فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۲۹ تا ۴۰

نمایش‌های گروه و آنالیز هارمونیک از اویلر تا لانگلندز (بخش اول)*

آنتونی دبلیو. ناپ

مترجم: احمد صفاپور

نمایش‌های گروه و آنالیز هارمونیک نقش حساسی در مباحث متنوعی چون نظریه‌ی اعداد، احتمال و ریاضی فیزیک ایفا می‌کنند. قضیه‌ی نظریه‌ی نمایش لانگلندز عنصری اساسی در کار وایلز روی آخرین قضیه‌ی فرما بود و نظریه‌ی نمایش چهارچوبی برای پیش بینی وجود کوارک‌ها فراهم کرد. نمایش‌های گروه چه هستند؟ چرا آن‌ها در ریاضیات این چنین فراگیر هستند و منشأ نظریه‌ی آن‌ها کجاست؟

بسط‌های حاصل ضربی اویلر

همانند بسیاری از شاخه‌های ریاضیات جدید، منشأ نظریه‌ی نمایش گروه و آنالیز هارمونیک برخی از ریشه‌های خود را از کارهای اویلر می‌گیرد. در ۱۷۳۷ اویلر آنچه را ویل در [۴] «کشف اساسی» می‌نامد به دست آورد به این معنی که از تابعی که ما امروزه آن را تابع زتای ریمان، $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ می‌شناسیم آغاز کرد و پی برد که می‌توان این مجموع را به صورت حاصل ضربی به شکل

$$\zeta(s) = \prod_{p\ prime} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad (1)$$

*) این مقاله ترجمه‌ای است از

Group Representations and Harmonic Analysis from Euler to Langlands, Part 1, Notices of AMS, Volume 43, No.4, April 1996, pp 410-415

تألیف Anthony W. Knapp استاد ریاضی دانشگاه ایالتی نیویورک (Stony Brook). آدرس پست الکترونیک او چنین است: aknapp@ccmail.sunysb.edu

برای $s > ۱$ نوشت. در واقع اگر عامل‌های $(۱ - p^{-s})^{-۱}$ در سمت راست (۱) به سری هندسی $۱ + p^{-s} + p^{-۲s} + \cdots$ بسط داده شوند آن گاه حاصل ضرب عامل‌ها برای $p \leq N$ حاصل جمع آن جملاتی به شکل $\frac{۱}{n^s}$ است که در آن n تنها توسط اعداد کوچک‌تر یا مساوی با N عاد می‌شود؛ بنابراین با حدگیری رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید.

اویلر به خوبی می‌دانست که مجموع مربوط به $\zeta(s)$ از انتگرال

$$\int_۱^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{۱}{s-۱}$$

بزرگ‌تر است. این عبارت زمانی که s به ۱ میل می‌کند بی‌کران می‌شود اما حاصل ضرب (۱) نمی‌تواند بی‌کران باشد مگر این که تعداد عامل‌ها نامتناهی باشد. بنابر این (۱) اثبات جدیدی از قضیه‌ی اقلیدس فراهم ساخت که بیان می‌کند نامتناهی عدد اول وجود دارد. در واقع (۱)، هم چنان که اویلر مشاهده کرد، قضیه‌ی بهتری را نتیجه می‌دهد که می‌گوید $\sum \frac{۱}{p}$ واگراست.

اویلر بعداً از این قضیه نتیجه گرفت که نامتناهی عدد اول به شکل $۴n + ۱$ و نیز نامتناهی عدد اول به شکل $۴n + ۳$ وجود دارد و در واقع داستان آنالیز هارمونیک از همین جا آغاز می‌شود. برای درک این که چرا تحلیل فوق با چنین حالت‌هایی سروکار ندارد بهتر است جزئیات بیشتری از این که چگونه $\sum \frac{۱}{p}$ وارد مباحث فوق می‌شود را مشاهده کنیم. بررسی بسط‌های سری توانی توابع نمایی نشان می‌دهد که برای $۰ < x < ۱$،

$$\log(۱ + x) < x < \log(\frac{۱}{۱ - x}).$$

به سادگی می‌توان دید که اگر $۰ < x \leq \frac{۱}{۲}$ مقدار سمت راست از دو برابر مقدار سمت چپ بزرگ‌تر نیست. لذا زمانی که s به ۱ میل می‌کند از (۱) نتیجه می‌شود که

$$\log \zeta(s) = \sum_{p\ prime} \frac{۱}{p^s} + \text{عبارتی کران دار}. \qquad (۲)$$

ضمناً ضرب سری مربوط به $\zeta(s)$ در ۲^{-s} جملات با اندیس زوج این سری را باز تولید می‌کند و لذا

$$(۱ - \frac{۱}{۲^s})\zeta(s) = ۱ + \frac{۱}{۳^s} + \frac{۱}{۵^s} + \cdots, \qquad (۳a)$$

و

$$(۱ - \frac{۲}{۲^s})\zeta(s) = ۱ - \frac{۱}{۲^s} + \frac{۱}{۳^s} - \frac{۱}{۴^s} + \frac{۱}{۵^s} - \cdots, \qquad (۳b)$$

سمت چپ $(۳b)$ وقتی s به ۱ میل می‌کند برابر است با حاصل ضرب $(s - ۱)\zeta(s)$ در چیزی که به $\log ۲$ میل می‌کند. اویلر آزمون لایپ نیتز برای همگرایی را می‌دانست و می‌توانست ببیند که سری

سمت راست $(\text{۳}b)$ به ازای $s > \text{۰}$ به یک مقدار مثبت همگراست. در نتیجه $\zeta(s)$ در نزدیکی $s = \text{۱}$ حاصل ضرب $(s - \text{۱})^{-\text{۱}}$ و تابعی با حدی متناهی و ناصفر است. ترکیب این نتیجه با (۲) زمانی که s به ۱ نزول می‌کند نشان می‌دهد که

$$\sum \frac{\text{۱}}{p^s} = \log \frac{\text{۱}}{s-\text{۱}} + \text{عبارتی کران دار} \tag{۴}$$

در کار کردن با اعداد اول هم نهشت با ۱ یا ۳ به پیمانه ۴، جالب خواهد بود که در بحث فوق به جای مجموع $\frac{\text{۱}}{p^s}$ ها روی تمام اعداد اول، مجموع‌های

$$\sum_{p\equiv \text{۱}(mod \text{۴})} \frac{\text{۱}}{p^s} \qquad \text{یا} \qquad \sum_{p\equiv(\text{۳}mod \text{۴})} \frac{\text{۱}}{p^s} \tag{۵}$$

را جانشین کنیم و مشاهده نماییم که چه اتفاقی می‌افتد. آنچه اتفاق می‌افتد این است که بسط حاصل ضرب متناظر با $(\text{۱} - p^{-s})^{-\text{۱}}$ به صورت یک مجموع، چیزی را که قابل اداره کردن باشد ارائه نمی‌کند. ایده‌ی کلیدی جدید اویلر کار کردن با مجموع و تفاضل دو عبارت در (۵) به جای کارکردن جداگانه با هر یک از آن ها و در پایان بازیابی مجدد هر دوی آن‌ها بود. این آنالیز هارمونیک تکوین یافته روی یک گروه دو عنصری است.

جوهر آنالیز هارمونیک عبارت از تجزیه‌ی عبارات پیچیده به قطعاتی است که ساختار یک عمل گروه را، زمانی که چنین عملی وجود داشته باشد منعکس کند. هدف، رام کردن یک آنالیز مشکل است. با بازگشت به عقب با استدلال اول به عنوان یک الگو، اویلر دو سری مناسب با بسط‌های حاصل ضربی کشف کرد. سری اول عبارت بود از

$$(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}^s})\zeta(s) = \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}^s} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}^s} + \frac{\text{۱}}{\text{۷}^s} + \cdots$$

$$= \sum_{\text{۱}}^{\infty} \frac{\chi^+(n)}{n^s} = \prod_{p\ prime} \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \chi^+(p)p^{-s}}\ , \tag{٦}$$

که در آن $\chi^+(n)$ برای n های زوج ۰ و برای n های فرد ۱ است. سری دوم عبارت بود از

$$L(s) = \text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۳}^n} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}^n} - \frac{\text{۱}}{\text{۷}^n} + ... = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{\chi^-(n)}{n^s}$$

$$= \prod_{p\ prime} \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \chi^-(p)p^{-s}} \tag{۷}$$

که در آن $\chi^-(n)$ برای nهای زوج برابر ۰، برای $n \equiv \text{۱}$ به پیمانه ۴ برابر ۱ و برای $n \equiv \text{۳}$ به پیمانه ۴ برابر ۱− است. لگاریتم $\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\chi(p)p^{-s}}$ تقریباً برابر است با $\chi(p)p^{-s}$ حتی اگر $\chi(p)$ منفی

باشد. با لگاریتم گرفتن از فرمول حاصل ضرب در (٦) (یا به طور ساده با کپی کردن نتایج فرمول (۴)) زمانی که s به طور نزولی به ۱ میل می‌کند، نتیجه می‌شود

$$\text{مجموع جملات (۵)} = \log \frac{1}{s-1} + \text{عبارتی کراندار} \qquad (8)$$

کاربرد آزمون لایپ نیتز در مورد سری (۷) نشان می‌دهد که $L(s)$ به ازای $s > 0$ همگرا و به ویژه در $s = 1$ متناهی است. به علاوه این آزمون نشان می‌دهد که $L(1) > 0$. در نتیجه لگاریتم گرفتن از فرمول حاصلضرب در (۷) نتیجه می‌دهد

$$\text{تفاضل جملات (۵)} = \text{عبارتی کراندار} \qquad (9)$$

مقایسه‌ی روابط (۸) و (۹) نشان می‌دهد که هر یک از سری‌های موجود در (۵) زمانی که s به ۱ نزول می‌کند بیکران است. بنا بر این تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد که به پیمانه ۱ با ۴ همنهشت‌اند و همچنین تعداد نامتناهی عدد اول همنهشت با ۳ به پیمانه‌ی ۴ وجود دارد.

نقش گروه در حاصل ضرب‌های اویلر

گروه کجاست و نقش آن چیست؟ ویژگی دو تابع χ^+ و χ^- (هر دوی آن‌ها را χ می‌نامیم) که اجازه می‌دهد مجموع های موجود در (٦) و (۷) به صورت حاصل ضرب نوشته شود این است که به ازای هر دو عدد صحیح و مثبت m و n ، $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$. امروزه چنین توابعی را کاراکترهای دیریکله به پیمانه‌ی ۴ می‌نامند. می‌توانیم χ^+ و χ^- را به عنوان انتقال‌های صحیح توابع روی گروه ضربی $\{1, 3\}$ از اعداد صحیح به پیمانه‌ی ۴ و اول نسبت به ۴ که در آن ۰ به عنوان مقدار روی اعداد صحیح غیر اول نسبت به ۴ به کار میرود در نظر بگیریم. دو تابعِ روی گروه $\{1, 3\}$ عبارتند از

$$\omega^+(1) = \omega^+(3) = 1$$

و

$$\omega^-(1) = +1, \omega^-(3) = -1.$$

این توابع ω روی این گروه دو عنصری، کاراکترهای ضربی هستند، یعنی همریختی‌هایی به گروه ضربی اعداد مختلط غیر صفرند در عین حال و تنها کاراکترهای ضربی برای این گروه هستند. این توابع پایه‌ای برای فضای برداری مختلط تمام توابع مختلط مقدار روی این گروه دو عنصری تشکیل می دهند. اساساً اویلر دو تابع برای مطالعه در اختیار داشت، توابع مشخصه زیرمجموعه‌های یک عضوی از این گروه:

$$I_1(1) = 1, I_1(3) = 0 \quad \text{و} \quad I_3(1) = 0, I_3(3) = 1$$

Leonhard Euler

سری‌های در دست مطالعه در (۵) را می‌توان به صورت

$$\sum_{p\ prime} \frac{I_3(p)}{p^s} \quad , \quad \sum_{p\ prime} \frac{I_1(p)}{p^s}$$

نمایش داد. اثبات اویلر به این دلیل موفق از کار درآمد که او توابع I_1 و I_3 را بر حسب کاراکترهای ضربی پایه یعنی به صورت

$$I_1 = \frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-) \quad , \quad I_3 = \frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-) \ ,$$

نوشت، در برخی محاسبات مربوط به هر یک از عبارات

$$\sum_{p\ prime} \frac{\omega^+(p)}{p^s} \quad , \quad \sum_{p\ prime} \frac{\omega^-(p)}{p^s}$$

به عنوان یک جمله‌ی بسط موفق شد، و سپس توابع خود را به صورت

$$\omega^+ = I_1 + I_2 \quad , \quad \omega^- = I_1 - I_2$$

بازسازی نمود. این فرآیند، فرآیند آنالیز هارمونیک است. اگر چه آنالیز هارمونیک موجود در این کار را می‌توان جبر خطی بدیهی در نظر گرفت، اما نکته این است که جبر خطی ابزاری برای بهره بردن از ساختار گروه است. این مثال به نوعی برای درک اصل اساسی بسیار ابتدایی است. در واقع

بیش از یک‌صد سال پیش دیریکله این پدیده را مشاهده نمود و قضیه‌ی خودش را درباره‌ی اعداد اول در یک تصاعد حسابی با استفاده از آن اثبات نمود.

آنچه که در بالا به عنوان کار اویلر بیان شد، فراتر از علایق تاریخی است. این کار زیربنای مستقیم بخش بزرگی از پژوهش‌های جاری در نظریه‌ی جبری اعداد و شامل مدخل نظریه‌ی نمایشی از برنامه‌ی لانگلندز به سوی آخرین قضیه‌ی فرماست. به علاوه این کار بر این اصل صراحت دارد که اگر چه ممکن است آنالیز هارمونیک در قلب حل یک مسأله جای داشته باشد اما در عین حال ممکن است لایه‌های متعددی از ایده‌های ابتکاری بین صورت مسأله و استفاده از آنالیز هارمونیک قرار داشته باشند.

کاراکترهای ضربی از ۱۷۳۷ تا حدود ۱۸۰۷ نقش بسیار اساسی در ریاضیات ایفا کردند. کرامر در ۱۷۵۰ دترمینان را تعریف و با معرفی علامت جایگشت اثباتی از آن چه که ما امروزه آن را دستور کرامر می‌نامیم، ارائه نمود. علامت یک جایگشت یک کاراکتر ضربی روی گروه جایگشت‌های n حرف است و دترمینان کاراکتری ضربی روی ماتریس‌های نامنفرد با اندازه ثابت است. اما مفهوم هارمونیکی این کاراکترها در کارهای کرامر هیچ نقشی ایفا نکرد. گاوس، در توسعه‌ی کارهای اویلر با نمایش اعداد صحیح به شکل صورت‌های درجه دوم دودویی، مفهوم خودش از کاراکتر را معرفی کرد، مفهومی که امروزه آن را کاراکتر دیریکله می‌نامیم. اما در کار وی هم آنالیز هارمونیک وارد نشد.

سری‌های فوریه

پیشرفت بزرگ بعدی در زمینه‌ی نمایش گروه موضوع سری‌های فوریه بود. آن چه که در اینجا می‌آوریم برگرفته از گراتان ــ گینس[1] در [۱] است. در ۱۷۴۷ دالامبر کار خود درباره‌ی مسأله‌ی فنر مرتعش را ارائه کرد: او معادله‌ی دیفرانسیل

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

را پیدا کرد، شرایط اولیه را مشخص نمود و جواب $y = \frac{1}{2}(f(x+ct)) + f(x-ct))$ را به دست آورد. اگر چه اویلر در ۱۷۴۸ توابع مثلثاتی را به عنوان نمونه‌هایی از جواب‌های این معادله معرفی کرد اما تا زمانی که دالامبر در ۱۷۵۰ روش جداسازی متغیرها را برای پیدا کردن جواب‌های معادلات با مشتقات جزئی معرفی نکرد کسی نپذیرفت که چنین توابعی را می‌توان به حالت‌های کلی تعمیم داد. دانیل برنولی با استدلالی فلسفی بیان کرد که سری‌های مثلثاتی سینوسی باید برای بیان تمام جواب‌های معادله کافی باشند اما اویلر این نظریه را با استدلال فلسفی دیگری رد کرد.
پژوهش در مورد سری‌های مثلثاتی در مدت باقی مانده از قرن هجدهم پیشرفت اندکی داشت. در ۱۷۷۷ اویلر برهان الهام بخش و معروف خود را برای ضرایب فوریه کشف کرد، این که این ضرایب

1) Grattan-Guinness

Joseph Fourier

را می‌توان با ضرب یک بسط مثلثاتی در یک سینوس یا کسینوس و سپس انتگرال‌گیری جمله به جمله به دست آورد، اما این اثر تا ۱۷۹۸ منتشر نشد. در ۱۷۹۹ پارسوال فرمولی برای مجموع مربعات ضرایب یک سری مثلثاتی بر حسب انتگرال‌ها منتشر کرد؛ فرمول او به طرز قابل قبولی به آن چه ما امروزه آن را فرمول پارسوال می‌نامیم نزدیک است.

سپس فوریه وارد شد، کسی که به انتشار گرما علاقه‌مند بود. فوریه معادله‌ی گرما را به دست آورد، در حالت‌هایی که با استفاده از جداسازی متغیرها می‌توان تحقیق نمود مطالعه‌ی سازمان یافته‌ای انجام داد، دیدگاه خودش در مورد مسأله‌ی تار مرتعش را ارائه کرد، آنچه را ما امروزه به نام سری فوریه می‌شناسیم معرفی کرد، و قابل نمایش بودن توابع ناپیوستهٔ معینی را با چنین سری‌هایی ثابت کرد و همه‌ی این‌ها را در مقاله‌ای در سال ۱۸۰۷ ارائه نمود. این مقاله مورد انتقادهای فراوانی قرار گرفت ، به ویژه از سوی لاگرانژ و پواسون، و از انتشار باز ماند. در اصل انتقادات مبتنی بر این بودند که نتایج فوریه با دیدگاه شهودی غالب در مورد توابع ناسازگار است. تصور بر این بود که توابع دارای ماهیت جبری هستند. اگر قرار بود مجموع سری مثلثاتی $sinx - \frac{۱}{۲}sin۲x + \frac{۱}{۳}sin۳x - \cdots$ تابعی مانند $x\frac{۱}{۲}$ روی بازه $(-\pi, \pi)$ باشد، ماهیت جبری حد باید حد را وادار می‌کرد که همه جا برابر با $x\frac{۱}{۲}$ باشد، و درنتیجه این حد نمی‌توانست متناوب باشد، که یک تناقض است. فوریه در ۱۸۱۱ مقاله‌ی بازبینی شده‌ای را که شامل عناصر اصلی مقاله ۱۸۰۷ بود و همچنین فرمول معکوس تبدیل فوریه را در برداشت، برای چاپ ارسال کرد و برنده‌ی جایزه شد. اما انتشار نسخه‌ی تجدید نظر شده نیز متوقف شد. سرانجام کار فوریه در سال ۱۸۲۲ در کتاب برجسته‌اش Théorie analytique de la chaleur انتشار یافت.

حل مسأله‌ی تار مرتعش شامل سری‌های سینوسی فوریه بود. در این حل هیچ گروهی از

تقارن‌ها وجود نداشت، و این کار هیچ نشانه‌ای از آنالیز هارمونیک و نمایش‌های گروه در بر نداشت. در عوض این مثال انگیزه‌ی نظریه‌ی اشتورم ـ لیوویل بود که در ۱۸۳۶ شروع شد. به همین طریق، کار فوریه در مورد معادله گرما به طور خود به خودی هیچ گروهی را به همراه نداشت. یک گروه تنها در مثال‌هایی که تقارن‌هایی دارد، بروز پیدا می کند. یکی از این مثال‌ها طوق است که تقارن دوار دارد. در مورد طوق، فوریه به سری‌هایی رهنمون شد که شامل سینوس‌ها و کسینوس‌ها بود که امروزه معمولاً با توابع نمایی مختلط نوشته می‌شود:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \qquad (۱۱)$$

گروهی که پشت این فرمول قرار دارد گروه دایره‌ای $\mathbb{R}/۲\pi\mathbb{Z}$ است. توابع e^{inx} دقیقاً کاراکترهای (پیوسته) ضربی برای این گروه هستند، و (۱۰) این گمان را القا می‌کند که $f(x)$ باید بر حسب این توابع قابل بسط باشد. فوریه با آن چه که امروزه آن را به عنوان $L^۲$ ـ کمال[1] مجموعه‌ی متعامد $\{e^{inx}\}$ می‌شناسیم مشکل داشت و به همین دلیل او ترجیح داد برای پیدا کردن ضرایب c_n از روشی پیچده‌تر از (۱۱) استفاده کند. فوریه فرمول پارسوال

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^۲ dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^۲, \qquad (۱۲)$$

را با دستکاری سری‌ها، و مسلماً بدون مربوط کردن استدلال خود با مسألهٔ کمال، به دست آورد.

نگاه وینر[2] به آنالیز هارمونیک

بسط (۱۰) پس از جداسازی متغیرها در معادلات دیفرانسیل جزئی پدیدار می‌شود. باید یک عملگر دیفرانسیل معمولی D با نتیجه ۰ بر $f(x)$ اثر کند. این عملگر با انتقال‌های $\tau_x(y) = x + y$ به وسیله گروه دایره جابجا می‌شود. اگر ω یک کاراکتر ضربی باشد، آنگاه $(\tau_x\omega)(y) = \omega(x+y) = \omega(x)\omega(y)$، و داریم

$$D\omega(x+y) = (\tau_x D\omega)(y) = (D\tau_x\omega)(y) =$$
$$(D\omega(x)\omega)(y) = (D\omega)(y)\omega(x).$$

1) Completeness 2) Wiener

با قراردادن $y = \circ$ ملاحظه می‌کنیم که $D\omega$ مضربی از ω است. به عبارت دیگر عملگر دیفرانسیلی D هر کاراکتر ضربی را به مضربی از خودش تبدیل می‌کند، و اثر آن بر $f(x)$ عبارت است از ضرب ضرایب فوریه‌ی آن در ثابت‌های مختلف. نتیجه باید جمله به جمله ۰ باشد و شرایط لازم و کافی روی $f(x)$ را به دست می‌آوریم.

کار فوریه دلیل دیگری بر این اصل است که اگر چه ممکن است آنالیز هارمونیک در قلب راه حل مسأله‌ای جای داشته باشد اما ممکن است لایه‌های متعددی از ایده‌های خلّاقانه بین صورت مسأله و استفاده از آنالیز هارمونیک قرار گرفته باشد.

برای وینر [۵] در قرن بیستم، روش فوق در به کار بردن عملگرهای دیفرانسیلی با ضرایب ثابت عنصر اصلی آنالیز هارمونیک است. یک عملگر خطی T داریم که توابع متناوب را به توابع متناوب می‌برد و با انتقال‌ها جا به جا می‌شود. عملگر T باید e^{inx} را به مضرب خودش یعنی $b_n e^{inx}$ تبدیل کند، و ویژگی خطی بودن، فرمول

$$T\left(\sum c_n e^{inx}\right) = \sum b_n c_n e^{inx} \qquad (۱۳)$$

را روی چند جمله‌ای‌های مثلثاتی نتیجه می‌دهد. تحت شرط مناسب کرانداری یا بسته بودن گراف T، (۱۳) به تمام توابع در دامنه‌ی T تعمیم می‌یابد. بنابراین سری فوریه ابزاری برای درک عملگرهای خطی که با انتقال‌ها جابه جا می‌شوند فراهم می‌کند، یعنی گروه انتقال‌ها را به عنوان تقارن‌ها در نظر می‌گیرد.

کاربرد دیگری از کاراکترهای ضربی

مدت باقی مانده از قرن نوزدهم شاهد پیشرفت‌های اندک دیگری در آنالیز هارمونیک مرتبط با کاراکترهای ضربی بود. کوشی حین تحقیق در مورد امواج آب، کار کردن با جواب‌های انتگرالی معادلات دیفرانسیل جزئی را شروع کرد و در ۱۸۱۷ معادلات متقابل

$$f(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} g(x) cos(qx) dq$$

و

$$g(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} f(x) cos(qx) dx,$$

را منتشر کرد. مشخص نیست که آیا کوشی دستنویس فوریه مربوط به ۱۸۱۱ که حالتی از تبدیل معکوس فوریه برای تبدیل فوریه را در بر داشت رؤیت کرده بود یا نه. با نمادهای امروزی تبدیل فوریه و تبدیل معکوس فوریه غالباً به شکل

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-۲\pi ixy} dx \qquad (۱۴a)$$

و

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy \tag{14b}$$

نوشته می‌شود.

کار دیگری که در ارتباط با تبدیل فوریه در قرن نوزدهم انجام شد، فرمول جمع‌بندی پواسون است که به شکلی صوری دو تابع (۱۴) را توسط رابطه‌ی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n),$$

به یکدیگر مربوط می‌سازد و نیز شکل گیری تبدیل ملین[1] است که حالتی از تبدیل فوریه یا تبدیل فوریه ـ لاپلاس است که بااعداد حقیقی ضربی مثبت به جای اعداد حقیقی جمعی نوشته می‌شود. در کاربردی مهم، ریمان از فرمول جمع‌بندی پواسون در یکی از اثبات‌هایش از معادله‌ی تابعی برای تابع ζ استفاده کرد. (خود معادله تابعی منتسب به اویلر است.) اما کارهای نظری اساسی‌تر با تبدیل فوریه باید منتظر انتگرال لبگ می‌ماندند که دست آورد قرن بیستم است.

در ۱۸۴۰ دیریکله قضیه‌ی خود را منتشر کرد مبنی بر این که تصاعد حسابی $an+b$ که در آن a و b نسبت به هم اول‌اند و n روی اعداد صحیح مثبت تغییر می‌کند، شامل تعداد نامتناهی عدد اول است. اثبات این قضیه، تعمیمی از قضیه‌ی اویلر برای تصاعدهای $4n+1$ و $4n+3$ است که کاراکترهای ضربی ω روی گروه ضربی G از اعداد اول نسبت به a را به جای کاراکترهای ضربی روی گروه اعداد اول نسبت به ۴ قرار می‌دهد. به هر ω یک کاراکتر دیریکله χ به پیمانه‌ی a متناظر می‌کنیم که به عنوان ترفیع ω به اعداد صحیح تعریف می‌شود و مقدار آن روی اعداد صحیحی که نسبت به a اول نیستند ۰ تعریف می‌شود. به جای دو تابع (۶) و (۷) توابع L دیریکله یعنی

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \Pi_{p\ prime} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

مورد استفاده قرار می‌گیرند که هر کدام متناظر است با یک کاراکتر دیریکله χ به پیمانه‌ی a. آنالیز هارمونیک به روشنی شامل فرمول معکوسی برای کاراکترهای ضربی از این نوع است: اگر f تابعی مختلط مقدار روی G باشد، آن گاه

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\omega} \left[\sum_{y\in G} f(y)\overline{\omega(y)} \right] \omega(x). \tag{15}$$

عامل کلیدی دیگری در اثبات وجود دارد، و آنالیز هارمونیک در آن جا نیز حضور دارد، هر چند کمتر مشهود است. اثبات اویلر برای $a=4$ از این مطلب استفاده می‌کند که $L(1) \neq 0$، و دیریکله

1) Mellin

باید ثابت می‌کرد تمام توابع $L(s,\chi)$ در $s=۱$ ناصفر هستند. اثباتی از این ادعا با حاصل ضرب‌های تمام توابع L برای یک عدد ثابت a کار می‌کند و آن را به تابع ζ ی میدان تولید شده توسط اعداد گویا و $e^{۲\pi i/a}$ ربط می‌دهد؛ آنالیز هارمونیک در این یکی سازی نقش ایفا می‌کند. لذا صفر نشدن $L(s,\chi)$ در $s=۱$ وقتی نتیجه می‌شود که نشان دهیم تابع زتای این میدان در $s=۱$ یک قطب دارد.

بعدها ددکیند با کاراکترهای ضربی گروه (متناهی و آبلی) رده‌ی ایده‌آل[۱] حلقه‌ی اعداد صحیح جبری از یک میدان اعداد (توسیع متناهی اعداد گویا) کار کرد، و در ۱۸۸۲ وبر[۲] کاراکترهای ضربی برای یک گروه متناهی و آبلی دلخواه G را معرفی نمود. کاراکترهای ضربی G یک گروه $\hat{G}$ با عمل ضرب نقطه‌وار مقادیر آن‌ها تشکیل می‌دهند. کاراکترهای ضربی متمایز متعامدند به این معنی که $\sum_{x\in G}\omega(x)\overline{\omega'(x)}=\circ$ برقرار، و فرمول معکوس (۱۵) معتبر است.

کاراکترهای ضربی در به کار بردن یک گروه ناآبلی از تقارن‌ها چندان مفید نیستند. یک کاراکتر ضربی باید هر جا به جاگر $xyx^{-۱}y^{-۱}$ را به ۱ بفرستد. برای یک گروه که توسط جا به جاگرهایش تولید شده است، مثلاً یک گروه غیر آبلی ساده، نتیجه می‌شود که ۱ تنها کاراکتر ضربی است. برای این که بتوانیم آنالیز هارمونیک را در ارتباط با گروه‌های غیر آبلی به کار ببریم، باید تعمیمی چند بعدی از کاراکتر ضربی، یعنی نمایش گروه را ارائه دهیم. در بخش دوم نمایش‌های گروه و نقش آن‌ها در آنالیز هارمونیک را بررسی می‌کنیم.

مراجع

[1] I. Grattan-Guinness,. *Joseph Fourier, 1768-1830*, MIT Press, Cambridge, MA,1972.

[2] K.I. Gross, *On the evolution of noncommutative harmonic analysis*, Amer. Math. Monthly, **85**(1978), 525-545.

[3] G. W. Macky, *Hamonic analysis as the exploitation of symmetry,-a historical survey,* Rice Univ. Stud. **64**(1978), 73-228.

[4] A. Weil, *Number theory: An approach through history, from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston, MA, 1983.

[5] N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge Univ. Press, 1993.

1) ideal class group 2) Weber

مترجم: احمد صفاپور
گروه ریاضی دانشگاه ولی عصر رفسنجان
پست الکترونیک : safapour@mail.vru.ac.ir
ویراستار: محمد جلوداری ممقانی