فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) صص. ۵۵ تا ۸۰

بوخبرگر و پایه‌های گربنر

رشید زارع نهندی

چکیده

پایهٔ گربنر ابزار اصلی جبر جابجایی محاسباتی و عامل عمدهٔ تبلور این مبحث از ریاضیات است. به بیانی ساده هر پایهٔ گربنر، محاسبات روی چندجمله‌ای‌ها را به محاسبات روی تک جمله‌ای‌ها تبدیل می‌کند.

عملیات روی تک‌جمله‌ای‌ها ماهیت الگوریتمی و ترکیبیاتی دارند و به طور طبیعی استفاده از کامپیوتر را ضروری می‌سازد. ورود کامپیوتر به عرصهٔ چنین مباحث مجرد ریاضی، تأثیر شگرفی در تبیین خود ریاضیات و روش‌های برهان احکام ریاضی شده است و برهان‌های الگوریتمی قضایا مورد توجه قرار گرفته‌اند و شیوه متقدمان ریاضی را که برهان‌هایشان اغلب الگوریتمی بوده، بار دیگر زنده کرده است. امروزه با پیشرفت مبانی نظریهٔ پایه‌های گربنر و با توجه به نقش اساسی چندجمله‌ای‌ها در علوم ریاضی، این پایه‌ها کاربردهای گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف ریاضیات محض و کاربردی پیدا کرده است.

در این مقاله ابتدا به تبیین سیر تاریخی پیدایش نظریهٔ پایه‌های گربنر می‌پردازیم که شامل شرح مختصری از زندگی علمی برونو بوخبرگر، واضع اصلی پایه‌های گربنر است. سپس بعضی از تعاریف، قضایای اساسی و نتایج مقدماتی در این زمینه را بیان می‌کنیم و در نهایت، برخی از کاربردهای پایه‌های گربنر را معرفی می‌کنیم.

۱. مقدمه و تاریخچه

اوایل دههٔ ۱۹۶۰، زمانی که ولفگانگ گربنر[1] استاد ریاضیات دانشگاه اینسبروک[2] اتریش مسأله‌ای در رابطه با حلقه خارج قسمتی یک ایدآل صفربعدی مطرح کرد، احتمالاً تصور نمی‌کرد که ارائه‌ی یک الگوریتم برای حل این مسأله توسط یکی از دانشجویانش به نام برونو بوخبرگر[3]،

1) Wolfgang Gröbner 2) Innsbruck 3) Bruno Buchberger

شاخه‌ای جدید در ریاضیات با نام پایه‌های گربنر ایجاد کند و ده‌ها کتاب و صدها مقاله در این زمینه نوشته شود و گربنر در بین معدود افرادی قرار گیرد که نامشان در طبقه‌بندی موضوعی ریاضیات (MSC) ظاهر شده است[۱]. گربنر، متولد ۱۸۹۹، دکتری ریاضیات را در ۱۹۳۲ از دانشگاه وین اخذ کرد و سپس به گوتینگن رفت و در آنجا با مصاحبت امی نوتر ایده‌های اصلی ریاضی خود را فرا گرفت. وی پس از بازگشت به اتریش استاد دانشگاه اینسبروک شد و تا پایان عمر خود ۴۶ دانشجوی دکتری و تعداد زیادی دانشجوی کارشناسی ارشد تربیت کرد. گربنر دارای عقاید فلسفی خاصی نیز بود و در سال‌های دهه‌ی ۶۰ دو نوع سمینار هفتگی برگزار می‌کرد: سمینارهای فلسفی و سمینارهای ریاضی. سمینارهای نوع اول که طرفداران زیادی هم داشت، معمولاً تبدیل به مناظره‌های داغ با صاحب‌نظران مختلف می‌شد. در آن سال‌ها، گربنر وقت زیادی برای گفتگو با تک‌تک دانشجویان ریاضی خود صرف نمی‌کرد و مطالب و مسائل مورد نظر خود را در سمینارهای هفتگی ریاضی مطرح و از دانشجویان خود می‌خواست که در باره آن‌ها تحقیق کنند.

یکی از مسائلی که گربنر در چندین جلسه مطرح کرد و نظر بوخبرگر جوان به آن جلب شد، صورت ساده‌ای داشت: پایه‌ای برای فضای برداری با بعد متناهی $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ که K یک میدان و I یک ایدآل صفربعدی است پیدا کنید. در ۱۹۰۰ گُردان[۲] برای اثبات قضیه پایه هیلبرت از وجود یک مولد متناهی برای ایدآل تک‌جمله‌ای استفاده کرده بود [21]. شاید این اولین مورد استفاده از روشی بود که خاصیتی از یک ایدآل چندجمله‌ای را با استفاده از وجود همان خاصیت در یک ایدآل تک‌جمله‌ای مناسب نتیجه می‌گرفت. سال‌ها بعد، در سال ۱۹۱۶ فرانسیس مکالی[۳] در کتاب معروف و تاثیرگذار خود [30] با در نظر گرفتن یک ترتیب خطی با خواصی معین روی مجموعه تک‌جمله‌ای‌های n متغیره، در هر چندجمله‌ای بزرگترین جمله را به عنوان جمله پیشرو گرفته و مجموعه تمام جملات پیشرو اعضای یک ایدآل را تشکیل داده بود. او ثابت کرده بود که مجموعه تمام تک‌جمله‌ای‌هایی که در مجموعه جملات پیشرو ایدآل I قرار ندارند، تشکیل یک پایه برای فضای برداری $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ می‌دهد. این مطلب به قضیه مکالی معروف شده است. همچنین مکالی در مقاله [31] در سال ۱۹۲۷ از ایدآل‌های تک‌جمله‌ای استفاده کرد و شرط این که یک دنباله از اعداد صحیح، تابع هیلبرت یک حلقه مدرج باشد را به دست آورد.

گربنر در ۱۹۳۹ مقاله‌ای منتشر کرد [24] که حاوی کاربردهای متنوعی از روش‌های مکالی و استفاده از ترتیب روی تک جمله‌ای‌ها بود. او در این مقاله و سپس در مقاله [25] در سال ۱۹۵۰ قضیه مکالی را در حالت ایدآل تک‌جمله‌ای مجدداً اثبات کرد و روش‌هایی برای به دست آوردن پایه‌ی فضای برداری حلقه‌ی خارج قسمتی ارائه کرد. جملاتی در انتهای مقاله‌ی ۱۹۵۰ گربنر به این صورت نوشته شده است: «من این روش‌ها را طی ۱۷ سال در موارد فراوان و پیچیده آزموده و به‌کار برده‌ام. اکنون بر این باورم که این روش‌ها می‌توانند به ابزاری قوی برای حل مسائل مطرح در نظریه‌ی ایدآل‌ها تبدیل شوند.» گربنر منتظر کسی بود که با ارائه‌ی یک الگوریتم ابزار فوق را

1) 13P10 Polynomial ideals, Gröbner bases 2) P. Gordan 3) Francis Macaulay



۱) دیوید هیلبرت (۱۹۴۳–۱۸۶۲)، یکی از بزرگترین و تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرون نوزدهم و بیستم که پایه بسیاری از شاخه‌های ریاضیات نوین بر یافته‌های او استوار است. ۲) پال گردان (۱۹۱۲–۱۸۳۷)، از اولین کسانی بود که در کارهای خود از ایدآل تک‌جمله‌ای‌ها استفاده کرد. ۳) لئونارد دیکسون (۱۹۵۴–۱۸۷۴)، از اولین ریاضیدانان امریکایی بود که در جبر مجرد پژوهش می‌کرد. لم دیکسون خوش‌ترتیب بودن مجموعه تک‌جمله‌ای‌ها را ثابت می‌کند.

به روشنی معرفی کند. سرانجام گربنر این موضوع را به عنوان موضوع رساله‌ی دکتری بوخبرگر در ۱۹۶۳ در نظر گرفت.

بوخبرگر پس از دو سال تعمّق روی مسأله نشان داد که مولدی متناهی برای ایدآل I وجود دارد که جملات پیشرو اعضای آن، ایدآل تولید شده توسط همه جملات پیشرو اعضای I را تولید می‌کنند. وی همچنین الگوریتم ساده‌ای برای به دست آوردن این مولد با استفاده از هر مولد دلخواه دیگر ارائه کرد. بوخبرگر مطالب خود را در قالب رساله دکتری نوشت و به گربنر تحویل داد [5]. ظاهراً گربنر هرگز پایان‌نامه بوخبرگر را به صورت کامل نخواند و بنابر گزارش یکی از دستیارانش که به تازگی در شاخه معادلات دیفرانسیل فارغ‌التحصیل شده بود، نامه‌ای مبنی بر تأیید رساله‌ی بوخبرگر به دانشگاه نوشت و اعلام کرد که او استحقاق اخذ درجه دکتری ریاضی را دارد. سپس پایان‌نامه توسط افرادی داوری شد که آشنایی چندانی با جبر نداشتند و طبعاً هیچ توصیه‌ای به بوخبرگر نشد. او پس از فارغ‌التحصیلی در سال ۱۹۶۵ در بخش تازه تاسیس کامپیوتر دانشگاه اینسبروک به کار برنامه‌نویسی مشغول شد و چند سال تحقیقات ریاضی را کنار گذاشت تا این‌که به تشویق یکی از همکاران خود به نام رودیگر لوس [1] مقاله‌ای از رساله‌اش استخراج و به زبان آلمانی در سال ۱۹۷۰ و سپس به انگلیسی در سال ۱۹۷۶ به چاپ رساند [6]، [7]. بوخبرگر با لوس در زمینه جبر کامپیوتری همکاری مثمر ثمری داشت. نه در رساله و نه در مقاله مستخرج از آن نامی از پایه گربنر نبود. بوخبرگر که نخست از بی‌توجهی ظاهری استادش ناراحت شده بود، کم‌کم به نقش اساسی گربنر در کار خود پی برد. او فهمید که گربنر مسأله‌ای به او داده بود که خودش در طول

1) Rüdiger Loos

سال‌ها تحقیق به آن رسیده‌بود. بوخبرگر خود را مدیون گربنر دانست که با وسعت فکر و آزادی عملی که به او بخشیده بود و با ارائه‌ی یک مسأله‌ی عالی موفقیتی بزرگ به او هدیه کرده بود. بوخبرگر برای ادای این دین، مولد ویژه‌ای را که برای ایدآل‌ها به دست آورده بود پایه گربنر نام نهاد و آن را به صورت رسمی در یک سخنرانی در سمینار اروپایی «محاسبات نمادین و جبری» در سال ۱۹۷۹، دو سال قبل از فوت گربنر، اعلام کرد [42]. اکنون پایه گربنر و الگوریتم بوخبرگر برای محاسبه آن، در همه نرم‌افزارهای مهم ریاضی مانند Magma، Maple، Mathematica، CoCoA و SINGULAR گنجانده شده و میلیون‌ها نفر کاربر در سراسر جهان دارد.

لازم به ذکر است که هیسوکه هیروناکا[1] که در ۱۹۷۰ به خاطر کارهای عمیقش در نظریه‌ی تکینگی‌ها برنده‌ی مدال فیلدز شده‌است، در مقاله بسیار عمیق خود در سال ۱۹۶۴ وجود «پایه‌ی استاندارد» که مفهومی مشابه پایه‌ی گربنر است را برای توان‌های صوری یک ایدآل چندجمله‌ای‌ها اثبات کرده بود [26]. هرچند هیروناکا در این مقاله روشی برای یافتن این پایه ارائه نکرده‌است، ولی می‌توان ابداع این مفهوم توسط وی را مقدم بر کار بوخبرگر به حساب آورد.

بوخبرگر تا ۱۹۷۳ مقیم دانشگاه اینسبروک بود و در آنجا اولین برنامه‌ی کامپیوتری را برای محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر نوشت. در آن سال‌ها، بیشتر ریاضیدانان جوان اروپایی مشتاق بودند که فرصت مطالعاتی خود را در آمریکا بگذرانند، ولی بوخبرگر شوروی را انتخاب کرد و یک سال در موسسهٔ تحقیقات هسته‌ای مشترک (JINR) در شهر دوبنا در نزدیکی مسکو به سر برد. این مسافرت یک تجربه ممتاز بود. او در ۱۹۷۴ به اتریش برگشت و با مرتبه استادی در نظریه الگوریتم و منطق ریاضی در دانشگاه یوهان کپلر شهر لینز استخدام شد. او در سال‌های اول استخدام، بخش محاسبات موازی دانشگاه لینز را طراحی و راه‌اندازی کرد.

در اوایل دهه‌ی ۸۰ میلادی بوخبرگر با میشل مولر[2] آشنا شد و در سال ۱۹۸۲ مقاله مشترکی با وی در مورد استفاده از پایه‌های گربنر در یافتن مولدهای ایدآلی که در مجموعه‌ای متناهی از نقاط مشخص صفر می‌شود و همچنین محاسبه‌ی چندجمله‌ای درونیاب این نقاط نوشت [34]. در آن سال‌ها مبحث پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌ها مطرح شده بود. مایر و مایر[3] در ۱۹۸۲ [32] و بوخبرگر در مقاله‌ی [9] نشان دادند که پیچیدگی محاسباتی الگوریتم یافتن پایه‌ی گربنر به شدت بالا است. مولر در ادامه‌ی کار خود با همکاری فردیناندو مورا[4] الگوریتم بوخبرگر را کمی بهبود بخشید و با استفاده از پایه گربنر روش‌هایی برای محاسبه تحلیل آزاد و سری هیلبرت ایدآل‌های چندجمله‌ای‌های همگن ارائه داد [33]. پژوهش‌های از این نوع بعدها توسط تئو مورا[5] نیز گسترش یافت. از طرف دیگر، دانیل لازارد[6] در مقاله [29] که نقطه عطفی در روند ورود کامپیوتر به جبر است، پایه‌های گربنر را وارد علوم کامپیوتر کرد. لازارد یکی از پیشروان جبر محاسباتی است.

---

1) Heisuke Hironaka 2) Michael Muller 3) E. Mayr and A. R. Meyer
4) Ferdinando Mora 5) Teo Mora 6) Daniel Lazard

۱) فرانسیس مکالی (۱۹۳۷–۱۸۶۲)، کتاب‌ها و مقالات او الهام‌بخش گربنر بوده و اساس کار بسیاری از محاسبات در جبر جابجایی است. ۲) امی نوتر (۱۹۳۵–۱۸۸۲)، از بنیانگذاران جبرجابجایی که گربنر ایده‌های جبری خود را از او فرا گرفت. ۳) ولفگانگ گربنر (۱۹۸۱–۱۸۹۹)، استاد بوخبرگر و از معدود ریاضیدانانی که نامش در طبقه‌بندی موضوعی ریاضیات ظاهر شده است.

با استقبال لورنزو روبیانو[1] و جوزپه والاّ[2] [39,40] و ادامه کارهای بوخبرگر، مولر، مورا، لازارد و به ویژه با فارغ‌التحصیل شدن فرانتز وینکلر[3] در ۱۹۸۴، به عنوان اولین دانشجوی دکتری بوخبرگر، تحقیقات جهانی روی پایه‌های گربنر وارد مرحله جدیدی شد. در واقع روبیانو و والاّ مبانی جبری و لازارد مبانی محاسباتی مفاهیم پایه گربنر را پایه‌ریزی کردند.

بوخبرگر در ادامه فعالیت‌های خود، مجله محاسبات نمادین (Journal of Symbolic Computation) را در ۱۹۸۵ پایه‌گذاری کرد و ده سال سردبیری آن را به عهده گرفت. این مجله معتبرترین مجله در شاخه محاسبات نمادین به شمار می‌رود. بوخبرگر در ۱۹۸۷ انستیتو تحقیقاتی محاسبات نمادین (Research Institute for Symbolic Computation) (ریسک) را به عنوان یک بخش از دانشگاه یوهان کپلر تاسیس کرد. او در ۱۹۸۸، زمانی که برای فرصت مطالعاتی در ژاپن به سر می‌برد، نامه‌ای دریافت کرد مبنی بر این که وزیر علوم ایالت اتریش علیا[4] تقاضای وی جهت تأمین محلی مستقل برای این انستیتو را پذیرفته است. او بدون درنگ به اتریش مراجعت و به ملاقات وزیر رفت. وزیر از او می‌خواهد که با راه‌اندازی یک مجموعه تحقیقاتی پیشرفته در یک منطقه‌ی کم‌جمعیت اتریش علیا موجبات پیشرفت و مورد توجه قرارگرفتن آن منطقه را فراهم آورد. بوخبرگر پس از گشت و گذاری در اطراف لینز، کاخی قدیمی را می‌یابد که در دهکده‌ی هاگنبرگ[5] در ۲۰ کیلومتری لینز واقع شده است. در اواسط جنگ جهانی دوم، زمانی که همه به فکر دور شدن از مناطق جنگی بودند، فردی از اهالی هاگنبرگ اکثر زمین‌های آن ده، شامل زمین‌های کاخ را به قیمتی بسیار ارزان خریداری کرده بود. از آن زمان کاخ مذکور متروکه مانده و تبدیل به یک مخروبه شده بود. بوخبرگر کاخ را از آن فرد می‌خرد و یک روز عصر همکاران خود در دانشگاه یوهان کپلر را

1) Lorenzo Robbiano 2) Giuseppe Valla 3) Franz Winkler 4) Upper Austria
5) Hagenberg

به آنجا برده و نقشه خود را شرح می‌دهد. در آن روز کمتر کسی باور کرده بود که یک سال دیگر در روزی مشابه، ریسک در آن کاخ مستقر شده باشد. ده سال بعد نمایندگان بنیاد ملی علوم آمریکا (NSF) پس از بازدید از این انستیتو، آن را مرکزی بسیار فعال ارزیابی کردند که مشابه آن در آمریکا هم وجود ندارد. اکنون بعد از گذشت بیش از ۲۰ سال، دهکده‌ی دوهزار نفری هاگنبرگ به یک شهرک دانشگاهی و تحقیقاتی با بیش از شش‌هزار نفر تبدیل شده است. ایجاد یک پارک نرم‌افزار[1] با بیش از ۲۰۰ شرکت جوان نرم‌افزاری در کنار ریسک نیز با پیشنهاد و تلاش‌های بوخبرگر به انجام رسیده است.

بوخبرگر در سال‌های دهه‌ی نود به همراه تیمی در ریسک به نام Theorema با تحقیقات در منطق و علوم نظری کامپیوتر سعی کرده است سیستمی ابداع کند که برخی از انواع قضایای ریاضی را به طور خودکار اثبات کند و بتواند راه حل و الگوریتم برای حل برخی از مسائل ریاضی ارائه دهد. پس از راه‌اندازی ویرایش اول این سیستم در سال ۲۰۰۴ مسأله‌ی طرح شده توسط گربنر که در ۱۹۶۳ به بوخبرگر داده شده بود به این سیستم ارائه شد. جالب این بود که سیستم، الگوریتم بوخبرگر را برای حل آن پیشنهاد کرد!

به باور بوخبرگر علم محاسبات نمادین رشته‌ای است که از به هم پیوستن منطق، ریاضیات و علوم کامپیوتر تشکیل شده و توانایی‌های هر سه علم را دارد. روش بوخبرگر در کار علمی، شفافیت، سادگی و روشنی در ارائه و تفسیر مطالب و ساختارها، واضح‌سازی اهداف و پیشروی گام به گام به سوی آنها می‌باشد. اکثر کسانی که برای گذراندن دوره‌های مختلف در ریسک به سر برده‌اند، از کلاس‌های منحصر به فرد وی با عنوان «Thinking, Speaking, Writing» لذت برده‌اند. بوخبرگر با کارهای علمی ماندگار و تأسیس مجله و انستیتو، و همچنین تربیت بیش از ۴۰ دانشجوی دکتری، سهم بسزایی در جریان تحقیقات ریاضی امروز جهان داشته است. گرچه وی در سال ۲۰۰۲ بازنشسته شد و کارهای مدیریتی خود را به دیگران سپرد، ولی همچنان با انرژی وصف‌ناپذیری به فعالیت‌های علمی و عملی خود ادامه می‌دهد.

در اینجا نقل خاطره‌ای از پیتر پائوله[2] از همکاران بوخبرگر در ریسک خالی از لطف نیست. در یکی از کنفرانس‌های ریاضی اروپایی در اواخر دهه نود که بوخبرگر یکی از سخنرانان مدعو بود، میزگردی در مورد نحوه امتیازدهی به فعالیت‌های اعضای هیات علمی ریاضی دانشگاهها تشکیل می‌شود. بوخبرگر نیز به عنوان عضو آکادمی علوم اروپا در این میزگرد شرکت داشت. سوالی مطرح می‌شود که آیا برای ریاضیدانان ایجاد و یا بهبود نرم‌افزارها نیز می‌تواند امتیاز محسوب شود؟ نظر بیشتر افراد در آن جلسه منفی بود و در نهایت علی‌رغم بحث‌های فراوان به نتیجه‌ای نمی‌رسند. در انتها بوخبرگر خطاب به جمع می‌گوید «به نظر من در آینده برای ریاضیدان شدن باید اول برنامه‌نویس شد». ناگهان از انتهای سالن بزرگ کسی فریاد می‌زند که بهتر است یک محافظ برای خودت بگیری چون جانت در خطر است!

---

1) software park 2) Peter Paule

۱) هیسوکه هیروناکا، برنده‌ی مدال فیلدز، تقریباً هم‌زمان با بوخبرگر، تعریفی مشابه پایه‌ی گربنر مطرح کرد. ۲) برونو بوخبرگر، با ارائه الگوریتمی برای یافتن پایه گربنر گام بزرگی در جبر محاسباتی برداشت. ۳) رودیگر لوس، مشوق بوخبرگر برای ادامه تحقیقات و اولین همکار تحقیقاتی او.

همان طور که ذکر شد، در دهه ۸۰ میلادی نظریه و روش‌های پایه‌های گربنر تبدیل به یک جریان تحقیقاتی در برخی از شاخه‌های ریاضی و علوم کامپیوتر شد. پس از آن نیز تعمیم‌ها و کاربردهای فراوانی از پایه‌های گربنر به دست آمده است. سادگی مفاهیم اولیه و قدرتمند بودن این نظریه در حل مسائل، باعث شد که در تعداد زیادی از شاخه‌های علوم از آن استقبال شود. در واقع، پایه گربنرِ یک ایدآل چندجمله‌ای، یک ایدآل تک‌جمله‌ای به دست می‌دهد که بیشتر خواص مهم آن ایدآل را در بر دارد. علاوه بر این که کار با ایدآلهای تک‌جمله‌ای راحت‌تر است، اهمیت خود ایدآل‌های تک‌جمله‌ای نیز با کارهای اساسی ریچارد استنلی[1] در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ در معرفی مجتمع‌های سادکی برای ایدآل‌های تک‌جمله‌ای خالی از مربع [41] و استفاده ماهرانه از آنها برای اثبات حدس معروف کران بالای تعداد کره‌ها در فضا، بر همگان روشن شده‌است. بنابراین، پایه‌های گربنر به هر مسأله‌ای که بتواند به زبان چندجمله‌ای‌ها بیان شود، یک ایدآل تک‌جمله‌ای متناظر می‌کند که ابزارهای جبری و ترکیبیاتی فراوانی برای شناسایی آنها در دسترس است.

در جبرجابجایی، پایه‌های گربنر نه تنها برای اهداف محاسباتی به‌کار می‌رود، بلکه در پاسخ به برخی سؤالات در مفاهیم کاملا نظری و عمیق مفید بوده است. مثلاً با استفاده از مفاهیم پایه‌های گربنر ثابت می‌شود خواص جبری ایدآل‌های دترمینانی می‌تواند توسط یک ایدآل تک‌جمله‌ای خالی از مربع بیان شود که در مقالات اساسی آلدو کونکا[2] و وینفرید برونز[3] [4] به آن پرداخته شده است. ایدآل‌های دترمینانی در هندسه جبری از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند و از خواص جبری آنان، اطلاعات زیادی در رابطه با خواص هندسی نقاط تکین واریته‌ها استخراج می‌شود [50].

از طرف دیگر، روش‌های الگوریتمی و ساختارگرایانه در هندسه جبری و جبرجابجایی که اواسط

1) Richard Stanley 2) Aldo Conca 3) Winfried Bruns

قرن بیستم با وجود تجریدگران قدرتمند مانند ژان دیودونه[1] و الکساندر گروتندیک[2] کم‌رنگ شده بود، در دهه‌های پایانی قرن با ظهور پدیده کامپیوتر و تلاش ریاضیدانان تأثیرگذاری چون شریرام ابیَنکار[3] [1]، دوباره احیا شد و با کمک پایه‌های گربنر به عنوان جریان مهمی در جبر جابجایی و هندسه‌ی جبری مورد اقبال ریاضیدانان قرار گرفت.

در مجموع، اکنون می‌توان این ادعا را پذیرفت که پایه‌های گربنر و الگوریتم بوخبرگر به مفاهیمی بنیادی در جبر تبدیل شده‌اند و بیشتر کتاب‌های درسی جبر سال‌های اول دانشگاهی، فصل‌هایی را برای معرفی این نظریه در خود گنجانده‌اند. این مفاهیم موتوری برای محاسبات پیشرفته در هندسه‌ی جبری از جمله نظریه‌ی حذف[4]، همانستگی[5] و تحلیل تکینگی‌ها[6] فراهم می‌کنند. این نظریه نشان داده است که مدل‌های چندجمله‌ای می‌تواند در همه جای علوم و مهندسی ظاهر شده و مفید واقع شوند. پایه‌های گربنر توسط پژوهشگران بهینه‌سازی، نظریه‌ی کدگذاری، نظریه‌ی کنترل، رباتیک، آمار، زیست‌شناسی مولکولی و ... نیز استفاده می‌شود.

سه بسته‌ی نرم‌افزاری که اساس کار آنها محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر است، عبارتند از: کوکوآ (CoCoA)، سینگولار (SINGULAR)، و مکالی ۲ (Macaulay 2). کوکوآ در دانشگاه جنوا توسط تیمی به رهبری روبیانو و عضویت جان ابوت[7]، آنا بیگاتی[8] و ماسیمو کابوارا[9] طراحی شده است [12]. سینگولار در دانشگاه کایزرس‌لاترن به وسیله‌ی تیمی با هدایت گرت ــ مارتین گروئل[10]، گرهارد فیستر[11] و هانس شونمان[12] تهیه شده [23] و مکالی ۲ در دانشگاه کرنل با تلاش دیوید بایر[13]، مایکل استیلمن[14] و دانیل گریسون[15] نوشته شده است [22].

از ریاضیدانان دیگری که تحقیقات اساسی در ارتباط با پایه‌های گربنر، از نظر محاسباتی، مفهومی و یا کاربردی، انجام داده‌اند، می‌توان این افراد را نام برد: فرانتز پوئر[16]، کارلو تراورسو[17]، رالف فروبرگ[18]، ژان ــ شارل فوگر[19]، مارتین کروتزر[20]، ولادیمیر گردت[21] و فولکر ویسفنینگ[22].

در ایران، رحیم زارع‌نهندی نخستین کسی بود که موضوع پایه‌های گربنر را مطرح کرد. سپس نگارنده در رساله‌ی دکتری خود پایه‌های گربنر را در اثبات قضیه‌ی اصلی مربوط به تحلیل آزاد ایدآل‌های دترمینانی به کار برد [50]. وی تحقیق در این زمینه را ادامه داده است [51]. در سال ۱۳۸۴ مدرسه تابستانی پایه‌های گربنر و کاربردهای آن با حمایت مرکز بین‌المللی ریاضیات محض و کاربردی (CIMPA) در دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان به مدت دو هفته برگزار شد.

1) Jean Dieudonne 2) Alexander Grothendieck 3) Shreeram Abhyankar
4) elimination theory 5) cohomology 6) resolution of singularities
7) John Abbott 8) Anna Bigatti 9) Massomo Caboara 10) Gert-Martin Greuel
11) Gehard Pfister 12) Hans Schönemann 13) David Bayer 14) Micheal Stillman
15) Daniel Grayson 16) Franz Pauer 17) Carlo Traverso 18) Ralf Früberg
19) Jean-Charles Faugère 20) Martin Kreuzer 21) Vladimir Gerdt
22) Volker Weispfenning

۱) جوزِپّه والّا. ۲) لورنزو روبیانو، او به همراه والّا از نخستین ریاضیدانانی بودند که از مفهوم پایه گربنر استقبال کرده و با شروع تحقیقات عمیق در این زمینه پایه‌های جبری آن را استحکام بخشیدند. ۳) دانیل لازارد، یکی از پیشروان جبر محاسباتی که کارهای مهمی در بهینه کردن الگوریتم‌های پایه‌های گربنر انجام داده‌است.

در این مدرسه صاحب‌نظران تراز اول پایه‌های گربنر از جمله بوخبرگر، روبیانو، گروئل و کونکا به همراه جمعی دیگر، آخرین پیشرفت‌های این نظریه را به حدود ۹۰ نفر شرکت کننده از داخل و خارج کشور ارائه کردند. در حال حاضر با فعالیت‌های پژوهشی افرادی مانند رحیم زارع‌نهندی، فرهاد رحمتی، علی بصیری، رشید زارع‌نهندی، حسین سبزرو، امیر هاشمی، و همچنین حسن حقیقی، منصور آقاسی، فرضعلی ایزدی، مهدی امیدعلی، کیوان برنا، مجید فرهادی، سعید تفضلیان، لیلا شریفان، فاطمه محمدی، سمیه مرادی و پژوهشگران علاقه‌مند دیگر به‌ویژه در جامعه جبر جابجایی کشور، گروه‌های تحقیقاتی در زمینه جبر جابجایی و هندسه‌ی جبری محاسباتی در ایران در حال شکل‌گیری است.

کتاب‌نامه‌ی انتهای این نوشتار شامل عناوین بخشی از کتاب‌ها و مقالات اساسی در پایه‌های گربنر و کاربرد آن در سایر شاخه‌های ریاضیات می‌باشد. کتاب [14] می‌تواند به عنوان اولین درس در هندسه‌ی جبری محاسباتی در سال‌های سوم و چهارم دوره‌ی کارشناسی ریاضی تدریس شود. کتاب‌های [2]، [15]، [19]، [27] و [47] برای تدریس در دوره‌ی کارشناسی ارشد ریاضی مناسب هستند.

۲. مفاهیم بنیادی

۱.۲. ترتیب روی تک‌جمله‌ای‌ها

فرض کنید K یک میدان و $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب در K باشد. می‌توان P را به عنوان یک فضای برداری با بعد نامتناهی روی K در نظر گرفت که پایه‌ی آن $T^n = \{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_{\geq 0}\}$ است.

هر عضو T^n یک بخش[1] نامیده می‌شود. مجموعه T^n به همراه عمل ضرب یک تکواره[2] است که با تکواره‌ی N^n با عمل جمع برداری یکریخت است. تابع یکریختی از T^n به N^n همان تابع لگاریتم است: $\log(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n})=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

تعریف ۱. ترتیب بخشی[3]، ترتیبی خطی مانند $\leq_\sigma$ روی T^n است که دو شرط زیر را برآورد می‌کند:

الف) به ازای هر m_1، m_2 و m_3 در T^n که $m_1\leq_\sigma m_2$، نتیجه شود $m_1m_3\leq_\sigma m_2m_3$.

ب) به ازای هر m در T^n، $1\leq_\sigma m$.

مثال‌های مهم ترتیب بخشی، ترتیب‌های لغت‌نامه‌ای[4] ($\leq_{\text{lex}}$)، لغت‌نامه‌ای درجه‌ای[5] ($\leq_{\text{dlex}}$) و عکس لغت‌نامه‌ای درجه‌ای[6] ($\leq_{\text{drlex}}$) هستند:

گوییم $m_1\leq_{\text{lex}} m_2$ هرگاه $m_1=m_2$ و یا اولین مولفه ناصفر از سمت چپ در بردار $\log(m_2)-\log(m_1)$، مثبت باشد.

گوییم $m_1\leq_{\text{dlex}} m_2$ هرگاه $m_1=m_2$، یا مجموع توان‌ها در m_2 بیشتر از m_1 باشد و یا مجموع توان‌ها مساوی بوده و $m_1\leq_{\text{lex}} m_2$.

گوییم $m_1\leq_{\text{drlex}} m_2$ هرگاه $m_1=m_2$، یا مجموع توان‌ها در m_2 بیشتر از m_1 باشد و یا مجموع توان‌ها مساوی بوده و اولین مؤلفه‌ی ناصفر از سمت راست در بردار $\log(m_2)-\log(m_1)$، منفی باشد.

به عنوان مثال، در T^3 داریم:

$$x_3\leq_{\text{lex}} x_2\leq_{\text{lex}} x_1,\quad x_2^2\leq_{\text{lex}} x_1,\quad x_1\leq_{\text{dlex}} x_2^2$$

$$x_1x_2^3x_3\leq_{\text{dlex}} x_1^2x_2x_3^2,\quad x_1^2x_2x_3^2\leq_{\text{drlex}} x_1x_2^3x_3$$

فرض کنید ترتیب بخشی $\leq_\sigma$ روی T^n داده شده است. هر چندجمله‌ای f متعلق به $K[x_1,\ldots,x_n]$ به صورت مجموعی از تک‌جمله‌ای‌های $cx_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ است که c عضوی ناصفر از K می‌باشد. تک‌جمله‌ای‌ها را بدون در نظر گرفتن ضرایبشان باهم مقایسه می‌کنیم.

تعریف ۲. در هر چندجمله‌ای مانند f، بزرگترین تک‌جمله‌ای با ترتیب $\leq_\sigma$ را جمله پیشرو[7]، بخش مربوط به آن را بخش پیشرو[8] و ضریب آن را ضریب پیشرو[9] می‌نامیم و به ترتیب با $\mathrm{LM}(f)$، $\mathrm{LT}(f)$ و $\mathrm{LC}(f)$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً در چندجمله‌ای $f=4x_1^2x_3+6x_2x_3$ با ترتیب لغت‌نامه‌ای داریم:

$$\mathrm{LM}(f)=4x_1^2x_3,\quad \mathrm{LT}(f)=x_1^2x_3,\quad \mathrm{LC}(f)=4.$$

---

1) term 2) monoid 3) term ordering 4) lexicographic order
5) degree lexicographic order 6) degree reverse lexicographic order
7) leading monomial 8) leading term 9) leading coefficient

۱) شریرام ابیَنکار، از پیشگامان هندسه‌ی جبری محاسباتی. ۲) میشل مولر، در دهه‌ی هشتاد میلادی با همکاری بوخبرگر کاربردهای مهمی برای پایه‌های گربنر پیدا کرده و آن را در جهان ریاضیات بیشتر مطرح کرد. ۳) تئو مورا، از فعال‌ترین پژوهشگران در بهینه کردن الگوریتم‌ها و کاربردهای پایه‌های گربنر.

قضیه‌ی ۳ (قضیه‌ی پایه مکالی). فرض کنید K یک میدان و $P = K[x_۱, \dots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب در K باشد. فرض کنید $\leq$ یک ترتیب بخشی و I یک ایدآل P باشد. اگر مجموعه‌ی همه‌ی بخش‌های در T^n نامتعلق به $\{\mathrm{LT}_{\leq}(f) : f \in I\}$ را با B نشان دهیم، آنگاه مجموعه کلاس‌های هم ارزی اعضای B روی I یعنی $\{b + I : b \in B\}$ یک پایه برای K ـ فضای برداری P/I است.

برای اثبات به [27, Theo. 1.5.7] مراجعه کنید.

۲.۲ پایه‌ی گربنر یک ایدآل

در این قسمت فرض می‌کنیم $\leq$ یک ترتیب بخشی داده شده است و برای راحتی، به جای $\mathrm{LT}_{\leq}$ فقط LT نوشته و در موارد مشابه نیز همین طور عمل می‌کنیم. فرض کنید I یک ایدآل P باشد. بنا بر قضیه‌ی پایه‌ی هیلبرت، می‌دانیم که این ایدآل توسط تعداد متناهی چندجمله‌ای تولید می‌شود. ایدآل پیشرو I نسبت به ترتیب داده شده را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(f) : f \in I \rangle$$

یعنی ایدآل تولید شده توسط بخش‌های پیشرو همه اعضای I. این ایدآل توسط تعداد نامتناهی بخش تولید شده‌است. اولین سؤال که مطرح می‌شود این است که آیا این ایدآل یک مولد متناهی نیز دارد؟ لم دیکسون[1] جواب مثبتی به این سؤال می‌دهد.

قضیه‌ی ۴ (لم دیکسون). فرض کنید $n \geq ۱$ و $t_۱, t_۲, \dots$ دنباله‌ای از بخش‌ها در T^n باشد. عددی مانند $m > ۰$ وجود دارد که به ازای هر i که $i \geq m$، بخش t_i به یکی از بخش‌های $t_۱$، ... و t_m بخش‌پذیر است. در نتیجه، به ازای هر حلقه R،

1) Dickson's Lemma

$$\langle t_1, t_2, \ldots \rangle = \langle t_1, \ldots, t_m \rangle \subseteq R[x_1, \ldots, x_n].$$

برای اثبات به [27, Cor. 1.3.6] مراجعه کنید.

سؤال بعدی این است که آیا چندجمله‌ای‌های $f_1, \ldots, f_m$ در I موجودند که خودشان ایدآل I و بخش‌های پیشروشان ایدآل پیشرو I را تولید کنند؟ پاسخ این سؤال نیز طبق لم زیر مثبت است.

لم ۵. با مفروضات بالا، اگر $\{t_1, \ldots, t_m\}$ یک مولد برای ایدآل $\mathrm{LT}(I)$ باشد و چندجمله‌ای‌های $f_1, \ldots, f_m$ در I طوری باشند که به ازای هر i که $1 \leq i \leq m$، داشته باشیم $\mathrm{LT}(f_i) = t_i$، آنگاه $\{f_1, \ldots, f_m\}$ مولدی برای I است.

اثبات. می‌دانیم $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle \subseteq I$. پس کافی است ثابت کنیم $I \subseteq \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. فرض کنید این طور نباشد و $D = I \setminus \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ ناتهی باشد. فرض کنید g یک چندجمله‌ای در D باشد که دارای کوچکترین بخش پیشرو در بین اعضای D است. چون $\mathrm{LT}(g) \in \mathrm{LT}(I)$، پس $1 \leq i \leq m$ و $h \in T^n$ موجودند که $t_i | \mathrm{LT}(g)$ و $ht_i = \mathrm{LT}(g)$. در این صورت $\mathrm{LT}(g)$ با $\mathrm{LT}(ht_i)$ برابر است و چندجمله‌ای $l = g - \frac{\mathrm{LC}(g)}{\mathrm{LC}(f_i)} hf_i$ دارای بخش پیشرو اکیداً کوچکتر از $\mathrm{LT}(g)$ است و طبق فرض نباید در D قرار داشته باشد. ولی f_i و g در I هستند و لذا l نیز در I قرار دارد و از طرف دیگر l در $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ نیست، یعنی $l \in D$، که یک تناقض است. بنابراین $D = \emptyset$.

نتیجه‌ی ٦. فرض کنید I ایدآلی از P باشد. مولدی متناهی برای I مانند $\{g_1, \ldots, g_m\}$ وجود دارد که $\{\mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_m)\}$ ایدآل $\mathrm{LT}(I)$ را تولید می‌کند.

تعریف ۷. مولدی برای I که در شرایط نتیجه ٦ صدق کند را یک پایه گربنر (نسبت به ترتیب $\leq$) برای I گویند.

مثال ۸. هر مولد برای I لزوماً یک پایه گربنر نیست. فرض کنید $I = \langle g_1, g_2 \rangle \subseteq K[x_1, x_2, x_3]$ که $g_1 = x_1^2 - x_2$ و $g_2 = x_1^3 - x_3$. با ترتیب لغت‌نامه‌ای داریم $\mathrm{LT}(g_1) = x_1^2$ و $\mathrm{LT}(g_2) = x_1^3$. از طرف دیگر چندجمله‌ای

$$-x_1(x_1^2 - x_2) + (x_1^3 - x_3) = x_1 x_2$$

در I قرار دارد و دارای بخش پیشرو $x_1 x_2$ است که توسط هیچ‌کدام از بخش‌های پیشرو g_1 و g_2 بخش نمی‌شود. بنابراین $\{g_1, g_2\}$ یک پایه‌ی گربنر نیست.

نتیجه‌ی ٦ وجود یک پایه‌ی گربنر برای ایدآل دلخواه I نسبت به ترتیب داده شده را تضمین می‌کند ولی هیچ روش عملی برای یافتن آن را به دست نمی‌دهد. در قسمت بعد با یک الگوریتم برای به دست آوردن یک پایه‌ی گربنر ایدآل آشنا می‌شویم.

۳.۲. الگوریتم و محک بوخبرگر

در این قسمت نیز فرض می‌کنیم $\leq$ یک ترتیب بخشی داده شده است. در حلقه‌ی $K[x]$

۱) فرانتز وینکلر، اولین دانشجوی دکتری بوخبرگر که با فارغ‌التحصیل شدن وی تحقیقات در پایه‌های گربنر وارد مرحله جدیدی شد. ۲) ولادیمیر گردت، از پیشگامان جبر محاسباتی در روسیه که از کاربردهای این نظریه در علوم کامپیوتر و مهندسی استفاده می‌کند. ۳) دیوید آیزنباد، از سردمداران و مشوقان با نفوذ جبر جابجایی و هندسه جبری محاسباتی در امریکا.

الگوریتم اقلیدس برای تقسیم یک چندجمله‌ای مانند $f(x)$ بر چندجمله‌ای دیگری مانند $g(x)$ را داریم که چندجمله‌ای‌های $h(x)$ و $r(x)$ را به دست می‌آورد به طوری که

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x)$$

و درجه‌ی $r(x)$ از درجه‌ی $g(x)$ کوچک‌تر است. به عبارت دیگر، بخش پیشرو g هیچ بخشی از r را بخش نمی‌کند. به زبان حلقه‌ها می‌توان چنین گفت که کلاس خارج‌قسمتی $f(x)$ با کلاس خارج‌قسمتی $r(x)$ به سنج ایدآل $\langle g(x) \rangle$ مساوی است و $r(x)$ در این کلاس دارای کوچکترین درجه است. تعمیم الگوریتم اقلیدس برای تقسیم چندجمله‌ای‌های چند متغیره با استفاده از تعبیر حلقه‌ای آن راحت‌تر است.

فرض کنید f و g_1، g_2، ...، g_s چندجمله‌ای‌های غیر صفر در $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ باشند. می‌خواهیم نمایشی برای f به صورت

$$f = h_1 g_1 + \cdots + h_s g_s + r$$

پیدا کنیم که h_iها و r در P هستند و هیچ بخشی از r توسط هیچ‌کدام از بخش‌های پیشرو g_iها بخش نمی‌شود. این کار با الگوریتم زیر عملی است.

۴.۲. الگوریتم تقسیم. فرض کنید $f, g_1, \ldots, g_s \in P \setminus \{0\}$. مراحل زیر را انجام دهید.

۱ـ قرار دهید $p = 0, q_1 = \cdots = q_s = 0$ و $v = f$.

۲ـ کوچکترین i در $\{1, 2, \ldots, s\}$ را پیدا کنید که $\mathrm{LT}(v)$ توسط $\mathrm{LT}(g_i)$ بخش می‌شود. در صورت وجود چنین iای، $q_i + \frac{\mathrm{LM}(v)}{\mathrm{LM}(g_i)}$ را به جای q_i و $v - \frac{\mathrm{LM}(v)}{\mathrm{LM}(g_i)} g_i$ را به جای v قرار دهید.

۳ـ مرحله ۲ را آن قدر تکرار کنید که iای با شرط فوق پیدا نشود. در این صورت، $p + \mathrm{LM}(v)$ را به جای p و $v - \mathrm{LM}(v)$ را به جای v قرار دهید.

۴ـ اگر $v \neq 0$، مجدداً مرحله ۲ را اجرا کنید و اگر $v = 0$، چندجمله‌ای‌های $p, q_1, \ldots, q_s$ را بنویسید.

قضیه‌ی ۹. الگوریتم تقسیم پس از اجرای تعداد متناهی مرحله، به پایان می‌رسد و برای چندجمله‌ای‌های $p, q_1, \ldots, q_s$ به دست آمده در آخر الگوریتم، داریم

$$f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + p.$$

همچنین شرایط زیر برقرارند:

الف) هیچ کدام از بخش‌های p در ایدآل $\langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_s) \rangle$ قرار ندارند.

ب) به ازای هر $1 \leq i \leq s$ که $q_i \neq 0$، داریم $\mathrm{LT}(q_i g_i) \leq \mathrm{LT}(f)$.

ج) به ازای هر $1 \leq i \leq s$ و هر بخش غیرصفر از q_i مانند t، داریم:

$$t.\mathrm{LT}(g_i) \notin \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_{i-1}) \rangle.$$

به علاوه، چندجمله‌ای‌های $q_1, q_2, \ldots, q_s$ و p که در سه شرط فوق صدق کنند، به صورت یگانه توسط بردار $(f, g_1, \ldots, g_s) \in P^{s+1}$ تعیین می‌شوند.

برای اثبات به [27, Theo. 1.6.4] مراجعه کنید.

تعریف ۱۰. چندجمله‌ای p به دست آمده در الگوریتم تقسیم را یک باقیمانده نرمال[1] یا یک فرم نرمال[2] f نسبت به $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_s)$ نامیده و با $\mathrm{NF}_{\leq, \mathcal{G}}(f)$ و یا اگر ابهامی نباشد با $\mathrm{NF}(f)$ نشان می‌دهند.

نکته‌ی ۱۱. با تغییر ترتیب $\leq$ و همچنین تغییر ترتیب قرارگرفتن $(g_1, \ldots, g_s)$، جواب نهایی الگوریتم تقسیم ممکن است تغییر کند.

در مثال ۸ مشاهده شد که ممکن است جملات پیشرو دو چندجمله‌ای f و g در تک‌جمله‌ای‌هایی مانند t_1 و t_2 ضرب شوند و قرینه هم شده و در حاصل جمع حذف شوند. در این صورت ممکن است بخش پیشرو $t_1 f + t_2 g$ توسط هیچ کدام از بخش‌های پیشرو f و g بخش نشود. این مشکلی است که خاصیت پایه گربنر بودن یک مولد ایدآل را می‌تواند از آن سلب کند. بوخبرگر ثابت کرده است که فقط با حل همین مشکل، هر مولدی را می‌توان به یک پایه گربنر گسترش داد. برای این منظور S ـ چندجمله‌ای دو چندجمله‌ای را تعریف می‌کنیم.

1) normal remainder 2) normal form



۱) رالف فروبرگ، کتاب‌ها و مقالات عمیق او مشوق بسیاری از ریاضیدانان جوان برای پژوهش در پایه‌های گربنر بوده است. ۲) گرت ـ مارتین گروئل، تیم تحقیقاتی او نرم‌افزار SINGULAR را طراحی کرده است که اساس محاسبات آن پایه‌های گربنر است. ۳) برند اشتورمفلس، از ریاضیدانان بسیار فعال که مفهوم پایه‌های گربنر و جبر جابجایی ترکیبیاتی را وارد رشته‌های گوناگون از جمله ریاضیات زیستی و نظریه پایاها کرده است.

تعریف ۱۲. فرض کنید $f_1, f_2 \in P = K[x_1, \dots, x_n]$ دو چندجمله‌ای غیرصفر باشند. S ـ چندجمله‌ای f_1 و f_2 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S(f_1, f_2) = \frac{\mathrm{LC}(f_2)}{\gcd(\mathrm{LM}(f_1), \mathrm{LM}(f_2))} f_1 - \frac{\mathrm{LC}(f_1)}{\gcd(\mathrm{LM}(f_1), \mathrm{LM}(f_2))} f_2.$$

منظور از gcd بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک است. توجه شود که f_1 و f_2 در تک‌جمله‌ای‌های مناسبی ضرب شده‌اند تا جملات پیشرو مساوی بگیرند و این جملات در $S(f_1, f_2)$ حذف می‌شوند.

قضیه‌ی ۱۳ (محک بوخبرگر). فرض کنید I ایدآل تولید شده توسط $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ در P باشد و $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_s)$. شرایط زیر باهم معادلند.

الف) مجموعه G یک پایه گربنر (نسبت به ترتیب $\leq$) برای ایدآل I است.

ب) به ازای هر زوج مرتب (i, j) که $1 \leq i < j \leq s$، داریم $\mathrm{NF}_{\leq, \mathcal{G}}(S(g_i, g_j)) = 0$.

برای اثبات به [27, Cor. 2.5.3] مراجعه کنید.

روش بوخبرگر برای ساختن یک پایه‌ی گربنر برای ایدآل I با استفاده از یک مولد داده شده این است که نخست S ـ چندجمله‌ای‌های دو به دوی مولدها را محاسبه می‌کند و سپس فرم نرمال آن‌ها نسبت به مجموعه‌ی مولد را به دست می‌آورد و آنگاه فرم‌های نرمال غیرصفر را به مجموعه‌ی مولد اضافه می‌کند. این روند تا جایی ادامه پیدا می‌کند که دیگر هیچ S ـ چندجمله‌ای با فرم نرمال غیر صفر نسبت به مولد جدید وجود نداشته باشد. در نهایت یک پایه گربنر به دست می‌آید. جزئیات این روش در الگوریتم زیر بیان شده است.

الگوریتم بوخبرگر. فرض کنید $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_s) \in P^s$ و I ایدآل تولید شده توسط $g_1, \ldots, g_s$ باشد. به ازای هر $i = 1, \ldots, s$، فرض کنید $\mathrm{LM}(g_i) = c_i t_i$ که $c_i \in K \setminus \{0\}$ و $t_i \in T^n$. مراحل زیر را انجام دهید.

۱ــ قرار دهید $s' = s$ و $B = \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq s'\}$.

۲ــ اگر $B = \emptyset$، $\mathcal{G}$ را بنویسید. در غیر این صورت $(i,j) \in B$ را انتخاب و از B حذف کنید.

۳ــ اگر $\mathrm{NF}_{\leq, \mathcal{G}}(S(g_i, g_j)) = 0$ به مرحله ۲ بروید. در غیراین صورت به مرحله‌ی ۴ بروید.

۴ــ قرار دهید $s' = s' + 1$ و $g_{s'} = \mathrm{NF}(S(g_i, g_j))$ را به $\mathcal{G}$ اضافه کنید. همچنین همه زوج‌های (i, s') که $1 \leq i < s'$، را به B اضافه کنید و سپس به مرحله ۲ بروید.

قضیه‌ی ۱۴. الگوریتم بوخبرگر پس از اجرای تعداد متناهی مرحله متوقف می‌شود و مؤلفه‌های $\mathcal{G}$ به دست آمده در پایان، تشکیل یک پایه‌ی گربنر (نسبت به ترتیب $\leq$) برای I می‌دهند.
برای اثبات به [27, Theo. 2.5.5] مراجعه کنید.

اگر مولدی برای ایدآل I داده شده باشد، به وسیله‌ی الگوریتم بوخبرگر می‌توان یک پایه‌ی گربنر به دست آورد. اجرای این الگوریتم به سبب تعداد زیاد محاسبات S ــ چندجمله‌ای‌ها و فرم‌های نرمال، به زمان طولانی نیاز دارد. پیچیدگی محاسباتی این الگوریتم در حالت کلی در رده‌ی exp-space complete و در حالت ایدآل‌های صفربعدی در رده‌ی NP-complete قرار دارد. البته تلاش‌های زیادی شده است که زمان اجرای الگوریتم کاهش یابد. بهترین الگوریتم شناخته شده برای محاسبه‌ی یک پایه‌ی گربنر الگوریتم‌های F4 و F5 متعلق به فوگر است که گرچه هنوز در رده‌ی NP-complete قرار دارند ولی به مراتب زمان کمتری را صرف می‌کنند [18]. اساس ریاضی این الگوریتم‌ها مشابه الگوریتم بوخبرگر است. الگوریتم F4 با استفاده از یک محک جدید و روش‌های جبرخطی، تعداد محاسبات فرم‌های نرمال را کاهش می‌دهد. الگوریتم F5 نخست پایه‌ی گربنر یک جفت چندجمله‌ای از مولدهای ایدآل را محاسبه و سپس در هر مرحله یک مولد دیگر از ایدآل را به پایه قبلی اضافه کرده و با استفاده از محک جدیدی که توسط فوگر ابداع شده است، پایه گربنر آن را به دست می‌آورد.

اگر $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ یک پایه‌ی گربنر برای ایدآل I باشد، با اضافه کردن چندجمله‌ای‌های دیگر به G، همچنان یک پایه گربنر خواهیم داشت. بنابر این پایه‌ی گربنر یک ایدآل یکتا نیست. با این حال می‌توان پایه گربنر تحویل‌یافته را تعریف کرد که یکتاست.

تعریف ۱۵. فرض کنید $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ یک پایه‌ی گربنر نسبت به ترتیب داده شده $\leq$ برای ایدآل I باشد. G را یک پایه گربنر تحویل یافته[1] گویند اگر شرایط زیر برقرار باشند.

الف) به ازای هر $i = 1, \ldots, s$، $\mathrm{LC}(g_i) = 1$.

ب) مجموعه $\{\mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_s)\}$ یک مولد مینیمال برای $\mathrm{LT}(I)$ است.

1) reduced Gröbner basis



۱) مارتین کروتزر، کتاب دوجلدی او و روبیانو با عنوان «جبر جابجایی محاسباتی» یکی از غنی‌ترین منابع برای پایه‌های گربنر و کاربردهای آن است. ۲) آلدو کونکا، از پژوهشگران مطرح جبر جابجایی که نتایج عمیقی در استفاده از پایه‌های گربنر در ایدآل‌های دترمینانی و ایدآل‌های ژنریک به دست آورده است. ۳) پیتر پائوله، از همکاران نزدیک بوخبرگر در ریسک.

ج) به ازای هر $i = ۱, \ldots, s$، هیچ کدام از بخش‌های غیرپیشرو g_i در ایدآل $\mathrm{LT}(I)$ نیستند.

قضیه‌ی ۱۶. برای هر ایدآل I از P و هر ترتیب بخشی داده شده، پایه گربنر تحویل‌یافته وجود دارد و یکتاست.

اثبات. برای آشنایی با نحوه‌ی اثبات این نوع قضایا، اثباتی برای قضیه‌ی ۱۶ می‌آوریم. فرض کنید $G = \{g_۱, \ldots, g_s\}$ یک پایه‌ی گربنر نسبت به ترتیب داده شده $\leq$ برای ایدآل I باشد چون ضرایب چندجمله‌ای‌ها در میدان K هستند، می‌توان ضرایب پیشرو مولدها را برابر ۱ قرار داد.

اگر در مجموعه‌ی $\{\mathrm{LT}(g_۱), \ldots, \mathrm{LT}(g_s)\}$ یکی از اعضاء مثلاً $\mathrm{LT}(g_i)$ توسط دیگری بخش شود، این عضو به عنوان مولد، اضافه است و می‌توان g_i را در مجموعه‌ی G حذف کرد بدون این که به پایه‌ی گربنر بودن G لطمه‌ای وارد شود. پس از حذف این نوع چندجمله‌ای‌ها، به جای هر عضو g_j از G، فرم نرمال آن نسبت به $(g_۱, \ldots, g_{j-۱}, g_{j+۱}, \ldots, g_s)$ را قرار می‌دهیم. در این صورت یک پایه‌ی گربنر تحویل یافته به دست آمده است. برای اثبات یگانگی، فرض کنید $G = \{g_۱, \ldots, g_s\}$ و $H = \{h_۱, \ldots, h_t\}$ دو پایه‌ی گربنر تحویل یافته نسبت به ترتیب $\leq$ برای ایدآل I باشند. می‌دانیم که مجموعه‌ی مولد مینیمال ایدآل $\mathrm{LT}(I)$ یگانه است و بنابراین $s = t$ و با اندیس‌گذاری مجدد می‌توان فرض کرد به ازای هر $i = ۱, \ldots, s$، $\mathrm{LT}(g_i) = \mathrm{LT}(h_i)$. از طرف دیگر $g_i - h_i \in I$ و اگر غیر صفر باشد، طبق تعریف هیچ بخش $g_i - h_i$ به ویژه بخش پیشرو آن در ایدآل $\langle \mathrm{LT}(g_۱), \ldots, \mathrm{LT}(g_s) \rangle$ نیست، که یک تناقض با پایه‌ی گربنر بودن G است. بنابراین $g_i = h_i$.

همان طور که قبلاً نیز ذکر شده است، با تغییر ترتیب بخشی، پایه‌ی گربنر و حتی پایه‌ی گربنر تحویل یافته یک ایدآل می‌تواند دستخوش تغییر شود. برخی از ایدآل‌ها دارای مولدی هستند که نسبت به هر ترتیب بخشی دلخواه یک پایه گربنر است. چنین مولدی را پایه‌ی گربنر جهانی [۱] گویند. البته برای هر ایدآل دلخواه، لزوماً پایه گربنر جهانی وجود ندارد.

۳. برخی از کاربردها

شاید اساسی‌ترین کاربرد پایه‌های گربنر که بیشتر کاربردهای دیگر بر آن استوار هستند، بررسی تعلق یک چندجمله‌ای به ایدآل مورد نظر است. می‌دانیم که اگر I یک ایدآل در $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ و G یک پایه گربنر برای آن باشد، چندجمله‌ای f در I قرار دارد اگر و تنها اگر فرم نرمال f نسبت به G برابر صفر باشد. بنابراین الگوریتمی برای بررسی عضویت یک چندجمله‌ای در یک ایدآل وجود دارد. همچنین اگر I و J دو ایدآل در S باشند، با محاسبه‌ی پایه‌های گربنر تحویل یافته آنها که منحصر به فرد است، می‌توان شمول هرکدام در دیگری و یا تساوی آن‌ها را فقط با مشاهده این پایه‌ها دریافت.

یک مسأله‌ی مهم که در حل دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای مطرح می‌شود، نحوه‌ی حذف یکی از متغیرها در این دستگاه است به طوری که از مجموعه جواب دستگاه با متغیر کمتر بتوان جواب‌های دستگاه اول را به دست آورد. فرض کنید $f_1 = f_2 = \cdots = f_t = 0$ یک دستگاه از چندجمله‌ای‌ها در S باشد. مجموعه جواب‌های این دستگاه، یعنی نقاطی از K^n مانند $(a_1, \ldots, a_n)$ $a =$ که $f_1(a) = f_2(a) = \cdots = f_t(a) = 0$، برابر مجموعه صفرهای ایدآل $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_t \rangle$ یا همان واریته متناظر با I است. بنابر این حذف متغیر x_1 در دستگاه فوق معادل به دست آوردن ایدآل $I \cap K[x_2, \ldots, x_n]$ است. این کار با کمک پایه‌های گربنر به راحتی انجام می‌شود.

قضیه‌ی ۱۷. فرض کنید $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ یک ایدآل و G یک پایه‌ی گربنر برای I با ترتیب لغت‌نامه‌ای باشد. در این صورت، زیرمجموعه‌ای از G متشکل از اعضایی که متغیرهای $x_1, \ldots, x_l$ را ندارند، یک پایه‌ی گربنر برای ایدآل $I_l = I \cap K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ است. پس اگر یک پایه‌ی گربنر برای I با ترتیب لغت‌نامه‌ای داشته باشیم، پایه‌ی گربنر و درنتیجه مولد I_l که همان دستگاه حاصل از حذف متغیرهای $x_1, \ldots, x_l$ می‌باشد، قابل دسترسی است.

محاسبه‌ی اشتراک دو ایدآل به صورت زیر امکان‌پذیر است.

قضیه‌ی ۱۸. فرض کنید $I, J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ دو ایدآل باشند. در این صورت

$$I \cap J = (tI + (1 - t)J) \cap K[x_1, \ldots, x_n],$$

که در آن، $(tI + (1 - t)J)$ به عنوان ایدآلی در $K[t, x_1, \ldots, x_n]$ در نظر گرفته شده است.

برای بررسی عضویت در رادیکال یک ایدآل نیز روشی وجود دارد. یادآوری می‌شود که برای ایدآل I رادیکال به صورت

$$\sqrt{I} = \{f : f^m \in I, \text{for some integere } m > 0\}$$

تعریف می‌شود که یک ایدآل است. ایدآلی که برابر رادیکال خودش است، ایدآل رادیکال گفته می‌شود.

۱) بوخبرگر در سال ۲۰۰۲ بازنشست شد و سمت‌های مدیریتی را به دیگران واگذار کرد. وی فعالیت‌های علمی و عملی خود را همچنان ادامه می‌دهد. ۲) کاخ هاگنبرگ که زمانی تبدیل به یک مخروبه شده بود، اکنون محلی آرام و دلپذیر برای پژوهشگران محاسبات نمادین است. ۳) رحیم زارع‌نهندی، اولین کسی که پایه‌های گربنر را در ایران معرفی نمود.

لم ۱۹. فرض کنید $I = \langle f_1, \ldots, f_t \rangle \subset S$ یک ایدآل باشد. چندجمله‌ای f در $\sqrt{I}$ قرار دارد اگر و تنها اگر ۱ در ایدآل $\langle f_1, \ldots, f_t, 1 - yf \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n, y]$ باشد.

با همین روش‌ها می‌توان پوچساز[1] یک ایدآل و یا یک مدول، و هسته و برد یک همریختی را محاسبه کرد. برخی از موارد دیگر که قابل محاسبه هستند، عبارتند از: تابع هیلبرت، سری هیلبرت، چندجمله‌ای هیلبرت، چندگانگی[2]، h ـ بردار، تجزیه‌ی اولیه، تحلیل آزاد مینیمال، اعداد بتی و ....

۴. حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{S} = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_s(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

که در آن f_1، ...، f_s چندجمله‌ای‌هایی در $K[x_1, \ldots, x_n]$ هستند. نخستین سؤالی که مطرح می‌شود، شرایط وجود جواب برای این دستگاه است. به این سؤال در حالت کلی پاسخی داده نشده است. ولی در حالتی که میدان K بسته جبری باشد (مانند میدان اعداد مختلط)، قضیه‌ی صفرهای هیلبرت جواب کاملی ارائه می‌دهد.

تعریف ۲۰. فرض کنید $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ ایدآلی در $K[x_1, \ldots, x_n]$ باشد. واریته متناظر با I به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n : \forall f \in I, f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}.$$

---

1) annihilator 2) multiplicity

به راحتی مشاهده می‌شود که مجموعه جواب دستگاه S برابر $V(I)$ است.

قضیه‌ی ۲۱. (قضیه‌ی ضعیف صفرهای هیلبرت[1]) فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری باشد. با مفروضات بالا، $V(I)$ تهی است اگر و تنها اگر $I = K[x_1, \dots, x_n]$.

بنابراین، اگر دستگاه S داده شده باشد، می‌توان با محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر تحویل یافته ایدآل تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های دستگاه، و بررسی این که این پایه برابر $\{1\}$ است یا نه، به وجود یا عدم وجود جواب دستگاه پی برد. سؤال دیگری که مطرح می‌شود، تشخیص متناهی بودن تعداد جواب‌ها و نحوه‌ی به دست آوردن آن‌ها است. قضیه‌ی زیر روشی برای این کار ارائه می‌دهد.

قضیه‌ی ۲۲. فرض کنید S یک دستگاه معادلات و I ایدآل تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های این دستگاه است. فرض کنید $\leq$ یک ترتیب بخشی روی T^n باشد. شرایط زیر با هم معادلند.

الف) دستگاه S تعداد متناهی جواب دارد.

ب) K—فضای برداری $K[x_1, \dots, x_n]/I$ دارای بعد متناهی است.

ج) مجموعه $T^n \setminus \mathrm{LT}_{\leq}\{I\}$ متناهی است.

د) به ازای هر i در $\{1, \dots, n\}$، عدد صحیح نامنفی α_i وجود دارد که $x_i^{\alpha_i} \in \mathrm{LT}_{\leq}(I)$.

برای اثبات به [27, Prop. 3.7.1] مراجعه کنید.

با داشتن یک پایه‌ی گربنر برای I و با استفاده از بند (د) قضیه بالا، به راحتی می‌توان متناهی بودن مجموعه جواب دستگاه S را تحقیق کرد. در واقع، قضیه قوی‌تری وجود دارد که ثابت می‌کند تعداد جواب‌های دستگاه در $\overline{K}^n$، که $\overline{K}$ بستار جبری K است، برابر بعد K—فضای برداری $K[x_1, \dots, x_n]/I$ است، مشروط بر این که تکرر صفرها در شمارش در نظر گرفته شده باشد. بنابراین می‌توان در حالت کلی، کران بالایی برای تعداد جواب‌های یک دستگاه به دست آورد.

تعریف ۲۳. ایدآل I با $V(I)$ متناهی، ایدآل صفربعدی گفته می‌شود.

با توجه به قضیه‌ی ۲۲، صفربعدی بودن ایدآل I معادل متناهی بودن بعد فضای برداری $K[x_1, \dots, x_n]/I$ است که نتیجه می‌دهد بعد کرول حلقه‌ی $K[x_1, \dots, x_n]/I$ برابر صفر است؛ که نام‌گذاری «صفربعدی» برای این نوع ایدآل‌ها را توجیه می‌کند. قضایای دیگری نیز وجود دارند که روش‌هایی برای به دست آوردن صفرهای یک ایدآل صفربعدی ارائه می‌کنند.

دانستن تعداد جواب‌های یک دستگاه و یا حتی کران بالای مناسب برای آن، کاربردهای جالبی دارد که در زیر یکی از آنها را می‌آوریم.

فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, \dots, v_m\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{e_1, \dots, e_n\}$ باشد. در حلقه‌ی $K[x_1, \dots, x_n]$ که در آن به ازای هر i، متغیر x_i

1) week Hilbert nullstellensatz

مدرسهٔ تابستانی پایه‌های گربنر و کاربردهای آن، ۱۳۸۴ دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان

متناظر یال e_i می‌باشد، ایدآل $I(G)$ را برابر ایدآل تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های زیر در نظر بگیرید.

الف) همه چندجمله‌ای‌های به صورت $x_i^{۲} - x_i$، به ازای $i = ۱, \ldots, n$.

ب) همه تک‌جمله‌ای‌های به صورت $x_i x_j$، اگر یال e_i با یال e_j در G در یک راس مشترک باشند.

ج) همه چندجمله‌ای‌های به صورت $x_{i_۱} + \cdots + x_{i_s} - ۱$، به طوری که راسی مانند v_i در G وجود دارد و $e_{i_۱}, \ldots, e_{i_s}$ تمام یال‌هایی هستند که یک طرف آن‌ها رأس v_i است.

قضیه‌ی ۲۴. تعداد تطابق‌های کامل[۱] در گراف G برابر تعداد اعضای $V(I)$ است.

برای اثبات به [51] مراجعه کنید.

یادآوری می‌شود که یک تطابق کامل در یک گراف، زیرمجموعه‌ای از یال‌های آن مانند $M \subseteq E(G)$ است که اولاً هیچ دو یالی از M راس مشترک ندارند و ثانیاً یال‌های M همه رأس‌های G را می‌پوشانند. معمولاً می‌توان یک مولکول شیمیایی را با یک گراف نمایش داد که در آن رأس‌ها نشان دهنده‌ی اتم‌ها و یال‌ها پیوندهای موجود بین اتم‌ها هستند. در دسته بسیار مهمی از مولکول‌ها به نام مولکول‌های فولرن[۲] که از اتم‌های کربن تشکیل شده‌اند، تعداد تطابق‌های کامل گراف متناظر، برابر تعداد ایزومرهای مولکول مورد نظر است [20]. بنابراین، یافتن تعداد تطابق‌های کامل این گراف‌ها منجر به دانستن تعداد ایزومرهای یک مولکول فولرن می‌شود که به نوبه خود می‌تواند به حدس‌هایی در مورد وجود مولکول‌های جدید و ناشناخته بیانجامد.

1) perfect matching 2) Fullerene

تشکر و قدردانی. نگارنده از رحیم زارع نهندی و امیر هاشمی که با مطالعه نسخه اولیه این نوشتار، نکات مهمی را تذکر داده و راهنمایی‌های ارزنده‌ای کردند، تشکر می‌کند. وی از لورنزو روبیانو و پیتر پائوله که ابهاماتی را در رابطه با تاریخچه پایه‌های گربنر برای نگارنده روشن کردند قدردانی می‌کند. از آکادمی علوم اتریش برای دعوت نگارنده به اتریش و تامین هزینه‌های وی در طول تابستان ۱۳۸۵، و از برونو بوخبرگر که وقت قابل‌توجهی را برای مصاحبت با نگارنده صرف کرد، و همچنین از همه اعضای انستیتو تحقیقاتی محاسبات نمادین به ویژه فرانتز وینکلر به خاطر مهمان‌نوازی‌شان تشکر و قدردانی می‌شود.

مراجع و کتابنامه

[1] S. Abhyankar, *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*, Math. Surveys and Monographs 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[2] W. Adams and P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases*, Graduate Studies in Mathematics 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[3] T. Becker and V. Weispfenning, *Gröbner Bases*, Springer, New York, 1993.

[4] W. Bruns and A. Conca, Gröbner bases and determinantal ideals, Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra (Sinaia, 2002) 9–66, NATO Sci. Ser. II M. P. C. 115, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

[5] B. Buchberger, On finding a vector space basis of the residue class ring modulo a zero dimensional polynomial ideal (in German), PhD Thesis, Universitat Innsbruck, Innsbruck, 1965.

[6] B. Buchberger, Ein algorithmisches kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems, *Aequations Math.* 4 (1970) 374–383.

[7] B. Buchberger, A thoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms, PhD Thesis, *ACM SIGSAM Bull.* 10 no. 3 (1976) 19–29.

[8] B. Buchberger A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases, Symbolic and algebraic computation (EUROSAM '79, Internat. Sympos., Marseille, 1979), pp. 3–21, Lecture Notes in Com. Sci. 72, Springer, Berlin-New York, 1979.

[9] B. Buchberger, A note on the complexity of constructing Gröbner-bases, Computer Algebra (London, 1983), 137–145, Lecture Notes in Comp. Sci. 162, Springer, Berlin, 1983.

[10] B. Buchberger, A critical-pair completion algorithm for finitely generated ideals in rings, Logic and machines: decision problems and complexity (Mnster, 1983), 137–161, Lecture Notes in Comp. Sci. 171, Springer, Berlin, 1984.

[11] B. Buchberger and F. Winkler, *Gröbner Bases and Applications*, London Math. Soc. Lecture Note 251, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[12] A. Capani, G. Niesi and L Robbiano, CoCoA: A system for doing computations in commutative algebra, http//cocoa.dima.unige.it.

[13] P. Conti and C. Traverso, Buchberger algorithm and integer programming, Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (New Orleans, LA, 1991), 130–139, Lecture Notes in Comput. Sci. 539, Springer, Berlin, 1991.

[14] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, New York, 1992.

[15] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algeraic Geometry*, Second Edition, Springer, New York, 2004.

[16] L. E. Dickson, Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with distance prime factors, *Amer. J. Math.* 35 (1913) 413–426.

[17] J-C. Faugere, P. Gianni, D. Lazard and T. Mora, Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering, *J. Symbolic Comput.* 16 no. 4 (1993) 329–344.

[18] J-C. Faugere, A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F_4), Effective methods in algebraic geometry (Saint-Malo, 1998), *J. Pure Appl. Algebra* 139 no. 1-3 (1999) 61–88.

[19] R. Fröberg, *An Introduction to Gröbner Bases*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.

[20] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics 207. Springer-Verlag, New York, 2001.

[21] P. Gordan, Les invariants des forms binaries, *J. de Mathématiques Pures et Appliqués* 6 (1900) 141–156.

[22] D. Grayson and M. Stillman, Macaulay 2: A software system for algebraic geometry and commutative algebra, www.math.uiuc.edu/ Macaulay2.

[23] G.-M. Greuel, G. Pfister and H. Schönemann, *Singular Reference Manual*, http://www.mathe,atik.uni-kl.de/~ zca/Singular.

[24] W. Gröbner, Über die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, *Monatsh. Math.* 47 (1939) 247–284.

[25] W.Gröbner, Über die Eliminationstheorie,*Monatsh. Math.* 54 (1950) 71-78.

[26] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I-II, *Ann. Math.* 79 (1964) 109–203.

[27] M. Kreuzer and L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra 1*, Springer, 2000.

[28] M. Kreuzer and L. Robbiano, *Computational Commutative Algebra 2*, Springer, 2005.

[29] D. Lazard, Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations, Computer Algebra (London, 1983), 146–156, Lecture Notes in Comput. Sci. 162, Springer, Berlin, 1983.

[30] F. S. Macaulay, *Algebraic Theory of Modular Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.

[31] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.* 26 (1927) 372-393.

[32] E. Mayr and A. R. Meyer, The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals, *Adv. Math.* 45 (1982) 305-329.

[33] F. Mora and H. M. Muller, The computation of the Hilbert function, Computer Algebra (London, 1983) 157–167, Lecture Notes in Comput. Sci. 162, Springer, Berlin, 1983.

[34] H. M. Muller and B. Buchberger, The construction of multivariate polynomials with preassigned zeros, Computer Algebra (Marseille, 1982) 24–31, Lecture Notes in Comput. Sci. 144, Springer, Berlin, 1982.

[35] H. M. Muller and F. Mora, Upper and lower bounds for the degree of Groebner bases. EUROSAM 84 (Cambridge, 1984) 172–183, Lecture Notes in Comput. Sci. 174, Springer, Berlin, 1984.

[36] F. Pauer and M. Pfeifhofer, The theory of Gröbner bases, *Enseign. Math.* 34 no. 3-4 (1988) 215–232.

[37] F. Pauer and A. Unterkircher, Gröbner bases for ideals in Laurent polynomial rings and their application to systems of difference equations, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* 9 no. 4 (1999) 271–291.

[38] F. Pauer, Gröbner bases with coefficients in rings, *J. Symbolic Comput.* 42 no. 11-12 (2007) 1003–1011.

[39] L. Robbiano and G. Valla, On set-theoretic complete intersections in the projective space, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 53 (1983) 333–346.

[40] L. Robbiano and G. Valla, Some curves in P^3 are set-theoretic complete intersections, Algebraic Geometry - Open Problems (Ravello, 1982) 391–399, Lecture Notes in Math. 997, Springer, Berlin, 1983.

[41] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Second edition, Progress in Mathematics 41, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[42] Symbolic and Algebraic Computation, EUROSAM (Marseille, 1979) Edited by W. Edward, Lecture Notes in Computer Science 72, Springer, Berlin, 1979.

[43] C. Traverso, A study on algebraic algorithms: the normalization, Conference on Algebraic Varieties of Small Dimension (Turin, 1985), Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1986, Special Issue (1987) 111–130.

[44] C. Traverso, Gröbner trace algorithms, Symbolic and Algebraic Computation (Rome, 1988) 125–138, Lecture Notes in Comput. Sci., 358, Springer, Berlin, 1989.

[45] C. Traverso, Hilbert functions and the Buchberger algorithm, *J. Symbolic Comput.* 22 no. 4 (1996) 355–376.

[46] G. Valla, On set-theoretic complete intersections, Complete Intersections (Acireale, 1983) 85–101, Lecture Notes in Math. 1092, Springer, 1984.

[47] W. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer, Berlin, 1998.

[48] F. Winkler, The Churchmhy Rosser property in computer algebra and special theorem proving: an investigation of critical pair, completion algorithms, Dissertationen der Johannes-Kepler-Universitat Linz [Dissertations of the Johannes Kepler University of Linz], 49.

[49] F. Winkler, *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*, Springer, Wien, 1996.

[50] Rahim Zaare-Nahandi and Rashid Zaare-Nahandi, Gröbner basis and free resolution of the ideal of 2-minors of a $2\times n$ matrix of linear forms, *Comm. Alg.* 28 np. 9 (2000) 4433–4453.

[51] Rashid Zaare-Nahandi, Perfect matchings in graphs; an approach via Gröbner bases, *Southeast Asian Bull. Math.* 30 (2006) 341–345.

رشید زارع نهندی
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
rashidzn@iases.ac.ir