فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۴ (بهار و تابستان ۱۳۹۳) صص. ۷۷ تا ۹۹

مروری بر نگاشت پوانکاره

ابوالحسن رزمی‌نیا

چکیده

یکی از ابزارهای مناسب در مطالعه سیستم‌های دینامیکی، نگاشت پوانکاره است که عمدتاً به دو دلیل مورد توجه است. یکی کاهش مرتبه سیستم پیوسته زمان و مطالعه آن سیستم در حوزه گسسته زمان و دیگری برقرار کردن ارتباط بین مجموعه‌های حدی سیستم اولیه با سیستم گسسته زمان کاهش یافته. در این مقاله با تعریف نگاشت پوانکاره برای انواع سیستم‌های خودگردان و ناخودگردان، به بحث‌هایی راجع به مجموعه‌های حدی نگاشت شده می‌پردازیم. در ادامه مثال‌هایی از کاربردهای این نگاشت توانمند ارائه می‌گردد.

کلید واژه‌ها: سیستم دینامیکی، مجموعه حدی، نگاشت پوانکاره، نگاشت پوانکاره از مراتب بالا.

مقدمه

به زبانی ساده یک سیستم دینامیکی از دو عامل تشکیل شده است:

۱ــ قاعده‌ای برای تولید حالت‌ها یا متغیرهای سیستم؛ این قاعده می‌تواند یک معادله دیفرانسیل، تفاضلی، انتگرالی، اپراتوری با ترکیبی از این نوع معادلات باشد،

۲ــ شرایط اولیه.

اگر معادله با قاعده توصیف کننده سیستم، یک معادله غیرخطی باشد ما آن را یک سیستم دینامیکی غیرخطی می‌نامیم[۱]. از بین انواع گوناگون قواعد توصیف سیستم‌ها، معادلات دیفرانسیل از جامعیت و کاربرد بیشتری برخوردار است به طوری که بسیاری از سیستم‌های فیزیکی کنونی با معادلات دیفرانسیل و انتگرال آغاز شده‌اند. در جریان رشد نظریه سیستم‌های دینامیکی، دو وجه این نظریه

۱) در بخش ۲ تعریف دقیقی از یک سیستم دینامیکی ارائه می‌شود.

به موازات، مورد توجه قرار گرفت: یکی مطالعات کیفی و دیگری مطالعات کمی. انگیزه معرفی این زمینه‌ها، بررسی حوادث واقعی پیرامونی بوده است. تلاش برای فهم و پیش‌بینی حرکت سیارات، لرزش و ارتعاش یک ریسمان، امواج روی سطح آب و پیش‌بینی وضع آب و هوا، فقط مثال‌های کوچکی از انگیزه‌های مطالعاتی نظریه سیستم‌های دینامیکی بوده است. از زمان نیوتن و اویلر تا همیلتون و ماکسول، کارهای زیادی برای کشف قانون جهان[1]، انجام گرفت، اما نتایج به دست آمده در مقابل آن همه تلاش، بسیار اندک و ناچیز بوده است. جالب است بدانید یکی از انگیزه‌های اصلی نیوتن برای کشف قانون جهان، اعتقادات مذهبی وی بوده است. نکته فرعی دیگری ذکر آن خالی از لطف نیست این است که با ورود نیوتن به دنیای علم، مرز شبه علم و علم به معنای امروزی تا حد زیادی روشن شد. به عبارت دیگر رنگ و بوی ریاضی دادن به مسائل طبیعت، از جمله گام‌های اساسی بود که نیوتن آن را به معنای کامل اجرا کرد.

در اواخر قرن نوزدهم، دانشمندان متوجه شدند بسیاری از معادلات دیفرانسیل غیرخطی دارای جواب‌های صریحی نمی‌باشند. مسئله برهم‌کنش سه جرم، یکی از این مسائل بود. استفاده از سری‌ها و دریافتن پاسخ این گونه معادلات پیچیده، یک ایده مناسب به نظر می‌رسید اما قادر نبود رفتار سیستم را برای بلندمدت پیش‌بینی نماید. پوانکاره با بررسی مسئله منظومه شمسی و آغاز برای حل مسئله پایداری برای این سیستم، نظریه سیستم‌های دینامیکی نوین را پایه‌گذاری کرد. در واقع پوانکاره از حل تحلیلی و مطالعه کمی این مسئله به بررسی کیفی و مطالعه خواص کیفی مسئله پایداری سیستم منظومه شمسی روی آورد. پوانکاره با نبوغ خود توانست ایده‌های زیادی در رابطه با این مقوله معرفی نماید به طوری که بسیاری از ایده‌ها و نظریات امروز در حوزه سیستم‌های دینامیکی و هندسه دیفرانسیلی مرهون کارهای پایه‌ای وی بوده است[*]. به عنوان مثال او مشاهده کرد برای یک سیستم قطعی[2] که نیروی خارجی آن متغیر با زمان نبوده و همچنین تصادفی نیز نیستند، می‌توان رفتارهای شبه تصادفی مشاهده کرد که ما امروزه آن‌ها را رفتارهای آشوبی[3] می‌نامیم. پیرو جدی کارها و ایده‌های پوانکاره، بیرکهف[4] بود. در واقع در سایه کارهای بیرکهف، برای نخستین بار رفتارهای حدی متعددی برای سیستم‌های دینامیکی معرفی شد و حتی عبارت سیستم‌های دینامیکی برای اولین بار در کتاب وی آورده شده است [۱]. افراد دیگری نیز در پیش‌برد نظریه سیستم‌های دینامیکی سهم به سزایی داشته‌اند که از جمله آن‌ها می‌توان به لیاپانوف، پونتریاگن، آندرونوف، موزر، اسمیل، پیزوتو، کولموگوروف، آرنولد، سینای، اورنز، مای، یورک، فایگن‌بام، رویی و تیکنز

---

*) یکی از مسائل سنگین در حوزه نظریه هندسی دیفرانسیلی که حدود یک قرن جامعه ریاضی‌دانان را درگیر خود کرده بود، مسئله حدس پوانکاره بوده است. بیان ساده این مسئله این است که هر منیفلد سه بعدی هم‌بند ساده بست با یک کره سه‌بعدی هم‌ریخت است. این مسئله به گمان بسیاری از اهالی فن سخت‌ترین مسئله صد سال اخیر بوده است. اما بالأخره گریشا پرلمن ریاضی‌دان روس توانست اثبات کاملی برای این مسئله ارائه دهد. یک نتیجه اخلاقی از این داستان این است که در بسیاری مواقع طرح یک سؤال خوب خیلی سخت‌تر از حل آن است.

1) World rule 2) Determinstic 3) Chaotic behaviors 4) Birkhoff

اشاره کرد. نظریه سیستم‌های دینامیکی به خصوص سیستم‌های آشوناک یکی از موفقیت‌های اساسی قرن بیستم به شمار می‌رود که مدیون کارهای عمیق و جدی بسیاری از دانشمندان از حوزه‌های مختلف بوده است. اهمیت این نظریه در گستردگی و کاربردی بودن آن در انواع زمینه‌ها از جمله مهندسی، فیزیک، ریاضیات، بیولوژی، اقتصاد، پزشکی و شیمی و بسیاری دیگر از زمینه‌های علوم طبیعی و انسانی است و بارها و بارها به نمایش گذاشته شده است. در این مقاله به بحثی مروری در باب مجموعه‌های حدی و ارتباط آن با نگاشت پوانکاره می‌پردازیم. برای این نگاشت کاربردهای فراوانی در ادبیات مهندسی کنترل و فیزیک کاربردی ارائه شده است. از جمله: پزشکی[۲]، لیزر[۳]، تیرهای کامپوزیتی[۴]، مهندسی کنترل[۵]، میدان و امواج الکترومغناطیسی[۶]، نوسانگرها[۷]، بدیهی است برای استفاده از این ابزار کارآمد در انواع زمینه‌های علوم و مهندسی، بایستی دید عمیقی نسبت به مبانی نظری این مقوله کسب گردد. در این مقاله سعی شده است با زبانی روان و در عین حال دقیق، به معرفی مبانی نظری نگاشت پوانکاره پرداخته شود. ساختار مقاله به قرار زیر است: در بخش ۲ مجموعه‌های حدی ناوردا معرفی می‌شود. در این بخش تعاریف اساسی و رفتارهای حدی مهم را معرفی خواهیم نمود. نگاشت پوانکاره و مسائل مربوطه و نحوه ارتباط آن با مجموعه‌های حدی ناوردا در بخش ۳ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نهایتاً در بخش ۴ نکات پایانی را ارائه خواهیم داد.

۲ مجموعه‌های حدی ناوردا

مجموعه‌های ناوردای حدی[۱] از نقطه نظر تحلیل رفتار مانای سیستم‌های دینامیکی، در تئوری سیستم‌های غیرخطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در واقع منظور از رفتار مانای یک سیستم وضعیت رفتاری سیستم در $t \longrightarrow \infty$ است. ما تمرکز اصلی خود را به سیستم‌هایی معطوف می‌کنیم که رفتار مانای کران‌داری داشته باشند. اختلاف بین رفتار مانا و کل رفتار یک مسیر را رفتارگذاری[۲] سیستم می‌نامیم. همان‌طوری که احتمالاً احساس می‌کنید این واژه‌ها از نظریهٔ سیستم‌های خطی وام گرفته شده‌اند جایی که اصل جمع آثار به معنای دقیق برقرار است. اما برای سیستم‌های دینامیکی غیرخطی وضعیت متفاوتی وجود دارد. در واقع، در سیستم‌های غیرخطی اصل جمع آثار برقرار نیست و بدین ترتیب ممکن است رفتارهای ماندگاری در این رده از سیستم‌ها ببینیم که در سیستم‌های خطی مشاهده نمی‌شوند.

تعریف ۱. **(سیستم دینامیکی)** سیستم‌های دینامیکی را عموماً به دو کلاس کلی تقسیم می‌کنند:

۱) سیستم‌های دینامیکی زمان پیوسته با قاعده:

$$\dot{x} = f(x, u, t), t \in I \subset R \qquad (۱)$$

1) Limit invariant sets 2) Transient behavior

۲) سیستم‌های دینامیکی زمان گسسته با قاعده:

$$x(k+1) = f(x, u, k), k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

که در آنها $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R^n}$ و $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R^p}$ و مجموعه‌های X و U مجموعه‌هایی باز هستند و $\mathbf{f} : X \times U \times I \longrightarrow X$ مبین یک نگاشت است. معمولاً رابطه (۱) را میدان برداری[1] و رابطه (۲) را یک نگاشت[2] می‌نامند. همچنین منظور از یک جواب برای رابطه (۱)، نگاشتی مانند $\mathbf{x}$ است که با دامنه و برد زیر مشخص می‌گردد:

$$\begin{aligned} &x : I \longrightarrow R^n \\ &t \mapsto x(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

جایی که $I \subset \mathbf{R}$. علاوه بر این، نگاشت باید در رابطه (۱) نیز صدق کند. همین تعریف برای سیستم‌های گسسته زمان نیز برقرار است.در روابط (۱) و (۲)، اغلب منظور از سیگنال یا تابع $\mathbf{u}$، سیگنال کنترل است.

به عنوان یک تعبیر هندسی از میدان برداری، می‌توان $\mathbf{x}$ را متعلق به فضایی دانست که در آن فضا، رابطه (۱) بیان‌گر شیب منحنی‌های آن فضا می‌باشند. این فضا اغلب با نام‌های فضای فاز[3] یا فضای حالت[4] می‌شناسند. بنابراین:

هدف ما از مطالعه سیستم‌های دینامیکی، بررسی و مطالعه ویژگی‌های منحنی‌های پاسخ در فضای حالت است

از میان همه پاسخ‌های موجود در فضای حالت، آن منحنی که از یک نقطه خاص که همان $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ می‌باشد، می‌گذرد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این مقدار را مقدار آغازین یا همان شرایط اولیه[5] می‌نامیم. گاهی اوقات برای نشان دادن وابستگی جواب‌ها به شرایط اولیه، ممکن است در شکل ضمنی پاسخ، این مقدار اولیه نیز گنجانده شود.

مفهوم دومی که بایستی در باب آن اندکی صحبت شود، مجموعه‌های ناورداست. در واقع به زبانی ساده منظور از یک مجموعه ناوردا مجموعه‌ای است که به ازای هر شرط اولیه از درون آن مجموعه، همه مسیر ناشی از آن در آینده و گذشته همچنان درون آن مجموعه واقع باشد. در ادامه مجموعه ناوردا را برای هر کدام از انواع سیستم‌های پیوسته زمان و گسسته زمان به طور جداگانه و به صورت رسمی معرفی می‌نماییم.

تعریف ۲. (مجموعه ناوردا) فرض کنید $S \subset \mathbf{R}^n$ یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت:

1) Vector field 2) Map 3) Phase space 4) State space 5) Initial conditions

- (پیوسته زمان) S را تحت میدان برداری $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ناوردا گویند هرگاه برای هر $\mathbf{x}_\circ \in S$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &\forall t \in R : x(t, \circ, x_\circ) \in S \\ &x(\circ, \circ, x_\circ) = x_\circ \end{aligned} \tag{۴}$$

- (گسسته زمان) S را تحت نگاشت $\mathbf{x}(k+۱) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$ ناوردا گویند هرگاه برای هر $\mathbf{x}_\circ \in S$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &\forall n \in Z : f^n(x_\circ) \in S \\ &x(\circ, \circ, x_\circ) = x_\circ \end{aligned} \tag{۵}$$

توجه نمایید در این تعریف اگر خود را فقط به زمان‌های مثبت محدود نماییم $(t \geq \circ, n \geq \circ)$ در این صورت مجموعه را مجموعه ناوردای مثبت می‌نامند. به طور مشابه مجموعه ناوردای منفی نیز قابل تعریف است.

تعریف ۳. فرض کنید $r \in \mathbf{N}$. برای سیستم دینامیکی با نگاشت معین $\mathbf{f}$ (برای هر دو مورد پیوسته و گسسته زمان)، مجموعه ناوردایی مانند $S \subset \mathbf{R}^n$ را یک C^rـمنیفلد ناوردا گویند اگر S دارای ساختار یک C^rـمنیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد.

تعریف ۴. فرض کنید $\varphi(t, \mathbf{x})$ شاری روی فضای متریک M باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند $\mathbf{y} \in M$ را یک نقطه ωـحدی $\mathbf{x} \in M$ برای $\varphi(t, \mathbf{x})$ می‌نامند اگر یک دنباله صعودی نامتناهی مانند $\{t_i\}$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} d(\varphi(t, x), y) = \circ \tag{٦}$$

مجموعه همه نقاط ωـحدی $\mathbf{x} \in M$ برای $\varphi(t, \mathbf{x})$ را مجموعه ωـحدی نامیده و با $\omega(\mathbf{x})$ نمایش می‌دهند. همان طور که این نماد نشان می‌دهد مجموعه ωـحدی به نقطه $\mathbf{x}$ بستگی دارد. تعبیر دیگری که می‌توان از ωـنقطه حدی ارائه داد بدین صورت است که نقطه $\mathbf{y} \in M$ را یک نقطه ωـحدی $\mathbf{x} \in M$ می‌نامیم هرگاه برای هر همسایگی دلخواه از $\mathbf{y}$، شار $\varphi(t, \mathbf{x})$ مرتباً به صورت مجانبی به این همسایگی وارد گردد.

در مقابل ωـنقاط حدی، مجموعه حدی دیگری موسوم به نقاط αـحدی تعریف می‌شود. در واقع تعریف این مجموعه مشابه تعریف نقاط ωـحدی است با این تفاوت که دنباله $\{t_i\}$ در

زمان‌های منفی و برای حد $i \longrightarrow \infty$ مورد نظر خواهد بود.

تعریف ۵. نقطه $\mathbf{x}_\circ$ را ناسرگردان[1] گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

- (پیوسته زمان) شارها: برای هر همسایگی U از نقطه $\mathbf{x}_\circ$ و $T > \circ$، وجود داشته باشد زمان‌هایی مانند t که $|t| > T$ به طوری که:

$$\varphi(t, U) \cap U = \phi \qquad (۷)$$

- (گسسته زمان) نگاشت‌ها: برای هر همسایگی U از نقطه $\mathbf{x}_\circ$، وجود داشته باشد $n \neq \circ$ به طوری که:

$$f^n(U) \cap U \neq \phi \qquad (۸)$$

مفهوم شهودی یک نقطه ناسرگردان این است که همواره بتوان اطمینان داشت اگر از اطراف این نقطه شروع به حرکت کنیم. حتماً پس از مدتی باز به این منطقه (اطراف نقطه آغاز) برگردیم. این بحث وجه تسمیه ناسرگردان بودن را روشن می‌کند. همچنین مجموعه همه نقاط ناسرگردان را مجموعه ناسرگردان یک شار یا نگاشت می‌نامند.

تعریف ٦. برای یک سیستم دینامیکی با نگاشت معین f، مجموعه ناوردای بسته $A \in \mathbf{R}^n$ را یک مجموعهٔ جاذب[2] گویند هرگاه همسایگی‌هایی مانند U از A وجود داشته باشند به طوری که:

- (پیوسته زمان) شارها: برای هر $t \geq \circ$، داشته باشیم: $\varphi(t, U) \subset U$ و $\bigcap_{i \geq \circ} \varphi(t, U)$.
- (گسسته زمان) نگاشت‌ها: برای هر $n \geq \circ$، داشته باشیم: $\mathbf{f}^n(U) \subset U$ و $\bigcap_{n \geq \circ} \mathbf{f}^n(U) = A$.

همان‌طور که از تعریف برمی‌آید، مفهوم شهودی یک مجموعه جاذب این است که همه مسیرهای شروع شونده از همسایگی آن مجموعه، اطراف آن نقطه بمانند و نهایتاً به خود مجموعه میل کنند. یک نتیجه فوری که در عمل استفاده از آن راحت‌تراست بدین صورت قابل بیان است: یک مجموعه ωـحدی مانند A جاذب است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد یک همسایگی باز مانند U از A به طوری که برای همه $\mathbf{x}$های عضو U داشته باشیم: $A(\mathbf{x}) = A$.

نکته مفید در باب مجموعه‌های جاذب این است مجموعه‌های غیرجاذب در شبیه سازی‌ها و سیستم‌های عملی فیزیکی قابل رؤیت نیستند. بنابراین در عمل ما عموماً با مجموعه‌های جاذب سر و کار داریم و همین نکته اهمیت مطالعه این دسته از مجموعه‌ها را در نظریه سیستم‌های دینامیکی دوچندان می‌کند.

1) Non-wandering 2) Attracting set

تعریف ۷. حوزه جذب[1] یک مجموعه جاذب مانند A به صورت زیر تعریف می‌گردد:

- (پیوسته زمان) شارها: $\bigcup_{t\leq 0}\varphi(t,U)$،
- (گسسته زمان) نگاشت‌ها: $\bigcup_{n\leq 0}\mathbf{f}^n(U)$.

که در آن‌ها U مجموعه‌ای است که در تعریف (۶) آورده شده است.
مفهوم شهودی حوزه جذب یک مجموعه جاذب این است: اجتماع همه نقاطی از فضای فاز که با شروع از آنها آخرالامر به مجموعه جاذبی مانند A میل می‌کنند. به عنوان یک نکته مهم توجه نمایید که حوزه جذب یک مجموعه جاذب یک مجموعه باز است.

نکته قابل توجه دیگر این است که تعاریف بالا از مجموعه‌ها و حوزه جذب اغلب برای سیستم‌های دینامیکی خودگردان استفاده می‌شوند. این مفاهیم برای سیستم‌های دینامیکی ناخودگردان معنای چندانی ندارند مگر اینکه با تبدیلی بتوان آن‌ها را با سیستم‌های خودگردانی تعدیل نمود. همچنین برای این که دیدی نسبت به مفاهیم فوق داشته باشیم، توجه کنید که رفتار حدی کران‌دار یک سیستم خطی یا یک رفتار پله‌گونه است یا یک رفتار سینوسی. همچنین حوزه جذب این حالات مانا، کل فضای حالت است. به عبارت دیگر حالت مانا مستقل از شرایط آغازین سیستم است. اما در سیستم‌های غیرخطی، وضع به کلی متفاوت است به طوری که رفتار آیندهٔ سیستم کاملاً به شرایط آغازین وابسته بوده و هر شرط آغازین می‌تواند به مجموعه‌های جاذب کاملاً متفاوتی بینجامد.

تعریف ۸. برای یک سیستم دینامیکی با نگاشتی معین، مجموعه ناوردای بسته A را متعدی توپولوژیکی[2] می‌نامند هرگاه برای هر دو زیرمجموعه بازی مانند U، $V\subset A$ داشته باشیم:

- (پیوسته زمان) شارها: وجود داشته باشد یک $t\in\mathbf{R}$ به طوری که: $\varphi(t,U)\cap V=\phi$،
- (گسسته زمان): نگاشت‌ها: وجود داشته باشد یک $n\in\mathbf{Z}$ به طوری که: $\mathbf{f}^n(U)\cap V=\phi$.

مفهوم شهودی یک مجموعه متعدی توپولوژیکی این است که اگر دو بخش از آن مجموعه را در نظر بگیریم، با شروع از هر کدام از این دو بخش، مسیر سیستم دینامیکی حداقل یک بار از بخش دیگر نیز بگذرد. به عبارت دیگر همه بخش‌های یک مجموعه متعدی، توسط مسیرهایی به هم متصل‌اند.

تعریف ۹. هر مجموعه جاذب متعدی توپولوژیکی را یک جذب کننده[3] می‌نامند.

توجه داشته باشید هر مجموعه جاذب لزوماً یک جذب‌کننده نیست. در واقع شرط تعدی توپولوژیکی برای یک جذب‌کننده ضروری است. به عبارت دیگر برای این که یک مجموعه بتواند جذب‌کننده باشد باید علاوه بر جاذب بودن، کاملاً در هم پیچیده (متعدی توپولوژیکی) باشد.

چهار نوع رفتار مانا برای سیستم‌های دینامیکی قابل رویت است که عبارتند از: نقطه تعادل،

1) Region of attraction 2) Topological transitive 3) Attracto

رفتار متناوب، رفتار شبه‌متناوب و رفتار آشوب‌ناک که در ادامه سه نوع رفتار اول را به اختصار مورد مطالعه قرار می‌دهیم و بحث رفتارهای مانای آشوب‌ناک را در مقاله‌ای دیگر مورد تدقیق قرار خواهیم داد.

نقطه تعادل

بحث مجموعه‌های ناوردا را با معرفی نقاط تعادل سیستم‌های دینامیکی پیوسته زمان به عنوان یک مجموعه ناوردای ساده آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱۰. نقطه $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbf{R}^n$ را یک نقطه تعادل[1] از سیستم $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ می‌نامیم هرگاه:

$$f(x^*) = 0 \qquad (۹)$$

بنابراین تعریف، نقطه تعادل، نقطه‌ای است که تغییرات زمانی نداشته باشد؛ یعنی به محض این که سیستم در فضای حالت به این نقطه برسد دیگر تغییرات زمانی نخواهد داشت چرا که $\dot{\mathbf{x}} = 0$.

تعریف نقطه تعادل برای سیستم‌های ناخودگردان بایستی با احتیاط بیشتری صورت گیرد. در زیر تعریفی بدین منظور ارائه می‌شود.

تعریف ۱۱. سیستم ناخودگردان $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ مفروض است که در آن $\mathbf{f} : \mathbf{K} \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ نسبت به t تکه‌ای پیوسته و روی $\mathbf{K} \times [0, \infty)$ نسبت به $\mathbf{x}$ لیپشیتز موضعی است. جایی که $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}^n$ حوزه‌ای است شامل $\mathbf{x} = 0$. بدین ترتیب مبداء را یک نقطه تعادل از این سیستم ناخودگردان در $t = 0$ گویند اگر برای همه $t \geq 0$ داشته باشیم:

$$f(t, 0) = 0 \qquad (۱۰)$$

توجه: البته در عمل این تعریف استفاده چندانی ندارد.

از نقطه نظر طیف فرکانسی، طیف یک نقطه برای سیستم‌های دینامیکی خودگردان، در واقع یک اسپایک ساده در نقطه صفر فرکانسی است. به زبان دقیق‌تر طیف $\varphi_t(\mathbf{x}^*)$ فقط شامل یک مولفه در فرکانس صفر است و این یعنی مولفه DC یک سیگنال. همچنین به صورتی شهودی به سادگی دیده می‌شود مجموعه حدی یک نقطه تعادل، خود نقطه تعادل است.

تعریف ۱۲. برای سیستم خودگردان گسسته زمان $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}((k))$ نقطه $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbf{R}^n$ را نقطه تعادل یا نقطه ثابت این سیستم می‌نامند هرگاه:

$$f(x^*) = x^* \qquad (۱۱)$$

۲.۲ رفتارهای متناوب

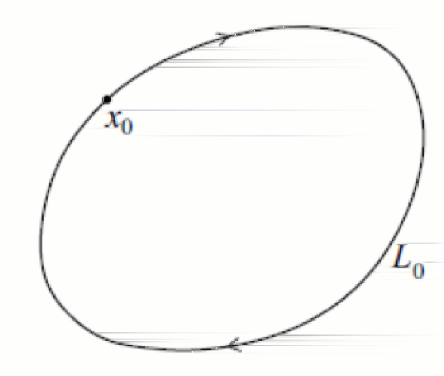
در ادامه دسته خاصی از سیستم‌ها را معرفی می‌کنیم که در مطالعه نوسان‌ها بسیار حائز اهمیت است.

---

1) Equilibrium

تعریف ۱۳. پاسخی مانند $\varphi(t, \mathbf{x}^*)$ از سیستم دینامیکی $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ که از نقطه $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbf{R}^n$ می‌گذرد را متناوب با دوره تناوب $T > ۰$ گویند هرگاه $\varphi(T, \mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. همچنین مجموعه $L_۰ = \{\varphi(t, \mathbf{x}^*) : t \in [۰, T]\}$ را که یک منحنی بسته در فضای حالت است را یک مدار متناوب می‌نامند.

مطابق تعریف، $T > ۰$ را دوره تناوب مدار متناوب می‌خوانند که دوره زمانی آن مسیر بسته را اندازه می‌گیرد. البته توجه داشته باشید منحنی‌های بسته ایزوله فقط در سیستم‌های غیرخطی دیده می‌شوند. به این دسته منحنی‌های بسته نام چرخه حدی تخصیص می‌دهند. در صورت وجود یک چرخه حدی برای یک سیستم دینامیکی خودگردان، آن چرخه حدی را پایدار ساختاری[۱] گویند اگر با یک تغییر جزئی در پارامترهای سیستم، سیستم از وضعیت چرخه‌ای خود خارج نگردد. البته برای سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان با پایداری مرزی نیز مسیرهای بسته‌ای در فضای حالت وجود دارد که این نوع مسیرهای بسته از این نظر که ایزوله نیستند نمی‌توان به آن‌ها چرخه حدی گفت مضاف بر اینکه یک تغییر جزئی در پارامترهای آن سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان می‌تواند پایداری مرزی آن سیستم را به هم بزند و بدین ترتیب مسیرهای بسته در این دست از سیستم‌ها، هرگز پایداری ساختاری نیستند. نمونه‌ای از یک مدار متناوب از یک سیستم خودگردان پیوسته زمان در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱. مدار متناوب در یک سیستم پیوسته زمان.

نکته حائز اهمیت در خصوص طیف فرکانسی رفتارهای متناوب و خصوصاً چرخه‌های حدی این است که طیف مربوطه شامل اسپایک‌هایی در فرکانس صفر و اسپایک‌هایی در مضارب صحیحی از فرکانس پایه $f = T^{-۱}$ می‌باشد. البته ممکن است برخی از این اسپایک‌ها دارای دامنه صفر باشند و چه بسا فرکانس پایه هم وجود نداشته باشد اما اگر اسپایکی در طیف فرکانسی دیده شود قطعاً در مضرب صحیحی از فرکانس پایه قرار گرفته است. با توجه به این نکته می‌توان به این نتیجه مهم

1) Structural stable

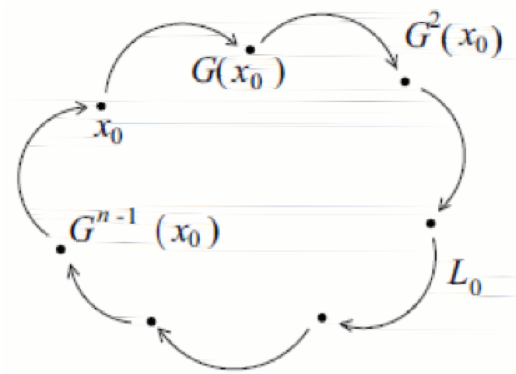
رسید که از روی اولین اسپایک غیرصفر یک سیگنال متناوب نمی‌توان دوره تناوب آن را محاسبه نمود بلکه باید به فاصله فرکانسی اسپایک‌ها نیز توجه کرد. به منظور کشف شهودی از مجموعه حدی یک رفتار متناوب فرض کنید $\mathbf{x}^*$ نقطه‌ای روی یک چرخه حدی نوعی باشد. البته توجه داشته باشید این نقطه دلخواه است. بدین ترتیب مجموعه حدی متناظر با این چرخه حدی عبارت است از منحنی بسته‌ای که توسط $\varphi_t(\mathbf{x}^*)$ روی یک دوره تناوب پیموده می‌شود. به زبانی دقیق، این مجموعه حدی نسخه دیفومورفیکی از دایره S^lاست. برای درک بهتر می‌توانید این مجموعه حدی را به صورت دایره‌ای تصور کنید.
مشابه تعاریف بالا برای یک سیستم گسسته زمان با معادله دینامیکی $\mathbf{x}(k+۱) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(k))$ یک مدار nـمتناوب به صورت مجموعه $\Theta_۰ = \{\mathbf{x}_۰, \mathbf{x}_۱, ..., \mathbf{x}_{n-۱}\}$ تعریف می‌شود که در آن برای هر زوج $i \neq j$ داریم $\mathbf{x_i} \neq \mathbf{x_j}$ به طوری که:

$$\begin{aligned} x_۱ &= G(x_۰) \\ x_۲ &= G(x_۱) \\ &\vdots \\ x_۰ &= G(x_{n-۱}) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

توجه داشته باشید هر نقطه از یک مدار nـمتناوب خود یک نقطه nـمتناوب است زیرا برای $k = ۰, ۱, ۲, ..., n-۱$ داریم:

$$\begin{aligned} & x_k = G^n(x_k); \\ & ۰ < j < n : G^j(x_k) \neq x_k \end{aligned} \tag{۱۳}$$

نمونه‌ای از یک مدار متناوب از یک سیستم گسسته زمان در شکل ۲ آورده شده است. از روی این شکل می‌توانید درک روشنی از مفهوم یک نقطه nـمتناوب است داشته باشید.



شکل ۲. نمونه‌ای از یک مدار متناوب گسسته زمان

تعریف ۱۴. مجموعه $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ را مدار بسته تناوب K[1] مربوط به نگاشت G می‌نامیم هرگاه برای $j = 1, 2, ...K - 1$ داشته باشیم: $y_{j+1} = G(y_j)$ و $y_1 = G(y_k)$.

تعریف ۱۵. شار $\varphi_t(t_0, \mathbf{x}^*)$ پاسخ متناوبی از سیستم ناخودگردان $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ است اگر برای همه زمان‌های t و برای برخی دوره‌های تناوب کمینه مانند $T > 0$ داشته باشیم:

$$\varphi_t(t_0, x^*) = \varphi_{t+T}(t_0, x^*) \tag{14}$$

هر وقت به وسیله تبدیلی یک سیستم ناخودگردان متناوب با دوره کمینه T_f را به یک سیستم خودگردانی تعدیل نماییم، پاسخ متناوب یک چرخه حدی روی یک استوانه خواهد شد. بنابراین دوره تناوب T مضرب صحیحی (مانند K) از دوره تناوب اولیه خواهد بود. در این صورت $\varphi_t(t_0, \mathbf{x}^*)$ را پاسخ Kـتناوبی می‌نامند. معمولاً برای $K = 1$، پاسخ را پاسخ پایه می‌نامند و برای $K > 1$ پاسخ‌ها را زیرهارمونیک مرتبه K می‌نامند.

شمائل طیفی یک پاسخ Kـتناوبی برای یک سیستم متناوب ناخودگردان بدین صورت است که یک اسپایک در فرکانس صفر و اسپایک‌های دیگر در مضارب صحیحی از $(KT_f)^{-1}$ قرار دارند. بدین ترتیب هر چه مرتبه زیرهارمونیک‌ها بزرگ‌تر باشد طیف فرکانسی به هم فشرده‌تر خواهند بود.

۳.۲ رفتار شبه متناوب

در ادامه به معرفی دسته سوم از رفتارهای سیستم‌های دینامیکی موسوم به رفتارهای شبه‌متناوب[2] است می‌پردازیم. ابتدا تعریف رسمی از آن‌ها را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۶. تابع $\eta : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^m$ را شبه متناوب گویند هرگاه بتوان آن را به شکل $\eta(t) = I(\omega_1 t, \omega_2 I, ..., \omega_m t)$ نوشت که در آن I یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π نسبت به هر کدام از آرگمان‌هایش است و حداقل دو تا از ω_iها نسبت به هم نامتناسب[3] باشند. منظور از نامتناسب بودن این است که نسبت دو مقدار، گویا نباشد.

یک تعبیر عملی‌تر از یک رفتار شبه متناوب بدین صورت است که تابعی مانند $\eta(t)$ را شبه متناوب می‌نامیم هرگاه بتوان آن را به صورت مجموع شمارش‌پذیری از تعدادی توابع متناوب به صورت زیر نوشت:

$$\eta(t) = \sum_j h_j(t) \tag{15}$$

که در آن تابع متناوب h_j دارای دوره تناوب T_j است. علاوه بر این بایستی مجموعه فرکانس‌های پایه‌ای مانند $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_b\}$ چنان وجود داشته باشد که:

---

1) Period $-K$ closed orbit 2) Quasi-periodic 3) Incommensurate

الف: این مجموعه مستقل خطی باشند،

ب: همه فرکانس‌های پایه مربوط به توابع h_j یعنی $f_j = T_j^{-1}$ را بتوان توسط این مجموعه ساخت.

به زبانی ساده یک شکل موج را شبه متناوب گوییم هرگاه مشتکل از تعدادی تابع متناوب باشد که فرکانس‌های این توابع به صورت مجموع و یا تفاضل‌هایی از یک مجموعه فرکانس پایه باشد. توجه شود که تعداد فرکانس‌های پایه یکتاست اما خود فرکانس‌های پایه می‌تواند هر مجموعه‌ای باشد مشروط به این که دو شرط بالا را تأمین نماید.

تعریف ۱۷. یک پاسخ شبه متناوب با تعداد b فرکانس پایه را پاسخ bـ متناوب می‌نامیم[۱].

برای درک بهتر، سیستم زیر را که متشکل از دو نوسان‌گر ساده است در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= 0 \\ \ddot{y} = \omega_2^2 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

که در آن $x, y \in X \subset \mathbf{R}$ و ω_1 و ω_2 ثابت‌های مثبتی هستند. این دو معادله را می‌توان در شکل فضای حالت به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_1^2 x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\omega_2^2 x_3 \end{aligned} \tag{17}$$

این نوع نمایش را می‌توان در قالب فرم قطبی به صورت زیر نیز نشان داد:

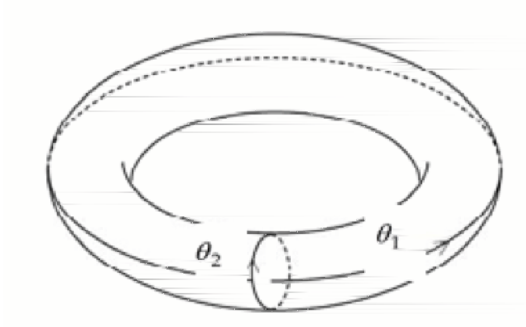
$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{r}_1 &= 0 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \\ \dot{r}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

که در آن θ_i و r_i $(i = 1, 2)$ به ترتیب زاویه و شعاع دایره نوسان هستند، دیده می‌شود. این دو نوسان‌گر در واقع بیان‌کننده نوعی حرکت روی یک چنبره[۲] با دو شعاع (r_1, r_2) هستند. شکل (۳) نمایشی از این حرکت است.

---

۱) توجه نمایید دو واژه مشابه تعریف کردیم: یکی پاسخ bـمتناوب و دیگری پاسخ Kـتناوبی. تفاوت در این است که اولی شبه متناوب و دومی متناوب است.

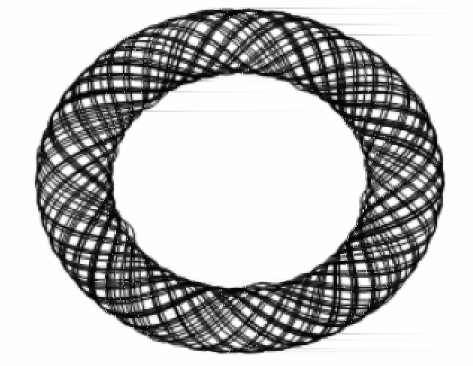
1) Torus



شکل ۳. حرکت نوعی روی یک چنبره دوبعدی

در واقع بسته به اندازه $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ دو نوع حرکت متفاوت برای این سیستم وجود دارد.

- ۱. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ عددی گویا باشد؛ در این حالت هر نقطه از چنبره بر روی یک مدار تناوبی با دوره تناوب q قرار دارد،
- ۲. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ عددی گنگ باشد؛ در این وضعیت با آغاز هر شرط اولیه روی چنبره، مسیر حالت به صورت سرگردان در تمام سطح چنبره می‌گردد، به طوری که به ازای هر نقطه روی چنبره مذکور، این مسیر به فاصله دلخواهی کوچک از کنار آن نقطه می‌گذرد بدون اینکه دقیقاً از نقطه بگذرد. در این وضعیت می‌گویند شار تولید شده توسط معادله (۱۸) روی چنبره مذکور به صورت توپولوژیکی متعدی[۱] است. شکل (۴) را ببینید.



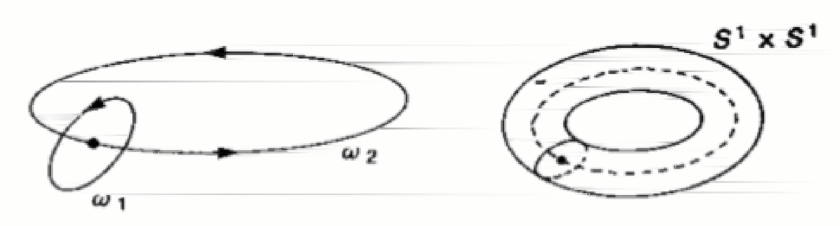
شکل ۴. نمونه‌ای از یک حرکت شبه‌متناوب روی یک چنبره

توجه نمایید در هر دو وضعیت برشمرده، دو نقطه نزدیک به هم، تحت نگاشت، همواره به هم نزدیک باقی می‌مانند.

1) Topologically transitive

از نقطه نظر طیف فرکانسی باید گفت طیف یک پاسخ شبه‌متناوب شامل یک اسپایک در فرکانس صفر و اسپایک‌های دیگر در kf_j است که در آن f_j فرکانس تابع متناوب h_j بوده و $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$. البته همانند وضعیت‌های قبلی، دامنه برخی از مؤلفه‌های فرکانسی ممکن است صفر باشد. توجه کنید از بعد نظری طیف فرکانسی یک شکل موج شبه‌متناوب با مرتبه بالاتر از دو، با شکل موج متناوب، تفاوت اساسی دارد بدین صورت که اسپایک‌های فرکانسی در طیف شبه متناوب به صورت مضارب صحیحی از یک فرکانس خاص مرتب نمی‌شوند. البته از آنجا که نمی‌توان گویا یا اصم بودن یک مقدار اندازه‌گیری شده را به صورت فیزیکی تشخیص داد، از روی طیف نیز نمی‌توان گفت یک شکل موج مربوط به شبه‌متناوب است یا متناوب. در واقع یک شکل موج ظاهراً شبه متناوب ممکن است شکل موج متناوبی با دوره تناوب بزرگ باشد.

همان‌طور که در مثال بالا دیدیم در یک سیستم خودگردان شبه‌متناوب ۲ ـ متناوب مسیرها روی یک مسیر چنبره‌گونه حرکت می‌کنند. این مجموعه‌های حدی را اصطلاحاً نسخه‌های دیفرومورفیکی از یک دو ـ چنبره $T^۲ = S^۱ \times S^۱$ می‌نامند که در آن هر کدام از دایره‌های $S^۱$ و $S^۲$ مشخص‌کننده رفتار با فرکانس $\omega_۱$ و $\omega_۲$ هستند. وضعیت مجزای این دو فرکانس در شکل ۵ آورده شده است. نکته ظریفی که باید به آن توجه شود این است که مسیرهای سیستم دینامیکی که بیان‌گر رفتار زمانی آن سیستم می‌باشند از نوع اشکال تک‌بعدی هستند در حالی که یک دو ـ چنبره شکلی دوبعدی است. بنابراین این مسیرها هرگز نمی‌توانند کل سطح چنبره را بپوشانند. اما هر مسیر می‌تواند به هر اندازه دلخواه به هر نقطه روی این چنبره مکرراً نزدیک شود که این همان تعریف مجموعه حدی است. بنابراین مجموعه حدی یک پاسخ شبه متناوب، یک چنبره است. برای پاسخ‌های شبه متناوب با تعداد فرکانس‌های پایه بیشتر، مجموعه حدی نسخه‌های تعمیم یافته‌ای از همین چنبره‌ها است که در بالا معرفی شد.



شکل ۵. رفتار ۲ ـ متناوب روی یک چنبره

۳. نگاشت پوانکاره

یکی از ابزارهای کلاسیک برای تحلیل سیستم‌های دینامیک، نگاشت پوانکاره است که به افتخار ریاضیدان فرانسوی هنری پوانکاره نام‌گذاری شده است. با زبانی ساده این نگاشت یک سیستم دینامیکی مرتبه n را به یک نگاشت گسسته زمان $(n - ۱)$ بعدی تبدیل می‌کند. در واقع این نگاشت

طوری تعریف می‌شود که یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌های حدی دینامیک پیوسته زمان و دینامیک گسسته زمان وجود دارد. در واقع اهمیت این نگاشت در دو نکته نهفته است.

۱ــ کاهش مرتبه سیستم دینامیکی،

۲ــ ارتباط دادن دو سیستم پیوسته زمان و گسسته زمان به صورتی یک به یک.

تعریف نگاشت پوانکاره برای سیستم‌های خودگردان و ناخودگردان متفاوت است. در ادامه هر کدام را به طور جداگانه معرفی خواهیم نمود.

۱.۳ نگاشت پوانکاره برای سیستم‌های ناخودگردان

یک سیستم ناخودگردان متناوب با دوره تناوب T با معادله $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که پیش از این هم توضیح دادیم، می‌توان این سیستم را با معرفی یک متغیر حالت مانند $\theta := \frac{۲\pi t}{T}$ به یک سیستم خودگردان تبدیل نمود. بنابراین دینامیک این سیستم ناخودگردان به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \frac{\theta T}{۲\pi}); x(t_۰) = x_۰ \\ \dot{\theta} &= \frac{۲\pi}{T}; \theta(t_۰) = \frac{۲\pi t_۰}{T} \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

از آنجا که میدان برداری $\mathbf{f}$ نسبت به زمان با دوره T متناوب است، شکل جدید آن نیز نسبت به θ با دوره ۲π متناوب خواهد بود. بدین ترتیب صفحات $\theta = ۰$ و $\theta = ۲\pi$ یکسان خواهند بود و فضای حالت از قالب فضای اقلیدسی $\mathbf{R}^{n+۱}$ به فضای استوانه‌ای $\mathbf{R}^n \times S^۱$ تبدیل خواهد شد که در آن $S^۱$ دایره واحد است. پاسخ ۱۹ در فضای استوانه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

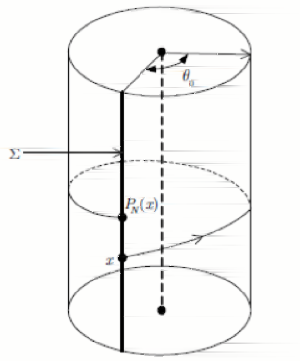
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_t(x_۰, t_۰) \\ \frac{۲\pi t}{T} mod ۲\pi \end{pmatrix} \qquad (۲۰)$$

حال ابرصفحه $\sum \in \mathbf{R}^n \times S^۱$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید:

$$\sum := \{(x, \theta) \in R^n \times S^۱ : \theta = \theta_۰\} \qquad (۲۱)$$

همان‌طور که می‌توان از شکل ٦ مشاهده نمود. هر T ثانیه، مسیر (؟؟) ابرصفحه $\sum$ را قطع خواهد کرد. این شکل برای یک سیستم ناخودگردان مرتبه اول رسم شده است. نگاشت نتیجه شده $P_N : \sum \longrightarrow \sum$ را نگاشت پوانکاره می‌نامند و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P_N := \varphi_{t_۰+T}(x, t_۰) \qquad (۲۲)$$



شکل ٦. نگاشت پوانکاره برای یک سیستم ناخودگردان مرتبه اول.

اندیس N بیان‌گر نگاشت برای سیستم‌های ناخودگردان است. توجه نمایید برای زمان ثابت t، φ_t یک دیفیومورفیسم است و بنابراین P_N معکوس‌پذیر و دیفرانسیل‌پذیر است. تعابیر شهودی زیر را می‌توان در مورد نگاشت پوانکاره برای سیستم‌های ناخودگردان ارائه داد.

۱ــ $\mathbf{P}_N(\mathbf{x})$ بیانگر این است که نقطه $\mathbf{x}$ پس از T ثانیه توسط شار φ_t به کجا برده می‌شود. این فرایند را نگاشت T-پیش‌رو[1] می‌نامند.

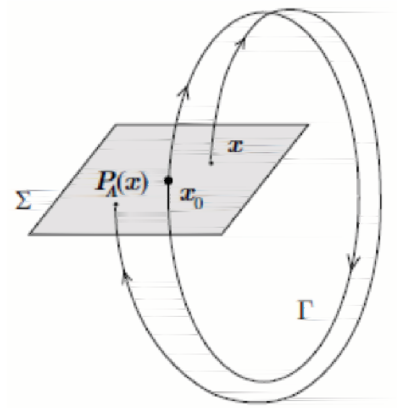
۲ــ عملیات نمونه‌گیری از شار روی ابرصفحه مثل یک عکس‌برداری استروبوسکوپیک است. به زبان دقیق‌تر مدار گسسته زمان $(P_N^k(\mathbf{x}))_{k=1}^{\infty}$ در واقع نمونه‌برداری از یک مسیر است که در هر T ثانیه انجام می‌شود؛ یعنی برای $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_N^k = \varphi_{t_0+kT}(x, t_0) \qquad (۲۳)$$

۲.۳ نگاشت پوانکاره برای سیستم‌های خودگردان

حال یک سیستم خودگردان مرتبه n با چرخه حدی Γ را در نظر بگیرید. $\mathbf{x}_0$ را نقطه‌ای روی چرخه حدی فرض کرده و $\sum$ را ابرصفحه‌ای $(n-1)$ بعدی در نظر بگیرید که در $\mathbf{x}_0$ با چرخه حدی تقاطع دارد. دیده می‌شود مسیرهای آغازشونده از $\mathbf{x}_0$ پس از گذشت T ثانیه ابرصفحه را مجدداً در $\mathbf{x}_0$ ملاقات خواهند کرد که در آن T کمینه دوره تناوب چرخه حدی است. از آنجا که φ_t نسبت به شرایط اولیه پیوسته است، هر مسیر آغازشونده از همسایگی به اندازه کافی کوچک از $\mathbf{x}_0$ روی ابرصفحه $\sum$، پس از گذشت تقریباً T ثانیه، $\sum$ را در نقطه‌ای در نزدیکی $\mathbf{x}_0$ قطع خواهد کرد. شکل ۷ را ببینید.

1) T-advancing map



شکل ۷. نگاشت پوانکاره برای یک سیستم مرتبه سوم خودگردان.

بدین ترتیب φ_t و $\sum$ نگاشتی مانند P_A از یک همسایگی از $\mathrm{x}_\circ$ مانند $U \in \sum$ به یک همسایگی دیگر از $\mathrm{x}_\circ$ مانند $V \in \sum$ تعریف می‌کند. این نگاشت را نگاشت پوانکاره می‌نامند. اندیس A بیان‌گر نگاشت برای سیستم‌های خودگردان است.

در رابطه با نگاشت پوانکاره سه نکته قابل ذکر است:

- ۱. همان‌طور که دیدیم، P_A به صورت موضعی (یعنی در همسایگی $x_\circ$) تعریف می‌شود. برخلاف سیستم‌های ناخودگردان، تضمینی وجود ندارد که با شروع از هر نقطه از ابرصفحه $\sum$ به نقطه‌ای از این ابرصفحه برگردیم.
- ۲. برای یک فضای حالت اقلیدسی، نقطه $P_A(\mathrm{x})$ لزوماً اولین نقطه‌ای نیست که $\varphi_t(\mathrm{x})$ ابرصفحه $\sum$ را ملاقات می‌کند؛ در واقع $\varphi_t(\mathrm{x})$ قبل از رسیدن به همسایگی $V \in \sum$، حداقل یک بار از $\sum$ می‌گذرد. این وضعیت برای سیستم‌های ناخودگردان رخ نمی‌دهد.
- ۳. نگاشت P_A یک دیفیومورفیسم است و بدین ترتیب معکوس‌پذیر و مشتق‌پذیر است.

نکته دیگری که در ارتباط با نگاشت پوانکاره باید مورد توجه قرار گیرد این است که تعاریفی که در بالا ارائه شد از تعاریف استاندارد نظریه سیستم‌های دینامیکی است. اما از آن‌جا که برای محاسبه نیاز به دانستن موقعیت چرخه حدی هستیم، در عمل و شبیه‌سازی‌ها کم‌تر می‌شود از آن‌هااستفاده کرد.

۳.۳ بررسی مجموعه‌های حدی ناوردا از طریق نگاشت پوانکاره

پیش از این یکی از خصوصیات با اهمیت نگاشت پوانکاره را ویژگی یک به یکی بین سیستم دنیامیکی پیوسته زمان و نسخه گسسته زمان آن برشمردیم. یکی از این خصوصیات مربوط می‌شود به نحوه ارتباط بین مجموعه‌های حدی برای سیستم پیوسته زمان و متناظر آن در گسسته زمان پس از

نمونه‌برداری توسط نگاشت پوانکاره. در این زیربخش قصد داریم بحثی مختصر راجع به این مقوله انجام دهیم.

همان‌طور که پیش از این هم گفته شد رفتار حدی کران‌دار یک سیستم دینامیکی به چهار دسته نقطه تعادل، پاسخ متناوب، پاسخ شبه متناوب و آشوب تقسیم‌بندی می‌شود. اینک می‌خواهیم ببینیم هر یک از این رفتارهای حدی پس از گسسته‌سازی توسط نگاشت پوانکاره به چه شکلی درخواهد آمد.

۱. نقطه تعادل

متناظر با نقطه تعادل نگاشت پوانکاره مجموعه حدی مناسبی به دست نمی‌دهد. در واقع اگر ابرصفحه $\sum$ شامل یک نقطه تعادل مانند x^* باشد و نگاشت پوانکاره به نحو مناسبی در همسایگی این نقطه تعادل تعریف شده باشد، در این صورت مجموعه حدی این نگاشت همان نقطه تعادل خواهد بود. اما اگر این ابرصفحه اندکی دچار اختلال شود، این نقطه تعادل روی ابرصفحه باقی نخواهد ماند و این یعنی مجموعه حدی دارای پایداری ساختاری نیست[1].

۲. پاسخ متناوب

- سیستم‌های ناخودگردان

یک پاسخ تناوب ـ۱ از یک سیستم پیوسته زمان پس از گسسته‌سازی توسط نگاشت پوانکاره P_N، به یک نقطه ثابت مانند x^* از نگاشت تبدیل می‌شود.

همچنین یک زیرهارمونیک مرتبه K از یک سیستم پیوسته زمان پس از گسسته‌سازی توسط نگاشت پوانکاره P_N، به یک مدار بسته تناوب ـK از نگاشت تبدیل می‌شود.

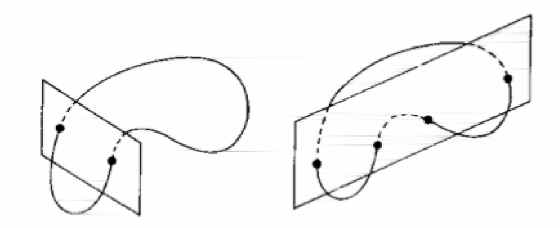
- سیستم‌های خودگردان

یک چرخه حدی از شار φ_t پس از گسسته‌سازی توسط نگاشت پوانکاره P_A، به یک نقطه ثابت مانند x^* از نگاشت تبدیل می‌شود. همچنین یک مدار بسته تناوب ـK از نگاشت پوانکاره P_A، بیان‌گر یک زیرهارمونیک مربوط به چرخه حدی می‌باشد. نکته ظریفی که در این جا وجود دارد این است که اگر دوره تناوب کمینه چرخه حدی برابر T باشد، دراین صورت دوره تناوب یک زیرهارمونیک مرتبه K اگر چه خیلی به KT نزدیک است اما دقیقاً برابر نیست[2]. بنابراین، زمان بازگشت برای نقطه x^* روی چرخه حدی دقیقاً برابر T است ولی زمان بازگشت نقاط نزدیک به این نقطه چیزی نزدیک به T است که به هر حال دقیقاً با T برابر نیست. نحوه گزینش ابرصفحه بسیار مهم است. این مسأله را می‌توانید از شکل ۸ ببینید.

---

۱) ما در این زیربخش بحث خود را به مجموعه‌های حدی دارای پایداری ساختاری محدود می‌کنیم.

۲) در واقع برخلاف نگاشت پوانکاره مربوط به سیستم‌های ناخودگردان، نگاشت P_A بر اساس سطح مقطع تعریف می‌شود نه بر اساس زمان.



شکل ۸. بستگی نقاط حدی مربوط به یک چرخه حدی به نحوه گزینش ابرصفحه

۳. پاسخ شبه متناوب

- سیستم‌های ناخودگردان

یک پاسخ ۲ـمتناوب مانند $\varphi_t(\mathbf{x})$ از یک سیستم دینامیکی ناخودگردان را با مجموعه فرکانس پایه $\{f_1, f_2\}$ در نظر بگیرید که در آن $f_2 = T_2^{-1}$ فرکانس ورودی است. با تغییر مختصاتی به شکل (θ_1, θ_2) روی یک چنبره، $\varphi_t(\mathbf{x})$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x(t) = F(\theta_1(t), \theta_2(t)) \tag{۲۴}$$

۴.۳ مثالی از نگاشت پوانکاره

در زیر برای درک بهتری از نحوه استفاده این نگاشت ارزش‌مند، مثالی از [۸] آورده شده است. سیستم دوبعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y + y(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{۲۵}$$

سطح مقطعی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\sum = \{(x, y) \in R^2 : x > 0, y = 0\} \tag{۲۶}$$

اینک سیستم معرفی شده در (??) را در مختصات قطبی به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم[۱]:

$$\dot{r} = r(1 - r) \tag{۲۷}$$

$$\dot{\theta} = 1 \tag{۲۸}$$

۱) تغییر مختصات از دکارتی به قطبی با روابط $r^2 = x^2 + y^2$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$ داده می‌شود. کافی است از طرفین این دو رابطه مشتق بگیرید و از معادلات توصیف‌کننده سیستم استفاده نمایید.

و نسخه قطبی سطح مقطع فوق به شکل زیر است:

$$\sum = \{(r, \theta) \in R \times S^{1} : r > 0, \theta = 0\} \tag{۲۹}$$

پس از کمی محاسبه می‌توان شکل کلی پاسخ سیستم (??) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_i(r_0, \theta_0) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-0.5}, t + \theta_0 \right) \tag{۳۰}$$

به سادگی دیده می‌شود زمان بازگشت یک نقطه مانند q از ابرصفحه $\sum$ برابر است با 2π. بنابراین نگاشت پوانکاره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_A(r_0) = \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-0.5} \tag{۳۱}$$

از رابطه نگاشت به روشنی دیده می‌شود نقطه $r_0 = 1$ یک نقطه ثابت از نگاشت است، یعنی $P_A(1) = 1$ که در واقع مشخص‌کننده مسیر بسته مستدیری با شعاع واحد است. در اینجا نگاشت پوانکاره یک نگاشت تک‌بعدی است. همچنین با روش اول لیاپانوف می‌توان نشان داد این چرخه حدی و یا متناظر آن نقطه ثابت نگاشت، دارای پایداری مجانبی است.

۵.۳ بحثی راجع به نگاشت پوانکاره از مراتب بالاتر

چنان‌که پیش از این دیدیم نگاشت پوانکاره با کاهش مرتبه یک سیستم پیوسته زمان، یک چرخه حدی را به یک نقطه، یک چنبره را به یک دایره و یک K-چنبره را به یک $(K-1)$-چنبره تقلیل می‌دهد.

یک سیستم پیوسته زمان ناخودگردان را در نظر بگیرید که شامل دو جمله متناوب با دوره‌های تناوب نامتناسب T_1 و T_2 می‌باشد به طوری که سیستم یک رفتار دو-متناوب با فرکانس‌های پایه $\{T_1^{-1}, T_2^{-1}\}$ از خود بروز می‌دهد. چنان‌که دیدیم یک چنین سیستمی دارای مجموعه حدی دو-چنبره‌ای مانند $S^1 \times S^1$ است. مختصات روی این چنبره را θ_1 و θ_2 می‌نامیم که در آن θ_1 مختصات متناظر با دوره T_1 است و مختصات θ_2 متناظر است با دوره تناوب T_2. نمونه‌برداری یک مسیر دو-متناوب از این سیستم با نرخ T_1^{-1} حرکت را در امتداد مختصه θ_1 فریز می‌کند. به عبارت بهتر مجموعه حدی متناظر با این مسیر حرکتی به صورت $L_1 = \{(\theta_1, \theta_2 : \theta_1 = \theta_0\}$ درمی‌آید که در آن θ_0 مختصات زمان آغاز t_0 است. به همین ترتیب نمونه‌برداری با نرخ T_2^{-1} حرکت را در امتداد مختصه θ_2 فریز می‌کند که مجموعه حدی آن دایره‌ای مانند L_2 است که با $L_2 = \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_2 = \theta_0\}$ تعریف می‌شود. اگر بتوان مسیر مورد مطالعه را به صورت هم‌زمان با نرخ‌های T_1^{-1} و T_2^{-1} نمونه‌برداری نماییم، در این صورت حرکت روی نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}^* = (\theta_0, \theta_0)$ که همان محل تلاقی L_1 و L_2 است فریز می‌شود.

فلسفه نگاشت پوانکاره مرتبه دوم، در واقع انجام این عملیات نمونه‌برداری دوگانه هم‌زمان است. برای درک بهتر موضوع اجازه دهید یک بار دیگر مسئله را دقیق‌تر بشکافیم. زمان آغاز را $t_۰ = ۰$ بگیرید. نمونه‌برداری اولیه با نرخ $T_۱^{-۱}$، دنباله‌ای به شکل $(\mathbf{x}_k)_{k=۰}^{\infty}$ تولید می‌کند که در فواصل زمانی $kT_۱$ قرار دارند. نمونه‌برداری دوم در واقع از این دنباله با نرخ $T_۲^{-۱}$ انجام می‌شود. یعنی نقاطی را از این دنباله انتخاب می‌کند که در زمان‌هایی با مضاربی از $T_۲$ قرار دارند. بنابراین عنصر $\mathbf{x}_j$ از دنباله فوق در نمونه‌برداری دوم انتخاب می‌گردد هرگاه وجود داشته باشد یک عدد صحیح مانند r به طوری که:

$$jT_۱ = rT_۲ \tag{۳۲}$$

اما بنابر فرض نامتناسب بودن زمان‌ها $T_۱$ و $T_۲$، این شرط (??) نمی‌تواند برقرار باشد. برای حل این معضل، یک $\epsilon > ۰$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت می‌توان گفت نقطه $\mathbf{x}_j$ در نمونه‌برداری ثانویه انتخاب خواهد شد اگر زمان متناظر با آن $jT_۱$ در فاصله ϵ از مضرب صحیحی از $T_۲$ باشد. به زبان دقیق‌تر مدار ناشی از یک نگاشت پوانکاره مرتبه دوم از مجموعه نقاطی به شکل $\mathbf{x}_k := \varphi_{kT_۱}(\mathbf{x}_۰, ۰)$ تشکیل شده است که:

$$kT_۱ + \epsilon \ \ modT_۲ < ۲\epsilon \tag{۳۳}$$

با توجه به حضور ϵ مجموعه حدی نگاشت پوانکاره مرتبه دوم دیگر همانند نگاشت پوانکاره ساده نمی‌تواند یک نقطه ثابت مانند $\mathbf{x}^*$ باشد. در این وضعیت، مجموع حدی بخش کوچکی از $S_۲^۱$ است که نقطه ثابت $\mathbf{x}^*$ را در برمی‌گیرد. البته توجه شود با میل کردن ϵ به سمت صفر، معادله (??) به (??) میل می‌کند که این به معنای این است که مجموعه حدی به نقطه ثابت $\mathbf{x}^*$ میل کرده است.

این الگو برای معرفی نگاشت‌های پوانکاره از مراتب بالاتر به سادگی قابل تعمیم است. نکته مهم در این تعمیم این است که هر مرتبه از نگاشت، یک واحد از بعد سیستم مورد اولیه می‌کاهد.

نگاشت پوانکاره مرتبه دومی که در بالا تشریح شد برای سیستم‌های دینامیکی ناخودگردان است. همین رهیافت برای تعریف نگاشت پوانکاره مرتبه دوم برای سیستم‌های دینامیکی خودگردان نیز قابل استفاده است با این تفاوت که در سیستم‌های خودگردان نمونه‌برداری در فضای حالت صورت می‌گیرد در حالی که در سیستم‌های ناخودگردان این نمونه‌برداری در حوزه زمان انجام می‌شد. روند به این صورت است که نمونه‌برداری در ابرصفحه $(n - ۱)$ بعدی $\sum_۱$ انجام می‌شود. مجموعه نقاطی که حاصل تقاطع مسیر مورد مطالعه با ابرصفحه $\sum$ است تشکیل یک دنباله مانند $(\mathbf{x}_k)_{k=۰}^{\infty}$ از نگاشت پوانکاره مرتبه اول می‌دهند. پس از آن نمونه‌برداری ثانویه در ابرصفحه $(n - ۲)$ بعدی دیگری مانند $\sum_۲$ انجام می‌شود که $\sum_۲ \subset \sum_۱$. نقاط موجود در ابرصفحه اخیر، مجموعه نقاط نگاشت پوانکاره مرتبه دوم را می‌سازند. البته همانند آن‌چه در وضیت سیستم‌های ناخودگردان گفته شد در این‌جا نیز عملاً هیچ کدام از نقاط $\mathbf{x}_j$ دقیقاً روی ابرصفحه $\sum_۲$ نمی‌افتد؛ بنابراین فقط نقاطی که در فاصله ϵ از $\sum_۲$ قرار دارند انتخاب می‌شوند.

نکته: با ترکیب ایده‌های نمونه‌برداری در زمان و در فضای حالت، می‌توان نگاشت‌های پوانکاره مرکب از مراتب بالاتر نیز ساخت.

بررسی دقیقی از محاسبات مربوط به نگاشت پوانکاره از مراتب بالاتر در [۹] انجام شده است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله بحث مختصری راجع به مجموعه‌های حدی ناوردای سیستم‌های دینامیکی ارائه شد و دیدیم عموماً چهار نوع رفتار برای پاسخ‌های سیستم‌های دینامیکی قابل رویت‌اند: نقطه تعادل، پاسخ تناوبی، پاسخ شبه تناوبی و پاسخ‌های آشوبی که در این مقاله فقط به بحث راجع به سه نوع پاسخ اول پرداخته شد. نگاشت پوانکاره به عنوان یک ابزار تحلیلی مناسب برای مطالعه سیستم‌های دینامیکی خودگردان و ناخودگردان معرفی شد و به برخی ویژگی‌های آن اشاره‌ای شد. همچنین در قالب مثال‌هایی نحوه استفاده از این نگاشت نیز ارائه گردید. یکی از مباحث مهم که می‌تواند موضوع پژوهش‌های محققین قرار گیرد بحث‌های مربوط به نگاشت‌های پوانکاره از مراتب بالاتر است که در این مقاله مرور شد.

[1] G, D. Birkhoff, Dynamical Systems, American Mathematical Society, Providence, RI, (1927).

[2] M. Amiri, E. Davoodi-Bojd, F. Bahrami, M. Reza, Bifurcation analysis of the Poincare$'$ map function of intracranial EEG signals in temporal lobe epilepsy, Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 81, No. 11 (2011) 2471-2491.

[3] L. M. Sa'nches, A. A. Hnilo, Description of Kerr lens mode-loched lasers with Poincare$'$ maps in the complex plane, Optics Communications, Vol. 199, No. 1-4 (2001) 189-199.

[4] M. A. Avila, R. A. Me'ndez-Sa'nchez, The method of the Poincare$'$ map for compressional and torsional waves in composite rods Physica E: Low dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 30, No. 1-2 (2005) 174-178.

[5] S. M. M. Kashani, H. Salarieh, G. Vossoughi, Control of nonlinear systems onPoincare$'$ section via quasisliding mode method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 14, No 3, (2009) 645-654.

[6] E. Petrisor, J. H. Misguich, D. Constantinescu, Reconnection in a global model of Poincare$'$ map describing dynamics of magnetic field lines in a reversed shear tolamak, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 18, No. 5 (2003) 1085-1099.

[7] S. H. M. J. Houben, J. M. L. Maubach, R. M. M. Mattheij, An accelerated Poincare$'$-map method for autonomous oscillators, Applied Mathematics and Computation, Vol. 140, No 2-3 (2003) 191-216.

[8] Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillatios, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo (1983).

[9] J. Grote, M. Berz, K. Makino, High-order epresentation of Poincare$'$ maps, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, Vol. 558, No 1 (2006) 106-111.

ابوالحسن رزمی‌نیا
دانشکده مهندسی؛ دانشگاه خلیج‌فارس بوشهر؛
razminia@pgu.ac.ir