

مجموعه‌های اندازه‌پذیر به مثابه نقاط حدی

جی. تاناکا و پی. اف. مک لولین

برگردان: رسول کاظمی

۱. مقدمه

دانشجویان درس آنالیز حقیقی در دوره کارشناسی ارشد، با قضیهٔ توسیع کاراتئودوری آشنا می‌شوند. این قضیه نشان می‌دهد که چگونه می‌توان یک جبر را به یک σ -جبر و یک اندازهٔ متناهی جمعی روی آن جبر را به اندازه‌ای شمارا جمعی روی آن σ -جبر، گسترش داد. رویکرد متداول در بیان این قضیه، عبارت است از تعریف اندازهٔ بیرونی وابسته به اندازهٔ متناهی جمعی اولیه و سپس استفاده از جمعی بودن اندازهٔ بیرونی برای تعریف مجموعه‌های اندازه‌پذیر. در این مقاله، رویکرد دیگری به قضیهٔ توسیع کاراتئودوری ارائه می‌کنیم که در آن، مجموعه‌های اندازه‌پذیر به عنوان نقاط حدی به دست می‌آید. نشان می‌دهیم که σ -جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر به طور طبیعی به عنوان مجموعهٔ تمام نقاط حدی دنباله‌های کوشی در جبر اولیه، به وجود می‌آید. این رهیافت را به دانشجویانی پیشنهاد می‌کنیم که ممکن است تعریف مرسوم اندازه‌پذیری را غیرشهودی بدانند.

با مروری مختصر بر قضیهٔ توسیع کاراتئودوری آن‌چنان‌که در [۶]، که نمونه بارز کتاب‌های آنالیز حقیقی است، ارائه می‌شود شروع می‌کنیم. گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X یک جبر نامیده می‌شود اگر تحت عمل‌های اجتماع و مکمل‌گیری بسته باشد و یک σ -جبر نام دارد اگر نسبت به عمل‌های اجتماع شمارا و مکمل‌گیری، بسته باشد. گیریم Ω یک جبر و \mathbb{R}^+ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی همراه با $+\infty$ باشد. تابع $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک اندازهٔ متناهی جمعی نامیده

A realization of measurable sets as limit points, J. Tanaka, P. F. McLoughlin, *Amer. Math. Monthly* **117** (2010) 261-266.

می‌شود اگر $\mu(\emptyset) = 0$ و برای هر تعداد متناهی E_1, E_2, \dots, E_n از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا داشته باشیم $\mu(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$. اگر Ω یک σ -جبر باشد، تابع $\mu: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک اندازه‌شمارا جمعی (یا به‌طور ساده، یک اندازه) نامیده می‌شود اگر $\mu(\emptyset) = 0$ و برای هر دنباله $\{E_i\}$ از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا داشته باشیم $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. جفت (Ω, μ) که از یک σ -جبر Ω و یک اندازه μ تشکیل شده است، یک فضای اندازه نامیده می‌شود. گیریم μ یک اندازه متناهی جمعی روی جبر Ω باشد. به‌علاوه فرض می‌کنیم که اگر $\{E_i\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در Ω باشد و $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Omega$ ، آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. (روشن است که اگر این شرط برقرار نباشد، هیچ توسیعی برای μ به یک اندازه شمارا جمعی روی یک σ -جبر موجود نیست.) توسیع کاراتئودوری از دو تعریف زیر تشکیل می‌شود:

تعریف ۱.۱. گیریم $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ با دستور

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_i \mu(A_i) \mid E \subseteq \bigcup_i A_i, A_i \in \Omega, i = 1, 2, \dots \right\}$$

تعریف شده باشد. آن‌وقت μ^* اندازه بیرونی القایی توسط μ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱. زیرمجموعه E از X نسبت به μ^* اندازه‌پذیر خوانده می‌شود اگر برای هر $A \in \mathcal{P}(X)$ داشته باشیم $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

در حالت کلی، μ^* یک اندازه روی $\mathcal{P}(X)$ نیست. قضیه توسیع کاراتئودوری بیان می‌کند که خانواده M مرکب از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، یک σ -جبر است و μ^* نیز یک اندازه شمارا جمعی روی M است.

قضیه توسیع کاراتئودوری ابزاری توانمند هم در نظریه اندازه و هم در آمار است (برای مثال، [۴] و [۱] را ببینید). ساختار جبر بولی مربوط به توسیع کاراتئودوری در چندین مقاله بحث شده است ([۵] و [۲]). قضیه توسیع کاراتئودوری روی مجموعه‌های فازی در [۷] مورد بحث قرار گرفته است. در این مقاله، یک ساختار متریکی روی توسیع کاراتئودوری در نظر می‌گیریم که نقاط حدی مورد توجه ویژه است. در مقاله‌ای دیگر [۸]، در مورد چگونگی ساخت یک مشبکه روی فضای کامل شده یک جبر و یک یکرخیختی از آن به توسیع کاراتئودوری‌اش، بحث کرده‌ایم. توسیع کاراتئودوری، ساختارهای غنی مختلفی دارد که می‌توانند موضوع خوبی برای پژوهش‌های آینده باشند.

۲. پیشنهادها و نتایج اصلی

رهیافت توپولوژیکی به توسیع کاراتئودوری که در این مقاله بیان می‌کنیم، قابل به‌کارگیری برای هر اندازه σ - متناهی است. اندازه μ را σ - متناهی می‌نامیم هرگاه دنباله $\{X_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر موجود باشد به‌گونه‌ای که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و $\mu(X_n) < \infty$. اندازه μ متناهی نامیده می‌شود اگر $\mu(X) < \infty$. کافی است قضیه را برای اندازه‌های متناهی اثبات کنیم، زیرا حالت σ - متناهی را می‌توان از حالت متناهی همانند اثبات مرسوم قضیه توسیع کاراتئودوری به‌دست آورد.

گیریم μ یک اندازه متناهی روی جبر Ω باشد و فرض می‌کنیم که اگر $\{E_i\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در Ω باشد و $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Omega$ ، آنگاه $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. گیریم μ^* اندازه بیرونی القایی از μ باشد. برخی از ویژگی‌های مشهور اندازه بیرونی را که در کتاب‌های آنالیز حقیقی (مثلاً [۶]) می‌توان یافت در اینجا گردآوری کرده‌ایم:

- $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ، آنگاه $A \subseteq B$ اگر $A, B \in \mathcal{P}(X)$ برای هر μ^* یکنوا است؛
- $\mu^*(\bigcup A_i) \leq \sum \mu^*(A_i)$ ، $\mathcal{P}(X)$ در $\{A_i\}$ برای هر دنباله $\{A_i\}$ ؛
- $\mu^*|_{\Omega} = \mu$ [۶] صفحه ۲۹۲ را ببینید؛
- فرض کنید $d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ با دستور $d(A, B) = \mu^*(A \Delta B)$ تعریف شده است که $A \Delta B$ تفاضل متقارن A و B را نمایش می‌دهد. در این صورت d یک شبه‌متریک است، یعنی d در تعریف یک متر صدق می‌کند به جز این که ممکن است مجموعه‌های $A, B \in \mathcal{P}(X)$ موجود باشند به گونه‌ای که $A \neq B$ و $d(A, B) = 0$. اگر تعریف کنیم $A \sim B$ هرگاه $d(A, B) = 0$ ، آن وقت \sim یک رابطه هم‌ارزی روی $\mathcal{P}(X)$ است و d یک متریک روی $\mathcal{P}(X)/\sim$ القا می‌کند.

دنباله $\{B_n\}$ در Ω را μ - کوشی نامیم اگر $d(B_n, B_m) \rightarrow 0$ وقتی $m, n \rightarrow \infty$. حال \tilde{S} را گردایه تمام نقاط حدی دنباله‌های μ - کوشی تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، \tilde{S} خانواده مجموعه‌های $S \in \mathcal{P}(X)$ است با این ویژگی که دنباله μ - کوشی $\{B_n\}$ وجود دارد که $\lim \mu^*(B_n \Delta S) = 0$. این خانواده \tilde{S} جایگزین گردایه مجموعه‌های اندازه‌پذیر در تعریف ۲.۱ مربوط به قضیه توسیع کاراتئودوری خواهد شد. برای $S \in \tilde{S}$ ، $\mu(S)$ را برابر با $\lim \mu(B_n)$ تعریف می‌کنیم که $\{B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی همگرا به S است.

در اینجا به این نکته کلیدی باید توجه کرد که دنباله‌ای که جملاتش از اجتماع جملات نظیر به نظیر دو دنباله کوشی حاصل شود، خود یک دنباله کوشی است و دنباله‌ای که جملاتش مکمل جمله‌های یک دنباله کوشی است، یک دنباله کوشی است. از این موضوع نتیجه می‌شود که \tilde{S} یک جبر است. به علاوه اگر $\{S_i\}$ یک دنباله در \tilde{S} باشد با ساختن یک دنباله $\mu -$ کوشی که به S_i $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگراست، نشان می‌دهیم که \tilde{S} یک $\sigma -$ جبر است. همچنین نشان خواهیم داد که $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ همان فضای اندازه‌ای است که در قضیهٔ توسیع کاراتئودوری به دست می‌آید. به این ترتیب، مجموعه‌های اندازه‌پذیر در قضیهٔ توسیع کاراتئودوری را به چشم نقاط حدی می‌نگریم.

۳. اثبات قضایای اصلی

لم زیر چندین بار در ادامهٔ این مقاله استفاده خواهد شد.

لم ۱.۳. برای هر $A, B, C, D \in \mathcal{P}(X)$ ، $d(A \cup B, C \cup D) \leq d(A, C) + d(B, D)$.

اثبات. چون $(A \cup B) \triangle (C \cup D) \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$ ، حکم از یکنوایی و

زیرجمعی بودن μ^* نتیجه می‌شود. \square

دو لم زیر برای اثبات خوش‌تعریفی $\tilde{\mu}$ لازم‌اند.

لم ۲.۳. اگر $\{B_n\}$ یک دنباله $\mu -$ کوشی باشد، آنگاه $\{\mu(B_n)\}$ یک دنباله کوشی از اعداد حقیقی است.

اثبات. با استفاده از نامساوی مثلثی برای d ، داریم

$$|\mu(B_m) - \mu(B_n)| = |d(B_m, \emptyset) - d(B_n, \emptyset)| \leq d(B_m, B_n).$$

چون $d(B_m, B_n) \rightarrow 0$ پس $\{\mu(B_n)\}$ یک دنباله کوشی در \mathbb{R} است. \square

لم ۳.۳. اگر $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ دنباله‌های $\mu -$ کوشی باشند که به $S \in \tilde{S}$ همگرانند، آنگاه $\lim \mu(A_n) = \lim \mu(B_n)$ و موجودند و $\lim \mu(A_n) = \lim \mu(B_n)$.

اثبات. وجود حدود از لم ۲.۳ نتیجه می‌شود. برای باقیماندهٔ اثبات از این حقیقت استفاده

می‌کنیم که

$$|\mu(A_n) - \mu(B_n)| \leq d(A_n, B_n) \leq d(A_n, S) + d(S, B_n) \rightarrow 0.$$

همان طور که در بخش ۲ بیان شد، یک نکته مهم این است که دنباله های μ - کوشی نسبت به اجتماع و مکمل گیری جملاتشان بسته هستند. به طور دقیق تر:

لم ۴.۳. گیریم $\{A_n\}$ ، $\{B_n\}$ و $\{C_n\}$ دنباله های μ - کوشی باشند. آن وقت $\{A_n \cup B_n\}$ و $\{(C_n)^c\}$ نیز دنباله های μ - کوشی هستند.

اثبات. ادعای نخست از لم ۱.۳ آشکار است. دومی از این حقیقت که $(C_n)^c \Delta (C_m)^c = C_n \Delta C_m$ به دست می آید. □

حال با استفاده از لم قبل، نشان می دهیم که گردایه \tilde{S} از نقاط حدی دنباله های μ - کوشی یک جبر است.

لم ۵.۳. \tilde{S} یک جبر است.

اثبات. گیریم $S, H \in \tilde{S}$. دنباله های μ - کوشی $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ به ترتیب متناظر با S و H موجودند. بنابر لم ۱.۳،

$$d(S \cup H, A_n \cup B_n) \leq d(S, A_n) + d(H, B_n).$$

طبق لم ۴.۳، $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی است، بنابراین با حدگیری از دو طرف، نتیجه می گیریم $S \cup H \in \tilde{S}$. توجه کنید که نشان داده ایم $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی متناظر با $S \cup H$ است. به طور مشابه $S^c \in \tilde{S}$ و بنابراین \tilde{S} یک جبر است. □

گیریم $S \in \tilde{S}$. همانند بخش ۲، $\tilde{\mu}(S)$ را برابر با $\lim \mu(B_n)$ تعریف می کنیم که $\{B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی است که به S همگراست. با لم زیر خود را برای تعریف یک اندازه روی \tilde{S} آماده می کنیم.

لم ۶.۳. $\tilde{\mu}$ تابعی خوش تعریف است و $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\tilde{S}}$.

اثبات. گیریم $S \in \tilde{S}$. نشان می دهد که $\tilde{\mu}(S)$ خوش تعریف است. اگر $\{B_n\}$ یک دنباله μ - کوشی همگرا به S باشد، آنگاه

$$|\mu^*(S) - \mu(B_n)| = |d(S, \emptyset) - d(B_n, \emptyset)| \leq d(S, B_n) \rightarrow 0.$$

بنابراین $\tilde{\mu}(S) = \lim \mu(B_n) = \mu^*(S)$ و از این رو $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\tilde{S}}$. □

لم‌های ۸.۳ و ۹.۳ نشان خواهند داد که $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ یک فضای اندازه است. قبل از بیان این لم‌ها، نشان می‌دهیم که $\tilde{\mu}$ یک اندازهٔ متناهی‌جمعی است. به‌طور دقیق‌تر:

لم ۷.۳. اگر $S, H \in \tilde{S}$ جدا از هم باشند، آنگاه $\tilde{\mu}(S \cup H) = \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(H)$.

اثبات. گیریم $S, H \in \tilde{S}$ جدا از هم باشند. دنباله‌های μ -کوشی $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ به‌ترتیب متناظر با S و H وجود دارند. چنان‌که در اثبات لم ۵.۳ دیدیم، $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنبالهٔ μ -کوشی متناظر با $S \cup H$ است. چون μ متناهی‌جمعی است، $\mu(A_n \cup B_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n) - \mu(A_n \cap B_n)$. حال چون S و H جدا از هم هستند، $A_n \cap B_n \subseteq (A_n \triangle S) \cup (B_n \triangle H)$ و لذا

$$\begin{aligned} \mu(A_n, B_n) &\leq \mu^*[(A_n \triangle S) \cup (B_n \triangle H)] \\ &\leq \mu^*(A_n \triangle S) + \mu^*(B_n \triangle H) \\ &= d(A_n, S) + d(B_n, H) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

این، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S \cup H) &= \lim \mu(A_n \cup B_n) \\ &= \lim \mu(A_n) + \lim \mu(B_n) - \lim \mu(A_n \cap B_n) \\ &= \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(H). \end{aligned}$$

□

لم ۸.۳. \tilde{S} یک σ -جبر است.

اثبات. گیریم $\{S_i\}$ یک دنباله از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در \tilde{S} باشد. با استفاده از لم‌های ۶.۳ و ۷.۳، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(S_i) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}(S_i) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) \leq \mu(X) < \infty,$$

و بنابراین سری $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S_i)$ همگراست. پس بنابر زیرجمعی بودن μ^* ،

$$(۱.۳) \quad d\left(\bigcup_{i=1}^n S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(S_i) \rightarrow 0$$

□

وقتی $n \rightarrow \infty$.

اکنون یک دنباله μ - کوشی می‌سازیم که نسبت به شبه‌متریک d به S_i $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگرا باشد. به ازای هر عدد صحیح مثبت i گیریم $\{B_n^i\}$ یک دنباله μ - کوشی همگرا به S_i باشد. پس با استفاده از اثبات لم ۵.۳، دنباله‌های همگرای زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} B_1^1 & & B_1^2 & \dots & \longrightarrow & S_1 & \\ B_1^1 \cup B_1^2 & & B_1^2 \cup B_1^3 & \dots & \longrightarrow & S_1 \cup S_2 & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \bigcup_{i=1}^m B_1^i & & \bigcup_{i=1}^m B_2^i & \dots & \longrightarrow & \bigcup_{i=1}^m S_i & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{array}$$

برای هر عدد صحیح مثبت L ، رابطه (۱.۳) نتیجه می‌دهد عدد صحیح N_L چنان موجود است که

$$d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) < \frac{1}{2L}.$$

علاوه بر این، برای هر N_L ، عدد صحیح K_L یافت می‌شود به طوری که

$$d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{N_L} S_i\right) < \frac{1}{2L}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) &\leq d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{N_L} S_i\right) + d\left(\bigcup_{i=1}^{N_L} S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \\ &\leq \frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} = \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $Y_L = \bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i$. در این صورت $\{Y_L\}$ یک دنباله μ - کوشی است که به $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگراست. پس $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \tilde{S}$ و لذا \tilde{S} یک σ - جبر است.

لم ۹.۳. $\tilde{\mu}$ یک اندازه شمارا جمع روی \tilde{S} است.

اثبات. با همان نمادهای اثبات لم ۸.۳، برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی M موجود است که به‌ازای هر $n \geq M$

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(S_i) < \varepsilon.$$

علاوه بر این، با استفاده از لم‌های ۷.۳ و ۸.۳ برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) + \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}(S_i) + \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\right).$$

پس $\tilde{\mu}(U_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(S_i)$ که نشان می‌دهد $\tilde{\mu}$ یک اندازه شماراجمعی روی \tilde{S} است. \square

جمع‌بندی نتایج در قضیه اصلی ۱۰.۳ بیان می‌کند که \tilde{S} یک توسیع از جبر Ω به یک σ -جبر است و $\tilde{\mu}$ یک توسیع از اندازه متناهی جمعی μ روی Ω به یک اندازه روی \tilde{S} است. علاوه بر این، طبق قضیه اصلی ۱۱.۳، این توسیع همان توسیع مرسوم کاراتودوری است.

قضیه ۱۰.۳. $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ یک فضای اندازه است.

اثبات. حکم از لم‌های ۸.۳ و ۹.۳ نتیجه می‌شود. \square

قضیه ۱۱.۳. برای هر $E \in \tilde{S}$ داریم $E \in \mathcal{P}(X)$ اگر و فقط اگر E مطابق با تعریف مرسوم اندازه‌پذیری در تعریف ۲.۱، اندازه‌پذیر باشد.

اثبات. (\Rightarrow) تمرینی معمولی در کتاب‌های درسی آنالیز حقیقی است.

(\Leftarrow) فرض کنیم $E \in \tilde{S}$ و $A \in \mathcal{P}(X)$ دلخواه باشد. با استفاده از زیرجمعی بودن μ^* ، داریم

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

بنابراین برای اثبات اینکه E اندازه‌پذیر است لازم است که عکس نامساوی اخیر را بررسی کنیم. گیریم $\{B_n\}$ یک دنباله μ -کشی باشد به‌قسمی که $\lim \mu^*(E \triangle B_n) = 0$. بنابراین داریم $\lim \mu^*(E \cap B_n^c) = 0$ و $\lim \mu^*(E^c \cap B_n) = 0$. به‌علاوه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ چون $\{B_n\}$ اندازه‌پذیر است،

$$(۲.۳) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \cap B_n^c);$$

$$(۳.۳) \quad \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap B_n) + \mu^*(A \cap E \cap B_n^c);$$

$$(۴.۳) \quad \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c \cap B_n) + \mu^*(A \cap E^c \cap B_n^c).$$

با جمع کردن معادلات (۳.۳) و (۴.۳) و به کارگیری یکنوایی و معادله (۲.۳)، داریم

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) &= \mu^*(A \cap E \cap B_n) + \mu^*(A \cap E \cap B_n^c) \\ &+ \mu^*(A \cap E^c \cap B_n) + \mu^*(A \cap E^c \cap B_n^c) \\ &\leq \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \\ &+ \mu^*(E^c \cap B_n) + \mu^*(A \cap B_n^c) \\ &= \mu^*(A) + \mu^*(E \cap B_n^c) + \mu^*(E^c \cap B_n). \end{aligned}$$

سرانجام با حدگیری وقتی $n \rightarrow \infty$ نتیجه می‌گیریم

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A).$$

□ بنابراین $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ و E اندازه‌پذیر است.

۴. جمع‌بندی

قضیه‌های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ نشان می‌دهند که وقتی μ یک اندازه متناهی است، فضای اندازه $(\tilde{S}, \tilde{\mu})$ با توسیع کاراتودوری مطابقت دارد. علاوه بر این، قضیه ۱۱.۳ نشان می‌دهد که مجموعه‌های اندازه‌پذیر دقیقاً نقاط حدی دنباله‌های μ - کوشی‌اند و اندازه توسیع‌یافته در اثبات مرسوم قضیه کاراتودوری، همان اندازه حدی روی دنباله‌های μ - کوشی است. حالت σ - متناهی از حالت متناهی نتیجه می‌شود.

تشکر و قدردانی

نویسنده اول علاقه‌مند است از پدر بزرگش ویچی تاناکا^۱ به خاطر الهام‌بخش بودنش و کمک‌های مالی و از آندریو آمِس^۲ برای تشویق او در پیش بردن تحصیلاتش تشکر نماید. با حمایت‌های مهربانانه این دو، نویسنده اول توانست به پیشرفت‌هایی ورای آنچه که تصورش را می‌کرد نائل شود. ضمناً هر دو نویسنده علاقه‌مندند از پروفسور میشل لاپیدوس^۳ و پروفسور جیمز استفنی^۴ و داوران

^۱Waichi Tanaka ^۲Andrew Aames ^۳Michel L. Lapidus ^۴James D. Stafney

ناشناس برای توصیه‌های تخصصی آنها در مورد این مقاله و از آنه هانسن^۱ و الیجا دپالما^۲ برای کمک‌های ویرایشی تشکر نمایند.

مراجع

- [1] R. N. Bhattacharya and E. C. Waymire, *Stochastic processes with applications*, Wiley InterScience, New York, 1990.
- [2] T. Coquand and E. Palmgren, Metric boolean algebras and constructive measure theory, *Arch. Math. Logic*, **41** (2002) 687-704.
- [3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators, general theory (Part I)*, Wiley InterScience, New York, 1988.
- [4] T. R. Fleming and D. P. Harrington, *Counting Processes and Survival Analysis*, Wiley InterScience, New York, 1991.
- [5] A. N. Kolmogorov, Complete metric boolean algebras, *Stud.*, **77** (1995) 57-66.
- [6] H. L. Royden, *Real analysis*, 3rd ed., Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [7] M. Sahin, On Carathéodory extension theorem on fuzzy measure space, *Far East J. Math. Sci.*, **26** (2007) 311-317.
- [8] J. Tanaka and P. F. Mcloughlin, Construction of a lattice on the completion of an algebra and an isomorphism to its Carathéodory extension, (to appear).

رسول کاظمی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان
ریانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir