فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز و زمستان ۱۳۹۳) صص. ۲۷ تا ۴۵

جستجوی شبه تناوب در تزئینات اسلامی ۵ ـ تا (قسمت دوم)*

پیتر آر. کروموِل

مترجمین: مریم‌السادات فلسفی، مریم جمالی گندمانی

۴. طرح‌های چند سطحی

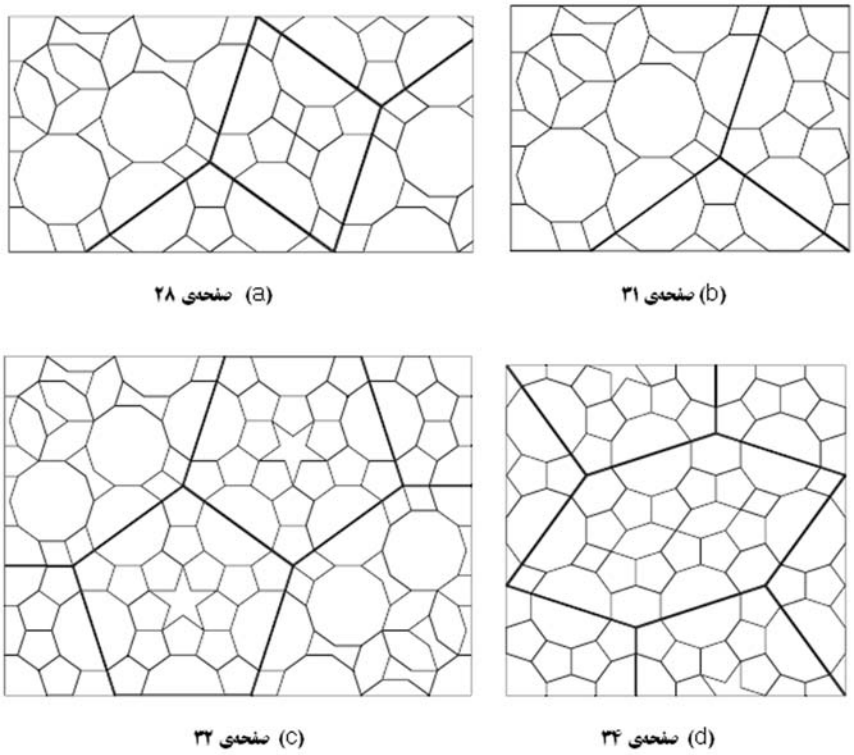
برخی از صفحات طومار توپقاپی طرح‌هایی را نشان می‌دهند که در مقیاس‌های متفاوت بر روی یکدیگر اضافه شده‌اند. این تأثیر متقابل طرح‌ها در مقیاس‌های چندگانه، یک ویژگی برای برخی از طرح‌های بزرگ اسلامی است که در بناها یافت می‌شود. در این حالت بیننده با نزدیک آمدن، توالی نگاره‌ها را تجربه می‌کند. از فاصله‌ی دور، اشکال بزرگ مقیاس، با تفاوت رنگ زیاد، بیش از هر چیزی به چشم می‌خورند. اما در نگاره‌ی نزدیک‌تر، این اشکال به قدری بزرگ می‌شوند که نمی‌توان آنها را به درستی مشاهده نمود. در این حالت اشکال کوچک‌تر غلبه پیدا می‌کنند. روش‌های اولیه برای تغییر حالت از اشکال بزرگ و برجسته‌ی سرتاسر ناحیه‌ی میانی، به اشکال ریز و ظریف، ساده بودند. این روش‌ها اغلب، به طور پیش رونده، فضاهای خالی پس زمینه را به گونه‌ای پر می‌کرد که طرحی بدون هیچ فضای خالی، بر جای بماند (یک نگاره‌ی ثانویه از این شکل در گنبد کبود، موجود است). تفاوت‌های موجود در اندازه و سطح جزئیات، با استفاده از اختلاف موجود در تراکم، عمق

*) Peter R. Cromwell, spmr02@liverpool.ac.uk *The Search for Quasi-Periodicity in Islamic 5-fold Ornament*, The Mathematical Intelligencer, Voulme 31, Number 1, 2009, pp 36-56.

ترجمه‌ی مقاله در دو قسمت تنظیم گشته است. قسمت اول، که سه بخش ابتدایی مقاله، با عناوین مقدمه، روش‌های اسلامی ترسیم و شبه‌تناوب را شامل می‌شود، در شماره‌ی قبل به چاپ رسید. این قسمت، در ادامه‌ی قسمت اول و مشتمل بر پنج بخش نهایی مقاله می‌باشد. لازم به ذکر است، شکل‌های ۱ تا ۱۳ مقاله، در قسمت اول آورده شده است.

حکاکی، رنگ و ساختار بیان شده بودند. طرح‌های بعدی بلند پروازانه‌تر هستند و سبک یکسانی را در بیش از یک مقیاس به کار می‌برند. حتی می‌توان همان نگاره را دوباره استفاده نمود.
طرح‌هایی که بتوانند در چندین مقیاس خوانده شوند را با نام خود متشابه می‌شناسند. اما خود این اصطلاح، دارای سطوح چندگانه‌ای از معنی است. در معنای خاص، منظور مقیاس پایا است. به عبارت دیگر، یک تبدیل تشابه (یک طولپایی توسط یک توسعه) که طرح را روی خودش می‌نگارد. این تبدیل می‌تواند به یک هم‌ارزی توپولوژیکی تقلیل یابد. برای مثال همریختی‌های موجود در دستگاه‌های توابع مکرر، منجر به فرکتال‌ها می‌شوند ولی هنوز در معنای خفیف‌تر، منظور از آن، نقوشی در مقیاس‌های متفاوت است که در سبک یا آرایش متشابه‌اند، اما نسخه‌های یکدیگر نیستند. ما برای طرح‌های چندگانه‌ی شکل اخیر، عبارت سلسله مراتبی را به کار می‌بریم.

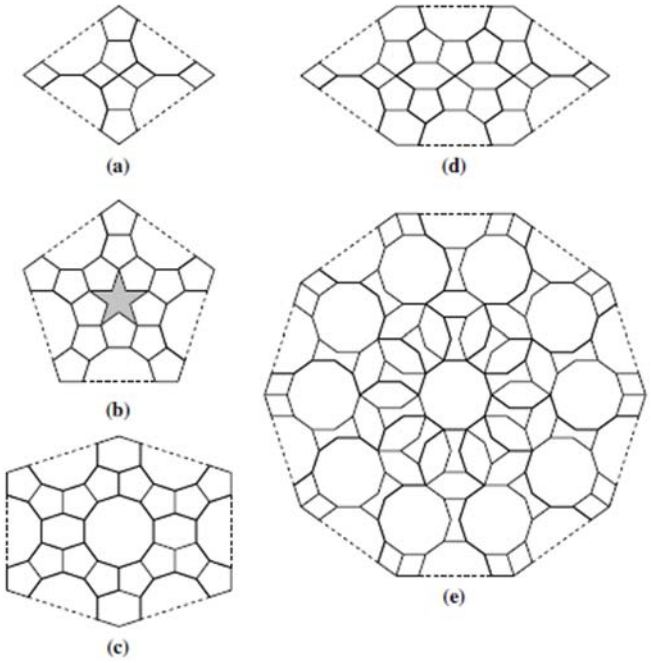
در صفحه ۲۸ طومار توپقاپی، سه نقش بر شکل یکسانی قرار گرفته‌اند: ۱ ـ یک شبکه‌ی چندضلعی کوچک مقیاس که با نقطه‌چین قرمز کشیده شده است. ۲ – طرح متناظر با آن در مقیاس کوچک که با یک خط توپر سیاره رنگ رسم می‌شود و ۳ ـ یک طرح بزرگ مقیاس که با یک خط توپر قرمز رنگ به آن اضافه شده است.



شکل ۱۴: شبکه‌های چندضلعی دوسطحی زیرین از صفحات طومار توپقاپی.

شبکه‌ی چندضلعی متناظر با طرح بزرگ مقیاس، نشان داده نشده است اما می‌تواند استنباط شود ـ دو شبکه چندضلعی نشان داده شده، در شکل ۱۴(a) بر روی هم قرار گرفته‌اند. بخش‌های دیگر شکل، شبکه‌های چندضلعی زیرین سه طرح دیگر دوسطحی از طومار را نشان می‌دهد. اما هیچ کدام از این شبکه‌ها در صفحات نشان داده نشده‌اند و تنها طرح‌های دو سطحی قرمز و سیاه پایان یافته قابل مشاهده می‌باشند.

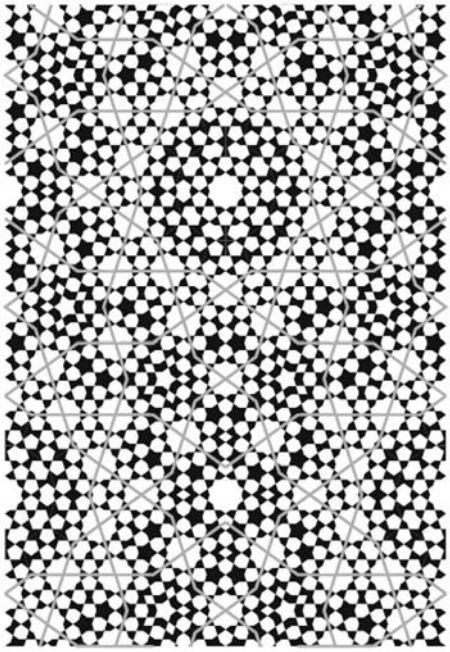
بر روی هم قرار دادن شبکه‌های چندضلعی کوچک و بزرگ مقیاس این صفحات، تقسیمات جزئی برخی از این کاشی‌ها را نشان می‌دهد: یک لوزی در صفحه ۲۸، دو پنج ضلعی در صفحه ۳۲ و یک ماسوره در صفحه ۳۴. در تمامی موارد ضلع کاشی، ترکیبی از اضلاع دو کاشی کوچک و قطر یک ده ضلعی کوچک است. همچنین می توانیم تکه‌های چندضلعی‌های بزرگ مقیاس بریده شده توسط صفحات را مشخص نماییم.



شکل ۱۵: تقسیمات جزئی مشتق شده از طومار توپقاپی.
ضریب مقیاس برابر با $\sqrt{5}+3 \simeq 5.236$.

این صفحات اجزایی نیستند که به طور دلخواه از یک طرح انتخاب شده باشند، بلکه آنها الگوهایی هستند که می‌بایست توسط انعکاس در اضلاع مستطیل مرزی تکرار شوند. اگرچه با یک نگاه ظاهری در شکل ۱۴(d)، شاید بتوان چنین اظهار نظر کرد که شبکه‌ی بزرگ مقیاس، ماسوره‌ای

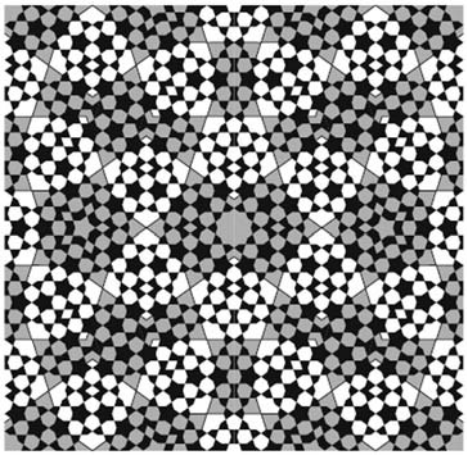
است که توسط شش، پنج ضلعی احاطه شده باشد. آرایشی که در شبکه‌ی کوچک مقیاس می‌توان مشاهده نمود. انعکاس در اضلاع، لوزی‌ها، پنج ضلعی‌ها و خمره‌ها را ایجاد می‌کند. طرح بزرگ مقیاس ایجاد شده توسط صفحه ۳۱، در شکل ۸(g) نشان داده شده است. به نظر می‌رسد که صفحه ۲۸ از سمت راست بریده شده و شاید به خاطر فضای موجود، محدود شده باشد. اگر این صفحه در اطراف مرکز لوزی بزرگ، دارای تقارن دورانی ۲ ـ تایی می‌بود، طرح بزرگ مقیاس، شکل ۸(h) می‌شد. یک گزینش پایدار تقسیم‌جزیی، در هر چهار صفحه پدیدار می‌شود. تقسیمات جزئی پنج کاشی استفاده شده، در شکل ۱۵ نشان داده شده است. به عقیده‌ی من چنین موردی، پیش از این گزارش نشده بود.



شکل ۱۶: یک طرح دوسطحی بر مبنای صفحه ۳۲ طومار توپقاپی.

شکل شماره ۱۶، طرح دوسطحی من را، که بر مبنای صفحه ۳۲ می‌باشد، نشان می‌دهد. کاشی‌های ترکیبی، طرح بزرگ مقیاس را ایجاد می‌کنند (که با رنگ خاکستری نشان داده شده‌اند) و کاشی‌های کوچک مقیاس، طرح کوچک مقیاس را موجب می‌شوند (سفید و سیاه)، که نواحی پس‌زمینه‌ی خود را پر کرده‌اند. کاشی خمره دارای دو نوع تزئین است. من از نقش ساده، برای طرح بزرگ مقیاس استفاده نموده‌ام و نقش دیگر را در طرح کوچک مقیاس به کار برده‌ام. کامل کردن طرح کوچک مقیاس در مرکز پنج ضلعی ترکیبی، کاری دشوار است. برای یک پنج ضلعی در این

مقیاس، تنها یک تقسیم جزئی امکان دارد. زمانی که نیم ده ضلعی‌ها، در محل قرار داده شوند باید پنج ضلعی‌ها را در گوشه‌ها بگذاریم. تنها یک پنج ضلعی یا یک خمره می‌تواند در مجاورت گوشه‌ی پنج ضلعی‌ها قرار گیرد. در هر دو صورت نواحی کوچکی ایجاد می‌شوند که نمی‌توان آنها را با کاشی مفروش نمود. ناحیه‌ی خاکستری در شکل ۱۵(b)، یکی از این حفره‌های اساسی را نشان می‌دهد. من برای پر کردن این نواحی شیوه‌ای انتخاب کرده‌ام که نسبت به آن‌چه در طومار توپقاپی آمده، کمی متفاوت است. طرح بزرگ مقیاس همان شکل ۲(c) می‌باشد.



شکل ۱۷: یک طرح دوسطحی بر مبنای صفحه ۳۴ طومار توپقاپی.

شکل ۱۷، نسبت به صفحه ۳۴، از تدبیر مشابهی استفاده کرده است. این شکل چهار نسخه از الگوی مستطیل نشان داده شده در شکل ۱۴(d) را شامل می‌شود که دوتای آنها تصاویر مستقیم و دوتای دیگر تصاویر انعکاس‌یافته در آیینه هستند. در این حالت، نگاره‌ی بزرگ مقیاس، با استفاده از سایه‌اندازی نواحی مشخص شده است. نمونه‌هایی از هر دو سبک را می‌توان در بناهای موجود در اصفهان، ایران، یافت.

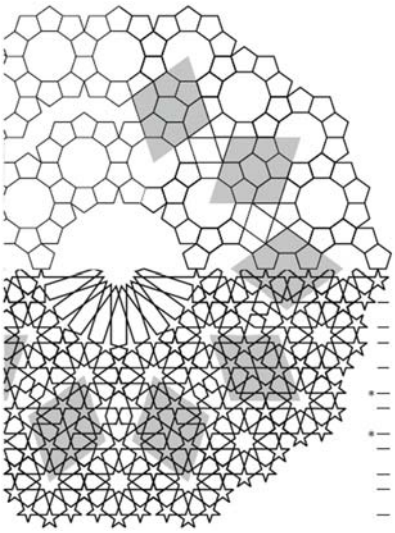
نبود پاپیون در شکل ۱۵، مشخص و قابل توجه است. پاپیون نیز به همان سرنوشت پنج ضلعی محکوم است. کاشی‌ها در دو انتهای آن فشرده‌اند و میانه‌اش را نمی‌توان با کاشی مفروض نمود (شبکه‌ی چندضلعی زیرین بزرگ مقیاس، از صفحه ۲۹ طومار، شامل $\frac{1}{2}$ از یک پاپیون، در گوشه‌ی بالا، سمت راست است که توسط بخش‌هایی از ده ضلعی‌ها احاطه شده، اما این تقسیم جزئی بر پایه‌ی همان روشی که برای بقیه صورت گرفته، نیست).

در شکل ۱۶، بخش قابل رؤیت از طرح بزرگ مقیاس را نیز می‌توان به صورت یک پیکربندی در طرح کوچک مقیاس یافت. با این وجود بخش‌های بزرگ‌تر نشان می‌دهند که این نگاره، با مقیاس پایا نیست. این یک محدودیت کلی از این تقسیمات جزئی است. استفاده از تقسیمات جزئی

شکل ۱۵، به عنوان پایه‌ی یک کاشی‌کاری جانشینی ممکن نمی‌باشد، چرا که بدون تقسیمات جزئی پنج ضلعی و پاپیون، فرآیند تورم قابل تکرار نیست.

۵. طرحی از الحمرا

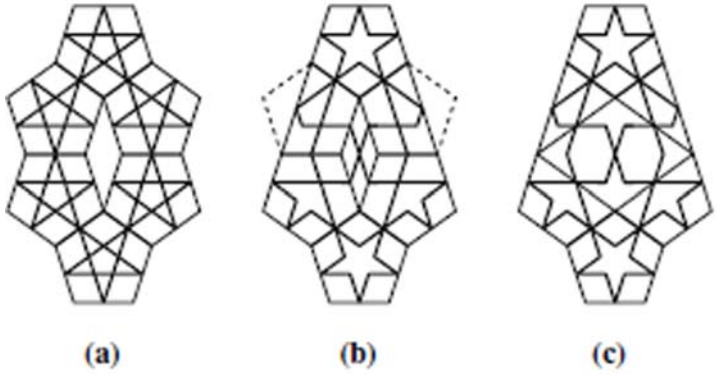
طرح مصور شکل ۱۸، بخش اصلی از یک صفحه بزرگ در موزه‌ای از الحمرا است ـ برای مشاهده‌ی عکسی از این طرح [۲۴] را مشاهده نمایید. قطعات پیدا شده در سال ۱۹۵۸، این صفحه را پدید آورده است، در حالی که نمونه‌ی اصلی آن مربوط به قرن ۱۴ می‌شود. بخش پایین شکل، طرح پایان یافته را نشان می‌دهد. در بخش بالایی، یک شبکه‌ی چندضلعی برای چهارچوب زیرین طرح پیشنهاد داده‌ام. عضو ترکیبی اصلی این چهارچوب، یک ده ضلعی است که توسط ده پنج ضلعی محاط شده است. این امر رز ۱۰ ـ تایی برگردنده را، به عنوان یک نقش اصلی در طرح نهایی افزایش می‌دهد. نسخه‌هایی از این عنصر در دو حلقه قرار گرفته‌اند که می‌توان آنها را در گوشه سمت چپ بالا دید ـ حلقه‌ی درونی شامل ده عنصر و حلقه‌ی بیرونی دارای بیست عنصر است. عناصر مجاور، در دو پنج ضلعی مشترکند. اتصال بین حلقه‌های درونی و بیرونی به دو قسم است. لوزی‌های سایه‌دار، که شامل واحد انتقال از طرح متناوب آشنای شکل (b)۲ هستند. رسم طرح در فضاهای باقی مانده، در شکل ۱۹ نشان داده شده است. زیرمجموعه‌ای از آرایش نقوش پنج ضلعی آورده شده در قسمت (a)، در قسمت (b) دیده می‌شود. در حالی که قسمت (c) همان طرح را بر روی شبکه‌ای که شامل نیمه خمره‌ها و یک‌دهم ده ضلعی‌ها است، نشان می‌دهد. در شکل ۱۸، چندضلعی‌های قسمت (c) استفاده شده‌اند.



شکل ۱۸: ترسیمی از صفحه ۴۵۸۴ در موزه‌ای از الحمرا.

یال‌ها، در شبکه‌ی چندضلعی حاصل، دارای دو طول متفاوت می‌باشند که مربوط به ضلع و قطر کاشی پنج ضلعی می‌شود. طرح نهایی می‌تواند با استفاده از این شبکه، که تعمیمی از روش PIC در آن به کار رفته است، حاصل شده باشد. یال‌های کوتاه دارای زاویه‌ی برخورد ۷۲° هستند و یال‌های بلند زاویه‌ی ۳۶° دارند. یک رز ۲۰ ــ تا در مرکز قرار گرفته است. سر گلبرگ‌ها، یک در میان، با رزهای ۱۰ ــ تا برخورد می‌کنند و خطوط تشکیل دهنده‌ی سر گلبرگ‌های میانی، تا جایی که با خطوط دیگر نگاره، برخورد نداشته باشند، امتداد می‌یابند. صفحه‌ی مستطیلی احیا شده نیز، دارای $\frac{1}{4}$ رزهای ۲۰ ــ تا است که در چهارگوشه واقع شده‌اند. این مطلب ویژگی مشترک چنین صفحاتی است که خود نشان می‌دهد، بیشترشان زیرمجموعه‌هایی از نگاره‌های متناوب می‌باشند. به هر حال چارک‌ها ناهم‌ترازند و همچنین بیشترین نواحی تعمیری صفحه را شامل می‌شوند. من آنها را از شکل حذف کرده‌ام.

این طرح به خاطر تعداد زیاد خطوط مستقیمی که در سرتاسر شکل، تقریباً بدون وقفه، ادامه دارند، طرحی غیر معمول می‌باشد. علامت‌های موجود در گوشه‌ی راست پایین شکل ۱۸، ارتفاع خطوط افقی را نمایان می‌سازد. پنج خانواده از خطوط موازی وجود دارند که توسط زوایای ۳۶° از هم جدا شده‌اند.



شکل ۱۹

در برخی از کاشی‌کاری‌های شبه‌تناوبی این امکان وجود دارد که کاشی‌های اولیه را با پاره‌خطها تزئین نمود. پاره‌خطهایی که در یال‌های کاشی به یکدیگر متصل می‌شوند تا یک شبکه‌ی پیوسته از خطوط مستقیم ایجاد نمایند. شبکه‌ای که در تمامی صفحه امتداد دارد. این خطوط را میله‌های امان[1] می‌نامند. فواصل بین میله‌های امان موازی و متوالی در دو اندازه می آیند، که به صورت سنتی با S و L (کوتاه و بلند) نشان داده می‌شوند. این میله‌ها دنباله‌های نامنظمی را شکل می‌دهند که خود را تکرار نمی‌کنند و هرگز شامل دو S مجاور یا سه L هم‌جوار نخواهند بود.

1) Amman bars

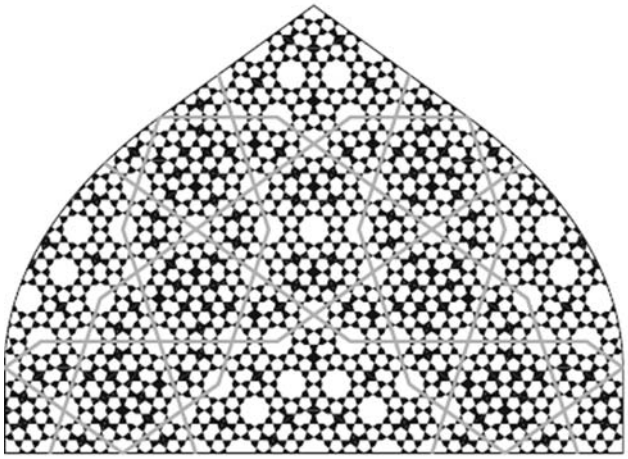
خطوط موجود در شکل ۱۸، میله‌های امان اصلی نیستند. خطوطی که با ستاره مشخص شده‌اند به طور کامل بر روی تمامی عرض قطعه‌ی نشان داده شده منطبق نمی‌باشند. اما این خطوط به نحوی دارای انحرافند که فواصل S و L اضلاع را با هم تعویض می‌کنند. (ایرادات ساختاری این نمونه، در شبه‌بلورها مشاهده شده است که با نام فاسون[1] شناخته می‌شوند). اگرچه طرح تناوبی شکل ۲(b) دارای خطوط مشابهی است، اما دنباله‌هایش تکرار می‌شوند. میله‌های امان قائم، دنباله‌ی SLSL را ایجاد می‌کنند. خطوطی که با خط قائم زاویه‌ی ۳۶° می‌سازند، دنباله‌ی SLLSLL را تشکیل می‌دهند اما خطوطی که با خط قائم زاویه‌ی ۷۲° دارند، به درستی منطبق نمی‌شوند. ماکوویکی و دیگران در [۲۴]، شکل ۱۸ را به عنوان نمونه‌ای از یک طرح شبه‌تناوبی پیشنهاد می‌دهند. آنها سعی دارند تا بین این طرح و عنصر چرخ و فلک کاشی‌کاری پنروز رابطه‌ای ساختاری برقرار نمایند. پس از اعتراف به این که تلاش برای منطبق کردن بادبادک‌ها و پیکان‌ها کاری دشوار است، سعی نمودند تا آن را با نوعی از کاشی‌های پنروز تطبیق دهند. نمونه‌ای که توسط ماکوویکی [۲۰]، کشف شد. او این نمونه را در حالی که مشغول مطالعه‌ی نگاره‌ی مراغه، نشان داده شده در شکل ۹(b)، بود کشف کرد. جسورانه‌ترین ادعای آنها نتیجه‌ی شماره ٦ [۲۴, p, ۱۲۵] است: «نگاره‌ی ده ضلعی چرخ و فلکی متناوب موجود در حفاری‌های الحمرا و نیز در مراکش، بر مبنای یک کاشی‌کاری تغییریافته‌ی نامتناوب پنروز می‌باشد که اخیراً به نام کاشی‌کاری (PM1) توسط ماکوویکی به دست آمده است. ما به این نتیجه رسیدیم که یک گونه‌ی متقارن شده‌ی نظیر PM1 پنروز، می‌بایست برای هنرمندان (ریاضی‌دانان) مرینیون و النصریون شناخته شده باشد و بدون شک در مجموعه‌ی نگاره‌های پیشرفته‌تر آنها وجود داشته است.»

در جاهای دیگر این مقاله نویسندگان نسبت به ماهیت حدسشان محتاط‌تر و واقع‌گرایانه‌ترند. آنها ترسیمی متناوب را ارائه می‌دهند که بر مبنای یک شبکه‌ی زیرین از لوزی‌های به طور شعاعی متقارن بنا شده است. رئوس این لوزی‌ها در مراکز کاشی‌های ده ضلعی قرار دارند [۲۴، شکل ۲۳].

برای رده‌بندی یک نگاره به عنوان متناوب و یا به طور شعاعی متقارن، نمونه‌ی ما می‌بایست به قدری بزرگ باشد که بتوان یک الگو و قوانین مربوط به تکرار آن را مشخص کرد. به طور مشابه، به منظور رده‌بندی یک نگاره به عنوان بخشی از یک ساختار شبه‌تناوبی، که تمامی صفحه را پوشانده است، مشاهده نماییم. این مطلب کافی نیست، که بتوان ویژگی‌های هندسی یک طرح، همچون مراکز دوران، را با یک کاشی‌کاری شبه‌تناوبی آشنا در یک قطعه‌ی متناهی، تنظیم کرد. ما ناگزیر به یافتن یک شیوه‌ی ساخت، برای عناصر طرح هستیم. مجموعه‌ی کاشی‌های زیرین شکل ۱۸ و مجموعه‌ی $P_۲$، نشان داده شده در شکل ۱۳، هر دو قطعات بزرگی هستند که دارای تقارن ۱۰ ـ تایی می‌باشند، اما ما تنها چگونگی توسیع مورد دوم، به صورت شبه‌تناوبی، را می‌دانیم.
به نظر من راهکار موجود در طراحی زیرین نگاره‌ی الحمرا نیاز به شناخت کاشی‌کاری‌های از نوع پنروز ندارد و بر پایه‌ی چیزی بیش از تمایل برای قرار دادن نقوش متقارن بزرگ (رزها) در یک

1) phason

نگاره‌ی متقارن شعاعی و پرکردن شکاف‌هاست. رسمی که در ابتدای این بخش ارائه شد، با استفاده از شیوه‌ها و نقوشی که گمان می‌رود توسط هنرمندان اسلامی مورد استفاده قرار گرفته است، طرح کاملی را ترسیم می‌نماید. ساختار کلی طرح همان احساس موجود در شکل ۵ را داراست. گرچه طرح ممکن است، بازشده و برای اثر بخشی بیشتر انتخاب شده باشد، با این حال میله‌های امان، یک نتیجه از رسم طرح هستند. آنها به حفظ هم‌ترازی صحیح عناصر در حین ساخت، کمک می‌نمایند.



شکل ۲۰: یک طرح دو سطحی مدل‌سازی شده از درب امام، اصفهان.

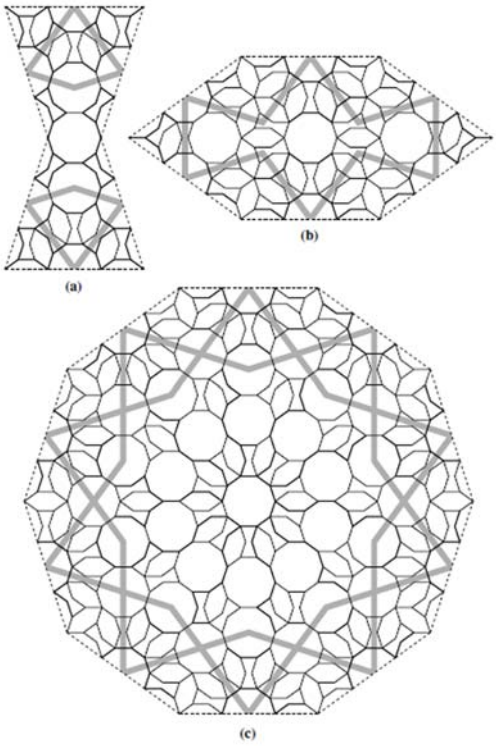
۶. طرح‌هایی از اصفهان

شکل ۲۰، یک طرح دوسطحی را نشان می‌دهد که همچون نمونه‌های طومار توپقاپی در بالا، بر مبنای تقسیم جزئی است. طرح بزرگ مقایس، نگاره‌ی ستاره‌ها و بادبادک‌ها می‌باشد که برگرفته از کاشی‌کاری پاپیون و ده ضلعی موجود در شکل ۱(b) است. طرح کوچک مقیاس از تقسیمات جزئی پاپیون و ده ضلعی حاصل می‌شود. این تقسیمات در شکل‌های ۲۱(a) و (c) به همراه نگاره‌ی بزرگ مقیاس اضافه شده با خاکستری، نشان داده شده است. ضلع یک کاشی مرکب، شامل قطرهای دو ماسوره و یک ده ضلعی است. نگاره نمی‌تواند با مقیاس پایا باشد، چرا که شبکه‌ی چندضلعی طرحی بزرگ مقیاس، شامل پاپیونی است که توسط چهار ده ضلعی محاط شده است اما این آرایش موضعی، در شبکه‌ی کوچک مقیاس رخ نمی‌دهد.

این تقسیمات جزئی توسط لو و اشتینهارت [۱۷]، از سه طرح سلسله مراتبی که در بناهای اصفهان یافت شد، برگرفته شده‌اند، نواحی خاکستری رنگ در شکل ۲۲، بخش‌های مربوط به شبکه‌ی چندضلعی بزرگ مقیاس زیرین این طرح‌ها را نشان می‌دهد. نوار مستطیلی، در اطراف قسمت درونی درگاهی از مسجد آدینه قرار دارد. قسمت مثلثی، یکی از یک جفت تصویر قرینه‌ی

لچکی‌ها، از امام زاده درب امام است و قوس، یک سنتوری از درگاهی است که این مورد نیز مربوط به درب امام می‌باشد. (برای تصاویر، [۱۷ و ۳۵] را مشاهده نمایید.) بونر [۲]، روش تقسیم جزئی جایگزینی را برای قوس درب امام پیشنهاد می‌دهد که در آن از کاشی‌کاری شکل ۲(a)، به عنوان پایه‌ی طرح بزرگ مقیاس استفاده می‌شود.

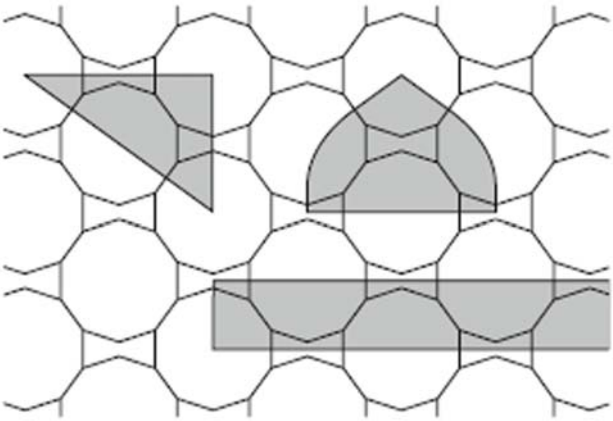
موزائیک سنتوری درب امام، در چندین جا متفاوت از رسم کامل متقارن شکل ۲۰ است. برای مثال ترکیب پاپیون ـ ماسوره شکل ۷(a)، که در گوشه‌ی بالا سمت راست از قسمت مرکزی پاپیون ترکیبی وجود دارد، وارونه است. ترکیب پاپیون ـ ماسوره در گوشه‌های بالای ده ضلعی ترکیبی نیز وارونه هستند. یک ده ضلعی در انتهای پایینی قسمت منحنی مرز، در هر سمت، با شکل ۷(d)، جایگزین شده است. به نظر می‌رسد که اصلاحات انجام گرفته در ده ضلعی ترکیبی، تعمدی است، چرا که تغییرات به صورت یکنواخت در تمام گوشه‌ها اعمال گشته است.



شکل ۲۱: تقسیمات جزئی (a) و (c) از طرح‌های بناهایی در اصفهان، گرفته شده‌اند [۱۷].
ضریب مقیاس برابر با $۲\sqrt{۵}+۴ \simeq ۸.۴۷۲$.

جایگزین کردن ده ضلعی‌های کوچک، شاید جا دادن موزائیک را در قسمت شاه‌نشین آن آسان‌تر

کند. پاپیون نامتعارف، احتمالاً اشتباهی بوده که از طرف استادکار رخ داده است.



شکل ۲۲: بخش‌هایی از کاشی‌کاری پاپیون و ده ضلعی به کار رفته در نگاره‌های اصفهان.

اگر بخواهیم از تقسیمات جزئی اصفهان، به عنوان مبنای یک کاشی‌کاری جانشینی استفاده نماییم، ناگزیر می‌بایست همتای مربوط به تقسیم جزئی کاشی ماسوره را ترسیم کنیم. در چنین کاری می‌بایست مشخصات هر دو نمونه را تقلید نمود. ویژگی‌هایی همچون تقارن آیینه‌ای در تقسیمات جزئی و موقعیت کاشی‌ها نسبت به خطوط خاکستری. توجه داشته باشید که نقاط کانونی، مانند گوشه‌ها یا محل تقاطع خطوط خاکستری، همیشه در مرکز ده ضلعی قرار دارند و مسیرهای به هم متصل شده از میان درازای پاپیون‌ها عبور می‌کنند. شکل ۲۱(b) راه حل پیشنهادی من است. این راه حل در برخی از این ضوابط صدق می‌کند. اما از این جهت که برخی از گوشه‌های خطوط خاکستری، آن‌قدر به هم نزدیک می‌باشند که ده ضلعی‌هایی که در مرکز واقع‌اند، بر روی هم هم‌پوشانی داشته و نیز با توجه به تضادی که بین گذر از مسیر میان یک پاپیون و رسیدن به تقارن آیینه‌ای در طرفین، وجود دارد، لذا این طرح معیوب می‌باشد. این تقسیم جزئی اضافی، انجام فرآیند تورم را ممکن می‌سازد. اما احتمالاً کاشی‌کاری‌های حاصل، تنها از لحاظ ریاضی قابل توجه‌اند. ضریب بزرگ مقیاس برای تقسیمات جزئی، یک نرخ رشد زیاد متناظر در تورم را حاصل می‌آورد. پس از دو مرحله تورم یک ده ضلعی، قطعه‌ی حاصل، شامل حدود ۱۵۰۰ کاشی خواهد بود. برای مقایسه، قطعه‌ی نشان داده شده در شکل ۱۳، شامل حدود ۱۵۰۰ کاشی است. لو و اشتینهارت در بحث از شبه‌تناوب، از نگاره‌های اصفهان بهره می‌گیرند. نظر آنها در مورد لچکی درب امام چنین است [۱۷, p. ۱۱۰۸]:

«موزائیک کاری درب امام در یک چهارچوب متناوب نشانده نشده است و در اصل می‌تواند به یک نگاره‌ی نامتناهی شبه‌تناوبی توسعه یابد.»

به عبارت دیگر، قسمت قابل رؤیت طرح بزرگ مقیاس، به قدری کوچک می‌باشد که هیچ تقارن انتقالی‌ای به راحتی مشخص نیست. لذا این قطعه، می‌تواند بخشی از یک کاشی‌کاری نامتناوب باشد. اگر ما تنها به یک بخش متناهی از هر کاشی‌کاری دسترسی داشته باشیم، نمی‌توان مشخص نمود که آیا این کاشی‌کاری تناوبی است یا نه. این کار با داشتن اطلاعات بیشتری در مورد ساختار کلی یا موضعی آن، امکان‌پذیر است. اگرچه فقدان تناوب آشکار در طرح درب امام را می‌توان به عنوان نوعی نمایش حساب شده، از سردرگمی هنرمند، روی بخشی از طرح تفسیر کرد، اما به نظر من، آنها احتمالاً نتیجه‌ای هستند از انتخاب‌های متأثر از

۱) زیبایی شناسی ساختمان در طرح،

۲) اندازه‌های نسبی تکه‌های موزائیک در نگاره‌ی کوچک مقیاس و ناحیه‌ی پر شده.

این واقعیت که کاشی‌کاری تناوبی یکسانی مبنای هر سه طرح اصفهان واقع شده‌اند آن را داوطلب مناسبی برای طرح اصلی زیرین قرار می‌دهد. انتقال در یک جهت، در الگوی موجود در مسجد جمعه دیده می‌شود.

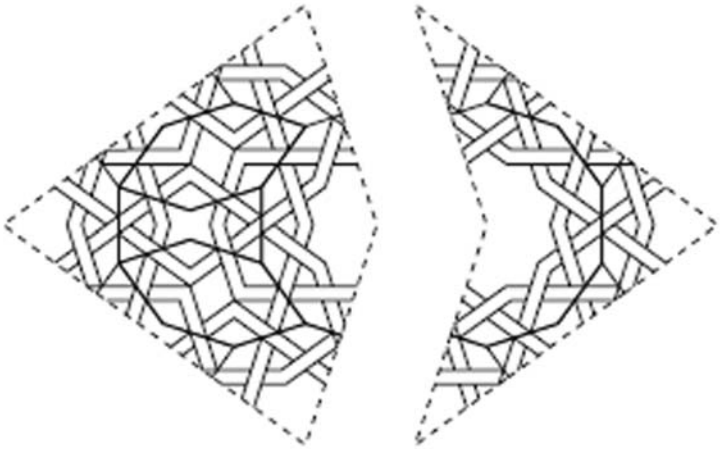
لو و اشتینهارت به این نکته پی بردند که هنرمندان قرون وسطی، یک کاشی بزرگ را به اجزای کوچک‌تر تقسیم نمی‌کردند. بلکه در عوض از قطعه‌ای استفاده می‌نمودند که شامل چند کاشی بزرگ آراسته شده در شکل می‌شد. قطعه‌ای که در شبکه‌ی کوچک مقیاس، قابل رؤیت نبود. سپس چنین توضیح دادند [۱۷, p. ۱۱۰۸]:

« اگر بخواهیم دقیق صحبت کنیم، این انتخاب غیر ضروری و دلخواه، بدین معناست که این کاشی‌کاری خود متشابه نیست، اگرچه کاربرد مداوم قانون تقسیم جزئی، منجر به یک کاشی‌کاری غیرمتناوب می‌شود.»

از این مطلب چنین برداشت می‌شود، که اگر صنعتگران قرون وسطی می‌خواستند، می‌توانستند با یک کاشی بزرگ، کار را شروع کنند و آن را تا زمانی که تمام سطح موجود را پوشش دهد، متورم سازند. اما ما می‌بایست از مشاهده‌ی انتزاعی نوین در کارهای قبلی برحذر باشیم. هیچ مدرکی دال بر آن که صنعتگران قرون وسطی از فرآیند تورم اطلاع داشته‌اند، در دست نیست. موزاییک کاری، تنها یک سطح از تقسیم جزئی را ایجاب می‌کند. آنها شامل یک تقسیم جزئی از ماسوره نمی‌شوند که مستلزم تکرار فرآیند تورم باشد. به نظر من، نگاره‌های اصفهان همچون طرح‌های دوسطحی طومار توپقاپی، بهترین شرح و توضیح برای یک کاربرد از تقسیم جزئی، در تولید یک طرح کوچک مقیاس کامل، از یک طرح بزرگ مقیاس متناوب، می‌باشند. علاوه بر این، به نظر می‌رسد که انتخاب طرح بزرگ مقیاس، به هیچ وجه اختیاری نیست: این طرح، یکی از قدیمی و رایج‌ترین نگاره‌های ستاره‌ی ده ضلعی است و لذا برای ناظران قرون وسطی بسیار آشنا بوده و حتی از یک بخش کوچک، مشخص می‌شده است.

۷. ارتباط با کاشی‌کاری پنروز

کاربرد تقسیم جزئی و تورم، در ساخت کاشی‌کاری شبه‌تناوبی، به همراه مراکز دوران غیر مجاز، در دهه‌ی ۱۹۷۰ اهمیت یافت. این امر با بررسی‌های بعدی کشف مجموعه‌های کوچک نامتناوب از کاشی‌ها انجام گرفت. بادبادک و پیکان پنروز معروف‌ترین نمونه است. کاشی‌کاری‌های پنروز دارای مراکز دوران ۵ ـ تا و ۱۰ ـ تا می‌باشند. این واقعیت که برخی از طرح‌های اسلامی نیز این ویژگی‌های تقارنی غیر معمول را دارا هستند، سبب شد تا چندین نفر به بررسی ارتباطات بین این دو بپردازند [۱, ۱۷, ۲۰, ۲۴, ۲۷].

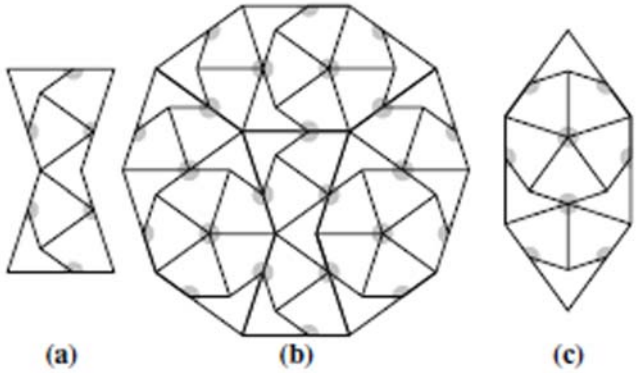


شکل ۲۳: تقسیمات جزئی بادبادک و پیکان پنروز.

شکل ۲۳، فرآیند تقسیم جزئی بادبادک و پیکان را به پاپیون، ماسوره و کاشی‌های ده ضلعی نشان می‌دهد. مانند مثال‌های قبلی، اضلاع بادبادک و پیکان، بر خطوط تقارن کاشی‌ها قرار دارند. با استفاده از این جانشینی، هر کاشی‌کاری پنروز می‌تواند به طرحی با سبک اسلامی تبدیل گردد [۲۷]. علاوه بر این، از آن جا که بادبادک و پیکان، یک مجموعه‌ی نامتناوب هستند، چنین طرحی نیز نامتناوب خواهد بود.

انتقال می‌تواند در جهت دیگری نیز انجام گیرد. شکل ۲۴، تقسیمات جزئی سه کاشی اسلامی را به بادبادک‌ها و پیکان‌ها نشان می‌دهد. دو قطعه از آنها برای دانشجویان کاشی‌کاری پنروز آشنا هستند. (a) مؤلفه‌ی بلند پاپیون از حلزون‌های کانونی است و (b) مرکز کاشی‌کاری چرخ و فلک می‌باشد. توجه داشته باشید که (b) از (a) و (c) و به طریق شکل ۷(d) ساخته می‌شود. زمانی که کاشی‌ها همچون یک جورچین کنار هم قرار می‌گیرند، این مطلب که بادبادک‌ها و پیکان‌ها با قوانین انطباقی آورده شده‌اند، مانع از ساخت کاشی‌کاری متناوب خواهد شد. در شکل ۲۴، دو گوشه در

جناح‌های هر پیکان و دو گوشه در خطوط تقارن هر بادبادک، توسط قسمت‌های خاکستری رنگ مشخص گشته‌اند. قانون انطباق آنها بدین ترتیب است که گوشه‌های خاکستری رنگ را تنها می‌توان در کنار سایر گوشه‌های خاکستری قرار داد. به عنوان نمونه، با توجه به این قانون، نمی‌توان پاپیون و ده ضلعی موجود در شکل را در کنار نگاره‌ی ستاره‌ها و بادبادک‌ها جفت کرد.



شکل ۲۴: قطعاتی از بادبادک‌ها و پیکان‌های پنروز.

شکل ۲۵: تقسیمات جزئی از کاشی‌های نشان‌دار که علامت‌هایش حفظ شده است. ضریب مقیاس برابر با $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \simeq 2.618$.

قرار دادن دو پاپیون در گوشه‌های روبروی غیر ممکن است. علائم موجود بر بادبادک‌ها و پیکان‌های شکل ۲۴، باعث شده است که این کاشی‌های مرکب، دارای قانون انطباقی منحصر به خود باشند. هر ضلع از یک کاشی مرکب، دارای یک نقطه‌ی خاکستری رنگ است که طول ضلع را با نسبت طلایی تقسیم می‌کند. ما هر ضلع را توسط یک پیکان که به دو قسمت کوتاه، اشاره دارد مزین ساخته‌ایم. همان‌طور که قبلاً در مثال پنروز توضیح داده شد، در این‌جا به جای تعریف قانون انطباقی در رئوس کاشی‌کاری، قیودی را روی یال‌های کاشی‌کاری اعمال می‌کنیم. با توجه به این علائم و

قانون انطباقی، پاپیون و ماسوره یک مجموعه‌ی نامتناوب هستند. برای اثبات این مطلب توجه داشته باشید که شکل ۲۵، نشان می‌دهد که تمامی صفحه را می‌توان توسط فرآیند تورم، کاشی کرد و نیز هر کاشی‌کاری متناوب توسط پاپیون‌ها و ماسوره‌ها را می‌توان با استفاده از بادبادک‌ها و پیکان‌ها به کاشی‌کاری متناوب تبدیل نمود، در حالی که این کار غیر ممکن است. ماتریس جانشینی برای کاشی‌های نشان‌دار شده، مربوط به دنباله‌ی فیبوناتچی می‌شود، همچنین نسبت ماسوره‌ها به پاپیون‌ها در یک کاشی‌کاری جانشینی نسبت طلایی است. توجه داشته باشید که یک خط افقی از میان یک پاپیون مرکب عبور می‌کند. این خط از درازی پاپیون‌های کوچک و پهنای ماسوره‌های کوچک می‌گذرد. تورم، خط طولانی‌تری را با ویژگی‌های مشابه پدید می‌آورد. همچنین یک کاشی‌کاری جانشینی به صورت تصادفی، شامل این خطوط بلند خواهد بود. خطوط نامتناهی می‌بایست به موازات یکدیگر باشند، به نحوی که یکدیگر را قطع نکنند. این خطوط، قانون جانشینی یک بعدی خود را دارند.

۸. نتایج

در بخش‌های قبلی روش‌های مربوط به رسم نگاره‌های هندسی اسلامی را توضیح دادم، همچنین مقدمه‌ی مختصری در باب ریاضیات جدید کاشی‌کاری جانشینی ارائه و نیز برخی از طرح‌های سنتی اسلامی را تحلیل نمودم. نتایجی که در طول دوره‌ی بررسی و بحث به دست آورده‌ام را در این‌جا به طور مجزا و خلاصه ارائه می‌کنم.

۱ ـ امکان ترسیم کاشی‌کاری‌های شبه‌تناوبی، از مجموعه‌ی کاشی‌های اولیه که توسط هنرمندان اسلامی به کار می‌رفته، وجود دارد (شکل ٦). مثال‌های مربوط به آن را می‌توان از طریق کاشی‌کاری جانشینی‌ای که بر اساس فرآیند تورم ایجاد شده است و یا با استفاده از قانون انطباقی کاشی‌های نشان‌دار، تولید کرد.

۲ ـ هنرمندان اسلامی برای ایجاد طرح‌های سلسله مراتبی، از تقسیم جزئی بهره می‌گرفتند. مثال‌های موجود در طومار توپقاپی، شیوه‌ی این کار را بیان می‌کند. همچنین سه طرح، در بناهای اصفهان، می‌تواند این روش را توضیح دهد. در واقع نمونه‌ی اولیه‌ی کاشی‌های آنها، از لحاظ قابلیت ایجاد تقسیمات جزئی خودشان به روش‌های بسیار، قابل توجه‌اند.

۳ ـ هیچ دلیلی وجود ندارد که هنرمندان اسلامی فرآیند تقسیم جزئی را به صورت مکرر انجام می‌داده‌اند. تمامی طرح‌هایی که من از آنها اطلاع دارم، تنها دارای دو سطح هستند. این مطلب تا حدی یک موضوع کاربردی است: ضریب مقیاس بین طرح‌های کوچک مقیاس و بزرگ مقیاس معمولاً بزرگ است و ناحیه‌ی مربوط به طرح، نسبتاً کوچک. تقسیم جزئی به کار رفته در طومار توپقاپی تسلسل و تکرار را غیر ممکن می‌سازد، چرا که نسخه‌های ترکیبی پنج ضلعی و پاپیون وجود ندارد.

۴ ـ شاهدی دال بر استفاده‌ی هنرمندان اسلامی از قوانین انطباقی موجود نیست. میله‌های امان، نزدیک‌ترین مورد برای تزئین می‌باشند که می‌توانند برای قوت بخشیدن به پدیده‌ی غیرتناوبی، به

کار رفته باشند. خطوط مشابهی که در برخی از طرح‌ها یافت می‌شوند، محصول ساخت هستند و نه مربوط به ابتدای فرآیند طراحی. اگرچه این طرح‌ها ممکن است از این لحاظ که این ویژگی جذاب بوده است، انتخاب شده باشند.

۵ ـ طرح‌های تحلیل شده در این مقاله، این امر که هنرمندان اسلامی از فرآیندی اطلاع داشته‌اند که می‌تواند طرح‌های شبه‌تناوبی ایجاد کند را اثبات نمی‌کند. آنها طرح‌هایی متناوب هستند که توسط انعکاس اضلاع یک مستطیل ایجاد می‌شوند و یا طرح‌های بزرگی با تقارن شعاعی. طرح‌های چندسطحی، سلسله مراتبی‌اند ولی با مقیاس پایا نیستند.

در این مقاله من بر روی طرح‌هایی با تقارن موضعی ۵ ـ تایی متمرکز شدم. در اسپانیا و مراکش طرح‌های مشابهی با تقارن موضعی ۸ ـ تایی وجود دارد. از جمله برخی طرح‌های ظریف دوسطحی در Patio de las Doncellas در آلکازار سویل ـ عکس‌هایش را می‌توانید در [۲۲] مشاهده نمایید. هندسه‌ی موجود در شبکه‌های چندضلعی زیرین این طرح‌ها بر مبنای سیستم تناسبات $\sqrt{2}$ نهاده شده است و نه بر مبنای نسبت طلایی. گاهی اوقات، نقشه‌های مقرنس‌ها (پیش‌آمدگی سقف‌ها، که توسط روی هم انباشتن واحدها، در ردیف‌هایی ساخته می‌شوند و به تدریج اندازه‌یشان از حفره‌ی مرکزی، کاهش می‌یابد تا برآمدگی‌ای استالاکتیت[1] مانند پدید آید.)، ویژگی‌های یکسانی را نشان می‌دهند. این شبکه‌ها شباهت بسیار نزدیکی به کاشی‌کاری شبه‌تناوبی امان ـ بنکر[2] دارند، که از مربع‌ها و لوزی 135° – 45° تشکیل شده‌اند [۳۳]. این کاشی‌کاری، کاشی‌کاری جانشینی دیگری است که می‌تواند توسط تقسیم جزئی و تورم ایجاد شده باشد. کاشی‌ها می‌توانند با پاره‌خط‌هایی مزین شده باشند تا میله‌های امان را حاصل آورند. مشابه ادعاهایی که در این مقاله بررسی شد، نتایجی برای برخی از طرح‌های اسلامی ۸ ـ تایی به دست آمده است [۲, ۶, ۲۲, ۲۳].

از نظر من به احتمال بسیار زیاد، علاقه‌ی هنرمندان اسلامی به تقسیم جزئی، به منظور ساخت طرح‌های چندسطحی بوده است. مسلماً هنرمندان اسلامی با ایجاد طرح‌ها، با استفاده از انعکاس، دوران و انتقال، آشنا بوده‌اند تا این که بخواهند یک الگو را تکرار کنند. احتمالاً آنها، به صورت ذاتی نسبت به محدودیت بلورشناسی آگاهی داشته‌اند و نیز به طور حسی به این نکته واقف بوده‌اند که مراکز دوران ۱۰ ـ تایی و ۵ ـ تایی، تا حدی با خاصیت تناوبی بودن ناسازگار است. مسلماً آنها ابراز ساخت طرح‌های شبه تناوبی را در اختیار داشته‌اند، اما به لحاظ نظری، چهارچوب دانستن احتمال یا اهمیت چنین چیزی را در دست نداشته‌اند.

منابع

[1] M. Arik and M. Sancak, "Turkish-Islamic art and Penrose tilings", *Balkan Physics Letters* **15** (1 Jul 2007) 1-12.

1) stalactite 2) Amman-Beenker

[2] J. Bonner, "Three traditions of self-similarity in fourteenth and fifteenth century Islamic geometric ornament", *Proc. ISAMA/Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, (Granada, 2003), eds. R. Sarhangi and N. Friedman, 2003, pp. 1-12.

[3] J. Bonner, *Islamic Geometric Patterns: Their Historical Development and Traditional Methods of Derivation,* unpublished manuscript.

[4] J. Bourgoin, *Les Element de I'Art Arabe: Le Trait des Entrelacs, Firmin-Didot*, 1879, Plates reprinted in *Arabic Geometric Pattern and Design,* Dover Publications, 1973.

[5] J. -M. Castera, *Arabesques: Art Decoratif au Maroc,* ACR Edition, 1996.

[6] J. M. Castera, "Zellijs, muqarnas and quasicrystals", *Proc. ISAMA,* (San Sebastian, 1999), eds. N. Friedman and J. Barrallo, 1999, pp. 99-104.

[7] G. M. Fleurent, "Pentagon and decagon designs in Islamic art", *Fivefold Symmetry*, ed. I. Hargittai, World Scientific, 1992, pp. 263-281.

[8] B. Grunbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns,* W. H. Freeman, 1987.

[9] E. H. Hankin, "On some discoveries of the methods of design employed in Mohammedan art", *J. Society of Arts* **53** (1905) 461-477.

[10] E. H. Hankin, *The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art,* Memoirs of the Archaeological Society of India, no 15, Government of India, 1925.

[11] E. H. Hankin, "Examples of methods of drawing geometrical arabesque patterns", *Math. Gazette* **12** (1925) 370-373.

[12] E. H. Hankin, "Some difficult Saracenic designs II", *Math. Gazette* **18** (1934) 165-168.

[13] E. H. Hankin, "Some difficult Saracenic designs III", *Math. Gazette* **20** (1936) 318-319.

[14] C. S. Kaplan, "Computer generated Islamic star patterns", *Proc. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science,* (Kansas, 2000), ed. R. Sarhangi, 2000, pp. 105-112.

[15] C. S. Kaplan, "Islamic star patterns from polygons in contact", *Graphics Interface* 2005, ACM International Conference Proceeding Series **112**, 2005, pp. 177-186.

[16] A. J. Lee, "Islamic star patterns", *Muqarnas IV: An Annual on Islamic Art and Architecture,* ed. O. Grabar, Leiden, 1987, pp. 182-197.

[17] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, "Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **315** (23 Feb 2007) 1106-1110.

[18] P. J. Lu and P. J. Steinhardt,"Response to Comment on Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **318**(30 Nov 2007) 1383.

[19] F. Lunnon and P. Pleasants, "Quasicrystallographic tilings", *J. Math. Pures et Appliques* **66** (1987) 217-263.

[20] E. Makovicky, "800-year old pentagonal tiling from Maragha, Iran, and the new varieties of aperiodic tiling it inspired", *Fivefold Symmetry*, ed. I. Hargittai, World Scientific, 1992, pp. 67-86.

[21] E. Makovicky, "Comment on Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture", *Science* **318** (30 Nov 2007) 1383.

[22] E. Makovicky and P. Fenoll Hach-Ali, "Mirador de Lindaraja: Islamic ornamental patterns based on quasi-periodic octagonal lattices in Alhambra, Granada, and Alcazar, Sevilla, Spain", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **19** (1996) 1-26.

[23] E. Makovicky and P. Fenoll Hach-Ali, "The stalactite dome of the Sala de Dos Hermanas-an octagonal tiling?", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **24** (2001) 1-21.

[24] E. Makovicky, F. Rull Perez and P. Fenoll Hach-Ali, "Decagonal patterns in the Islamic ornamental art of Spain and Morocco", *Boletin Sociedad Espanola Mineralogia* **21** (1998) 107-127.

[25] G. Necipoglu, *The Topkapi Scroll: Geometry and Ornament in Islamic Architecture,* Getty Center Publication, 1995.

[26] J. Rigby, "A Turkish interlacing pattern and the golden ratio", *Mathematics in School* **34** no 1 (2005) 16-24.

[27] J. Rigby, "Creating Penrose-type Islamic interlacing patterns", *Proc. Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, (London, 2006), eds. R. Sarhangi and J. Sharp, 2006, pp. 41-48.

[28] F. Rull Perez, "La nocion de cuasi-cristal a traves de los mosaicos arabes", Boletin Sociedad Espanola Mineralogia **10** (1987) 291-298.

[29] P. W. Saltzman, "Quasi-periodicity in Islamic ornamental design", *Nexus VII: Architecture and Mathematics*, ed. K. Williams, 2008, pp. 153-168.

[30] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1995.

[31] M. Senechal and J. Taylor,"Quasicrystals: The view from Les Houches", *Math. Intelligencer* **12** no 2 (1990) 54-64.

منابع اینترنتی

[32] ArchNet. Library of digital images of Islamic architecture, http://archnet.org/library/images/

[33] E. Harriss and D. Frettloh, *Tilings Encyclopedia*, http:// tilings.math.uni-bielefeld.de/

[34] C. S. Kaplan, taprats, computer-generated Islamic star Patterns, http:// www.cgl.uwaterloo.ca/csk/washington/taprats/

[35] P. J. Lu and P. J. Steinhardt, Supporting online material for [17], http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/315/5815/1106/DC1

[36] D. Wade, *Pattern in Islamic Art: The Wade Photo-Archive*, http://www.patterninislamicart.com/

مترجم: مریم‌السادات فلسفی، m.s.falsafi@gmail.com
خانه ریاضیات اصفهان و دانشگاه اصفهان
مریم جمالی گندمانی، maryam_jamali61@yahoo.com
دبیر آموزش و پرورش