فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز و زمستان ۱۳۹۳) صص. ۸۵ تا ۹۷

پایاها و نامساوی‌های جدید در هندسهٔ ریمانی

اعظم اعتماد دهکردی

چکیده

در بعضی از موارد اطلاعات زیادی از یک خمینهٔ ریمانی با درنظر گرفتن آن به عنوان زیرخمینه‌ای از یک فضای اقلیدسی و استفاده از رابطه‌های بین خواص ذاتی و خارجی آن به دست می‌آید. در این نوشتار براساس نتایج به دست آمده در طی ۴۰ سال اخیر توسط چن[۱] دربارهٔ زیرخمینه‌ها، پایاها و نامساوی‌هایی را در هندسهٔ ریمانی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱ ورود به بحث

حساب دیفرانسیل و انتگرال درآمدی بر نظریهٔ زیرخمینه‌ها است که با انحنای خم‌های مسطح شروع می‌شود. همچنین در هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی برای یک رویه در فضای اقلیدسی سه بعدی، دو کمیت مهم انحنای میانگین و انحنای گاوسی وجود دارد. انحنای میانگین به عنوان یک پایای خارجی، تنش رویهٔ پدید آمده از فضای زمینه را محاسبه می‌کند و همان‌گونه که در قضیه‌ی شگفت‌انگیز[۲] گاوس بیان شده است، انحنای گاوسی تحت تغییر شکل‌های ایزومتری تغییر ناپذیر است، از اینرو یک پایای ذاتی و درونی برای رویه محسوب می‌شود. اما وقتی فضاهای ریمانی مطرح شدند، هندسهٔ رویه‌ها در فضای اقلیدسی سه بعدی به هندسهٔ دیفرانسیل زیرخمینه‌های با بعد بالاتر از خمینه‌های ریمانی تعمیم یافت. در ادامه، بینش دسته‌بندی خواص رویه به ذاتی و خارجی در مورد رویه‌ها با دو نمونه‌ی انحنای گاوسی و انحنای میانگین به خمینه‌های ریمانی تسری پیدا کرد که یکی از آثار آن فراهم شدن پایه‌های ریاضی نظریهٔ نسبیت اینشتین است.

1) B.Y. Chen   2) Gauss's Theorema Egregium

به گفتهٔ چن پایاهای ریمانی به عنوان مشخصات ذاتی خمینه‌های ریمانی در رفتار کلی آنها موثر هستند، همانگونه که DNA در رفتار موجودات زنده مؤثر است. از این پایاهای ریمانی می‌توان پایاهای انحنا، مانند انحناهای مقطعی، ریچی و عددی را نام برد که در فیزیک نیز نقشی اساسی برعهده دارند. برای مثال بنابه گفتهٔ اینشتین، حرکت هر جسم در یک میدان جاذبه توسط انحنای فضا—زمان تعیین می شود. همچنین همهٔ انواع سطوح هندسی در طبیعت از حباب صابون گرفته تا سلول‌های قرمز خون با انحناهای مختلف تعیین می‌شوند. یکی از مسائل اساسی مطرح در زمینهٔ پایاهای اصلی ذاتی و خارجی یک زیرخمینه، یافتن رابطه‌ای ساده بین آنها است. اهمیت این موضوع از آنجا ناشی می‌شود که طبق قضیهٔ نشانندگی نش[1]، هر خمینهٔ ریمانی n ـ بعدی را همواره می‌توان به عنوان زیرخمینه‌ای از یک فضای اقلیدسی با بعد m در نظر گرفت که $m = \frac{۳}{۲}(n+۱)(۳n+۱)$. پس وجود ارتباط سادهٔ بین پایاهای ذاتی و خارجی یک زیرخمینه منتج به یافتن اطلاعاتی در مورد خواص ذاتی هر خمینه به کمک خواص خارجی آن نسبت به فضای اقلیدسی می‌گردد. البته مسئله به این سادگی هم نیست، برای مثال یک خمینهٔ سه بعدی در یک فضای اقلیدسی با بعد ۱۲۰ نشانده می‌شود که دارای اختلاف بعد ۱۱۷ با فضای زمینه است و این اختلاف بعد، درک رابطهٔ بین آنها را مشکل می‌سازد. از طرف دیگر غیر از معادلات اساسی گاوس، کدآزی و ریچی، نتیجهٔ عملی دیگری برای زیرخمینه‌های ریمانی دلخواه وجود ندارد. علاوه بر این چنان که یائو[2] می‌گوید

«با این که قضیهٔ نشانندگی ایزومتری نش شهرت فروان کسب کرده است، هنوز ما چگونگی نشانندگی ایزومتری خوب یک خمینه به مفهوم مطلق را نمی‌دانیم. کنترل کمیت‌های خارجی در رابطه با کمیت‌های ذاتی چیزی است که قضیهٔ نش فاقد آن است.»

۲ پایاهای ریمانی چن

بنابر معادلهٔ گاوس، تانسور انحنای ریمانی R و دومین فرم اساسی h مربوط به زیر منیفلد ریمانی (M,g) از یک فضای اقلیدسی در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند،

$$R(X,Y;Z,W) = g(h(X,W),h(Y,Z)) - g(h(X,Z),h(Y,W))$$

که در اینجا X,Y,Z,W میدان‌های برداری دلخواه مماس بر M هستند.

از این معادله فوراً نتیجه می‌شود که شرط لازم برای این که یک خمینهٔ ریمانی یک غوطه‌وری مینیمال در هر فضای اقلیدسی را بپذیرد این است که انحناهای ریچی و عددی آن روی M غیر مثبت باشد. طی سال‌های متمادی، مثبت بودن انحنای ریچی در مورد یک خمینه، تنها مانع کشف شده برای وجود یک غوطه‌وری مینمال به یک فضای اقلیدسی بود. چن برای یافتن موانع جدید جهت وجود غوطه‌وری مینیمال، ابتدا نوع جدیدی از پایاهای ریمانی و عددی را معرفی کرد که به طور طبیعی متفاوت با پایاهای کلاسیک نظیر انحناهای ریچی هستند و آنها را δ ـ پایا نامید.

1) J. F. Nash 2) S.Y. Yau

فرض کنیم M یک خمینهٔ ریمانی n ــ بعدی، $p \in M$ و $K(\pi)$ انحنای مقطعی صفحهٔ $\pi \subset T_pM$ باشد. برای پایه‌ی متعامد یکهٔ $\{e_1, ..., e_n\}$ از T_pM، انحنای عددی τ در p توسط فرمول $\tau(p) = \sum_{i<j} K(e_i, e_j)$ محاسبه می‌شود. اگر $L \subset T_pM$، برای $r \geq 2$ زیرفضایی از بعد r با پایهٔ متعامد یکهٔ مفروض $\{e_1, ..., e_r\}$ باشد، انحنای عددی L به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tau(L) = \sum_{\alpha<\beta} K(e_\alpha, e_\beta) \qquad 1 \leq \alpha < \beta \leq r$$

برای عدد صحیح $n \geq 2$ و عدد صحیح نامنفی k، $S(n,k)$ را مجموعه‌ی متناهی شامل همه‌ی k ــ تایی‌های $(n_1, ..., n_k)$ از اعداد صحیح در نظر می‌گیریم که $2 \leq n_1, ..., n_k \leq n - 1$ و $n_1 + ... + n_k \leq n$. اکنون $S(n)$ بصورت اجتماع $S(n,k)$ها برای n ثابت و اعداد نامنفی ممکن k، تعریف می‌شود. قابل توجه است که تعداد اعضای $S(n)$ کاملاً سریع رشد می‌کند، چنان که $|S(2)| = 1$ و $|S(100)| = 1905692 91$.

حال برای هر $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$، پایای $\delta(n_1, ..., n_k)$ در هر نقطه‌ی $p \in M$ به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\delta(n_1, ..., n_k)(p) = \tau(p) - \inf(\tau(L_1), ..., \tau(L_k))$$

که در آن $L_1, ..., L_k$ روی همه‌ی k زیرفضاهای دوبدو متعامد T_pM با $\dim L_i = n_i$ برای $i = 1, ..., k$، تغییر می‌کند. قرارداد می شود $\delta(\oslash)(p) = \tau$ که به آن δ ــ پایای بدیهی گویند. ملاحظه می‌شود که $\delta(2)(p) = \tau(p) - \inf K(p)$ و $\delta(n-1)(p) = \mathrm{Max}\ Ric(p)$.

از آنجا که δ ــ پایاهای غیر بدیهی از تفریق مقدار معینی انحناهای مقطعی از انحنای عددی به دست می آیند با دو انحنای ریچی و مقطعی بعنوان «جمع‌های کلی» انحناهای مقطعی روی خمینه‌های ریمانی، متفاوت هستند. در واقع δ ــ پایاها، پایاهای ضعیف‌تری هستند که چنان که قبلاً اشاره شد می‌توانند به یک تعبیر DNA خمینه‌های ریمانی را تعیین کنند. لازم به ذکر است همانند δ ــ پایاهای آفین و کیلری هم برای خانواده‌های خاص از خمینه‌ها تعریف شده‌اند.

۳ نامساوهای چن

چن دو نامساوی مهم را به ثبت رسانده است. یکی از نامساوی‌ها که اهمیت کمتری دارد به ارتباط مستقیم بین k ــ انحنای ریچی و عملگر شکل A از یک زیرخمینهٔ ریمانی دلخواه در یک فضافرم ریمانی با اختلاف بعد دلخواه اختصاص دارد. برای خمینهٔ ریمانی n ــ بعدی M و هر عدد صحیح k که $2 \leq k \leq n$، فرض کنیم θ_k نمادی برای پایای ریمانی است که به صورت $\theta_k = (\frac{1}{k-1}) \inf Ric_L(X)$ تعریف می‌شود، که L روی همهٔ k ــ صفحه‌ها در T_pM برای $p \in M$ و X روی همهٔ بردارهای یکه در L تغییر می‌کند. چن در [۴] ثابت کرد برای هر غوطه‌وری ایزومتری از یک خمینهٔ ریمانی M به یک فضافرم ریمانی با انحنای مقطعی ثابت c، هرگاه $\theta_k \neq c$

خواهیم داشت،

$$A > \frac{n-1}{n}(\theta_k - c)I$$

که در اینجا I نمایش نگاشت همانی روی کلاف مماس است. همچنین وی ثابت کرد که اگر $\theta_k = c$ آنگاه $A \geq 0$. نامساوی اول نتیجه می‌دهد که اگر در یک نقطه از M، $\theta_k > c$ آنگاه مقادیر ویژه‌ی عملگر شکل در آن نقطه بزرگتر از $\frac{n-1}{n}$ خواهد بود. همچنین نامساوی دوم برای حالت $\theta_k = c$، نتیجه می‌دهد که هر ابررویه با k ـ انحنای ریچی مثبت در یک فضافرم ریمانی محدب قرار دارد ([۴] و [۲]).

نامساوی دیگر و مهم چن حاصل بکارگیری δ ـ پایاها در قضیهٔ بعدی است که با هدف ارائهٔ جواب کلی بهینه برای تکلیف چرن به صورت زیر است.

«موانع ذاتی جدید برای وجود غوطه‌وری‌های مینیمال از یک خمینهٔ ریمانی به یک فضای اقلیدسی همراه با شرط انحنای ریچی مثبت را بیابید».

محور اصلی قضیه زیر یک نامساوی است که نامساوی چن نامیده می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنیم M زیرخمینهٔ n−بعدی از یک فضافرم ریمانی با انحنای ثابت c باشد. اگر برای $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ قرار دهیم

$$C(n_1, ..., n_k) = \frac{n^2(n + k - 1 - \sum_{j=1}^{k} n_j)}{2(n + k - \sum_{j=1}^{k} n_j)}$$

$$B(n_1, ..., n_k) = \frac{1}{2}(n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j - 1))$$

آنگاه

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq C(n_1, ..., n_k)H^2 + B(n_1, ..., n_k)c \tag{1}$$

که در آن H^2 مربع انحنای متوسط است. همچنین شرط لازم و کافی برای حالت تساوی در (۱) آن است که شرط خاصی برای عملگر شکل M برقرار باشد.

با توجه به این قضیه، مانع نشانندگی مینیمال M در یک فضای اقلیدسی، مثبت بودن یکی از δ ـ پایاهای آن است. همچنین با توجه به وجود خمینه‌ای که حالت تساوی در رابطه‌ی (۱) برای آن برقرار است، بهینه بودن این رابطه احراز می‌شود.

قضیهٔ ۱ توسط چن و همکارانش تعمیم بیشتری یافت و از زیرخمینه‌های فضافرم‌ها به غوطه‌وری‌های بین دو خمینه ریمانی به صورت قضیهٔ زیر بیان شد. در قضیهٔ زیر فرض می‌شود $(n_1, ..., n_k)$، H^2، $C(n_1, ..., n_k)$ و $B(n_1, ..., n_k)$ همانند قضیهٔ۱ تعریف شده‌اند. همچنین نمادهای $\Delta_1, ..., \Delta_k$ را با تعریف‌های زیر درنظر می‌گیریم.

$$\Delta_1 = \{1, ..., n_1\}, \quad ... \quad \Delta_k = \{n_1 + ... + n_{k-1} + 1, ..., n_1 + ... + n_k\}, \quad ...$$

$$\Delta_{k+1} = \{n_1 + ... + n_k + 1, ..., n\}$$

قضیه ۲. برای هر غوطه‌وری ایزومتری از یک خمینهٔ ریمانی n ـ بعدی M به هر خمینه ریمانی دیگر $\widetilde{M}$ داریم،

$$\delta(n_1, ..., n_k) \leq C(n_1, ..., n_k)H^2 + B(n_1, ..., n_k)\text{Max } \widetilde{K} \tag{۲}$$

که در آن $\text{Max } \widetilde{K}(p)$، ماکزیمم انحناهای مقطعی $\widetilde{M}$ تحدید شده به برشهای صفحات دو بعدی از T_pM است.

حالت تساوی در (۲) در یک نقطهٔ $p \in M$ برقرار است اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشند،

(i) پایه‌ای متعامد یکه مثل $\{e_1, ..., e_m\}$ برای T_pM موجود باشد که عملگر شکل A در p به صورت زیر باشد.

$$A_{e_r} = \begin{pmatrix} A_1^r & . & . & . & 0 & \\ . & . & & & . & \\ . & & . & & . & 0 \\ . & & & . & . & \\ 0 & . & . & . & A_k^r & \\ & & 0 & & & \mu_r I \end{pmatrix}, \quad r = n+1, ..., m \tag{۳}$$

که در آن I ماتریس همانی و A_j^r یک زیر ماتریس متقارن $n_j \times n_j$ است که $\text{trace}(A_1^r) = ... = \text{trace}(A_k^r) = \mu_r$.

(ii) اگر هر K زیرفضای دوبدو متعامد $L_1, ..., L_k$ از T_pM که در رابطهٔ

$$\delta(n_1, ..., n_k)(p) = \tau(p) - \sum_{j=1}^{k} \tau(L_j)$$

در $p \in M$ صدق کند، آنگاه برای هر $\alpha_i \in \Delta_i$ و $\alpha_j \in \Delta_g$ که $1 \leq i \neq j \leq k+1$، داشته باشیم $\widetilde{K}(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}) = \text{Max } \widetilde{K}(p)$.

برای رعایت اختصار بیشتر و فشردهٔ قضیه فوق در حالتی که $\widetilde{M}$ یک فضای اقلیدسی است، چن برای هر k ـ تایی $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$، نماد δ ـ پایای نرمال شدهٔ $\Delta(n_1, ..., n_k)$ از یک n ـ خمینه را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\Delta(n_1, ..., n_k) = \frac{\delta(n_1, ..., n_k)}{C(n_1, ..., n_k)}$$

نتیجه ۱ برای هر غوطه‌وری ایزومتری از هر n ـ خمینهٔ ریمانی M به یک فضای اقلیدسی با اختلاف بعد دلخواه و هر $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ داریم،

$$H^2 \geq \Delta(n_1, ..., n_k) \tag{۴}$$

برای نقطهٔ $p \in M$ تساوی در (۴) برقرار است اگر و فقط اگر یک پایهٔ متعامد یکهٔ $\{e_1, ..., e_m\}$ برای T_pM وجود داشته باشد که عملگر شکل A در p نسبت به این پایه به صورت بیان شده در

قسمت (i) از قضیهٔ ۲ باشد.
نامساوی (۴) بهینه است، چون زیر خمینهٔ غیر مینیمالی وجود دارد که در حالت تساوی آن صدق می‌کند. بعلاوه می‌توان نتیجهٔ زیر را با فرض $\widetilde{\Delta}_\circ = \max\{\Delta(n_1, ..., n_k) : (n_1, ..., n_k) \in S(n)\}$، به عنوان δ ـ پایای نرمال شدهٔ ماکزیمم، به دست آورد.

نتیجه ۲ برای هر غوطه‌وری ایزومتری از هر n ـ خمینه ریمانی M به یک فضای اقلیدسی با اختلاف بعد دلخواه داریم،

$$H^2 \geq \widetilde{\Delta}_\circ(p) \tag{۵}$$

در این مرحله چن به یک اصل ماکزیمال به عنوان نتیجه اشاره می‌کند.

نتیجه ۳(اصل ماکزیمال) اگر یک زیر خمینهٔ n ـ بعدی از یک فضای اقلیدسی برای یک k ـ تایی $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ در $H^2 = \Delta(n_1, ..., n_k)$ صدق کند، آنگاه برای هر j و هر $(m_1, ..., m_j) \in S(n)$ داریم $\Delta(n_1, ..., n_k) = \tilde{\Delta}_\circ \geq \Delta(m_1, ..., m_j)$.
درمورد خمینه‌های خاص، نامساوی چن به شکل واضحی یک کران پایین برای مربع طول انحنای میانگین به صورت زیر ارائه می‌کند.

قضیه ۳. اگر M قسمتی باز از $S^m(1)$ باشد، آنگاه برای هر غوطه‌وری ایزومتری M در یک m ـ فضای اقلیدسی، $H^2 \geq 1$. بعلاوه حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر M به عنوان یک قسمت باز از یک ابرکرهٔ عادی در یک زیرخمینهٔ تماماً ژئودزی $\mathbb{E}^{n+1} \subset \mathbb{E}^m$ نشانده شود.

قضیه ۴. فرض کنیم M قسمتی باز از استوانهٔ کروی $\mathbb{E}^{n_1-1} \times S^{n-n_1+1}(1)$ باشد، آنگاه برای هر غوطه‌وری ایزومتری M در $\mathbb{E}^m$ با اختلاف بعد دلخواه داریم، $H^2 \geq (\frac{n-n_1+1}{n})^2$. بعلاوه حالت تساوی رخ می‌دهد اگر و فقط اگر M بعنوان یک قسمت باز از یک ابر استوانهٔ کروی در $\mathbb{E}^{n_1-1} \times \mathbb{E}^{n-n_1+2} \subset \mathbb{E}^m$ نشانده شود.

۴ غوطه‌وری ایده‌آل

اصل ماکزیمال مطرح شده توسط چن، وسیله‌ای برای تعریف وی از غوطه‌وری ایده‌آل در سال ۱۹۹۰ شد. یک غوطه‌وری ایزومتری از یک n ـ خمینهٔ ریمانی M به یک فضای اقلیدسی، ایده‌آل نامیده می‌شود اگر در همهٔ نقاط M رابطهٔ $H^2 = \widetilde{\Delta}_\circ$ برقرار باشد. با تعریف غوطه‌وری ایده‌آل، اصل ماکزیمال نتیجه می‌دهد که هر غوطه‌وری ایزومتری از یک n ـ خمینه ریمانی M به یک فضای اقلیدسی، که در همهٔ نقاط برای یک kـتایی $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ در $H^2 = \Delta(n_1, ..., n_k)$ صدق کند، یک غوطه‌وری ایده‌آل است. با توجه به نتیجه ۱، زیرخمینه‌های ایده‌آل در هر نقطه کمترین مقدار تنش را دریافت می‌کنند.
مثال برای زیرخمینه‌های ایده‌آل، زیرخمینهٔ تماماً نافی از یک فضافرم حقیقی است. همچنین برای

هر عدد صحیح نامنفی k که کمتر از جزء صحیح نصف یک عدد طبیعی n است، استوانه‌ی کروی $E^k \times S^{n-k}$ یک ابررویهٔ ایده‌آل از فضای اقلیدسی $(n+1)$ ــ بعدی است. هر ابررویهٔ کیلری حقیقی مینیمال از یک فضافرم حقیقی نیز ابررویهٔ ایده‌آل است.

فرض کنیم منظور از بهترین مدل جهان (هندسی)، یک فضای ریمانی با بیشترین درجهٔ همگنی به این مفهوم باشد که گروه ایزومتری‌های آن بیشترین بعد ممکن را دارد. طبق کارهای انجام شده توسط لی، کلاین و کیلینگ این جهان عضوی از خانواده‌ی فضافرم‌های حقیقی است.

چن با استفاده از دو مفهوم غوطه‌وری ایده‌آل و بهترین جهان، بهترین روش زندگی را نشانندگی ایزومتری ایده‌آل، برای یک خمینه ریمانی در بهترین جهان تعریف کرد. به گفتهٔ وی این نامگذاری از این جهت است که راحت‌ترین زندگی در جهانی است که بیشترین درجه‌ی آزادی در آن وجود دارد، شکل حفظ می‌شود و به خاطر نشانندگی، خمینه خود را قطع نمی‌کند. با این وصف همهٔ مثال‌های فوق بهترین روش زندگی (هندسی) را دارند.

اما این بهترین روش زندگی برای همهٔ خمینه‌ها امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال صفحهٔ تصویری حقیقی هیچ غوطه‌وری ایده‌آلی را به فضافرم‌ها نمی‌پذیرد. بنابراین تعیین غوطه‌وری‌های ایده‌آل از همهٔ خمینه‌های ریمانی به فضافرم‌ها، اولین قدم در یافتن خمینه‌هایی با بهترین روش زندگی است که خود می‌تواند یک مسئلهٔ جهانی باشد. جواب این مسئله در حالت کلی مشکل است، بنابراین در سالهای اخیر فقط جوابهایی درمورد خانواده‌های خاصی از خمینه‌های ریمانی به این مسئله داده شده است. برخی از این جواب‌ها که اکثراً توسط چن به دست آمده است به شرح زیر هستند.

خمینه‌های ریمانی ۲ بعدی، همهٔ فضافرم‌ها، فضاهای ریمانی همگن تحویل‌ناپذیر و فشرده، خانوادهٔ زیرخمینه‌های لاگرانژی در فضافرم‌های مختلط، خانواده‌ی ابررویه‌های ایده‌آل به طور همدیس تخت، خانواده‌ی زیرخمینه‌های لاگرانژی در کرهٔ شبه کیلری ٦ بعدی.

در سال‌های اخیر چن همچنان مطالعه روی غوطه‌وری‌های ایده‌آل را ادامه داده است و در این راه توجه خود را به حالات خیلی خاص نظیر غوطه‌وری ایده‌آل در فضای اقلیدسی از بعد ۴ معطوف کرده است [۱].

۵ کاربردهایی برای پایاهای چن

دسته‌ی عمده‌ای از کاربردهای پایاهای چن که توسط وی به دست آمده است به بیان موانعی برای غوطه‌وری‌های ایزومتری خمینه‌ای در خمینه‌های ریمانی دیگر اختصاص دارد. در اینجا به موارد مهمی از آنها اشاره می‌شود.

قضیه ۵. فرض کنیم M یک خمینهٔ ریمانی فشرده n ــ بعدی با گروه بنیادی متناهی یا اولین عدد بتی صفر باشد. اگر برای $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$، $\delta(n_1, ..., n_k) > 0$، آنگاه M نمی‌تواند بطور ایزومتری در یک فضای اقلیدسی مختلط n ــ بعدی $\mathbb{C}^n$، بعنوان یک زیرخمینه لاگرانژی غوطه‌ور شود.

نامساوی موجود در قضیهٔ فوق اکید است، چون یک غوطه‌وری لاگرانژی از کرهٔ ویتنی n ــ بعدی به صفحهٔ مختلط n ــ بعدی وجود دارد و شرط $\delta(n_1, ..., n_k) \geq 0$ برای هر $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$ برقرار است. همچنین برای بعد بزرگتر از ۲، متناهی بودن گروه بنیادی یا صفر بودن اولین عدد بتی یک شرط لازم است [۳].
چن حالت کلی‌تر قضیهٔ ۳ یعنی وقتی که شرط فشردگی حذف شود را مورد بررسی قرار داد که حاصل آن قضیهٔ زیر است.

قضیه ۶. فرض کنیم خمینهٔ ریمانی n ــ بعدی M در یک نقطهٔ p و برای یک k ــ تایی $(n_1, ..., n_k) \in S(n)$، در شرط $\delta(n_1, ..., n_k)(p) > 0$ صدق کند. در این صورت این خمینه هیچگاه یک غوطه‌وری مینیمال به خمینه‌های ریمانی با انحنای مقطعی غیر مثبت را نمی‌پذیرد. بخصوص M هیچگاه یک غوطه‌وری مینیمال به فضاهای اقلیدسی با هیچ اختلاف بعدی را نمی‌پذیرد.

قضیهٔ بعدی کاربرد دیگر δ ــ پایاها در اثبات وجود مانعی برای غوطه‌وری ایزومتری مینمال یک خمینه است که استغراق خاصی را می‌پذیرد.

قضیه ۷. اگر خمینهٔ ریمانی M یک استغراق ریمانی غیر بدیهی با تارهای تماماً ژئودزی بپذیرد، آنگاه نمی‌تواند غوطه‌وری ایزومتری در هر خمینه ریمانی با انحنای غیر مثبت را بعنوان یک زیرخمینهٔ مینیمال بپذیرد.

یکی دیگر از مفاهیم مورد علاقهٔ چن که در مقالات زیادی به آن پرداخته است، لاپلاسین نگاشت‌های مختلف از جمله نگاشت گاوس است. در این بین بررسی شرایط برای هارمونیک بودن نگاشت‌ها و نیز نتایج آن از موارد مطرح برای چن است. با توجه به این مطلب موانعی نیز در مورد غوطه‌وری مینیمال حاصلضرب‌های پیچشی توسط چن به کمک δ ــ پایاها به دست آمده که مواردی از آن به صورت زیر است.

قضیه ۸. هرگاه $N_1 \times_f N_2$ یک حاصلضرب پیچشی از خمینه‌های ریمانی و نگاشت f یک نگاشت هارمونیک باشد، آنگاه $N_1 \times_f N_2$ هیچ غوطه‌وری مینیمال به خمینه ریمانی از انحنای مقطعی منفی را نمی‌پذیرد. بعلاوه هر غوطه‌وری مینیمال $N_1 \times_f N_2$ به هر فضای اقلیدسی بی توجه به اختلاف بعد، یک حاصلضرب پیچشی است.

نتیجه ۴ اگر $f \in C^\infty(N_1)$ یک تابع ویژه از عملگر لاپلاسین Δ با مقدار ویژه $\lambda > 0$ باشد، آنگاه حاصلضرب‌های پیچشی $N_1 \times_f N_2$ هیچگاه یک غوطه‌وری مینیمال به یک خمینهٔ ریمانی با انحنای مقطعی غیر مثبت را نمی‌پذیرد.

چن همچنین نتیجهٔ ۴ را با جایگزینی فرض فشردگی N_1 بجای فرض درمورد f، اثبات کرد.
ارتباط نزدیک بین مربع اندازهٔ دومین فرم اساسی و اولین مقدار ویژهٔ عملگر لاپلاسین، موجب شد که چن δ ــ پایاها را برای یافتن نتیجه‌ای ذاتی یعنی کران‌های پایین برای اولین مقدار ویژه به کار برد.

قضیه ۹. هرگاه M خمینه‌ای ریمانی n ـ بعدی، همگن، تحویل‌ناپذیر و فشرده باشد، آنگاه اولین مقدار ویژهٔ ناصفر $\lambda_۱$ از عملگر لاپلاسین Δ برای هر k ـ تایی $(n_۱, ..., n_k) \in S(n)$ در نامساوی $\lambda_۱ \geq n\Delta(n_۱, ..., n_k)$ صدق می‌کند.

البته در حالت $k = ۰$، قضیهٔ ۹ با نتیجه‌ای از ناگانو در [۲۰] یعنی $\lambda_۱ \geq \frac{۲n\tau}{n(n-۱)}$ مطابقت دارد. همچنین با توجه به تعریف انحنای عددی نرمال شده، بیان دیگری از این نامساوی بصورت $\lambda_۱ \geq n\widetilde{\Delta}_۰$ است. در واقع نامساوی اخیر به همراه نتیجه‌ای از نظریهٔ خمینه‌های از نوع متناهی که تعریف آن در ادامه خواهد آمد، یک جواب برای این سؤال در قضیهٔ زیر (از مرجع [۷]) دارد که شرط لازم و کافی مجوز بهترین روش برای زندگی در بهترین جهان چیست؟

قضیه ۱۰. یک خمینهٔ ریمانی n ـ بعدی، همگن، تحویل‌ناپذیر و فشرده، یک بهترین روش زندگی در فضایی اقلیدسی را می‌پذیرد اگر و فقط اگر در شرط ذاتی $\lambda_۱ = n\widetilde{\Delta}_۰$ صدق کند.

نتیجه‌ای مستقیم از این قضیه این است که چون برای فضای تصویری حقیقی n ـ بعدی $\lambda_۱ = ۲(n+۱)$ و $\widetilde{\Delta}_۰ = ۱$، از اینرو $\lambda_۱ \neq n\widetilde{\Delta}_۰$. درنتیجه این خمینهٔ ریمانی نمی‌تواند بهترین روش زندگی در هیچ فضای اقلیدسی را بپذیرد. چن جواب ساده‌ی دیگری نیز در [۷] به سوال شرط وجودی بهترین روش برای زندگی در بهترین جهان، به صورت زیر داده است.

قضیه ۱۱. هرگاه $v(M)$ نمایش حجم خمینهٔ ریمانی n ـ بعدی فشرده M باشد که در رابطهٔ

$$\lambda_۱ > \frac{n}{v(M)} \int_M \widetilde{\Delta}_۰ * ۱$$

صدق می‌کند، آنگاه M هیچگاه یک بهترین روش زندگی در فضایی اقلیدسی را نمی‌پذیرد.

۶ زیرخمینه‌های از نوع متناهی

گذشته از کارهایی در مورد زیرخمینه‌ها بطور عام، چن در زمینهٔ زیرخمینه‌های از نوع متناهی نیز مقالات متعددی منتشر کرده است. اولین مجموعهٔ مقالات چن در زمینه زیرخمینه‌های از نوع متناهی به صورت کتاب ([۹]) در سال ۱۹۸۴ به چاپ رسید که ارجاعات زیادی داشته است. چن همچنین در سال ۱۹۹۱ مسائل باز و حدس‌هایی در زمینه زیرخمینه‌های از نوع متناهی در [٦] منتشر کرد که تاکنون، پرداختن به مسائل باز و اثبات یا رد حدس‌های آن، دسته‌ای از محققان هندسهٔ ریمانی را به خود مشغول کرده است. البته نسخهٔ تجدید نظر شده‌ای از مقاله مذکور نیز در سال ۲۰۱۳ به چاپ رسیده است.

برای خمینهٔ ریمانی n ـ بعدی همبند (M, g)، غوطه‌وری $x : M \to \mathbb{E}^m$ را از نوع متناهی گویند هرگاه میدان برداری موقعیت M در $\mathbb{E}^m$ با همان نماد x، به صورت جمع متناهی از بردارهای ویژهٔ عملگر لاپلاسین قابل نمایش باشد. یعنی $x = c + x_۱ + x_۲ + ... + x_k$ که در آن برای $۱ \leq i \leq k$، $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ و c یک بردار ثابت است. بخصوص اگر مقادیر ویژهٔ $\{\lambda_۱, ..., \lambda_k\}$ همگی متمایز باشند، غوطه‌وری (یا زیرخمینهٔ M) را از نوع k گویند. حال اگر یکی از λ_iها صفر باشد غوطه‌وری

را از نوع kی پوچ نامند. هر زیرخمینه از نوع kی پوچ، غیرفشرده است. همانند خمینه‌های مینیمال، خمینه‌های از نوع متناهی می‌توانند به عنوان نقاط بحرانی تغییر شکل‌های جهت‌دار توصیف شوند([۳]، [۱۳]، [۱۴]).

تاکاهاشی دسته‌بندی خمینه‌های از نوع یک را انجام داده است ([۲۲])، برای این خمینه‌ها، k کمترین مقدار ممکن یعنی یک را اختیار می‌کند. تاکاهاشی ثابت کرد که یک زیرخمینه از فضای اقلیدسی $\mathbb{E}^m$ از نوع یک است اگر و فقط اگر یک زیرخمینهٔ مینیمال از $\mathbb{E}^m$ یا زیرخمینه‌ای مینیمال از یک ابررویهٔ فضای اقلیدسی باشد.

اما دسته‌بندی ابررویه‌های از نوع متناهی در $\mathbb{E}^{n+1}$ و بخصوص $\mathbb{E}^3$ در حالت کلی یکی از پرسش‌های مطرح شده توسط چن است. جواب‌های جزئی به این سوال توسط خود چن و تعدادی از همکاران وی برای حالت‌های خاص مثل $k = 2$ و $n = 1$ داده شده است. بعلاوه حدس کره بودن رویه‌های فشردهٔ از نوع متناهی در $\mathbb{E}^3$، توسط چرن بیان شده است. این حدس در بعضی حالت‌های جزئی در چند مقاله تأیید شده است، ولی در حالت کلی هنوز به عنوان یک مسئله‌ی باز مطرح است. همچنین چن ادعا کرده است که ابرکره‌ها تنها ابررویه‌های فشردهٔ از نوع متناهی در فضای اقلیدسی هستند.

دستهٔ دیگری از مسائل و حدس‌های چن مربوط به خمینه‌های از نوع دو، زیرخمینه‌های از نوع متناهی در فضاهای همگن و زیرخمینه‌های هارمونیک دوگانه است. یک غوطه‌وری ایزومتری $x : M \to \mathbb{E}^m$ (یا یک زیرخمینه) هارمونیک دوگانه است اگر $\Delta^2 x = 0$ یا بطور معادل اگر $\Delta H = 0$.

مفهوم بیان شده برای یک غوطه وری از نوع متناهی برای هر نگاشت هموار f از خمینه‌ای فشرده مثل M به یک فضای اقلیدسی $\mathbb{E}^m$ نیز تسری پیدا کرده است. یکی از مهم‌ترین مورد از این نوع نگاشت‌ها که مورد توجه چن واقع شده است، نگاشت گاوس است. نگاشت گاوس $v : M \to G(n,m)$ متناظر با غوطه‌وری x، نگاشتی هموار است که هر نقطهٔ $p \in M$ را به n ــ صفحهٔ جهت‌دار در $\mathbb{E}^m$ متناظر می‌سازد که از انتقال موازی صفحه‌ی مماس بر M در نقطه‌ی p، (در فضای $\mathbb{E}^m$)، به دست می‌آید. در اینجا $G(n,m)$ گراسمیان شامل همهٔ n ــ صفحه‌های جهت‌دار گذرا بر مبدأ در $\mathbb{E}^m$ است. چون برای $N = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$، $G(n,m)$ بطور کانونی در $\mathbb{E}^N$ نشانده می‌شود، از اینرو بررسی نگاشت گاوس از نوع متناهی را می‌توان مطرح کرد. چن و همکارش در [۱٦]، با هدف پاسخ به این سوأل که نوع نگاشت گاوسی از یک زیرخمینه $\mathbb{E}^m$ تا چه حد تعیین کننده‌ی آن است، نتایج زیر را به دست آوردند.

الف) نوع غوطه‌وری هر خم بسته در $\mathbb{E}^m$ با نوع نگاشت گاوس آن یکسان است.

ب) یک قضیه رده‌بندی برای زیرخمینه‌ها با انحنای گاوسی از نوع یک ارائه شد که یک دسته‌بندی از چنین خمینه‌هایی را به دنبال داشت.

ج) غوطه‌وری ایزومتری استاندارد از یک کرهٔ دو بعدی دلخواه، نگاشت گاوس از نوع دو دارد اگر و فقط اگر اولین نشانده شدهٔ استاندارد نباشد.

د) دسته‌بندی کاملی برای توری مینیمال تخت در S^{m-1}، با نگاشت گاوس از نوع دوم ارائه شد.
ه) به عنوان کاربردی از نگاشت گاوس از نوع متناهی، رویه‌های مینیمال در S^{m-1} دسته‌بندی شدند.

در انتها لازم به ذکر است که چن علاوه بر موضوعات بیان شده، تلاش زیادی هم در ایجاد ارتباط بین آنها داشته است. چن همچنین با هدف ارائه دسته‌بندی‌هایی برای زیرخمینه‌های مینیمال، به مسائل دیگری جز آنچه بیان شد، پرداخته است که به یک مورد آن اشاره می‌شود. مسائل فشار یکی از موضوعات کلاسیک در هندسه دیفرانسیل است که در واقع یک مسئلهٔ دسته‌بندی با توجه به ارائه‌ی کرانی برای پایاها است. مرجع [۷] یکی از مقالات پر ارجاع چن است که موضوع آن یک مسئله فشار است. در قضیه‌ای از این مقاله ثابت شده است که برای هر زیرخمینهٔ مینیمال n ـ بعدی M از یک فضای اقلیدسی m ـ بعدی، برای هر $p \in M$ و هر صفحه $\pi \subset T_pM$، داریم $K(\pi) \geq \frac{1}{2}\tau(p)$. در ادامهٔ همین قضیه، چن زیرخمینه‌های مینیمال با شرط $\inf K(\pi) = \frac{1}{2}\tau(p)$ را به طور کامل دسته‌بندی کرده است.

مراجع

[1] B.Y. Chen, *Ideal hypersurfaces of Euclidean four-space*, preprint. arXiv:1307.47772v1 [math.DG] Jul 2013.

[2] B.Y. Chen, *Ideal Lagrangian immersions in complex space forms*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128**(2000), 511-533.

[3] B.Y. Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry, δ-invariants and Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Heckensack, New Jersey, 2011.

[4] B.Y. Chen, *Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimension*, Glasgow Math. J., **41**(1999), 33-41.

[5] B.Y. Chen, *Some new obstruction to minimal and Lagrangian isometric immersion*, J. Math. Japan, **26**(2000), 105-127.

[6] B.Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. **17**(1991), 169-188.

[7] B.Y. Chen, *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math, **60**(1993), 568-578.

[8] B.Y. Chen, *Strings of Riemannian invariants, inequalities, ideal immersions and their applications*, *Third Pacific Rim Geom. Conf.* Seoul 1996, 7-60, Intern. Press, MA(1998).

[9] B.Y. Chen, *Total mean Curvature and submanifolds of finite type*, World Scientific Publisher, 1984.

[10] B.Y. Chen, F. Dillen, *Optimal general inequalities for Lagrangian submanifolds in complex space forms*, Proceedings RIGA 2011, 75-94, Ed. Univ. Bucuresti, Bucharest, 2011.

[11] B.Y. Chen, F. Dillen, *δ-invariants for Lagrangian submanifolds of complex space forms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[12] B.Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, *An exotic totally real minimal immersion of S^3 in CP^3 and its characterization*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Math.**126**(1996), 153-165.

[13] B.Y. Chen, F. Dillen, J. Van der Veken, L. Vrancken, *A variational minimal principle and its applications*, Kyungpook Math. J. **317**(1993), no.3, 435-444.

[14] B.Y. Chen, F. Dillen, J. Van der Veken, L. Vrancken, *A variational minimal principle characterizes submanifolds of finte type*, C.R. Acad. Sc. Paris **35**(1995), 961-965.

[15] B.Y. Chen, F. Dillen, J. Van der Veken, L. Vrancken, *Curvature inequalities for Lagrangian submanifolds: the final solution*, preprint.

[16] B.Y. Chen, P. Piccinni, *Submanifolds with finite type Gauss map*, Bull. Austral. Math. Soc. **44**(1987), 161-186.

[17] B.Y. Chen, A. Prieto-Martin, *Classification of Lagrangian submanifolds in complex space forms satisfying a basic equality involving δ(2,2)*, Differ. Geom. Appl. **30**(2012), 107-123.

[18] B.Y. Chen, A. Prieto-Martin, X. Wang, *Lagrangian submanifolds in complex space forms satisfying an improved equality involving δ(2,2)*, Publ. Math. Debrecen **82**(2013), 193-217.

[19] S. S. Chern, *Minimal submanifolds in a Riemannian manifold*, Univ. of Kansas, Lawrence, Kansas(1968).

[20] T. Nagano, *On the miniumum eigenvalues of the Laplacian in Riemannian manifolds*, Sci. Papers College Gen, Edu. Univ. Tokyo, **11** (1961), 177–182.

[21] J. F. NASH, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math. **63**(1956), 20-63.

[22] T. TAKAHASHI, *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **18**(1966), 380-385.

اعظم اعتماد دهکردی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
ae110mat@cc.iut.ac.ir