌توان نامساوی بالا را برای تبدیل فوریه از یک نامساوی برحسب پیچش به‌دست آورد. درواقع، با توجه به این که $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$ برای f, g انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$، یانگ با استفاده زیرکانه از نامساوی هلدر ثابت کرد که برای $1 \leq p, q, r \leq \infty$ به طوری که $1/r = 1/p + 1/q - 1$ داریم

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \qquad (g \in L^q(\mathbb{T}), f \in L^p(\mathbb{T})).$$

این نامساوی دراین حالت دقیق است یعنی می‌توان توابعی یافت که تساوی برای آن‌ها برقرار باشد.

تیچمارش[2] در ۱۹۳۷ برای $1 < p \leq 2$ نامساوی $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$ را برای توابع در $L^p(\mathbb{R})$ اثبات می‌کند. بابنکو[3][۹] در ۱۹۶۱ نشان می‌دهد این نامساوی بهترین حالت ممکن نیست و نامساوی را بهبود می‌بخشد و آن را برای pهایی که مزدوج نمایی آن‌ها عددی زوج است، با بهترین ضریب ممکن اثبات می‌کند. پس از او ویلیام بکنر[4] در ۱۹۷۵ نتیجه را با الهام از کار بابنکو برای $1 \leq p \leq 2$ و توابع در $L^p(\mathbb{R}^n)$ اثبات می کند [۱۲]. وی همچنین برای توابع $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ که $1 \leq p, q, r \leq \infty$، $1 + 1/r = 1/p + 1/q$ نشان می‌دهد

$$\|f*g\|_r \leq (A_p \, A_q \, A_{p'})^n \, \|f\|_p \|g\|_q$$

که در آن

$$A_m = \sqrt{\frac{m^{1/m}}{m'^{1/m'}}}$$

---

1) William Henry Young (1863-1942)   2) E. C. Titchmarsh(1899-1963)   3) K. I. Babenko

4) William Eugene Beckner(1941-)

و m' مزدوج نمایی m است. وی نشان می‌دهد این نامساوی بهترین حالت ممکن است و تساوی در آن اتفاق می‌افتد. بکنر در همان مقاله اشاره می‌کند که این نتایج برای تبدیل فوریه روی یک گروه آبلی موضعاً فشرده دلخواه با توجه به قضیهٔ ساختاری گروه‌های آبلی برقرار است. مقاله بکنر به گفتهٔ ی. ی. هیرشمن[1] مقاله‌ای دوران‌ساز است؛ زیرا برای اولین بار صورت بهینهٔ دو نامساوی مهم درآنالیز هارمونیک روی $\mathbb{R}^n$ را به‌دست می‌دهد. مقاله بکنر مستخرج از رسالهٔ دکتری او بود که در دانشگاه پرینستون تحت راهنمایی ا. م. اشتاین[2] گذرانده بود و به خاطر آن به دریافت جایزه سِیلم[3] نائل گردید.

نامساوی یانگ روی $\mathbb{R}$ را می‌توان به صورت معادل زیر بیان کرد:

$$\left| \int\int f(x)g(y-x)h(y)dy\,dx \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, \|h\|_t$$

که در آن $1/p + 1/q + 1/t = 2$ و $p, q, t \geq 1$. درسال ۱۹۷۶، هـ. ج. براسکمپ[4] و ی. هـ. لیب[5] نامساوی یانگ را به‌صورت بالا برای بیش از سه تابع تعمیم دادند [۱۴]، همچنین بهترین تقریب ممکن را برای آن به‌دست دادند. به‌علاوه، آن‌ها جهت عکس نامساوی فوق را که برای $0 < p, q < 1$ و $t < 0$ اتفاق می‌افتد، بررسی کردند. تعمیم آن‌ها از نامساوی یانگ به نامساوی براسکمپ ـ لیب معروف شد که تعمیم‌های بسیاری برای آن ارائه شده است؛ به [۱۶] و مراجع آن نگاه کنید. در ۱۹۹۸، بارت[6] اثباتی بسیار ساده‌تر برای نامساوی یانگ و عکس آن درحالت بهینه ارائه کرد [۱۱].

قضیه ۱.۴ [بارت ــ ۱۹۹۸] فرض کنید $p, q, r > 0$، $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$، $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ نامنفی باشند. در این صورت اگر $p, q, r \geq 1$،

$$\|f * g\|_r \leq \left(\frac{c_q\, c_p}{c_r}\right)^n \|f\|_p \|g\|_q$$

و اگر $p, q, r \leq 1$،

$$\|f * g\|_r \geq \left(\frac{c_q\, c_p}{c_r}\right)^n \|f\|_p \|g\|_q$$

که در آن $c_t = \sqrt{\frac{t^{1/t}}{|t'|^{1/t'}}}$.

---

1) I. I. Hirschman, Jr.

۲) Elias Menachem Stein(1931-) ریاضیدان برجستهٔ بلژیکی که سال‌هاست استاد دانشگاه پرینستون است. وی شاگرد آنتونی زیگموند(۱۹۰۰–۱۹۹۲)، ریاضیدان لهستانی و یکی از بزرگترین آنالیزدان‌های قرن بیستم، بوده است. ترنس تائو و استیون ج. کرانتس از جمله شاگردان معروف وی هستند.

۳) جایزه‌ای که به افتخار رافائل سِیلم R. Salem، ریاضیدان یونانی، هر سال به ریاضیدانی که در حوزهٔ مورد علاقهٔ وی یعنی آنالیز فوریه کار برجسته انجام داده باشد تعلق می‌گیرد.

4) Herm J. Brascamp 5) Elliot H. Lieb 6) Franck Barthe

اما برای گروه موضعاً فشرده نامساوی یانگ را اولین بار آندره وی[1] درکتاب معروفش [۶۳] اثبات کرد: اگر G گروه موضعاً فشرده و تک پیمانه‌ای باشد و $p,q \geq 1$، $1/r = 1/p+1/q-1 \geq 0$، $f \in L^p(G)$، و $g \in L^q(G)$ در این صورت $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

مسئلهٔ بهینه بودن نامساوی یانگ و همچنین هاسدورف ــ یانگ برای گروه موضعاً فشرده را هیوئیت و هیرشمن در ۱۹۵۴ مطرح کردند [۳۰]. ابتدا اجازه دهید تعریفی بیاوریم. فرض کنید G گروه موضعاً فشرده (نه لزوماً آبلی) باشد. برای $p \geq 1$ و $f \in L^p(G)$ عملگر L_f از $L^2(G)$ با دستور $L_f(g) = f*g$ را در نظر بگیرید. اگر L_f روی $L^2(G)$ کراندار باشد دراین صورت $\|L_f\|_\infty$ را برابر نرم عملگر L_f و در غیر این‌صورت تعریف می‌کنیم $\|L_f\|_\infty = \infty$. اگر L_f تصویر باشد $m(L_f)$ را برابر عدد حقیقی گسترش یافته $\|f\|_2^2$ تعریف می‌کنیم. تابعک m را می‌توان به یک پیمانهٔ مناسب به مفهوم سگال روی مجموعهٔ مناسبی از عملگرهای مثبت چنان گسترش داد که $m(|L_f|^2) = \|f\|_2^2$؛ برای جزئیات بیشتر [۵۹] را ببینید. و بالاخره، برای هر $1 \leq q < \infty$، تعریف می‌کنیم $\|L_f\|_q = m(|L_f|^q)^{1/q}$. از تعریف، برای هر f، به دست می‌آید $\|L_f\|_\infty \leq \|f\|_1$ و $\|L_f\|_2 = \|f\|_2$. آلدن ری کنزی[2] در ۱۹۵۸ در [۳۶] نشان داد که اگر $1 \leq p \leq 2$ در این صورت $\|L_f\|_{p'} \leq \|f\|_p$. اگر G گروه آبلی باشد این نامساوی همان نامساوی معروف هاسدورف—یانگ است؛ یعنی $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$، که $\hat{f}$ تبدیل فوریهٔ f است. این نامساوی را هیوئیت و هیرشمن در [۳۰] اثبات و شرط تساوی را نیز ارائه کرده‌اند. نامساوی مذکور در بالا برای گروه غیرآبلی و فشرده در [۳۲] و برای حالت کلی یعنی گروه تک‌پیمانه‌ای در [۵۶] اثبات شده است. راسو[3] در [۵۶] توابعی را که برای آن‌ها نامساوی هاسدورف ــ یانگ به تساوی تبدیل می‌شود بررسی کرده و نشان داده است برای برخی گروه‌ها این نامساوی بهینه نیست. تابع یا توابعی را که نامساوی هاسدورف ــ یانگ و یانگ به تساوی تبدیل می‌شود توابع ماکسیمال می‌نامند. در [۳۲] و [۵۶] شرایطی را که توابع ماکسیمال می‌شوند بررسی کرده‌اند؛ برای اثبات‌های دیگر به [۲۲] مراجعه شود. اگر گروه تک‌پیمانه‌ای و بدون زیرگروه باز و فشرده باشد نامساوی‌های مذکور بهینه نیستند. همچنین، توابع ماکسیمال هستند اگر با یک زیرمشخصه معادل باشند؛ به [۳۲] و [۲۲] مراجعه شود. در [۴۴] نیز برخی نتایج برای دستهٔ خاصی از گروه‌های موضعا فشرده ارائه شده است.

آ. ر. کنزی و ا. م. اشتاین در ۱۹۶۰ آنالیز هارمونیک روی گروه $SL(2,\mathbb{R})$، گروه ضربی

---

۱) André Weil (1906-1998) یکی از تاثیرگذارترین ریاضیدانان فرانسوی قرن بیستم بود که در نظریه اعداد و هندسه جبری کارهای بنیادی انجام داد. او همچنین از بنیان‌گذاران و اعضای فعال گروه بورباکی بود. کتاب مشهور او درباره گروه‌های توپولوژیک اولین کتابی است که در آن مفاهیم و نتایج بنیادی آنالیز هارمونیک مجرد گردآوری و اثبات شده است.

۲) Ray Alden Kunze(1928-) استاد بازنشسته دانشگاه جورجیا است. وی شاگرد ریاضیدان معروف اروینگ ایزرا سگال (۱۹۱۸—۱۹۹۸) بوده است. کتاب جبر خطی وی به فارسی ترجمه شده است.

۳) Bernard Russo(1939-) استاد بازنشسته دانشگاه کالیفرنیا، ایرواین.

ماتریس‌های حقیقی وارون پذیر ۲ × ۲، را به‌طور مفصل بررسی می‌کنند. این گروه یک گروه تک‌پیمانه‌ای و غیرفشرده است. نمایش یکانی این گروه را قبلاً گلفاند[۱] و نایمارک[۲] در ۱۹۴۷ و مستقل از آن‌ها بارگمان در ۱۹۴۷ بررسی کرده بودند. کنزی و اشتاین با تکنیک‌های تحلیلی، نمایش‌های این گروه را بررسی کردند و مشابه نامساوی هاسدورف ــ یانگ را برای آن اثبات کردند. یکی از نتایج این نامساوی این است که برای $1 \le p < 2$، $f \in L^2(G)$ و $g \in L^p(G)$ داریم $f * g \in L^2(G)$ و $\|f * g\|_2 \le C_p \|f\|_2 \|g\|_p$. البته توجه می‌کنیم که با توجه به نامساوی یانگ در این حالت داریم $f * g \in L^r(G)$ که در آن $2 < r = 2p/(2-p)$. آن‌ها همچنین نشان دادند که اگر $f, g \in L^2(G)$، برای هر $q \in (2, \infty]$، $f * g \in L^q(G)$ و $\|f * g\|_q \le C_q \|f\|_2 \|g\|_2$. در اینجا C_p و C_q اعداد ثابتی هستند که به f و g وابسته نیستند. به‌وضوح این نامساوی‌ها برای گروه‌های فشرده برقرارند؛ درحقیقت، برای گروه فشرده G و هر $1 \le p, q \le \infty$ داریم $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^q(G)$. اما مثلاً برای گروه آبلی غیرفشرده‌ای مثل $\mathbb{R}$ برقرار نیستند؛ دلیل این مطلب را در صفحه ۶۱ از [۳۶] می‌توانید بیابید، گزاره ۱.۵ را نیز ببینید. بنابراین، این سؤال مطرح می‌شود که برای چه گروه‌هایی یا چه وقت رابطهٔ $L^2(G) * L^p(G) \subseteq L^2(G)$ برقرار است. لیپسمن[۳] در ۱۹۶۹ این قضیه را برای $SL(n, \mathbb{C})$ تعمیم داد. به‌تدریج این مسئله به پدیده کنزی ــ اشتاین و گروه‌هایی که این خاصیت را دارند به گروه‌های کنزی ــ اشتاین معروف شد. پدیدهٔ کنزی ــ اشتاین برای گروه‌های خاص و اغلب با روش‌های تحلیلی بررسی شده است. اما کار اساسی و تأثیرگذار را م. کاولینگ[۴] در ۱۹۷۸ انجام داد [۱۷]. وی ثابت کرد اگر G گروه لی همبند نیم‌ساده با مرکز متناهی باشد و $1 \le p < 2$ دراین صورت $L^p(G) * L^2(G) \subseteq L^2(G)$. اثبات کاولینگ مبتنی بر کارهای دیگران و استفاده زیرکانه از نمایش کراندار یکنواخت و برخی قضایای آنالیز مختلط و همچنین تحلیل سری‌های اساسی به عنوان نمایش طولپا روی فضاهای مناسب L^p است.

اشاره کردیم که نامساوی یانگ یکی از پایه‌ای‌ترین قضایا در آنالیز هارمونیک است. اجازه دهید صورتی از آن را برای گروه موضعا فشردهٔ دلخواه (نه لزوماً تک‌پیمانه‌ای) بیان کنیم. اگر G گروه موضعاً فشرده و $1 \le p, q, r \le \infty$ و $1/r = 1/p + 1/q - 1$ در این صورت

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p \max(\|g\|_q, \|g^*\|_q)$$

---

۱) Israil Moiseevic Gelfand(1913-2009) ریاضیدان مشهور روس. وی یکی از خلاق‌ترین ریاضیدانان عصر ما بود. گلفاند شاگرد آندره کولموگوروف (۱۹۰۳—۱۹۸۷) بوده است.

۲)Mark Aronovich Naimark (1909-1978) شاگرد ریاضیدان معروف روسی مارک گریگورپویچ کرین (۱۹۰۷—۱۹۸۹) و همکار گلفاند بود. وی نقش مؤثری در تکامل نظریه جبرهای باناخ داشت. الکساندر هلمسکی ازجمله شاگردان معروف او است.

۳) Ronald Leslie Lipsman

۴) Michael George Cowling (1942-) استاد دانشگاه سوث ولز استرالیا

که در آن $g^*(x) = g(x^{-1})$ برای هر $x \in G$. از این‌رو $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*) \subseteq L^r(G)$.
توجه می‌کنیم اگر G تک پیمانه‌ای باشد در این صورت نامساوی یانگ به

$$L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G) \quad (*), \qquad ||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q \quad (**)$$

تبدیل می‌شود.

در اینجا به‌طور طبیعی چند سؤال مطرح می‌شود:

۱ــ چه وقت در $(*)$ تساوی به‌دست می‌آید؟

۲ــ آیا در $(*)$ اندیس r بهینه است؟

۳ــ آیا در $(**)$ ضریب ۱ در طرف راست بهترین ضریب ممکن است؟

هیوئیت[1] در ۱۹۶۴ تعمیمی از قضیهٔ معروف تجزیه کوئین[2] را برای مدول‌های باناخ اثبات می‌کند و به عنوان یک نتیجه ثابت می‌کند اگر $p \geq 1$ و G گروه موضعاً فشرده باشد آن‌گاه $L^1(G) * L^p(G) = L^p(G)$ [۲۹]. البته پیش از این لومیس[3] در [۴۰] ثابت کرده بود که $L^1(G) * L^p(G) \subseteq L^p(G)$. اما در حالت کلی پاسخ پرسش اول: هیچ‌گاه جز در حالت بدیهی. از کارهای قابل توجه در این باره نتایج لئونارد ی. هـ. یاپ[4] در ۱۹۷۰ و ۱۹۸۳ است [٦٥،٦٦].

قضیه ۲.۴ [یاپ ــ ۱۹۷۰] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده نامتناهی باشد و $p, q > 1$ و $1/r = 1/p + 1/q - 1 > 0$. در این صورت زیرفضای تولید شده توسط $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ زیرفضای چگال و از رستهٔ اول در $L^r(G)$ است. همچنین، توابعی که در $L^r(G)$ به عواملی در $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ تجزیه نمی‌شوند زیرمجموعه‌ای چگال از رستهٔ دوم در $L^r(G)$ تشکیل می‌دهند.

---

۱) Edwin Hewitt(1920-1999) ریاضیدان برجستهٔ آمریکایی که کارهای اساسی در آنالیز تابعی و به‌ویژه آنالیز هارمونیک انجام داده است. وی شاگرد مارشال هاروی استون (۱۹۰۳ــ۱۹۸۹) ریاضیدان معروف بوده است. کتاب دوجلدی هیوئیت که با همکاری دانشجویش راس نوشته است کتاب مقدس آنالیز هارمونیک‌دان‌ها به‌شمار می‌آید. وی بر اثرسکته مغزی شدید و از دست دادن قدرت تکلم در اواخر عمر پس از مدتی تحمل شرایط دشوار فوت کرد.

۲) Paul J. Cohen(1934-2007) ریاضیدان معروف آمریکایی که در ۱۹٦٦ به‌خاطر کارهایش در نظریه مجموعه‌ها به دریافت جایزه فیلدز نائل آمد. وی شاگرد آنتونی زیگموند بود از دانشگاه استانفورد بازنشسته شده بود.

۳) Lynn Harold Loomis (1915-1994) ریاضیدان آمریکایی. وی شاگرد ریاضیدان معروف س. بوخنر بود. از شاگردان معروف او می‌توان از ت. پالمر نام برد.

۴) Leonard Yau-Hock Yap (?-2005) ریاضیدان سنگاپوری. وی شاگرد هیوئیت در دانشگاه واشنگتن بوده است.

اثبات قضیهٔ بالا مبتنی بر روش‌های ریچارد اونیل[۵] در [۴۵] است و به نوعی می‌توان گفت اثبات مقدماتی است.
از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت:

نتیجه ۳.۴ فرض کنید G گروه فشرده نامتناهی باشد و $1 < r < \infty$. در این صورت

۱ــ $L^r(G) * L^r(G)$ زیرمجموعه‌ای چگال از رستهٔ اول در $L^r(G)$ است.

۲ــ $L^r(G)$ جبر باناخ بدون همانی تقریبی کران‌دار (نسبت به نرم $\|.\|_r$) است.

با توجه به قضیهٔ کنزی ــ اشتاین پاسخ پرسش (۲) در حالت کلی منفی، ولی در حالت آبلی مثبت است. قضیه بعد این مطلب را نشان می‌دهد.

قضیه ۴.۴[یاپ ــ ۱۹۸۳] فرض کنید G گروه موضعاً فشردهٔ آبلی نامتناهی باشد. فرض کنید $1 < p, q < \infty$، $1/p + 1/q > 1$ و r چنان باشد که $1/r = 1/p + 1/q - 1$. در این صورت

۱ــ اگر G فشرده باشد آن‌گاه $L^p(G) * L^q(G) \nsubseteq \cup\{L^s(G) : r < s\}$.

۲ــ اگر G گسسته باشد آن‌گاه $\ell^p(G) * \ell^q(G) \nsubseteq \cup\{\ell^s(G) : s < r\}$.

۳ــ اگر G نه فشرده و نه گسسته باشد آن‌گاه $L^p(G) * L^q(G) \nsubseteq \cup\{L^s(G) : s \neq r\}$.

۴ــ اگر G غیرفشرده و آبلی باشد در این صورت $L^p(G) * L^{p'}(G) \nsubseteq \cup\{L^s(G) : 1 \leq s < \infty\}$.

توجه کنیم که مثال کنزی ــ اشتاین باز هم نشان می‌دهد قسمت (۳) قضیه بالا برای هر گروه دلخواه برقرار نیست. با این حال قضیه ۸.۴ را ببینید.

اثبات قضیه فوق فقط از طریق ساخت توابع مشخصی روی گروه مورد نظر با استفاده از دستورهای آنالیز فوریه روی گروه $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ و برخی خواص ابتدایی ساختار گروه‌های موضعا فشرده انجام می‌گیرد. اما باید افزود که اثبات به این معنا مقدماتی است که از ابزارهای پیچده استفاده نمی‌کند؛ لیکن اثبات مفصل است و از کارهای اونیل بسیار ایده می‌گیرد. با استفاده از قضیه بالا و قضیه ن. و. ریکرت[۱] [۵۲]، که در زیر می‌آوریم و در بخش بعد به آن بازخواهیم گشت، چند نتیجه جالب به‌دست می‌آید. قضیه ریکرت به‌نوعی مکمل نامساوی یانگ است. برای اثبات مشروح‌تری از این قضیه، بند ۲۶.۳۸ از [۳۲] را ببینید.

قضیه ۵.۴ [ریکرت ــ ۱۹۶۷] فرض کنید $1 < p, q < \infty$، $1/p + 1/q < 1$ و G گروه غیرفشرده‌ای باشد. در این صورت برای هر همسایگی با بستار فشردهٔ U از عضو همانی G، توابع $f \in L^p(G)$ و $g \in L^q(G)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $f * g(x) = \infty$ برای هر $x \in U$.

نتیجه‌ها از این قرارند:

1) Richard O'Neil   2) Neil W. Rickert

نتیجه ۶.۴ [پاپ–۱۹۸۳] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و آبلی باشد. اگر $1 < p,q < \infty$، در این صورت $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^p(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

برای بیان نتیجه بعدی تعریفی لازم داریم : سه‌تایی $(p,q : s)$ از اعداد حقیقی با شرط $1 \leq p,q,s < \infty$ را برای گروه موضعاً فشرده G پذیرفتنی گوییم اگر عدد ثابت $C_{pq}(G)$ موجود باشد که $\|f * g\|_s \leq C_{pq}(G)\|f\|_p \|g\|_q$ برای هر $f \in L^p(G)$ و $g \in L^q(G)$.

نتیجه ۷.۴ [پاپ ــ ۱۹۸۳] فرض کنید G گروه آبلی نامتناهی باشد و $1 < p,q,s < \infty$. در این صورت احکام زیر برقرارند.

۱– اگر G فشرده باشد دراین صورت $(p,q : s)$ پذیرفتنی است اگر و تنها اگر $1/p + 1/q - 1 \leq 1/s$.

۲– اگر G گسسته باشد، در این صورت $(p,q : s)$ پذیرفتنی است اگر و تنها اگر $1/p + 1/q - 1 \geq 1/s$.

۳– اگر G نه گسسته و نه فشرده باشد در این صورت $(p,q : s)$ پذیرفتنی است اگر و تنها اگر $1/p + 1/q - 1 = 1/s$.

بالاخره به پرسش (۳) می‌رسیم. پاسخ این پرسش نیز منفی است، زیرا همان‌طور که اشاره کردیم بکنر برای گروه $\mathbb{R}^n$ نشان داده است که ۱ بهترین ضریب ممکن نیست. قضیه زیر نتایج بکنر و [۲۲] را گسترش می‌دهد و گسترشی برای قسمت (۳) قضیه ۴.۴ است؛ برای اثبات [۴۴] را ببینید.

قضیه ۸.۴ [نیلسن ــ ۱۹۹۴] فرض کنید $1 < p,q,r < \infty$ و $1/r = 1/p + 1/q - 1$. در این صورت

۱– عدد $c_{p,q} < 1$ یافت می‌شود به‌طوری‌که اگر G گروه موضعاً فشرده‌ای باشد که شامل هیچ زیرگروه فشردهٔ بازی نیست دراین‌صورت $C_{p,q}(G) \leq c_{p,q}$. در اینجا $C_{p,q}(G)$ کوچک‌ترین عدد ثابتی است که در نامساوی زیر صدق می‌کند

$$\|f * \Delta^{1/p'} g\|_r \leq C_{p,q}(G)\|f\|_p \|g\|_q \quad (f \in L^p(G), g \in L^q(G)).$$

۲– اگر G گروه لی همبند ساده و حل‌پذیر باشد آن‌گاه $C_{p,q}(G) = (A_p A_q A_{r'})^{\dim(G)}$، ثابت‌های A_p در ابتدای این بخش تعریف شدند.

۳– اگر G گروه لی پوچ‌توان یا همبند ساده و حل‌پذیر باشد آن‌گاه $L^p(G) * \Delta^{1/p'} L^q(G) \nsubseteq \bigcup\{L^s(G) : r < s < \infty\}$.

۴– اگر G گروه لی پوچ‌توان و غیرفشرده باشد، در این صورت $L^p(G) * \Delta^{1/p'} L^q(G) \nsubseteq \bigcup\{L^s(G) : 1 \leq s < \infty,\ s \neq r\}$.

ساآکی [1] در [۵۷] ضمن اثبات حدس L^p، که در بخش بعد به آن می‌پردازیم، دو پرسش طبیعی زیر را مطرح می‌کند:

(الف) اگر $1/r < 1/p + 1/q - 1$، $1 \leq p,q$ و $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G)$، آیا G گسسته است؟

(ب) اگر $1/r > 1/p + 1/q - 1$، $1 \leq p,q \leq \infty$ و $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G)$، آیا G فشرده است؟

باتوجه به مثال کنزی ـ اشتاین (!) پاسخ (ب) منفی، ولی، با توجه به نتیجه ۷.۴ پاسخ هر دو پرسش برای گروه‌های آبلی مثبت است. از قضیه زیر می‌توان نتیجهٔ یاپ را با اثباتی به مراتب کوتاه‌تر به‌دست آورد.

قضیه ۹.۴ [ساآکی ـ ۱۹۹۰] فرض کنید G گروه غیرفشرده‌ای با این خاصیت باشد که برای هر $\epsilon > 0$ مجموعه فشرده $K \subseteq G$ موجود باشد به طوری که اندازه K به‌قدر کافی بزرگ باشد و $\liminf_{n\to\infty} \ln\ln(\lambda(A^{2^n}))/n < \epsilon$. در این صورت تابع $f \in L^1_s(G) \cap C_0(G)^+$ موجود است به طوری که $f^{1/p} * L^q_s(G) \nsubseteq L^r(G)$ برای هر $1 \leq r,p,q$ به شرطی که $1/p + 1/q - 1 < 1/r$. در اینجا $L^q_s(G)$ توابع متقارن در $L^q(G)$ را نشان می‌دهد.

اجازه دهید این بخش را با چند پرسش جالب (شاید هم قدری دشوار) به پایان ببریم. نتیجه شناخته شده‌ای بیان می‌کند که اگر G فشرده و آبلی باشد در این صورت مجموعه $L^2(G) * L^2(G)$ فضای توابع با سری فوریه مطلقاً همگرا و در حالت کلی اگر G فشرده باشد برابر فضای ترکیبات خطی مختلط توابع معین‌مثبت روی G است؛ برای اثبات [۳۲] را ببینید. اکنون این پرسش‌ها مطرح می‌شوند:

(الف) برای چه گروه‌هایی $L^p(G) * \Delta^{1/p'} L^q(G) \nsubseteq \bigcup\{L^s(G) : 1 \leq s < \infty,\, s \neq r\}$ و یا $L^p(G) * L^2(G) \subseteq L^2(G)$؟

(ب) چه توصیف دقیقی برای مجموعه‌های $L^p(G) * L^q(G)$، $L^p(G) * L^q(G)^*$ و یا $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ وجود دارد؟

(ج) آیا مجموعه‌های $L^p(G) * L^q(G)$، $L^p(G) * L^q(G)^*$ و یا $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ فضای برداری هستند؟

از قضیه ۱.۳ در [۵] نتیجه می‌شود اگر G غیر فشرده باشد در این صورت مجموعه $L^p(G) * (L^q(G) \cap L^q(G)^*)$ خطی‌پذیر است؛ یعنی شامل یک زیرفضای بی‌نهایت بعدی است.

---

۱) Sadahiro Saeki ریاضیدان ژاپنی که در زمینه آنالیز هارمونیک کارهایی انجام داده است. وی در سال ۱۹۸۸ از دانشگاه دولتی کانزاس بازنشسته شد.

۵ عملگرهای پیچشی و تجزیهٔ جبرهای گروهی

دو مسئلهٔ مهم دیگر به مفهوم پیچش و فضاهای توابع روی گروه‌ها گره می‌خورند. یکی، مسئلهٔ تجزیه جبرهای باناخ گروهی است. اولین نتیجه را ر. سِیلم در ۱۹۴۵ به‌دست آورد. وی ثابت کرد $L^1(\mathbb{T}) * L^1(\mathbb{T}) = L^1(\mathbb{T})$. والتر رودین در ۱۹۵۷ این نتیجه را به گروه جمعی $\mathbb{R}$ گسترش داد [۵۴،۵۵]. وی برای این کار از تبدیل فوریه استفاده اساسی می‌کند. اما گام اساسی را پ. ج. کوئین برداشت. وی قضیه‌ای را که امروزه به قضیه تجزیه کوئین معروف است، در سال ۱۹۵۹ اثبات کرد. از کار وی نتایج بسیاری به دست می‌آید. قضیه تجزیه کوئین به صورت‌های مختلفی تعمیم داده شده است. هیوئیت نتیجه کوئین را در سال ۱۹٦۴ به مدول‌های باناخ تعمیم داد.

در ۱۹۴۸، روژه گودمان[۱] به بررسی توابع معین مثبت روی گروه موضعاً فشرده و مسئلهٔ نمایش گروه‌ها می‌پردازد. نتایج حاصل تعمیم نتایج مشابه برای گروه اعداد حقیقی هستند. از جملهٔ این نتایج این است که هر تابع معین مثبت حد یکنواخت ترکیب خطی توابع مقدماتی روی مجموعه‌های فشرده است. این نتیجه برای گروه فشرده G، همان قضیه معروف پیتر[۲] ــ ویل[۳] است. همچنین، گودمان اندازه‌های معین مثبت روی گروه موضعاً فشرده را تعریف می کند. نتایج و تکنیک‌های اثبات بسیار شبیه روش‌های گلفاند و رایکف[۴] است که در ۱۹۴۳ در [۲۴] منتشر کرده‌اند.

در ۱۹۵۲، رایتر[۵] در [۴۳] به بررسی مسائل مختلفی درباره جبر گروهی $L^1(G)$ روی گروه موضعاً فشرده آبلی می‌پردازد. به‌خصوص، وی تبدیل فوریه توابع و خواص آن‌ها و بسیاری از نتایجی را که برای خط حقیقی اثبات شده است را به گروه G با اثبات‌هایی که اساسا ماهیت جبری دارند و نه آنالیز تابعی، تعمیم می‌دهد. در این مقاله وی خاصیتی موسوم به P_1 مطرح می‌کند. این خاصیت را ژان دیودونه[٦] در مقاله مشهورش [۱۹] در سال ۱۹٦۰ تعمیم می‌دهد. خاصیت P_p برای $1 \leq p < \infty$ روی گروه G عبارت است از این که برای هر مجموعهٔ فشرده $K \subset G$ و هر $\epsilon > 0$

---

۱) (-Roger Godement(1912 ریاضیدان فرانسوی. وی شاگرد هانری کارتان و یکی از اعضای فعال گروه بورباکی بوده است.

۲) (Fritz Peter(1899-1949 وی شاگرد هرمان ویل بود که البته ریاضیات را ادامه نداد.

۳) (Hermann Klaus Hugo Weyl(1885-1955 ریاضیدان و فیزیکدان معروف آلمانی. وی یکی از تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرن بیستم بود. آنالیز هارمونیک روی گروه‌های فشرده حاصل کار او در دوره ۱۹۲۳ تا ۱۹۳۸ است.

۴) (Dmitrii Abramovich Raikov(1905-1981

۵) (Hans Jakob Reiter(1921-1992 ریاضیدان مشهور اتریشی که در آنالیز هارمونیک کارهای مهمی انجام داده است. کتاب درسی وی در آنالیز هارمونیک بسیار مشهور است.

٦) (Jean Alexandre Eugène Dieudonné(1906-1992 یکی از ریاضیدانان برجسته فرانسه که از اعضای فعال گروه بورباکی بود.

تابع $f \in L^p(G)$ موجود باشد به طوری که $f \geq 0$، $\|f\|_p = 1$ و $\|L_y f - f\|_p \leq \epsilon$ برای هر $y \in K$ که در آن $L_y f(x) = f(y^{-1}x)$. دیودونه نشان می‌دهد که خاصیت P_1 خاصیت P_p برای $p > 1$ را ایجاب می‌کند. رایتر در [۵۱] خاصیت P' را نیز که عبارت است از اینکه بتوان تابع ثابت ۱ را به طور یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده با توابع معین مثبت در $C_{00}(G) * C_{00}(G)$ تقریب زد مطرح می‌کند. دیودونه، رایتر، اشتگمن و برخی ریاضی‌دانان ارتباط بین خواص P و P' را بررسی کرده‌اند. این خواص به میانگین‌پذیری گروه G نیز مربوط می‌شود.

دیودونه در سال ۱۹۶۰ عملگر $\gamma_{\mu,p}$ را برای اندازهٔ کراندار μ و $1 \leq p \leq \infty$ به‌صورت $\gamma_{\mu,p}(f) = \mu * f$ تعریف می‌کند. قبلاً وندل[1] در ۱۹۵۲ نشان داده بود که $\|\gamma_{\mu,p}\| = \|\mu\|$ برای $p = 1$. دیودونه این پرسش را که تحت چه شرایطی $\|\gamma_{\mu,p}\| = \|\mu\|$ مطرح می‌کند و نشان می‌دهد اگر G خاصیت P_p داشته باشد در این صورت تساوی مذکور برای $\mu \geq 0$ برقرار است. کارهای ج. ای. گیلبرت[2] [۲۶] و هـ. لپتین[3] [۳۸] از جمله کارهایی قابل توجه درباره عملگر پیچش $\gamma_{\mu,p}$ است. گیلبرت همچنین خاصیت P' را بررسی کرده است. لپتین اندازه مثبت بورل منظم μ روی گروه موضعاً فشرده G را $p-$دسترس‌پذیر می‌نامد اگر $\mu * f \in L^p(G)$ برای هر $f \in L^p(G)$؛ و گروه G را K_p-گروه می‌نامد اگر هر اندازهٔ $p-$دسترس‌پذیر روی G کران‌دار باشد. اگر گروه G برای هر $p \geq 1$، K_p-گروه باشد آن را $K-$گروه می‌نامد. لپتین حدس می‌زند که هر گروه موضعاً فشرده یک $K-$گروه است و آن را برای گروه آبلی اثبات می‌کند. همچنین نشان می‌دهد برای هر $\mu \in L^1(G)^+$، $\|\gamma_{\mu,p}\| = \|\mu\|$ اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد. با استفاده از این مطلب می‌توان گزاره زیر را که پیوند نزدیکی با پدیده کنزی ـ اشتاین دارد اثبات کرد؛ گزاره ۲۱.۲۳ از [۴۶] را ببینید.

گزاره ۱.۵ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده میانگین‌پذیر باشد و برای $1 < p < 2$، $L^p(G) * L^2(G) \subseteq L^2(G)$. دراین‌صورت G فشرده است.

دیودونه در ۱۹۶۰ نشان می‌دهد اگر G گروه آبلی غیر گسسته باشد در این صورت، برای هر $p \geq 1$، هیچ تابع $f \in L^1(G)$ وجود ندارد به‌طوری‌که $f * L^p(G) = L^p(G)$. اثبات وی مبتنی بر ساختن پیچیدهٔ توابعی خاص روی گروه G است. این قضیه را به صورت‌های مختلف تعمیم داده‌اند و اثبات‌های ساده‌ای برای آن ارائه کرده‌اند؛ مثلاً به [۶۴،۱۵، ۱۳] نگاه کنید. اثبات یاپ در [۶۴] از همه ساده‌تر است.

قضیه ۲.۵ [بکیز ـ ۱۹۷۶] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده غیرگسسته باشد و $1 \leq p \leq \infty$. اگر M زیرمجموعه‌ای شمارا از $L^1(G)$ باشد، در این صورت فضای خطی تولید شده توسط $M * L^p(G)$ زیرمجموعهٔ سره‌ای از $L^p(G)$ است.

اثبات برنهام[4] و کولدبرگ[5] برای قضیه بالا مبتنی بر قضیه‌ای جالب برای مقسوم علیه صفر

1) J. W. Wendel 2) John E. Gilbert 3) Horst Leptin 4) J. T. Burnham 5) R. R. Goldberg

تعمیم‌یافته در یک مدول باناخ است؛ برای جزئیات به [۱۵] مراجعه کنید. قابل ذکر است که ژلازکُ[۱] در ۱۹۵۷ نشان داد جبر گروهی $L^1(G)$ هر گروه موضعاً فشرده غیربدیهی دارای مقسوم علیه صفر است.

قضیه ۳.۵ [یاپ ــ ۱۹۷۶] فرض کنید G گروه موضعاً فشردهٔ آبلی و غیرگسسته باشد و $1 \leq p \leq \infty$. دراین صورت برای هر $g \in L^p(G)$، $L^1(G) * g \neq L^p(G)$.

برهان. فرض کنید تابع $g \in L^p(G)$ چنان موجود باشد که $L^1(G) * g = L^p(G)$، پس تابع $f \in L^1(G)$ موجود است که $f * g = g$. حال اگر $h \in L^p(G)$، در این صورت به‌ازای یک $k \in L^1(G)$، $h = k * g$. پس $f * h = f * k * g = k * f * g = k * g = h$. بنابراین، برای $h \in L^p(G)$، $f * h = h$. حال برای $\varphi \in L^1(G)$ دنبالهٔ (h_n) در $L^1(G) \cap L^p(G)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|h_n - \varphi\|_1 \to 0$. پس

$$\|f * \varphi - \varphi\|_1 \leq \|f * \varphi - f * h_n\|_1 + \|f * h_n - \varphi\|_1 \leq \|f\|_1 \|\varphi - h_n\|_1 + \|h_n - \varphi\|_1 \to 0$$

بنابراین، f یک همانی برای $L^1(G)$ است، که با گسسته بودن G معادل است.

یکی از کامل‌ترین نتایج دربارهٔ مسئلهٔ دیودونه از آن یاپ در ۱۹۹۳ است [۶۷]. وی یک قضیه کلی اثبات می‌کند: فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک Aــ مدول چپ باناخ باشد. فرض کنید Y زیرفضای بسته‌ای از X چنان باشد که $ax \in Y$ برای هر $a \in A, x \in X$. در این صورت (الف) مجموعه $\{a \in A : aX = Y\}$ در A باز است. (ب) مجموعه $\{x \in X : Ax = Y\}$ در X باز است. وی سپس با استفاده از این قضیه، قضیه‌های تجزیه‌ناپذیری مذکور در بالا را به راحتی نتیجه می‌گیرد. مثلاً ثابت می‌کند اگر G گروه موضعاً فشرده غیرگسسته باشد در این صورت $M(G) * f \neq L^p(G)$ برای هر $f \in L^p(G)$ که $1 < p < \infty$.

بکیز در [۱۳] برای $f \in C_0(G)$ و $f \in L^p(G)$، $1 < p < \infty$، عملگر پیچشی $T_f(g) = g * f$ را روی $L^1(G)$ و $M(G)$ درنظر می‌گیرد و نشان می‌دهد برد چنین عملگری بسته نیست. همچنین، وی بررسی مشابه‌ای را برای عملگر T_f روی $L^p(G)$ مشروط براین که f یا f^* به $L^q(G)$ متعلق باشد انجام می‌دهد؛ مقادیر عملگر فوق در $L^r(G)$، $1/r = 1/p + 1/q - 1$، قرار می‌گیرد.

قضیه ۴.۵ [بکیز ــ ۱۹۸۴] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و غیرفشرده باشد. عبارت‌های زیر معادل‌اند.

۱) اگر $f \in C_0(G)$، دراین صورت $M(G) * f$ در $C_0(G)$ بسته نیست.

۲) اگر $1 < p < \infty$ و $f \in L^p(G)$ مخالف صفر باشد، در این صورت $M(G) * f$ در $L^p(G)$ بسته نیست.

---

۱) Wiesław Żelazko(1933-) ریاضیدان لهستانی. وی شاگرد استانیسلاوف مازور(۱۹۰۵–۱۹۸۱) ریاضیدان برجسته بوده است. زمینه تحقیقاتی او جبرهای گروهی و توپولوژیک است.

۳) اگر $1 < p < \infty$ و $f \in L^{p'}(G)$ مخالف صفر باشد، در این صورت $L^p(G) * f^*$ در $C_\circ(G)$ بسته نیست.

۴) فرض کنید $p, q > 1$، $1/r = 1/p + 1/q - 1$ و $f \in L^q(G) \cap L^q(G)^*$ مخالف صفر باشد، در این صورت $L^p(G) * f$ در $L^r(G)$ بسته نیست.

در ۱۹۷۸، ژ. کرومبه[1] و و. گورتس[2] برای گروه تک‌پیمانه‌ای G عملگر T_f از $L^1(G)$ به $L^p(G)$ را برای $1 \leq p < \infty$ و $f \in L^p(G)$ درنظر می‌گیرند. اگر مجموعهٔ انتقال‌های چپ تابع $f \in L^p(G)$ در $L^p(G)$ فشرده نسبی در توپولوژی نرمی باشد آن را تقریباً متناوب چپ می‌نامند. آن‌ها نشان می‌دهند T_f عملگری فشرده است اگر و تنها اگر f تقریبا متناوب چپ باشد. اگر G فشرده باشد در این صورت T_f همواره یک عملگر فشرده است. همچنین، آن‌ها نشان می‌دهند اگر G فشرده نباشد و $f \in L^p(G)$ تقریباً متناوب چپ باشد دراین صورت $f = \circ$.

۶ حدس L^p

ژلازک در ۱۹۶۱ با اشاره به این نتیجه ساده در کتاب لومیس که اگر G گروه فشرده‌ای باشد، در این صورت $L^2(G)$ با عمل پیچش جبر باناخ است، نشان می‌دهد که این نتیجه برای هر فضای $L^p(G)$ که $p > 1$ برقرار است. برای اثبات، با استفاده از این قضیه در کتاب لومیس که برای هر $f \in L^1(G)$ و $g \in L^p(G)$، $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ و اینکه $L^\infty(G) \cap L^1(G) \subset L^p(G)$ (چون G فشرده است) و چگال بودن $L^\infty(G) \cap L^1(G)$ در $L^p(G)$، حکم به‌راحتی به دست می‌آید. همچنین، عکس این مطلب را برای گروه آبلی G ثابت می‌کند. نتایج وی در مجلهٔ لهستانی کِلُکویوم متیمتیکوم[3] در ۱۹۶۱ چاپ می‌شود[۷۰]. در همان سال، ک. اوربانیک[4] اثبات ساده‌تری برای حالت عکس می‌آورد [۶۱]. اثبات او از این قرار است: اگر V همسایگی متقارن فشرده از عضو همانی باشد و $\psi = \chi_{V^2}$. دراین صورت به‌راحتی دیده می‌شود $\lim_{n\to\infty} \|\psi^n\|^{1/n} > \circ$. پس ψ، در رادیکال جبر $L^p(G)$ قرار ندارد. پس یک تابعک خطی ضربی پیوسته غیرصفر مانند h روی $L^p(G)$ موجود است. باتوجه به دوگانگی $L^p(G)$ و $L^{p'}(G)$، تابع $\varphi \in L^{p'}(G)$ موجود است که $h(f) = \int f(x)\varphi(x)d\lambda(x)$. با استفاده از قضییه فوبینی و محاسبه‌ای ساده می‌توان دید $|\varphi(x)| = 1$ تقریباً همه‌جا روی G. پس $1 \in L^{p'}(G)$؛ یعنی G فشرده است.

ژلازک در همان سال مسئله را برای $\circ < p < 1$ نیز بررسی می‌کند و نشان می‌دهد بسته بودن $L^p(G)$ با عمل پیچش با گسسته بودن G معادل است. در واقع اگر G گسسته نباشد، به‌راحتی می‌توان همسایگی متقارن V از عضو همانی و دنباله (V_n) از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای G را

1) G. Crombez 2) W. Govaerts 3) Colloquium Mathematicum

۴) Kazimierz Urbanik(1930-2005) آماردان مشهور لهستانی که در سن ۷۵ سالگی بر اثر سرطان درگذشت.

طوری یافت که $\lambda(V_n) > \circ$، $\lambda(V^{\text{۲}}) < \infty$ و $V_n \subseteq V$ ،$\circ < \lambda(V^{\text{۲}})$. حالا کافی است تعریف کنیم

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{V_n}}{(\lambda(V_n)n^2)^p}, \qquad g = \chi_{V^2}.$$

به‌راحتی می‌توان دید که روی V، $f * g = \infty$؛ برای جزئیات بیشتر به [۷۱] مراجعه کنید. مستقل از او م. راجاگوپالان[1] در رساله دکتری خود تحت نظر ریکارت[2] در دانشگاه ییل در سال ۱۹۶۳ حدس $L^{r,p}$ را به‌صورت زیرمطرح می‌کند:

حدس $L^{r,p}$: فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و $1 \leq p, r < \infty$. اگر $f \in L^r(G)$ و $g \in L^p(G)$، در این صورت $f * g \in L^p(G)$ اگر و فقط اگر G فشرده باشد.

حدس L^p: همان حدس $L^{r,p}$ است برای $r = p$.

قبل از آن که جلوتر برویم اجازه دهید خاطر نشان کنیم که اگر $p > 1$، بسته بودن $L^p(G)$ با عمل پیچش با جبر باناخ بودن آن معادل است. در واقع، به‌طور کلی‌تر، با توجه به گزاره ۱.۲، اگر نگاشت $f * g \mapsto (f, g)$ روی $L^p(G) \times L^q(G)$ به $L^r(G)$ خوش تعریف باشد، در این صورت این نگاشت پیوسته است. حال کاربرد ساده‌ای از اصل کرانداری یکنواخت نشان می‌دهد این نگاشت به طور همزمان پیوسته[3] است؛ یعنی $\|f * g\|_r \leq K\|f\|_p\|g\|_q$ به‌ازای $K > \circ$. با تغییر ضریب مناسبی در اندازه هار می‌توان K را برابر یک اختیار کرد.

دو حدس بالا را راجاگوپلان در ۱۹۶۳ با همین عنوان بیان کرده است. این دو حدس اساساً از سال ۱۹۶۰ با تحقیقات کنزی و اشتاین، که شرح آن در بخش پیشین آمد، سرچشمه می‌گیرند. مطالعات آن‌ها نشان می‌دهد که حدس $L^{r,p}$ برای ماتریس‌های وارون‌پذیر حقیقی ۲ × ۲ نادرست است. بعد از کارهای ژلازک و اوربانیک در طی سال‌های ۱۹۶۱ تا ۱۹۶۳، راجاگوپلان نشان می‌دهد که اگر G گسسته و غیرآبلی باشد و $p \geq r$، در این صورت حدس L^p درست است. این نتیجه را وی در مجلهٔ کِلُکویوم متیمتیکوم در ۱۹۶۳ منتشر می‌کند [۴۷]. این اولین کار منتشرشده از راجاگوپلان در این باره است. ژلازک در ۱۹۶۳ در مقاله‌ای دیگر، حدس را برای هر گروه موضعاً فشرده و $p > 2$ اثبات می‌کند [۷۳]؛ اما یکی از لم‌های اساسی آن دارای نقضی بود که راجاگوپلان به آن اشاره می‌کند. بنابراین اثبات‌های آن مقاله فقط برای گروه تک پیمانه‌ای کار می‌کند. سپس درسال ۱۹۶۶، راجاگوپلان حدس را برای گروه دلخواه و $p > r$ و همچنین گروه کلاً ناهمبند با $p = 2$ اثبات می‌کند [۴۸]. درسال ۱۹۶۷ وی حالتی که گروه پوچ‌توان یا حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم گروه‌های آبلی و $1 < p < \infty$ را اثبات می‌کند [۴۹].

ن. و. ریکرت درسال ۱۹۶۷ قضیهٔ ۵.۴ را ثابت می‌کند. بنابراین، وی به حدس L^p برای $p > 2$ و گروه موضعاً فشرده دلخواه پاسخ می‌دهد.

---

۱) Minakshisundaram Rajagopalan وی استاد دانشگاه دولتی تنسی در آمریکا است.

2) Charles E. Rickart (1913-2002) 3) jointly continuous

درسال ۱۹۶۵ راجاگوپلان و ژلازک درمقالهٔ مشترکی نشان دادند که اگر $L^p(G)$ برای $p > 1$ تحت پیچش بسته باشد آن‌گاه G باید تک‌پیمانه‌ای باشد؛ این اثبات در واقع اشتباهی که در اثبات ژلازک بود را رفع می‌کند. آن‌ها همچنین حدس L^p را برای گروه‌های حل‌پذیر برای $p > 1$ اثبات کردند [۵۰].

درسال ۱۹۶۶، لیپتین ضمن تلاش برای اثبات حدس L^p، تابع $I(G)$ را به صورت زیر برای گروه مفروض G تعریف می‌کند: $I(G) = \sup_K \inf_U \frac{\lambda(KU)}{\lambda(U)}$، که در آن U و K به‌ترتیب روی مجموعه‌های باز و فشرده تغییر می‌کنند. مثلاً اگر G حل‌پذیر باشد $I(G) = 1$. وی نشان می‌دهد اگر $I(G) < \infty$ در این صورت حدس L^p برای $p > 1$ برقرار است.

در سال ۱۹۶۷، راجاگوپلان برای اثبات حدس L^p برای $p > 1$ و گروه‌های پوچ‌توان و گروه‌هایی که حاصل ضرب نیم مستقیم گروه‌های آبلی هستند، ابتدا نشان می‌دهد اگر $L^p(G)$ برای $p > 1$ و گروه دلخواه G جبر باناخ باشد باید مرکز G فشرده باشد. از اینجا نتیجه می‌گیرد که برای حل حدس L^p برای گروه لی همبند کافی است آن را برای گروه همبند ماتریس‌های حقیقی اثبات کرد. در همان مقاله، حدس L^p را برای دستهٔ خاصی از گروه‌های تک پیمانه‌ای که در شرط P_2 صدق می‌کنند، اثبات می‌کند. همچنین نشان می‌دهد اگر G گسسته و $l^p(G)$ تحت عمل پیچش بسته باشد G باید شامل یک زیرگروه برنساید[۱] باشد.

ریکرت در ۱۹۶۸ با استفاده از نتایج راجاگوپلان، حدس را برای $p = 2$ و گروه دلخواه اثبات می‌کند. بنابر نتیجه راجاگوپلان، برای $p = 2$ کافی است قضیه برای گروه همبند ماتریس‌های حقیقی اثبات شود. ریکرت، با استفاده از نتایج قبلی راجاگوپلان، اثبات را به گروه نیم ساده همبند ماتریس‌های حقیقی تقلیل می‌دهد. برای این حالت نیز از تبدلات فوریه توابع گروهی وسیعاً استفاده می‌کند و قضایای دشواری مثل قضیهٔ هاریش ــ چاندرا[۲] را به‌کار می‌گیرد.

در سال ۱۹۶۹ گرین‌لیف[۳] در کتاب مشهورش درباره میانگین‌ها روی گروه‌های موضعاً فشرده حدس L^p را برای گروه میانگین‌پذیر اثبات می‌کند [۲۸].

درسال ۱۹۷۱، میلنز[۴] صورت قوی‌تری از قضیه ریکرت را برای حالتی که G تک پیمانه‌ای نیست، اثبات می‌کند.

قضیه ۱.۶ [**میلنز ــ ۱۹۷۱**] فرض کنید G گروه غیر تک پیمانه‌ای باشد و $1 < p < \infty$. در این صورت همسایگی U و توابع $f \in \bigcap_{p\le r\le\infty} L^r(G)$ و $g \in \bigcap_{1\le q\le\infty} L^q(G)$ یافت می‌شوند

---

۱) Burnside

۲) Harish Mehrotra Chandra(1923-1983) ریاضیدان هندی که کارهای بنیادی در آنالیز هارمونیک گروه‌های لی نیم ــ ساده انجام داده است. وی شاگرد پل دیراک بوده است.

۳) Frederick Greenleaf استاد بخش ریاضی موسسهٔ ریاضی کورانت در دانشگاه نیویورک است.

۴) Paul Milnes وی استاد دانشگاه اونتاریوی غربی در کانادا است.

به طوری که $f * g(x) = \infty$ برای هر $x \in U$.

در سال ۱۹۷۵ ژلازک در مسیر حل حدس L^p، مسئلهٔ برنساید را برای گروه‌های موضعاً فشرده، که تعمیم مسئلهٔ معروف برنساید در جبر است، مطرح می‌کند. وی گروه موضعاً فشردهٔ G را گروه برنساید می‌نامد اگر عدد $c > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر دو مجموعهٔ فشردهٔ A, B، $\lambda(AB) \geq c\lambda(A)\lambda(B)$. بدیهی است هر گروه فشرده، گروه برنساید است. سپس نشان می‌دهد اگر $L^p(G)$، $p > 1$، با عمل پیچش بسته باشد باید G گروه برنساید باشد. در برهان این گزاره نکته‌ای دربارهٔ اندازهٔ هار حاصل‌ضرب دو مجموعه بیان می‌شود که به خودی خود جالب است و در اثبات ساإکی و همچنین در موارد دیگر نقش اساسی دارد. وی نشان می‌دهد هر گروه برنساید باید تک پیمانه‌ای باشد و حدس L^p را برای گروه‌های میانگین‌پذیر، پوچ‌توان و حل‌پذیر اثبات می‌کند. او نشان می‌دهد برای حدس L^p کافی است مسئله برای گروه‌های کلاً ناهمبند و گروه‌های لی همبند اثبات شود [۷۳].

در سال ۱۹۷۹، ژ. کرومبه نشان می‌دهد اگر G تک پیمانه‌ای باشد و $L^p(G)*L^p(G) \subseteq L^1(G)$ در این صورت باید G فشرده باشد. همچنین اگر G تک پیمانه‌ای و برای یک $1 < p < \infty$، $L^p(G) * L^{p'}(G) \subseteq L^1(G)$ (p' مزدوج نمایی p است) در این صورت G فشرده است. اثبات مبتنی است بر این نتیجه که اگر G تک پیمانه‌ای و غیرفشرده باشد، برای $1 \leq p < \infty$ عملگر پیچشی $T_f : L^p(G) \to L^p(G)$ ($f \in L^1(G)$) فشرده است اگر و تنها اگر $T_f = 0$.

در ۱۹۸۰، ن. لوء[1] ضرایب نمایش یک گروه لی نیم ساده همبند را در نرم L^p تقریب می‌زند [۳۹]. یکی از نتایج آن اثبات حدس L^p برای برخی گروه‌های لی نیم سادهٔ همبند با مرکز متناهی برای $1 < p < \infty$ است.

به جز نتایج بالا نتایج دیگری که در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۷۵ تا قبل از ۱۹۹۰ دربارهٔ حدس L^p به‌دست آمده‌اند، مثل کارهای د. د. جانسون [۳۴]، گوده و گاملن، و دیگران، اغلب اثبات‌های ساده‌تری برای برخی نتایج قبل هستند و نتیجه‌ای به نتایج قبلی نمی‌افزایند.

اثبات گوده و گاملن برای حالتی که $p > 2$ بسیار مقدماتی است [۲۳]. درواقع، اگر G فشرده نباشد دنباله (a_n) و همسایگی متقارن U حول عضو همانی را طوری در نظر می‌گیرند که $(Ua_n)_1^\infty \cup (Ua^{-1})_1^\infty$ خانواده‌ای دوبه‌دو مجزا تشکیل بدهند. حال اگر V همسایگی فشرده متقارن چنان باشد که $V^2 \subseteq U$. تعریف می‌کنیم

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \Delta(a_n)^{-1/p} \chi_{Ua_n} \quad g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \chi_{a_n^{-1}V}$$

اکنون به‌راحتی می‌توان دید که $f, g \in L^p(G)$ اما $f * g = \infty$ روی V.

اثبات‌های اولیه، به‌جز اثبات‌های ژلازک و اوربانیک، و به ویژه اثبات‌های کنزی ــ اشتاین،

1) Noël Lohoué

اوربانیک، میلنز و ریکرت برای حالت $2 < p < \infty$ طبیعی‌تر و ساده‌تر هستند. به‌ویژه کارهای یاپ گرچه به ساختن توابع خاص روی گروه می‌پردازد، در حالت کلی طبیعی‌تر به‌نظر می‌رسند.

سرانجام پس از ۳۰ سال تلاش، ساداهیرو سااِکی، ریاضی‌دانان ژاپنی‌الاصل و استاد دانشگاه کانزاس، حدس L^p را در حالت کلی با اثباتی مقدماتی در «مجلهٔ ریاضی ایلنوی»[1] در کمتر از ۱۵ صفحه حل می‌کند. اثبات وی مقدماتی است. بسیار جالب است که اثبات وی هیچ یک از پیچیدگی‌های اثبات‌های بالا را ندارد و به اثبات‌های ژِلازِک و یاپ نزدیک‌تر است. اثبات وی مقدماتی است از این حیث که توابع خاصی روی گروه می‌سازد و از برخی خواص اندازهٔ هار استفاده می‌کند. اثبات فی‌الواقع بسیار طبیعی است.

قضیه ۲.۶ [سااِکی ـ ۱۹۹۰] فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد و $1 < p < \infty$. اگر برای هر دو تابع متقارن f, g در $L^p(G)$ داشته باشیم $f * g \in L^p(G)$، آن‌گاه G فشرده است.

برهان. نبض برهان مبتنی بر تعمیم ساده‌ای از دو نتیجهٔ ژلازک است. اول این که، اگر $1 \leq p, q, r \leq \infty$ و $1/p + 1/q - 1/r \neq 1$ و $L_s^p(G) * L_s^q(G) \subseteq L^r(G)$، در این صورت G تک پیمانه‌ای است و ثابت $c > 0$ موجود است که $\|f * g\|_r \leq c\|f\|_p\|g\|_q$ برای $f \in L^p(G)$ و $g \in L^q(G)$. و دوم، برای هر مجموعه فشرده $A, B \subseteq G$

$$(\lambda(A)\lambda(B))^{1/p'+1/q'} \leq c^2\lambda(AB)^{2/r'}.$$

حال اگر $p = q = r$، پس $\lambda(A)\lambda(B) \leq k\lambda(AB)$ برای هر $A, B \subseteq G$. به‌ویژه، $\lambda(A^n)/\lambda(A^{n+1}) \leq c/\lambda(A)$ برای هر مجموعهٔ فشردهٔ A با اندازه مثبت. اکنون اگر G فشرده نباشد، همسایگی فشرده متقارن A حول عضو همانی موجود است که $\lambda(A) > 1$ و $c/\lambda(A) \leq 2^{-(p+p')}$. اکنون قرار می‌دهیم

$$a_n = (n\ln^2(n)\lambda(A^2))^{-1/p} \qquad b_n = (n\ln^2 n\lambda(A^2))^{1/p'}$$

و

$$f = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\chi_{A^n} \qquad g = \sum_{n=2}^{\infty} b_n\chi_{A^n}.$$

وی سپس نشان می‌دهد $f \in L^p(G)$، $g \in L^p(G)$؛ ولی $\|f * g\|_p = \infty$.

این بود پایان ماجرای حدس L^p. اما پرسش‌هایی بی‌پاسخ ماندند. مثلاً پیچش رده‌های مختلف فضاهای L^p در چه فضاهای شناخته شده‌ای قرار می‌گیرد؟ یا مجموعه زوج‌های توابع، متعلق به رده‌های معینی از توابع، که پیچش آن‌ها موجود است به چه بزرگی (در یک معنای مناسب) است؟ قبل از پرداختن به این پرسش اجازه دهید گزاره زیر را که نتیجه مستقیم قضیه‌های قبل است بیان کنیم.

1) Illinois Journal of Mathematics

گزاره ۳.٦ فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد. احکام زیر برقرارند.

۱− اگر $p > ۲$ در این صورت پیچش دو تابع در $L^p(G)$ موجود است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

۲− اگر $۱ < p \leq ۲$، پیچش هر دو تابع در $L^p(G)$ موجود است اگر و تنها اگر G تک‌پیمانه‌ای است.

۳− اگر $۰ < p < ۱$، پیچش هر دو تابع در $L^p(G)$ موجود است اگر و تنها G گسسته است.

برهان (۱) و (۲) به ترتیب نتیجه مستقیمی از قضیهٔ ریکرت، قضیهٔ ۵.۴، و قضیهٔ میلنز، قضیهٔ ۱.٦، است. قسمت (۳) نیز از قضیهٔ ژلازک، که به آن اشاره کردیم، به‌دست می‌آید. قسمت (۱) و (۳) گزارهٔ بالا، به‌ترتیب، نتایج اصلی [۱] و [۲] هستند.

مسئلهٔ دیگری که اخیراً درباره حدس L^p درنظر گرفته شده است تعیین بزرگی (به لحاظ توپولوژیکی) مجموعهٔ توابعی است که پیچش آن‌ها موجود است. چنین پرسش‌هایی اولین بار در [۳۳،۱۰] بررسی شده‌اند. برای بیان این مسئله نیاز به تعریف مجموعه متخلخل[1] داریم.

مجموعهٔ متخلخل و σ ــ متخلخل را اولین بار در محاسباتی که دانژوا برای توصیف مجموعه‌هایی که در تعیین ضرایب فوریه ظاهر می‌شوند به کار برده است. همچنین ی. پ. دُلژِنکُ[2] این مفهوم را در سال ۱۹٦۷ برای بررسی مجموعه‌های خوشه‌ای به کار برده است. ل. زائیچک[3] در سال ۱۹۷٦ بررسی و تعمیم جامعی از این مفاهیم را عرضه کرده است [٦۸]. وی همچنین در سال ۲۰۰۴ این مفاهیم را به فضای نرم‌دار و متریک دلخواه تعمیم داده است [٦۹]. اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ و I یک بازه دلخواه باشد، طول بزرگ‌ترین زیر بازهٔ I را که با E اشتراک ندارد با $\lambda(E, I)$ نشان می‌دهیم. تخلخل[4] نقطه $x \in E$ را برابر

$$\limsup_{\epsilon \to ۰+} \frac{\lambda(E, (x-\epsilon, x+\epsilon))}{\epsilon}$$

تعریف می‌کنند. مجموعهٔ E را متخلخل می‌نامند اگر هر نقطهٔ E تخلخلی اکیداً مثبت داشته باشد. همچنین E را σ−متخلخل گویند اگر E اتحاد شمارایی از مجموعه‌های متخلخل باشد. فرض کنید X فضای متریک و $B(x, r)$ گوی باز به مرکز x و شعاع r باشد. اگر $۰ < c \leq ۱$، گوییم $M \subseteq X$، c−متخلخل پایینی است هرگاه

$$\forall x \in M, \forall \beta ۰ < \beta < c/۲, \exists r_۰ > ۰, \forall r ۰ < r < r_۰, \exists z \in X : B(z, \beta r) \subseteq B(x, r) \setminus M.$$

اگر M اجتماع شمارایی از مجموعه‌های c ـ متخلخل به‌ازای cهایی مثبت باشد، آن را $c - \sigma$ ـ متخلخل پایینی می‌نامند؛ و اگر M اجتماع شمارایی از مجموعه‌های c ـ متخلخل به‌ازای $c > ۰$ ثابتی باشد، آن را σ ـ متخلخل پایینی می‌نامند. به راحتی دیده می‌شود c ـ متخلخل پایینی

1) porous set 2) E. P. Dolženko 3) Luděk Zajíček 4) porosity

هیچ‌جا چگال بودن و σـ متخلخل پایینی نیز از رسته اول بودن (به مفهوم بِر) را ایجاب می‌کند. برای $p,q > 0$ قرار دهید

$$E_{p,q} = \{(f,g) \in L^p(G) \times L^q(G) : f * g \text{ تقریباً همه‌جا روی } G \text{ موجود است}\}.$$

اکنون آماده‌ایم چند نتیجه جالب از [۲۷] را بیان کنیم.

قضیه ۴.۶ [کلُنپ، استرُبین ـ ۲۰۰۹[1]] احکام زیر برقرارند.

۱− فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و $p,q > 1$ چنان باشند که $1/p + 1/q < 1$. در این صورت مجموعه $E_{p,q}$، به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$—متخلخل پایینی است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

۲− فرض کنید G گروه تک‌پیمانه‌ای غیرفشرده و σ—فشرده باشد و $p > 2$. در این صورت مجموعه $\{f \in L^p(G) : f * f \text{ تقریباً همه‌جا روی } G \text{ موجود است}\}$، به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$—متخلخل پایینی است.

قضیه بعدی نتایج اصلی [۳،۴] را دربر دارد و نتایج [۲۷] را تکمیل می‌کند.

قضیه ۵.۶ [اکبربگلو، مقصودی − ۲۰۱۳] عبارت‌های زیر برقرارند.

۱− فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و غیر تک‌پیمانه‌ای باشد و $1 < p < \infty$، $1 \leq q < \infty$. در این صورت مجموعهٔ $E_{p,q}$ به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$ـ متخلخل پایینی است.

۲− فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و غیر تک‌پیمانه‌ای باشد و $1 < p < \infty$، $1 \leq q < \infty$. در این صورت، برای هر $r > 0$ مجموعهٔ $\{(f,g) \in L^p(G) \times L^q(G) : f * g \in L^r(G)\}$، به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$ـ متخلخل پایینی است.

۳− فرض کنید G گروه موضعاً فشرده غیرگسسته باشد و $0 < p < 1$، $0 < q \leq \infty$. در این صورت مجموعهٔ $E_{p,q}$ به‌ازای یک $c > 0$، $\sigma - c$ـ متخلخل پایینی است.

۷ دربارهٔ آنچه سخن نگفتیم

در سال ۱۹۶۵، راجاگوپلان حدس L^p را برای نیم‌گروه‌ها نیز مطرح کرد. اجازه دهید به اختصار تعریفی را یادآوری کنیم. فرض کنید S یک نیم‌گروه و $l^p(S)$ فضای باناخ توابع مختلط ــ مقدار f روی S باشد به طوری که $\sum_{s\in S}|f(s)|^p \leq \infty$. عمل پیچش به‌صورت $(f*g)(x) = \sum_{uv=x} f(u)g(v)$ برای $f,g \in l^p(S)$ تعریف می‌شود؛ که در آن اگر معادله $x = uv$ جواب نداشته باشد مقدار سیگما را صفر قرار می‌دهیم. حدس L^p برای نیم‌گروه‌ها بیان می‌کند که $l^p(S)$ با عمل پیچش جبر است اگر و تنها اگر S متناهی باشد. راجاگوپلان نشان می‌دهد در آن

1) Szymon Głąb, Filip Strobin

مقاله اگر S آبلی باشد یا $p = ۲$، در این صورت این حدس درست است.

در مقالهٔ دیگری ثابت می‌کند حدس مذکور برای هر نیم‌گروه S به‌شرطی که $۲ < p \leq \infty$، درست است. در حالت $۰ < p \leq ۲$ هیچ کاری انجام نشده است و به نظر مسئلهٔ جالبی است. همچنین تعمیم این مسئله به ساختارهای جبری دیگر می‌تواند مسئله جالبی باشد.

اولین بار آرنه بئورلینگ[۱] در ۱۹۳۸ جبر وزندار توابع روی مجموعهٔ اعداد حقیقی را به منظور تعمیم قضایای وینر معرفی کرد. این جبرها همواره به خاطر رفتار جالبی که به دلیل وجود وزن نشان می‌دهند مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان بوده‌اند. در ۱۹۵۱، جان ورمر[۲] دسته وسیع‌تری از جبرهای وزندار را روی $\mathbb{R}$ معرفی و برخی نتایج بئورلینگ را برای آن‌ها اثبات کرد. وی نشان داد اگر $۱ \leq p < \infty$ و ω یک وزن باشد؛ یعنی تابع بورل اندازه‌پذیر اکیداً مثبت روی $\mathbb{R}$ و $\omega^{-p'} * \omega^{-p'} \leq \omega^{-p'}$، در این صورت $L^p(\mathbb{R},\omega)$ با عمل پیچش جبر باناخ است. این سؤال که تحت چه شرایطی $L^p(G,\omega)$ برای گروه موضعاً فشرده G با عمل پیچش جبر تشکیل می‌دهد به حدس L^p وزندار معروف است. برای $p = ۱$، ادواردز[۳] در ۱۹۵۸ نشان داد که شرط لازم و کافی این است که ω زیرضربی باشد: $\omega(xy) \leq \omega(x)\omega(y)$ برای تقریباً هر (x,y). اما برای $p > ۱$ سؤال هنوز حل نشده است و در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. از جمله کارهای قابل اعتنا می‌توان به [۳۷، ۲۰] اشاره کرد. بحث در این باره را در جای دیگری عرضه خواهیم کرد.

سپاسگزاری: از داور محترم مقاله که نکات سودمندی را متذکر شدند، سپاسگزاری می‌کنم. همچنین سرکار خانم صمدیان با زحمات فراوانی که در صفحه‌آرایی و حروف چینی نهایی این مقاله متحمل شدند، نویسنده را وامدار خویش ساختند.

مراجع

[1] F. Abtahi, R. Nasr-Isfahani, A. Rejali, On the L^p-conjecture for locally compact groups, *Arch Math.(Basel)*, **89** (2007) 237-242.

[2] F. Abtahi, R. Nasr-Isfahani, A. Rejali, Convolution on L^p-spaces of a locally compact group, *Math. Slovaca*, **63** (2013) 291-298.

[3] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, An answer to a question on the convolution of functions, *Arch. Math. (Basel)*, **98** (2012) 545-553.

۱) Arne Carl-August Beurling(1905-1986) ریاضیدان سوئدی

۲) John Wermer مدت‌ها پیش، از دانشگاه براون در آمریکا بازنشسته شد.

۳)(-Robert Edmund Edwards(1926 ریاضیدان انگلیسی ، بازنشسته دانشگاه ملی استرالیا.

[4] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, Porosity of certain subsets of Lebesgue spaces on locally compact groups, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **88** (2013) 113-123.

[5] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, J. Seoane-Sepulveda, Porous sets and lineability of continuous functions on locally compact groups, *J. Math. Anal. Appl.*, **406** (2013) 211-218.

[6] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Academic Press, Orlando, 1985.

[7] S. A. Alvarez, Reticulos engendrados por colecciones de espacios L^p, *Revista Colombiana de Math.* **22** (1988) 173-182.

[8] S. A. Alvarez, L^p arithmetic, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992) 656-662.

[9] K. I. Babenko, An inequality in the theory of Fourier integrals, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.*, **25** (1961) 531-542.

[10] M. Balcerzak, A. Wachowicz, Some examples of meager sets in Banach spaces, *Real Anal. Exchange*, **26** (2000) 877-884.

[11] F. Barthe, Optimal Young's inequality and its converse: a simple proof, *Geom. Funct. Anal.*, **8** (1998) 234-242.

[12] W. Beckner, Inequality in Fourier analysis, *Ann. of Math.*, **102** (1975) 159-182.

[13] R. A. Bekes, The range of convolution operators, *Pacific J. Math.*, **110** (1984) 257-271.

[14] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions, *Advances in Math.*, **20** (1976) 151-173.

[15] J. T. Burnham, R. R. Goldberg, The convolution theorem of Dieudonné, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **36** (1974) 1-3.

[16] E. A. Carlen, E. H. Lieb, Brascamp-Lieb inequality for non-commutative integration, *Doc. Math.*, **13** (2008) 553-584.

[17] M. Cowling, The Kunze-Stein phenomen, *Ann. of Math.*, **107** (1978) 209-234.

[18] C. B. Dawson, L-correspondences: the inclusion $L^p(\mu, X) \subseteq L^q(\nu, Y)$, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **19** (1996) 723-726.

[19] J. Dieudonné, Sur le produit de convolution II, *J. Math. Pures Appl.*, **39** (1960) 275-292.

[20] El Kinani, A. Roukbi, and A. Benazzouz, Structure d'algèbre de Banach sur l'espace à poids $L^p_\omega(G)$, *Le Matematiche*, **64** (2009) 179-193.

[21] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Boca Rota, CRC Press, 1999.

[22] J. J. F. Fournier, Sharpness in Young's inequality for convolution, *Pacific J. Math.*, **72** (1977) 383-397.

[23] R. J. Gaudet, J. L. Gamlen, An elementry proof of a part of a classical conjecture, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **3** (1970) 285-292.

[24] I. Gelfand, D. Raikov, Irreducible unitary representations of locally bicompact groups, *Math. Sbornik*, **55** (1943) 301-316.

[25] F. Ghahramani, A. T. M. Lau, Weak amenability of certain classes of Banach algebras without approximate identities, *Math. Proc. Cambridge Philo. Soc.*, **133** (2002) 357-371.

[26] J. E. Gilbert, Convolution operators on $L^p(G)$ and properties of locally compact groups, *Pacific J. Math.*, **24** (1968) 257-268.

[27] S. Głąb, F. Strobin, Porosity and the L^p-conjecture, *Arch. Math.(Basel)*, **95** (2010) 583-592.

[28] F.P. Greenleaf, *Invariant Means on Locally Compact Groups and Their Applications*, Math. Studies 16, Van Nostrand, New York, 1969.

[29] E. Hewitt, The ranges of certain convolution operators, *Math. Scand.*, **15** (1964) 147-155.

[30] E. Hewitt, I. I. Hirschman, Jr., A maximum problem in harmonic analysis, *Amer. J. Math.*, **76** (1954) 839-854.

[31] E. Hewitt, K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. I*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1979.

[32] E. Hewitt, K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 1970.

[33] J. Jachymski, A nonlinear Banach-Steinhaus theorem and some meager sets in Banach spaces, *Studia Math.*, **170** (2005) 303-320.

[34] D. L. Johnson, A new proof of the L^p-conjecture for locally compact group, *Colloq. Math.*, **47** (1982) 101-102.

[35] A. Kirillov, *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[36] R. Kunze, E. Stein, Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, *Amer. J. Math.*, **82** (1960) 1-62.

[37] Yu. N. Kuznetsova, Invarinat weighted algebras $L_p^\omega(G)$, *Math. Notes*, **84** (2008) 529-537.

[38] H. Leptin, Faltungen von Borelschen ma★en mit L^p-funktionen auf lokal kompakten gruppen, *Math. Annalen*, **168** (1966) 111-117.

[39] N. Lohoué, Estimations L^p des coefficients de représentation et opérateurs de convolution, *Adv. Math.*, **38** (1980) 178-221.

[40] L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, Princeton, 1953.

[41] A. G. Miamee, The inclusion $L^p(\mu)\subseteq L^q(\nu)$, *Amer. Math. Monthly*, **98** (1991) 342-345.

[42] P. Milnes, Convolution of L^p functions on non-unimodular groups, *Canad. Math. Bull.*, **14** (1971) 265-266.

[43] O. A. Nielsen, *An Introduction to Integration and Measure Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1997.

[44] O. A. Nielsen, Sharpness in Young's inequality for convolution products, *Canad. J. Math.*, **46** (1994) 1287-1298.

[45] R. O'Neil, Convolution operators and $L(p,q)$ spaces, *Duke Math. J.*, **30** (1963) 129-142.

[46] J. P. Pier, *Amenable Locally Compact Groups*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[47] M. Rajagopalan, On the l^p-spaces of a discrete group, *Colloq. Math.*, **10** (1963) 49-52.

[48] M. Rajagopalan, L^p-conjecture for locally compact groups I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **125** (1966) 216-222.

[49] M. Rajagopalan, L^p-conjecture for locally compact groups II, *Math. Annalen*, **169** (1967) 331-339.

[50] M. Rajagopalan, W. Żelazko, L^p-conjecture for solvable locally compact groups, *J. Indian Math. Soc.*, **29** (1965) 87-93.

[51] H. J. Reiter, Investigation in harmonic analysis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73** (1952) 401-427.

[52] N. W. Rickert, Convolution of L^p functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967) 762-763.

[53] N. W. Rickert, Convolution of L^2 functions, *Colloq. Math.*, **19** (1968) 301-303.

[54] W. Rudin, Representation of function by convolutions, *J. Math. Mech.*, **7** (1958) 103-115.

[55] W. Rudin, Factorization in the group algebra of the real line, *Proc. Nat. Acod. Sci U.S.A.*, **43** (1957) 339-340.

[56] B. Russo, The norm of the L^p-Fourier transform, II, *Canad. J. Math.*, **28** (1976) 1121-1131.

[57] S. Saeki, The L^p-conjecture and Young's inequality, *Illinois. J. Math.*, **34** (1990) 615-627.

[58] H. Samea, L^p-spaces on locally compact groups, Preprint.

[59] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. of Math.*, **57** (1953) 401-457.

[60] B. Subramanian, On the inclusion $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$, *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978) 479-481.

[61] K. Urbanik, A proof of a theorem of Żelazko on L^p-algebras, *Colloq. Math.* **8** (1961) 121-123.

[62] A. Villani, Another note on the inclusion $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$, *Amer. Math. Monthly*, **92** (1985) 485-487.

[63] A. Weil, *L'intégration dans les Groupes Topologiques et ses Application*, Hermann, Paris, 1940.

[64] L. Y. H. Yap, On a convolution theorem, *Acta Sci. Math.(Szeged)*, **38** (1976) 203-204.

[65] L. Y. H. Yap, On the impossibility of representing certain functions by convolution, *Math. Scand.* **26** (1970) 132-240.

[66] L. Y. H. Yap, Sharpness of Young's inequality for convolution, *Math. Scand.*, **53** (1983) 221-237.

[67] L. Y. H. Yap, On the ranges of certain convolution operators, *Exposition. Math.*, **11** (1993) 73-80.

[68] L. Zajíček, Sets of σ-porosity, *Casopis Pest. Mat.*, **101** (1976) 350-359.

[69] L. Zajíček, On σ-porous sets in abstract spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, **5** (2005) 509-534.

[70] W. Żelazko, On the algebras L^p of a locally compact group, *Colloq. Math.*, **8** (1961) 112-120.

[71] W. Żelazko, A theorem on the discrete groups and algebra L^p, *Colloq. Math.*, **8** (1961) 205-207.

[72] W. Żelazko, A note on L^p algebras, *Colloq. Math.*, **10** (1963) 53-56.

[73] W. Żelazko, On the Burnside problem for locally compact groups, *Symp. Math.*, **16** (1975) 409-416.

[۷۴] ر. جهانی‌پور، ب. ظهوری زنگنه، آنالیز حقیقی، مبانی نظریهٔ اندازه و انتگرال، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۸۸.

[۷۵] ا. صفاپور، نمایش گروه و آنالیز هارمونیک از اویلر تا لانگلندز، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۴ (۱۳۸۹) ۴۰–۲۹.

[٧٦] و. رودین، آنالیز حقیقی و مختلط، ترجمهٔ ع. عالم‌زاده، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۸۸.

[۷۷] ع. ر. مدقالچی، مسائل راهبردی در آنالیز همساز و کاربردهای آنها، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۰ (۱۳۸۷) ۴٦–١٦.

سعید مقصودی
گروه ریاضی، دانشگاه زنجان
s_maghsodi@znu.ac.ir