فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۳) صص. ۶۵ تا ۷۵

مجموعهٔ ژولیای چندجمله‌ای‌های چبیشف

منیره اکبری و مریم ربیعی

چکیده

هدف این مقاله بررسی مجموعه ژولیای چندجمله‌ای‌های چبیشف از درجهٔ n روی کرهٔ ریمان است. این چندجمله‌ای‌ها که با استفاده از یک رابطهٔ بازگشتی تعریف می‌شوند به ازای $n \geq ۲$ دارای مجموعهٔ ژولیای هموار هستند. در واقع، ثابت می‌شود که مجموعهٔ ژولیای این نگاشت‌ها بازهٔ بسته $[-۲, ۲]$ است.
سپس با استفاده از خواص این چندجمله‌ای‌ها و رابطه بازگشتی مشابه، دستهٔ دیگری از چندجمله‌ای‌ها که آن ها را چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف خواهیم نامید، معرفی می‌شوند. نشان می‌دهیم مجموعهٔ ژولیای این خانواده جدید نیز، به ازای هر $n \geq ۲$ هموار است. هم چنین نشان می دهیم چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف در حالت n زوج با چندجمله‌ای‌های چبیشف و در حالت n فرد با منهای آن مزدوج هستند.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های چبیشف، مجموعهٔ ژولیای پرشده، مجموعهٔ ژولیا، تزویج.

مقدمه

سیستم‌های دینامیکی گسسته یکی از شاخه‌های ریاضیات است که به دلیل کارایی روش‌های آن کاربردهای مهمی در بسیاری از علوم دیگر مانند فیزیک، شیمی، زیست شناسی، اقتصاد، علوم پزشکی و ... پیدا کرده است. منظور از یک سیستم دینامیکی گسسته، زوج (f, X) است که در آن X یک فضای متری و $f : X \to X$ نگاشتی پیوسته است.

یکی از موضوعات اصلی این حوزه، بررسی رفتار نهایی نقاط فضا تحت تکرارهای نگاشت f یعنی ترکیب‌های متوالی f با خودش است. به این منظور برای هر $x \in X$ دنبالهٔ $\left(f^n(x)\right)_{n\geq ۰}$ که در آن $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ بار}}$، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این دنباله مدار نقطهٔ x نامیده می‌شود. اگر در این دنباله به ازای nای، $f^n(x) = x$ آن گاه نقطهٔ x نقطهٔ تناوبی f، مدار آن مدار تناوبی و n

یک دورهٔ تناوب x نامیده می‌شود. در حالت خاص $n = 1$، نقطهٔ x را یک نقطهٔ ثابت می‌نامیم.

از جمله موضوعات مهم دیگر این حوزه، شناسایی مجموعه‌هایی با رفتار پایدار و مجموعه‌هایی با رفتار ناپایدار است؛ یعنی شناسایی مجموعه‌نقاطی که نقاط نزدیک به آن رفتاری مشابه همان نقطه و یا رفتاری کاملاً متفاوت با آن دارند.

شناسایی سیستم‌هایی با رفتار مشابه هم از موضوعات مهم دیگر در سیستم‌های دینامیکی است. دو سیستم دینامیکی (f, X) و (g, Y) را مزدوج می‌نامیم هرگاه همسان‌ریختی $h : X \to Y$ موجود باشد به طوری که $h \circ f = g \circ h$. در این حالت تمام خواص دینامیکی f به وسیلهٔ h که نگاشت تزویج نامیده می‌شود به g منتقل می‌شود و بر عکس. درحالتی که h فقط پیوسته و به رو باشد آن را نگاشت نیم‌تزویج می‌نامیم. در این حالت بعضی از خواص f تحت h به g منتقل می‌شود [۳].

در صورتی که X زیرمجموعهٔ کرهٔ ریمان[1]، $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \infty$، باشد، آن را سیستم دینامیکی مختلط و اگر زیرمجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، باشد، آن را سیستم دینامیکی حقیقی می‌نامیم. رفتار یک سیستم دینامیکی، حتی درسیستم‌های به ظاهر ساده مانند حالتی که f یک چندجمله‌ای درجهٔ دو است، می‌تواند بسیار پیچیده باشد.

درحالتی که $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ یک چندجمله‌ای است مجموعه نقاطی که مدار آن‌ها کراندار نیست، مجموعه نقاطی هستند که همگی جذب ∞ می‌شوند؛ یعنی مدار آن‌ها به ∞ می‌گراید. بنابراین این دسته از نقاط همگی رفتار یکسانی دارند. در مقابل، مجموعه نقاطی که مدار آن‌ها کراندار است خود به دو دسته تقسیم می‌شوند مجموعه نقاطی با رفتار پایدار و مجموعه نقاطی با رفتار ناپایدار. بر این اساس مجموعهٔ ژولیای پرشده[2]، مجموعهٔ ژولیا[3]، و مجموعهٔ فاتوی[4] f به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

- $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f) = \{z \in \mathbb{C} :$ دنبالهٔ $(f^n(z))$ کراندار است$\}$
- $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f) = \partial\mathcal{K}(f) = \mathcal{K}$ مرز
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f) = \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{J}$

لازم به ذکر است که در سیستم دینامیکی مختلط روی کرهٔ ریمان، مجموعه‌ی ژولیا، مجموعهٔ ناپایدار و مجموعهٔ فاتو، مجموعهٔ پایدار سیستم است. مجموعهٔ ژولیا، مجموعه‌ای بسته و کاملاً ناوردا تحت f، $f(\mathcal{J}) = \mathcal{J} = f^{-1}(\mathcal{J})$، و مجموعهٔ فاتو، مجموعه‌ای باز و کاملاً ناوردا تحت f است. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه منابع [۱]، [۲] و [۴] پیشنهاد می‌گردد.

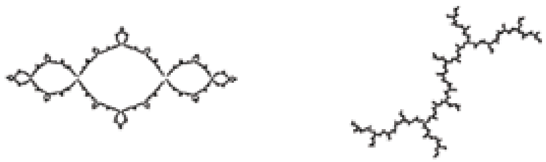
در شکل ۱ بخش سیاه رنگ، مجموعهٔ ژولیای دو نگاشت چندجمله‌ای از درجهٔ دو را نشان می‌دهد. در شکل سمت راست مجموعهٔ ژولیا با مجموعهٔ ژولیای پرشده برابر است ولی در شکل سمت چپ ناحیهٔ کرانداری که مرز آن مجموعهٔ ژولیا است در مجموعهٔ ژولیای پر شده واقع است و مدار سایر نقاط جذب ∞ می‌شود.

---

1) Riemann sphere   2) filled Julia set   3) Julia set   4) Fatou set

در این میان به جز نگاشت‌هایی به صورت z^d، $|d| \geq ۲$، که مجموعهٔ ژولیای آن هموار و در واقع دایرهٔ واحد است، نگاشت‌های چندجمله‌ای دیگری نیز موجودند که مجموعهٔ ژولیای آن‌ها هموار است. این چندجمله‌ای‌ها که به صورت بازگشتی تعریف می‌شوند، چندجمله‌ای‌های چبیشف[1] نامیده می‌شوند.

هدف ما در بخش ۱ این مقاله معرفی و بررسی دینامیک این چندجمله‌ای‌ها است. در بخش ۲ خانوادهٔ چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف را معرفی و مجموعهٔ ژولیای آن‌ها را بررسی می‌نماییم و نهایتاً نشان می‌دهیم که چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف در حالت n زوج با چندجمله‌ای‌های چبیشف و درحالت n فرد با منهای آن مزدوج هستند. این دقیقاً همان چیزی است که بر اساس قضیه‌ای از میلنر[2]، قضیهٔ ۲، قابل انتظار است.



شکل ۱: مرز شکل‌های بالا، به ترتیب از راست، مجموعهٔ ژولیای نگاشت‌های $z^۲ - i$ و $z^۲ - ۱$ است.

۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف و مجموعه‌های ژولیای هموار

چندجمله‌ای چبیشف از درجهٔ n، با استفاده از رابطهٔ بازگشتی زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} f_۰(z) &= ۲ \\ f_۱(z) &= z \\ f_n(z) &= z f_{n-۱}(z) - f_{n-۲}(z) \quad \forall n \geq ۲ \end{aligned}$$

نمودار این نگاشت‌ها در حالت $n = ۲, ۳, ۴$، وقتی متغیر z حقیقی است در شکل ۲ رسم شده است.

در واقع، هر چندجمله‌ای چبیشف حقیقی از درجهٔ n هنگامی که به درستی نرمال شود، به ازای متغیر حقیقی x با $|x| < ۱$، جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$(۱ - x^۲) y'' - x y' + \alpha^۲ y = ۰ \qquad (۱)$$

می‌باشد که در آن $y = \frac{۱}{۲} f_n(۲x)$ و α عدد صحیح و غیرمنفی n است. توجه کنید که برای بررسی

1) Chebyshev polynomials 2) Milnor

درستی ادعای اخیر لازم است ابتدا با استقراً نشان دهیم

$$(۴ - x^۲)f_n'(x) + xnf_n(x) - ۲nf_{n-۱}(x) = ۰$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف نامیده می‌شود. چندجمله‌ای‌های چبیشف در مواقعی که لازم است یک تابع با یک چندجمله‌ای تقریب زده شود بسیار مفید واقع می‌شوند.

چندجمله‌ای‌های چبیشف حقیقی، $f_n|_{\mathbb{R}}$ دارای خواص جالبی هستند که سبب می‌شود رفتار دینامیکی آن‌ها به صورتی مشخص‌تر توصیف شود. از جمله:

I. $(f_n|_{\mathbb{R}})^{-۱}(I) = I = (f_n|_{\mathbb{R}})(I)$ که در آن $I = [-۲, ۲]$.

هرگاه $|x| > ۲$، به سادگی دیده می‌شود دنبالهٔ $(|f_n^m(x)|)$ به بینهایت می‌گراید. در صورتی که به ازای $|x| \leq ۲$، بررسی رفتار دینامیکی $(|f_n^m(x)|)$ بسیار پیچیده‌تر است.

II. نمودار چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد در نقاطی به طول ۲ و ۲− خط $y = x$ را قطع می‌کنند و نمودار آن‌ها نسبت به مبدا متقارن است. در حالی که نمودار چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج در نقطهٔ به طول ۲ خط $y = x$ را قطع می‌کنند و نمودار آن‌ها نسبت به محور y متقارن است.

III. چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد، نگاشت‌هایی فرد و چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج، نگاشت‌هایی زوج هستند.

IV. اگر $S^۱$ دایرهٔ واحد باشد، برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، نگاشت $C : S^۱ \longrightarrow [-۲, ۲]$ با ضابطهٔ $C(\theta) = ۲\cos\theta$ یک نیم‌تزویج بین نگاشت $D_n : S^۱ \longrightarrow S^۱$ با ضابطهٔ $D_n(\theta) = n\theta$ و $f_n|_I$ است. صحت این ادعا با استقراء به اثبات می‌رسد. ابتدا توجه کنید که نگاشت C به رو است. برای $n = ۲$ حکم به وضوح برقرار است. به علاوه داریم

$$\begin{aligned}
f_n(C(\theta)) &= f_n(۲\cos\theta) \\
&= (۲\cos\theta)f_{n-۱}(۲\cos\theta) - f_{n-۲}(۲\cos\theta) \\
&= (۲\cos\theta)\big(۲\cos(n-۱)\theta\big) - ۲\cos(n-۲)\theta \\
&= ۲\cos n\theta \\
&= C(D_n(\theta))
\end{aligned}$$

همهٔ نقاط تناوبی D_n با دورهٔ تناوب m از رابطهٔ $n^m\theta = \theta + ۲k\pi$ به دست می‌آید. در این حالت $\theta = \frac{۲k\pi}{n^m - ۱}$. به راحتی می‌توان نشان داد مجموعهٔ چنین نقاطی در دایره چگال است. از طرف دیگر D_n دارای خاصیت انبساطی است؛ یعنی هرگاه $A \subseteq S^۱$ کمانی از دایره باشد، $D_n(A)$ کمانی با طولی بیش از طول اولیه (n برابر طول اولیه) است و در نهایت به ازای m مناسب $D_n^m(A)$ تمام دایرهٔ $S^۱$ را می‌پوشاند. دو خاصیت ذکر شده در بالا تحت نگاشت C به چندجمله‌ای f_n روی بازهٔ I منتقل می‌شود. بنابراین

الف) مجموعهٔ نقاط تناوبی f_n در بازه‌ی I چگال است.
ب) هرگاه $A \subseteq I$ یک بازه باشد، به ازای m مناسب $f_n^m(A) = I$.

پس هرگاه $A \subseteq I$ یک بازه باشد، به ازای هر $x \in A$، عدد طبیعی m و $y \in A$ یافت می‌شوند به طوری که $|f_n^m(x) - f_n^m(y)| > \frac{1}{2}$. به علاوه اگر $U, V \subseteq I$ دو بازهٔ دلخواه باشند، m ی وجود دارد به طوری که $f_n^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

خاصیت الف نشانگر نوعی نظم است. خاصیت ب نشان می‌دهد که رفتار مدار نقاط بسیار نزدیک به هم ممکن است متفاوت باشد. به عبارت دیگر نمی‌توان رفتار مدارهای نقاط نزدیک به هم را پیش‌بینی کرد. هم چنین نمی‌توان بازهٔ I را به دو مجموعهٔ مجزا و ناوردا تحت f_n تقسیم نمود. در این حالت گوییم:

نگاشت $f_n|_I$ روی بازه‌ی I آشوبناک است.

با استفاده از نیم تزویج بالا می‌توان خاصیت زیر را نیز در مورد چندجمله‌ای‌های چبیشف حقیقی بیان نمود.

۷. یک چندجمله‌ای چبیشف از درجهٔ $n \geq 2$، دارای n نقطه‌ی ثابت متمایز و $n - 1$ نقطه‌ی بحرانی متمایز است که همگی این نقاط بحرانی تحت f_n به ۲ یا ۲− نگاشته می‌شوند.

توجه کنید که خاصیت I نشان می‌دهد که x_0 نقطهٔ اکسترمم f_n است اگر $f_n(x_0) = \pm 2$. بنابراین با توجه به رابطهٔ

$$f_n(C(\theta)) = C(D_n(\theta))$$

کافی است با فرض $2\cos\theta = x_0$ تساوی

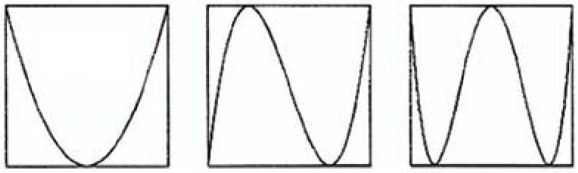
$$\pm 2 = f_n(x_0) = f_n(2\cos(\theta)) = C(n\theta) = 2\cos(n\theta)$$

بررسی شود. از حل معادلهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\theta = \frac{2k\pi + \pi}{n} \text{ یا } \theta = \frac{2k\pi}{n}$$

که در آن $0 \leq k < n$. با توجه به این که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، یعنی نقاط ± 2، همواره نقاط اکسترمم f_n هستند و با توجه به خاصیت نگاشت نیم تزویج، تعداد نقاط اکسترمم موضعی (نقاط بحرانی) با $\frac{2n-2}{2} = n - 1$ برابر است.

از طرفی وجود نقاط اکسترمم باعث می‌شود که بتوان بازهٔ $[-2, 2]$ را به n قسمت به گونه‌ای افراز نمود که تصویر هر قطعه تحت f_n تمام بازهٔ $[-2, 2]$ شود. بنابراین خط $y = x$ نمودار f_n را در n نقطهٔ متمایز قطع می‌کند.



شکل ۲: نمودار چندجمله‌ای‌های چبیشف در حالت حقیقی به ازای $n = ۲, ۳, ۴$.

با استقرا می‌توان نشان داد که خواص زیر نیز در مورد این خانواده برقرار است.

۱. برای هر k و هر $n \geq k$، $f_n \times f_k = f_{n+k} + f_{n-k}$.

۲. برای هر k و هر n، $f_k \circ f_n = f_{kn}$.

۳. $f_n(-z) = (-۱)^n f_n(z)$

۴. $f_n^k(-z) = (-۱)^n f_n^k(z)$

بنابراین از دومین رابطه می‌توان نتیجه گرفت:

$$f_n \circ f_k = f_k \circ f_n \quad \forall n \geq ۰,\ \forall k \geq ۰$$

هم‌چنین اگر قرار دهیم $h(z) = z + \frac{۱}{z}$ و $F_n(z) = z^n$؛ در این صورت به ازای هر $n \geq ۲$ داریم

$$f_n \circ h = h \circ F_n \qquad (۲)$$

زیرا

$$f_۲(h(z)) = (h(z))^۲ - ۲ = (z + \tfrac{۱}{z})^۲ - ۲ = z^۲ + \tfrac{۱}{z^۲} = h(F_۲(z))$$

با فرض برقراری رابطهٔ (۲) برای هر k، $k < n$، در حالت $k = n$ داریم:

$$\begin{aligned} f_n(h(z)) &= h(z) \times f_{n-۱}(h(z)) - f_{n-۲}(h(z)) \\ &= (z + \frac{۱}{z}) \times h(F_{n-۱}(z)) - h(F_{n-۲}(z)) \\ &= (z + \frac{۱}{z}) \times (z^{n-۱} + \frac{۱}{z^{n-۱}}) - (z^{n-۲} + \frac{۱}{z^{n-۲}}) \\ &= z^n + \frac{۱}{z^n} \\ &= h(F_n(z)) \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان دید به ازای هر $m \geq ۱$:

$$f_n^m \circ h = h \circ F_n^m \qquad (۳)$$

اکنون با کمک رابطهٔ (۳) نشان می‌دهیم $\mathcal{J}(f_n) = I$ برای این کار توجه کنید که مجموعهٔ ژولیای پرشدهٔ F_n، دیسک واحدبسته‌است؛ زیرا برای هر $|z| \leq ۱$، $|F_n^m(z)| \leq ۱$ و برای هر z با $|z| > ۱$، $\lim_{m\to\infty} F_n^m(z) = \infty$. بنابراین مجموعهٔ ژولیای F_n، مرز دیسک واحد؛ یعنی دایرهٔ واحد است.

هم‌چنین توجه کنید که $h(S^۱) = I$ و $h(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}) = h(D) = \mathbb{C}_\infty \setminus I$ که در آن $D = \{z:\ |z| < ۱\}$.

حال برای $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus I$، $z_\circ \in \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}$ موجود است به طوری که $h(z_\circ) = z$. بنابراین

$$f_n^m(h(z_\circ)) = f_n^m(z)$$

در نتیجه

$$h(F_n^m(z_\circ)) = f_n^m(z)$$

چون $\lim_{m\to\infty} F_n^m(z_\circ) = \infty$ و $h(\infty) = \infty$، پس $\lim_{m\to\infty} f_n^m(z) = \infty$.

با روش مشابه، برای $z \in I$، $z_\circ \in S^۱$ موجود است که $h(z_\circ) = z$. چون $|F_n^m(z_\circ)| = ۱$ لذا $h(F_n^m(z_\circ)) \in I$. بنابراین برای هر m، $f_n^m(z) \in I$ پس داریم:

قضیه ۱. مجموعهٔ ژولیای f_n، بازهٔ بستهٔ $I = [-۲, ۲]$ است.

برای دیدن اثبات دیگری از این قضیه به [۱] مراجعه کنید. بنابراین در حالت مختلط نیز آشوبناک بودن f_n روی $I = [-۲, ۲]$ به اثبات می‌رسد. زیرا نقاط بیرون بازهٔ I تحت تکرارهای f_n به بینهایت همگرا هستند، بنابراین رفتار سیستم در بیرون بازهٔ I یک رفتار قابل پیش‌بینی است. در واقع بیرون بازهٔ I همهٔ نقاط رفتار یکسانی دارند. در صورتی که روی بازهٔ I این گونه نیست. چون بازهٔ I مجموعه نقاط مرزی مجموعهٔ ژولیای پر شده است، در هر همسایگی بسیار کوچک نقاط واقع بر بازهٔ I، نقاطی موجودند که تحت تکرارهای f_n به بینهایت میل می‌کنند و در عین حال نقاطی نیز موجودند که همواره در بازهٔ I باقی می‌مانند. این مطلب وابستگی حساس به شرایط اولیه را به خوبی نشان می‌دهد. بنابراین سیستم روی بازه‌ی I ناپایدار است.

۲ چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف و مجموعه‌های ژولیای هموار

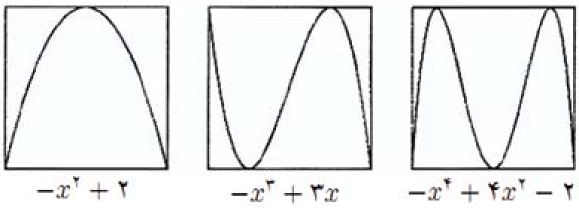
ممکن است این سوال مطرح شود که آیا می‌توان خانوادهٔ دیگری از نگاشت‌ها ارائه داد که به طور بازگشتی تعریف شوند و مجموعهٔ ژولیای آن‌ها نیز یک بازه باشد. قضیهٔ زیر از میلنر بیان می‌کند اگر مجموعهٔ ژولیای یک چندجمله‌ای یک بازه باشد، آن گاه باید با $\pm f_n$ مزدوج شود.

قضیه ۲. [۵] یک چندجمله‌ای از درجهٔ n که مجموعهٔ ژولیای آن با یک بازه همسان‌ریخت باشد به طور خطی با $\pm f_n$ مزدوج است.

حال اگر به قرینهٔ نمودار چندجمله‌ای‌های چبیشف نسبت به محور حقیقی x توجه کنیم، خانوادهٔ دیگری از چندجمله‌ای‌های حقیقی حاصل می‌شوند که نمودار آن‌ها در شکل ۳ نشان داده شده است. این چندجمله‌ای‌ها می‌توانند با رابطهٔ بازگشتی زیر تعریف شوند.

$$
\begin{aligned}
h_{۰}(x) &= -۲ \\
h_{۱}(x) &= -x \\
h_n(x) &= xh_{n-۱}(x) - h_{n-۲}(x) \quad \forall n \geq ۲
\end{aligned}
$$

در واقع، $h_n = -f_n$.



شکل ۳: نمودار خانواده h_n به ازای $n = ۲, ۳, ۴$.

این خانواده که به جز در حالت $n = ۰, ۱$ با استفاده از همان رابطهٔ بازگشتی ارائه شده در بخش ۱ تعریف می‌شود، ویژگی‌هایی مشابه چندجمله‌ای‌های چبیشف حقیقی دارند و حتی در بعضی ویژگی‌ها مشترک هستند.

- $h_n^{-۱}(I) = I = h_n(I)$
- چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد در نقاطی به طول ۲ و ۲− خط $y = -x$ را قطع می‌کنند و نمودار آن‌ها نسبت به مبدا متقارن است. چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج در نقطه‌ی به طول ۲ خط $y = -x$ را قطع می‌کنند و نمودار آن‌ها نسبت به محور y متقارن است.
- چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد، نگاشت‌هایی فرد و چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج، نگاشت‌هایی زوج هستند.
- هر چندجمله‌ای از درجهٔ $n \geq ۲$ در این خانواده، دارای n نقطه‌ی ثابت متمایز و $n - ۱$ نقطهٔ بحرانی متمایز است که همگی این نقاط بحرانی تحت h_n به ۲ یا ۲− نگاشته می‌شوند.

برای nهای زوج،

$$h_n^k = -f_n^k \qquad \forall k \geq ۱$$

و برای n های فرد،

$$\begin{aligned} h_n^{۲k+۱} &= -f_n^{۲k+۱} && \forall k \geq ۰ \\ h_n^{۲k} &= f_n^{۲k} && \forall k \geq ۱ \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $n \geq ۲$ آشوبناک بودن h_n اثبات می‌شود.

با توجه به خواص این خانواده از نگاشت‌های حقیقی، خانواده‌ی چندجمله‌ای‌های مختلط زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{۰\}$. خانوادهٔ نگاشت‌های چندجمله‌ای زیر را که با رابطهٔ بازگشتی زیر تعریف می‌شوند، خانوادهٔ شبه چبیشف می‌نامیم.

$$\begin{aligned} g_۰(z) &= \frac{۲}{\alpha} \\ g_۱(z) &= -z \\ g_n(z) &= -\alpha z g_{n-۱}(z) - g_{n-۲}(z) \quad \forall n \geq ۲ \end{aligned}$$

در حالت خاص اگر قرار دهیم $\alpha = -۱$ آن گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $n \geq ۲$، $g_n(x) = h_n(x)$.

با استقرا به راحتی می‌توان نشان داد

$$\alpha g_n(z) = (-۱)^n f_n(\alpha z)$$

در واقع داریم

$$\varphi \circ g_n = (-۱)^n f_n \circ \varphi$$

که در آن $\varphi(z) = \alpha z$. بنابراین اگر n زوج باشد g_nها با f_n ها و اگر فرد باشد با $-f_n$ها مزدوج هستند.

توجه کنید که اگر در تعریف فوق به جای $g_۱(z) = -z$ قرار دهیم $g_۱(z) = z$ و رابطهٔ بازگشتی را به صورت

$$g_n(z) = \alpha z g_{n-۱}(z) - g_{n-۲}(z)$$

تغییر دهیم، آن گاه تحت نگاشت تزویج $\varphi(z) = \alpha z$، g_nها فقط با f_nها مزدوج هستند.

با محاسباتی سرراست خواص زیبای زیر برای چندجمله‌ای‌های شبه چبیشف ثابت می‌شود.

۱. $g_n(-z) = (-1)^n g_n(z)$ و $g_n^k(-z) = (-1)^n g_n^k(z)$.
توجه کنید که ترکیب توابع زوج، تابعی زوج و ترکیب توابع فرد، تابعی فرد است.

۲. برای هر k و هر $n \geq k$، $g_n \times g_k = \frac{1}{\alpha}\{g_{n+k} + g_{n-k}\}$.

۳. برای هر k و هر n، $g_k \circ g_n = (-1)^k g_{kn}$.

۴. $g_k \circ g_n = (-1)^{k+n} g_n \circ g_k$.

در گزارهٔ زیر، رابطهٔ تکرارهای نگاشت چبیشف و شبه چبیشف بیان می‌شود.

گزاره ۱. برای هر $k \geq 1$ و $n \geq 0$

$$f_n^k(\alpha z) = \begin{cases} (-1)^n \alpha g_n^k(z) & \text{اگر } k \text{ فرد باشد} \\ \alpha g_n^k(z) & \text{اگر } k \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

در نتیجه

$$|f_n^k(\alpha z)| = |\alpha||g_n^k(z)|$$

بنابراین $z \in \mathcal{K}(g_n)$ اگر و فقط اگر $\alpha z \in \mathcal{K}(f_n)$. به عبارت دیگر نشان داده‌ایم:

قضیه ۳. برای هر $n \geq 2$، $\mathcal{J}(g_n) = \alpha^{-1} I$ یعنی مجموعهٔ ژولیای نگاشت‌های شبه چبیشف نیز یک بازه است.

توجه کنید اگر به جای $\varphi(z) = \alpha z$ از نگاشت $\varphi(z) = \alpha z + \beta$ استفاده کنیم و بخواهیم حداقل رابطهٔ $\varphi \circ g_n = f_n \circ \varphi$، برای هر $n \geq 0$ برقرار شود در این صورت لزوماً خواص ۱ تا ۴ که در بالا ذکر شد برقرار نیست. به عنوان مثال چندجمله‌ای‌های درجهٔ فرد لزوماً نگاشت‌هایی فرد و یا چندجمله‌ای‌های درجهٔ زوج لزوماً نگاشت‌هایی زوج نیستند و نمی‌توان بین $g_n \circ g_k$ و $g_k \circ g_n$ رابطه برقرار نمود. هرچند که مجموعهٔ ژولیای g_n نیز یک بازه است. در واقع مجموعهٔ ژولیای g_n تصویر بازهٔ I تحت نگاشت تزویج φ^{-1} است.

مراجع

[1] A. F. Beardon, Iteration of rational functions, Springer-Verlag, New York (2000).

[2] L. Carleson and T. W. Gamelin, Complex dynamics, Springer-Verlag. New York (1993).

[3] R. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, 2nd. ed., Addison-Wesley (1989).

[4] J. Milnor, Dynamics in one complex variable, Introductory lectures, Third edition, Princeton Univ. (2006).

[5] J. Milnor, Pasting together Julia sets: A worked out example of mating, Experimental Mathematicas **13** (2004) 55-92.

منیره اکبری، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، akbari@srttu.edu

مریم ربیعی، دانشگاه الزهرا، mrabii@alzahra.ac.ir