

یک ریاضیدان برای دبیرستان می‌نویسد

دن فندل

برگردان: شیوا زمانی

مختصری از زندگی‌نامه نویسنده

وقتی دوره تحصیلات تکمیلی خود را آغاز کردم، تنها هدفم این بود که یک ریاضیدان محقق شوم. زمانی که هنوز دانشجوی کارشناسی ریاضی در دانشگاه هاروارد (فارغ‌التحصیل ۱۹۶۶) بودم، با درس‌های ریچارد براور^۱ در نظریه گروه‌های متناهی، سرشوق آمده بودم و لذا به توصیه او به دانشگاه ییل رفتم تا با والتر فیت^۲ کار کنم. مدرک دکترای خود را در ۱۹۷۰ گرفتم و مقاله‌ای که از رساله دکتری‌ام استخراج شد در مجله جبر^۳ شماره ژانویه ۱۹۷۳ چاپ شد.

در اوایل سال ۱۹۶۹ که هنوز مشغول تحصیل در دوره دکتری بودم، به این نتیجه رسیدم که اگر فعالیت‌هایم را بر کمک به بهبود آموزش عمومی در مدارس متمرکز کنم، بهتر می‌توانم مهارت‌هایم را در خدمت به مردم به‌کار بندم. در طی دوره دکتری‌ام و پس از آن، در نیویورک، کنکتیکت، و در کامپتون و اوکلند کالیفرنیا در مدارس عمومی کار کردم. در این مدارس، یک متخصص ریاضی بودم که با کلاس‌هایی پر از دانش‌آموزان ابتدایی یا دوره اول متوسطه کار می‌کردم. اگرچه از این کار لذت می‌بردم، به تدریج متوجه نیاز معلمان به فهم عمیق‌تر ریاضیات پایه شدم و به این نتیجه رسیدم که اگر مستقیماً در آماده‌سازی معلمان کار کنم، تأثیر کارم بیشتر خواهد بود. در سال ۱۹۷۳، به دانشکده ریاضی دانشگاه ایالتی سان‌فرانسیسکو ملحق شدم و در آنجا بیش از ۳۰ سال با دانشجو - معلمان که دوره پیش از خدمت را می‌گذراندند و

(Dan Fendel) دن فندل استاد بازنشسته ریاضی دانشگاه ایالتی سان‌فرانسیسکو است.

^۱Richard Brauer ^۲Walter Feit ^۳A characterization of Conway's group Journal of Algebra

معلمان فعال در کلاس‌های درس در تمامی سطوح کارکردم و همزمان، درس‌های سرویسی مانند حسابان و درس‌های سطح بالا برای دانشجویان سال بالای کارشناسی ریاضی، و درس‌هایی در دوره کارشناسی ارشد خودمان را تدریس کردم.

در سال ۱۹۸۹ فرصتی را که ممکن است تنها یک‌بار در زندگی رخ دهد، یافتم. از من دعوت شد که به پروژه‌های ملحق شوم که در آن زمان در مراحل اولیه خود بود و هدفش این بود که یک برنامه درسی مسئله - محور برای دبیرستان‌ها پدید بیاورد که در آن، دیدگاه‌ها و توصیه‌های طرح‌شده در آخرین گزارش‌ها مبنی بر نیاز به اصلاحات برنامه درسی، لحاظ شده باشد. من این دعوت را پذیرفتم و همراه با دایان ریسک^۱ (که دکترایش را در سال ۱۹۷۵ از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی گرفته بود)، مبدل شدم به یکی از مؤلفان برنامه ریاضیات تعاملی (برت). طی یک دهه پس از آن یا چیزی در همین حدود، من با یک تیم فوق‌العاده از آموزش‌گران و معلمان ریاضی در یک فرآیند فشرده نوشتن، آموختن، بازنویسی، دوباره بازنویسی کارکردم تا یک برنامه چهار ساله تولید کنم. در سال ۱۹۹۹ برنامه درسی برت یکی از معدود برنامه‌هایی بود که از سوی وزارت آموزش ایالات متحده به‌عنوان «نمونه» (بالاترین رتبه) انتخاب شد. از این برنامه درسی در بیش از ۱۰۰۰ مدرسه در ایالات متحده، و در بسیاری از مدارس خارج از ایالات متحده استفاده شد.

نوشتن برنامه درسی

یکی از بزرگترین چالش‌ها در نوشتن یک برنامه درسی در هر سطحی، با معنا و قابل فهم کردن مفاهیم پیچیده همزمان با حفظ تمامیت آن‌ها برای دانش‌آموزان است. هر کسی که خیره‌شدن چشم‌ها را هنگام ارائه ریاضیات دقیق همراه با ریزه‌کاری فراوان دیده باشد، تأیید خواهد کرد که دانش ریاضی و درستی آنچه بیان می‌شود، به خودی خود موجب تدریس خوب نمی‌شود. نوشتن برنامه درسی مستلزم درک عمیق ریاضیات و دیدی واقع‌گرایانه به شیوه فکرکردن دانش‌آموزان است و از این رو صرف نظر از این‌که یک رویکرد از لحاظ ریاضی چقدر ظریف یا از نظر زیبایی‌شناسی چقدر راضی‌کننده است، اگر مناسب دانش‌آموزان نباشد، نویسنده برنامه درسی باید دستش باز باشد که آن را کنار بگذارد و سپس چیز دیگری بیابد که کارا تر باشد.

در اینجا دو مثال از فرآیند پیشرفت برنامه درسی خودمان ارائه می‌دهم. امیدوارم توضیح این‌که چطور توانستم در این پروژه سهمی داشته باشم، به ریاضیدانان دیگر کمک کند که برنامه‌های درسی مشابه‌ای بنویسند.

¹Diane Resek

مقدار مورد انتظار

ما می‌خواهیم شهروندان قادر باشند دربارهٔ موضوعاتی که به شانس و داده‌ها مربوط هستند، تصمیم‌های هوشمندانه‌ای بگیرند و این در حالی است که اغلب دانش‌آموزان حتی امروزه هم با درکی مبهم از آمار و احتمال، دبیرستان را ترک می‌کنند. به همین دلیل مدیران پروژهٔ ما تصمیم گرفتند که بر این موضوعات، بیش از آن چیزی که در برنامهٔ درسی سنتی دبیرستان‌ها بود، تأکید کنیم. به‌ویژه، مقدار مورد انتظار را مفهومی کلیدی در احتمال یافتیم. گام مهم، محدود کردن توجه به وضعیت‌هایی بود که فضاهای نمونه‌ای متناهی بودند. معلوم شد که در این موارد، به‌راحتی می‌توان یک تعریف صوری از مقدار مورد انتظار، یعنی مجموعی از حاصل‌ضرب‌های مقدارها و احتمال‌ها، ارائه داد. برای مثال، مقدار مورد انتظار در پرتاب یک تاس (سالم) برابر با مجموع $۱ \times (\frac{1}{6}) + ۲ \times (\frac{1}{6}) + ۳ \times (\frac{1}{6}) + ۴ \times (\frac{1}{6}) + ۵ \times (\frac{1}{6}) + ۶ \times (\frac{1}{6})$ است که می‌شود $\frac{۲۱}{۶}$ یا $۳\frac{۳}{۲}$. برای وضعیت‌های دیگر، حتی اگر احتمال‌ها یکی هم نباشند، تعریف مشابه است. در یک کتاب درسی، مقدار مورد انتظار به‌سادگی به‌صورت $\sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$ تعریف می‌شود که در آن، $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فضای نمونه‌ای برآمدهای ممکن و $p(x_i)$ احتمال برآمد x_i است.

اما اگرچه احتمالاً برای من ریاضیدان از نظر ظرافت خوشایند بود که از این تعریف استفاده کنم، انجام این کار در قبال دانش‌آموزان، محکوم به شکست بود (البته منظورم اکثر قریب به اتفاق دانش‌آموزان دبیرستانی است، نه معدود افرادی که می‌توانند تفکر انتزاعی داشته باشند و دکتر ریاضی شوند).

در جایگاه یک ریاضی‌دان، می‌دانم که بسیاری از تعریف‌ها با یکدیگر هم‌ارزند، اما از دید فردی با تجربهٔ تدریس در کلاس‌های دبیرستان، می‌دانم که عبارت «فضای نمونه‌ای» و استفاده از نماد مجموع، اندیس‌های پایین و سایر نمادگذاری‌های صوری به «از حدقه در آمدن چشم» دانش‌آموزان منجر می‌شود. بنابراین به‌جای تعریف صوری قبلی، ما یک تعریف هم‌ارز بر مبنای ایدهٔ «میانگین بلندمدت» را انتخاب کردیم. به این ترتیب قبل از به‌کار بردن عبارت رسمی «مقدار مورد انتظار»، برنامهٔ درسی برت به دانش‌آموزان تجربه‌های ملموسی می‌دهد، مانند این‌که از آن‌ها می‌خواهد انداختن یک تاس را به دفعات بسیار، بسیار زیاد تصور کنند و آنچه را که از میانگین این پرتاب‌ها انتظار دارند، محاسبه کنند. دانش‌آموزان، بر پایهٔ تجربه و شهود می‌فهمند که اگر تعداد پرتاب‌ها «به اندازهٔ کافی بزرگ باشد»، نسبت پرتاب‌های مساعد با هر برآمد، «بسیار نزدیک» به مقدار احتمال رخداد آن برآمد خواهد بود. (در واقع دانش‌آموزانی که از برت استفاده می‌کنند به جایی می‌رسند که این را، اساساً معنای احتمال می‌بینند.) برای مثال، اگر ۶۰۰ بار پرتاب کنند، می‌توانند انتظار حدود ۱۰۰ پرتاب را برای هر برآمد ممکن تاس

داشته باشند. در این حالت، دانش‌آموزان برت، تعداد کل پرتاب‌ها را

$$1 \times 100 + 2 \times 100 + 3 \times 100 + 4 \times 100 + 5 \times 100 + 6 \times 100 (= 2100)$$

و مقدار مورد انتظار را $3,5 = \frac{2100}{600}$ محاسبه خواهند کرد.

در این مورد، شهود دانش‌آموزان از احتمال، کمک خوبی به آنان می‌کند. آن‌ها می‌بینند که اگر نسبت پرتاب‌ها برای هر برآمد کمی با $\frac{1}{6}$ فرق داشته باشد، تعداد کل پرتاب‌ها تغییر می‌کند، اما مقدار میانگین چندان تغییر نمی‌کند، زیرا این تعداد کل بر یک «عدد بزرگ» تقسیم می‌شود. پس از کار با چند محاسبه مشابه، دانش‌آموزانی که درک کافی از خاصیت توزیعی به‌دست بیاورند، می‌بینند که نتیجه چنین محاسباتی مستقل از تعداد واقعی پرتاب‌ها است.

سقوط آزاد

یکی از واحدهای برنامه درسی محبوب من در برت، این سناریو در سیرک است: یک بازیگر روی چرخ و فلکی قرار دارد که با سرعتی ثابت می‌چرخد. یک گاری با یک تشت آب، بر مسیر مستقیم با سرعت ثابتی روی ریلی زیر چرخ و فلک در حال حرکت است. بازیگر قرار است طوری از چرخ و فلک در حال حرکت بپرد که در تشت آب فرود آید. بر اساس پارامترهای مشخصی که داده شده (مانند سرعت‌های حرکت، ابعاد چرخ و فلک، و وضعیت اولیه گاری و بازیگر)، بازیگر چه زمانی باید بپرد؟

مسئله، شامل ملاحظات ریاضی بسیاری است. این مسئله در برنامه درسی برت ابزاری است برای تعمیم محاسبات مثلثاتی در مثلث‌های راست‌گوشه به توابع مثلثاتی. همچنین شامل ایده تجزیه بردار است، چون دانش‌آموزان سرعت «هواپرد» اولیه بازیگر را - یعنی سرعت بازیگر در لحظه جدا شدن - ناشی از حرکت خود چرخ و فلک در نظر می‌گیرند.

در اینجا می‌خواهم بر نسخه ساده‌شده این مسئله که دانش‌آموزان در ابتدا حل می‌کنند، متمرکز شوم که در آن، از سرعت اولیه بازیگر صرف‌نظر می‌شود. (اگر چرخ و فلک به اندازه کافی آهسته حرکت کند، این سرعت اولیه تنها اثر کوچکی بر سقوط بازیگر دارد.) به‌عنوان بخشی از تحلیل، دانش‌آموزان باید تعیین کنند که چقدر طول می‌کشد تا بازیگر مسافت داده‌شده‌ای را سقوط کند.

هرچند بعضی از دانش‌آموزان دبیرستانی با رابطه $s = \frac{1}{2}gt^2$ از درس‌های علوم خود آشنا هستند، تنها تعداد کمی از آن‌ها از این‌که این رابطه از کجا آمده چیزی می‌دانند. به‌ویژه، حتی اگر بدانند که در سقوط آزاد شتاب ثابت است، این را درک نمی‌کنند که این موضوع چه دخلی به آن رابطه دارد.

اگر بخواهیم به زبان ریاضی سخن بگوییم، تصمیم گرفتیم که ثابت بودن شتاب را مانند یک اصل موضوع در نظر بگیریم. در جایگاه یک ریاضی‌دان و نویسنده برنامه‌درسی، با این چالش روبه‌رو بودم که راهی برای رسیدن از این اصل به آن رابطه پیدا کنم و در انجام این کار با این محدودیت مواجه بودم که برای دانش‌آموزان دبیرستانی، بر پایه آنچه از بخش‌های قبلی برنامه درسی برت می‌دانستند، چه چیز با معنا است.

ما چندین رویکرد را هم با معلمان و هم با دانش‌آموزان دبیرستانی آزمایش کردیم تا به رویکردی رسیدیم که به درد می‌خورد. در ریاضیات حرفه‌ای، تعریف سرعت متضمن مفهوم مشتق است. به عبارت دیگر، می‌توان مسافت طی‌شده را با محاسبه انتگرال تابع سرعت به دست آورد. این شهود، راهی را به من نشان داد که از فهم دانش‌آموزان از مساحت برای دستیابی به عبارتی برای نمایش مکان برحسب زمان، استفاده کنم. اولین قدم، ایجاد یک ارتباط شهودی بین مساحت زیر نمودار تابع سرعت و مسافت کل طی شده بود. به‌عنوان بخشی از این کار، تصمیم گرفتیم دانش‌آموزان برت روی فعالیتی کارکنند که بخش اول آن این بود:

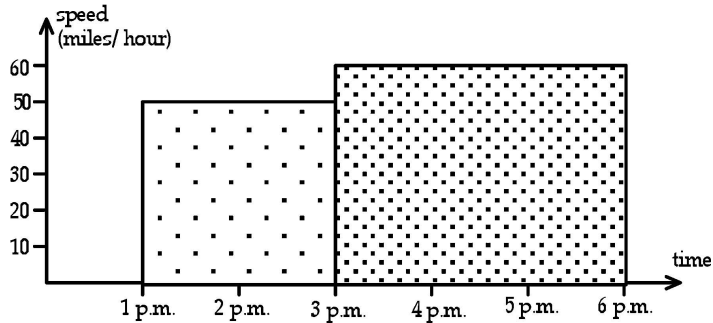
کورت از ۱ بعدازظهر تا ۳ بعدازظهر با سرعت متوسط ۵۰ مایل بر ساعت، و سپس از ۳ بعدازظهر تا ۶ بعدازظهر با سرعت متوسط ۶۰ مایل بر ساعت رانندگی کرد.

الف. نموداری بکشید که سرعت کورت را به‌صورت تابعی از زمان روی کل دوره زمانی ۱ تا ۶ بعدازظهر نمایش دهد و سرعت او را برای هر یک از دو دوره زمانی ۱ تا ۳ بعدازظهر و ۳ تا ۶ بعدازظهر ثابت بگیرید.

ب. توضیح دهید چگونه از مساحت‌های زیر این نمودار استفاده می‌کنید تا کل مسافتی را که او طی کرده است، نمایش دهید.

نمودارهایی که دانش‌آموزان تولید می‌کنند مانند شکل زیر است، و مشاهده می‌کنند که وقتی از ایده آشنای « $\text{نرخ} \times \text{زمان} = \text{مسافت}$ » برای پیدا کردن مسافت طی‌شده استفاده می‌کنند، همان محاسبه‌ای را انجام می‌دهند که برای پیدا کردن مساحت دو مستطیل انجام می‌دهند.

در حین بحث در مورد سؤال ۱، دانش‌آموزان برت عموماً به‌طور شهودی می‌بینند که حتی اگر سرعت ثابت نباشد، این ارتباط بین مساحت و مسافت طی‌شده باز هم باید برقرار باشد (در جریان به دست آوردن این دیدگاه، معلمان اندیشه‌ای را در ذهن دانش‌آموزان پایه می‌گذارند که ممکن است بعدها به ایده تقریب سطح زیر نمودار تابع، با مستطیل‌ها منجر شود). پس از کسب این بصیرت، دانش‌آموزان به بخش دوم فعالیت می‌روند:



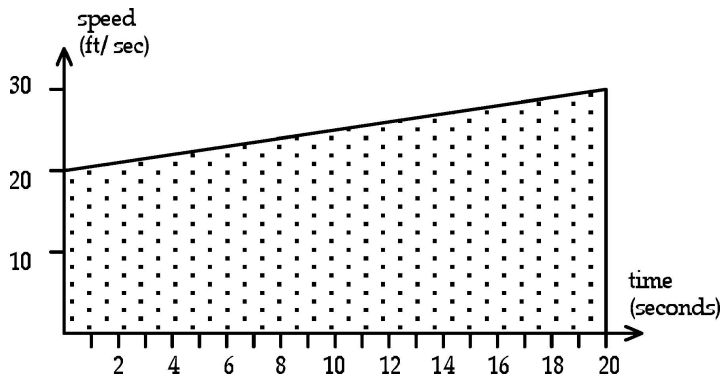
دونده‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت ثابت بیست پا بر ثانیه حرکت می‌کند. هنگام ظهر، او شروع به افزایش سرعتش می‌کند. سرعت او با آهنگ رشد ثابت افزایش می‌یابد طوری که بیست ثانیه بعد، به سی پا در ثانیه می‌رسد.

الف. نمودار سرعت دونده را به صورت تابعی از زمان برای این بازه زمانی بیست ثانیه‌ای رسم کنید.

ب. سرعت متوسط او برای این بازه زمانی بیست ثانیه‌ای چیست؟

پ. توضیح دهید چگونه از مساحت استفاده کنیم تا کل مسافتی را که او در این بازه زمانی بیست ثانیه‌ای دویده است، بیابیم.

برای قسمت ب سؤال ۲، دانش‌آموزان برت عموماً رویکردی کاملاً شهودی را در پیش می‌گیرند و می‌گویند چون سرعت از نرخ ثابت ۲۰ پا بر ثانیه به ۳۰ پا بر ثانیه افزایش یافته است، پس سرعت متوسط، ۲۵ پا بر ثانیه است. اما آن‌ها این را هم تشخیص می‌دهند که قسمت پ سؤال ۲ صورت تغییر یافته‌ای از قسمت ب سؤال ۱ قبلی است - اینجا مساحت، همان‌طور که در زیر مشاهده می‌کنید، به جای این‌که ترکیبی از مستطیل‌ها باشد، یک دوزنقه است. پس از کار با این ایده که مسافت کل طی شده باز هم مساحت است،



دانش‌آموزان می‌توانند شهود خود را از این‌که سرعت متوسط، «نقطهٔ وسط» بین سرعت اولیه و سرعت نهایی است، تأیید کنند. به‌علاوه، می‌توانند نقش فرض «شتاب ثابت» را ببینند. کنار هم گذاشتن این ایده‌ها، به این نتیجه منجر می‌شود:

اگر یک شیء با شتاب ثابت حرکت کند، آن‌گاه سرعت متوسط آن روی هر بازهٔ زمانی، متوسط سرعت اولیه و سرعت نهایی آن در آن بازهٔ زمانی است.

تنها با چند گام کوچک می‌توان از این نتیجه به رابطهٔ سقوط آزاد رسید:

• اگر سرعت از صفر شروع شود و با آهنگ g افزایش یابد، آن‌گاه پس از t ثانیه، سرعت برابر با gt است.

• بنابراین سرعت متوسط در t ثانیه $\frac{0+g}{2}$ است.

• بنابراین مسافت کل طی‌شده در t ثانیه $\frac{gt}{2}t$ است.

با طی کردن این گام‌ها در مورد چند مثال خاص، دانش‌آموزان برت می‌توانند رابطهٔ کلی را به‌دست آورند.

چند درس

مثال‌های بالا چند نکتهٔ مهم را که ممکن است برای نویسندگان برنامه‌های درسی آتی مفید باشد،

نشان می‌دهد:

• درک منعطف و عمیق از یک مفهوم ریاضی می‌تواند دیدگاهی از چگونگی ارائهٔ آن مفهوم به دانش‌آموزان به‌دست دهد. چنین درکی تأثیر زیربنایی در توسعهٔ برنامهٔ درسی برت داشته است.

– درمورد مقدار مورد انتظار، مهم بود که تشخیص دهیم تعریف دیگری از مقدار مورد انتظار وجود دارد که به‌لحاظ ریاضی هم‌ارز تعریف استاندارد است.

– درمورد سقوط آزاد، کلید فهم مطلب، تشخیص این موضوع بود که چگونه مسافت طی‌شده را می‌توان توسط مساحت نمایش داد.

• تولید برنامهٔ درسی برای دانش‌آموزان دبیرستانی مستلزم تصویر روشنی است از آنچه آن‌ها می‌دانند، آنچه نمی‌دانند، عمق درک آن‌ها از آنچه می‌دانند، و تصویر روشنی از آنچه شهود آن‌ها احتمالاً به آنان می‌گوید.

– برای مقدار مورد انتظار، دانش‌آموزان برت می‌دانستند چطور جمع کل و میانگین را

بیابند. این را هم به‌طور شهودی قبول داشتند که اگر مخرج یک کسر «بزرگ» باشد، آن‌گاه یک

تغییر کوچک در صورت کسر، مقدار کسر را خیلی تغییر نمی‌دهد. اما چون اکثر دانش‌آموزان دبیرستانی با صورتگراییِ نمادی راحت نیستند، به‌کارگیری خاصیت توزیعی برای اثبات این‌که اندازه نمونه اهمیتی ندارد، برای آن‌ها معنایی نخواهد داشت.

– برای سقوط آزاد، مهم بود که بدانیم دانش‌آموزان با ایده «نرخ \times زمان = مسافت» راحت هستند و این را هم می‌دانند که چگونه مساحت‌های مربوطه را پیدا کنند. (توجه: اگر این موضوع هنوز قسمتی از پیش‌زمینه درسی دانش‌آموزان نبوده، نویسنده برنامه درسی لازم است که فکر کند چطور آن را قبل از این‌که در اینجا به‌کارگیرد، معرفی کند.)

• اگر می‌خواهیم دانش‌آموزان یک تعریف یا رابطه را بفهمند و به‌کار بگیرند، لازم است با استفاده از موقعیت‌های ملموس، آن تعریف را به‌تدریج بسازیم.

– درمورد مقدار مورد انتظار، بعد از کار با تاس و مثال‌هایی شامل میانگین، تعریف مطرح شد. فهم عمیق از معنای احتمال برای ساختن مفهوم مقدار مورد انتظار حیاتی بود.

– در مورد سقوط آزاد، با شهود دانش‌آموزان درباره وضعیت‌هایی که شامل سرعت ثابت و درک آن‌ها از مساحت بود، شروع کردیم. سپس این را با مثال‌های مشخصی ترکیب کردیم تا شهودشان را تقویت کنیم و بسط دهیم و ارتباط‌های لازم را بسازیم.

• آزمون واقعی یک بخش از برنامه درسی، کارایی آن در کلاس‌های درس است.

– برای مقدار مورد انتظار، بعضی از معلمان می‌خواستند مقدار مورد انتظار را با استفاده از «روش کسر» تعریف کنند. [منظورشان از این عبارت، تعریف بر اساس دستور $\sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$ بود. عموماً به این دلیل می‌خواستند از این رویکرد استفاده کنند که این تعریف را در درس‌های دانشگاهی خود آموخته بودند.] معلمانی که «روش کسر» را امتحان کردند، سردرگمی قابل‌توجهی را در میان دانش‌آموزان گزارش کردند و به همین سبب، به رویکرد «در بلندمدت» تغییر رویه دادند و درک بهتری را در دانش‌آموزان ایجاد نمودند.

– برای سقوط آزاد، پیش از جمع‌بندی در مورد روشی که اینجا توضیح دادیم، روش‌های دیگری را هم امتحان کرده بودیم. معلمان گزارش دادند که دانش‌آموزان اصل «میانگین‌گیری از نقاط انتهایی» را قبول می‌کردند، اما هیچ درکی از این‌که چرا این کار مجاز است نداشتند. آن‌ها اشاره داشتند که رویکردی که اینجا توضیح دادیم، موفق بوده چون هم موافق شهود دانش‌آموزان بوده و هم از دانش قبلی آن‌ها استفاده مفید می‌کرده است.

رعایت این نتایج هدایت‌گر، مطالبات دیگری را در من ایجاد کرد. به‌عنوان ریاضی‌دان، من «درکی عمیق و منعطف» از اکثر مفاهیم ریاضی داشتم، اما خیلی زود فهمیدم که باید از آمار که بخش مهمی از برنامه درسی است، خیلی بیشتر بدانم. تشخیص این‌که دانش‌آموزان چه می‌دانستند و شهود آن‌ها چه چیزی به آن‌ها می‌گفت، مستلزم صرف ساعت‌ها وقت در کلاس‌های درس دبیرستان و صحبت با دانش‌آموزان بود (که لذت‌بخش بود). اصل ساختن تدریجی و ملموس ایده‌ها در خلال سال‌ها تجربه معلمی در مدرسه، ملکه ذهن من شده بود، اما نیاز به توجه دائم به این کار بود؛ به‌ویژه که من در سطح متفاوتی از آموزش ریاضی کار می‌کردم.

این بُعد از موضوع که آیا چیزی واقعاً در کلاس درس به‌کار می‌آید یا نه، چالشی شخصی‌تر بود. لازم بود من بتوانم چیزی را که ماه‌ها برایش وقت صرف کرده بودم تا تکمیل شود، دور بیندازم و با رویکردی جدید شروع کنم. می‌بایست این کار را بارها بیشتر از آن‌که می‌خواستم، انجام دهم، اما پاداش نهایی این کار، ارزش انجامش را داشت.

به‌طور کلی، این کار برای من، به‌عنوان یک ریاضی‌دان، به همان اندازه قضیه‌ها یا اثبات‌هایی که تا آن زمان مطرح کرده بودم، چالشی و راضی‌کننده بود و حسی که از سهم بودن در پیشرفت جامعه به من دست داد قطعاً بهتر از آنی بود که امیدوار بودم از تحقیق در خود ریاضی به‌دست بیاورم.