

## مقایسه‌ای از رویکردهای نیمن - پیرسون، بیز و کم- بیشینه در آزمون فرضیه‌های فازی

عباس پرچمی، سید محمود طاهری، و ناصر رضا ارقامی

### چکیده

در این مقاله، سه رویکرد نیمن-پیرسون، بیز و کم-بیشینه را به مسئله آزمون فرضیه‌های فازی (در حالتی که داده‌ها معمولی هستند) مطرح و مقایسه می‌کنیم. در هر سه رویکرد، اگر فرضیه‌ها دقیق در نظر گرفته شوند، آزمون مربوط معادل با آزمون‌های نیمن-پیرسون، بیز و کم-بیشینه برای فرضیه‌های دقیق خواهد بود. یک مثال کاربردی نیز در حوزه کشاورزی ارائه می‌شود و به وسیله این سه رویکرد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۱. فرضیه‌های فازی: انگیزه‌ها و کاربردها

در رویکرد کلاسیک به آمار، فرضیه‌های آماری به وسیله مجموعه‌های معمولی (دقیق) بیان می‌شوند. اما در عمل، به دلایل مختلف، با مواردی مواجه می‌شویم که صورت‌بندی فرضیه‌ها با استفاده از مجموعه‌های فازی مناسب‌تر است. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱.۱. یک آزمون رایج در بسیاری از مسائل کاربردی، آزمون مقایسه میانگین‌های دو جامعه مستقل است. مثلاً در حوزه علوم تربیتی: مقایسه دو روش آموزش از لحاظ میزان یادگیری، در حوزه کشاورزی: مقایسه رشد یک نوع گیاه بر اساس دو روش کشت، در حوزه مهندسی سازه: مقایسه مقاومت دو روش فناوری بتن. در اغلب این مسائل، برابری دقیق میانگین‌ها مورد نظر نیست، بلکه کافی است بررسی کنیم که آیا میانگین‌های دو جامعه «تقریباً برابر» هستند یا خیر؟ لذا مناسب‌تر و طبیعی‌تر این است که

---

عبارات و کلمات کلیدی. فرضیه فازی؛ آزمون بیز؛ آزمون کم-بیشینه؛ لم نیمن-پیرسون؛ احتمال پیشامد فازی.

فرضیه‌های مورد آزمون به این صورت تنظیم شوند:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : \mu_2 \text{ تقریباً برابر هستند} \\ \tilde{H}_1 : \mu_2 \text{ و } \mu_1 \text{ تفاوت بسیار دارند} \end{cases}$$

در اینجا می‌توانیم مفاهیم «تقریباً برابر» و «تفاوت بسیار» را بر اساس مجموعه‌های فازی مدل‌سازی و در تنظیم فرضیه‌ها از آنها استفاده کنیم.

مثال ۲.۱. گاهی مناسب‌تر و واقعی‌تر است که برای صورت‌بندی فرضیه‌های مورد آزمون، از واژه‌های کلامی به‌جای ارائه مقادیر عددی دقیق استفاده کنیم. برای مثال، فرض کنید ادعایی از طرف نهاد سازنده یک موشک زمین به زمین، مبنی بر کم خطا بودن موشک‌های تولیدی در اصابت به هدف، مطرح شده است. در این مورد، اگر میانگین خطا در برخورد به هدف را با متر اندازه‌گیری کنیم، فرضیه‌ها مثلاً این‌گونه بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 100 \\ H_1 : \mu > 100 \end{cases}$$

که در آن،  $\mu$  متوسط فاصله محل اصابت موشک‌های تولیدی تا هدف است. اما روشن است که هرچه موشک نزدیک‌تر به هدف اصابت کند، تأثیر و شدت تخریب آن بیشتر است و هرچه دورتر اصابت کند، تأثیر کمتری دارد. لذا مناسب‌تر است که فرضیه‌های مورد آزمون، به‌کمک مجموعه‌های فازی به‌صورت زیر طراحی شوند که در آنها به‌جای عدد دقیق ۱۰۰، از واژه‌های کوچک و بزرگ استفاده شده است:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : \mu \text{ کوچک است} \\ \tilde{H}_1 : \mu \text{ بزرگ است} \end{cases}$$

مثال ۳.۱. گاهی کافی است مطمئن شویم که در یک جامعه یا سازوکار تحت مطالعه، وضعیت جدید از وضعیت قبلی به اندازه‌ای قابل قبول بهتر شده است. در این موارد فرضیه‌های فازی، فرضیه‌هایی معقول‌تر و طبیعی‌تر هستند. مثلاً جامعه‌ای را در نظر بگیرید که نرخ شیوع یک بیماری خاص در آن حدوداً ۲۰٪ بوده است. پس از انجام یک واکسیناسیون همگانی، می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا این نسبت «بسیار کم» شده است یا خیر. در این مورد، طبیعی است که نخست واژه‌های کلامی «حدوداً ۲۰٪» و «بسیار کم» را با دو مجموعه فازی مدل‌سازی و آن‌گاه فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : \theta \text{ حدوداً } 20\% \text{ است} \\ \tilde{H}_1 : \theta \text{ بسیار کوچک است} \end{cases}$$

مثال ۴.۱. گاهی متغیر مورد بررسی و مشاهدات مربوط به آن، مبهم است. در این موارد نیز بسا بهتر باشد که فرضیه‌های مورد آزمون را نادقیق در نظر بگیریم. مثلاً اگر بخواهیم در مورد «رضایت شغلی» در میان افراد یک جامعه بررسی انجام دهیم، داده‌هایی (مشاهده‌هایی) به صورت زیر خواهیم داشت: «رضایت متوسط»، «رضایت نسبتاً زیاد»، «رضایت کم»، «رضایت خیلی کم»، ... در این مورد، طبیعی‌تر است که فرضیه‌های مورد آزمون را نیز فازی در نظر بگیریم. مثلاً به جای آزمون فرضیه

متوسط رضایت شغلی بیشتر از  $۸۲/۶$  است :  $H$

این فرضیه فازی را آزمون کنیم که

متوسط رضایت شغلی نسبتاً زیاد است :  $\tilde{H}$

مثال‌های بالا نمونه‌هایی از مسائلی هستند که در آنها تنظیم فرضیه‌ها به صورت مجموعه‌های فازی، موجه یا مطلوب است. از این دست مسائل بسیار است. به منظور طولانی نشدن مقاله، از آوردن مثال‌های دیگر چشم‌پوشی می‌کنیم. در این مقاله، نخست توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان فرضیه‌های نادقیق را در قالب مجموعه‌های فازی صورت‌بندی کرد و سپس سه رویکرد به آزمون فرضیه‌های فازی را بررسی و مقایسه می‌کنیم.

## ۲. فرضیه‌های فازی: مفاهیم و تعریف‌ها

در این بخش، چند تعریف و رابطه مقدماتی را درباره فرضیه‌های فازی مرور می‌کنیم. در ادامه فرض می‌کنیم که  $\Theta$  فضای پارامتر مورد بحث است.

تعریف ۱.۲. هر گزاره فازی به شکل « $\theta$  به صورت تابع  $H$  است :  $\tilde{H}$ » است که در آن،  $H : \Theta \rightarrow [0, 1]$  یک فرضیه فازی نامیده می‌شود. عبارت « $\theta$  به صورت تابع  $H$  است» دلالت بر این دارد که هر مقدار خاص مانند  $\theta$ ، با درجه  $H(\theta)$  متعلق به فضای پارامتر است.

به دیگر سخن، هر ادعا درباره پارامتر مجهول جامعه که به وسیله یک مجموعه فازی بیان گردد، یک فرضیه (پارامتری) فازی است [۱]. توجه کنید که با جایگذاری تابع نشانگر به جای تابع عضویت، تعریف فوق تبدیل به تعریف فرضیه معمولی در آمار کلاسیک می‌شود و بنابراین فرضیه‌های معمولی (غیرفازی)، حالت خاصی از فرضیه‌های فازی هستند. برای مثال، فرضیه غیرفازی  $\theta = H$  را می‌توان یک فرضیه فازی با تابع عضویت  $I(\theta = \theta_0)$  در نظر گرفت.

مثال ۲.۲. فرض کنید  $\theta$  نسبت (مجهول) افراد بزرگسال مرد ساکن در استان گلستان باشد که مبتلا به سرطان روده هستند. هر یک از فرضیه‌های زیر که تابع عضویت مربوط به آنها در ادامه درج شده است، یک فرضیه فازی در مورد مقدار  $\theta$  است (شکل ۱ را ببینید):

$\tilde{H}_1$ :  $\theta$  کوچک است (نسبت مبتلایان کم است):

$\tilde{H}_2$ :  $\theta$  بسیار کوچک است (نسبت مبتلایان بسیار کم است):

$\tilde{H}_3$ :  $\theta$  تقریباً ۰/۱۵ است

$$H_1(\theta) = \begin{cases} \frac{0.3-\theta}{0.3} & 0 \leq \theta < 0.3 \\ 0 & 0.3 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

$$H_2(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{0.3-\theta}{0.3}\right)^4 & 0 \leq \theta < 0.3 \\ 0 & 0.3 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

$$H_3(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta < 0.10 \\ \frac{\theta-0.10}{0.05} & 0.10 \leq \theta < 0.15 \\ \frac{0.20-\theta}{0.05} & 0.15 \leq \theta < 0.20 \\ 0 & 0.20 \leq \theta \end{cases}$$

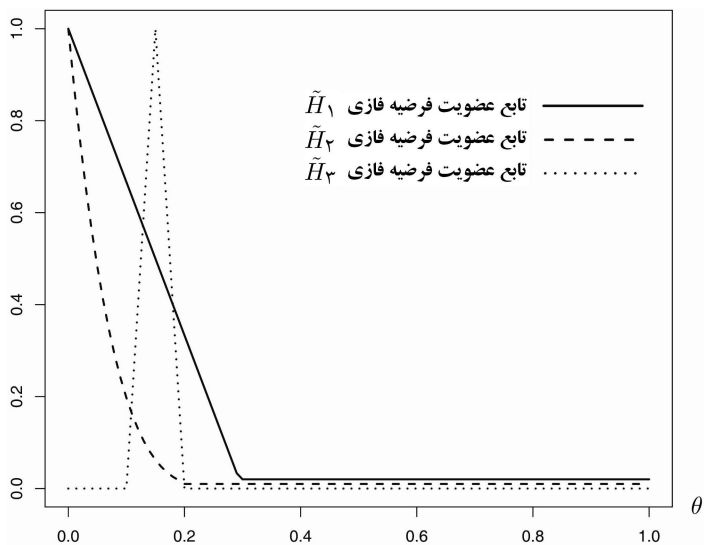
در همین مثال، فرضیه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} H_0: \theta \text{ کوچکتر یا مساوی } 0.20 \text{ است} \\ H_1: \theta \text{ بزرگتر از } 0.20 \text{ است} \end{cases}$$

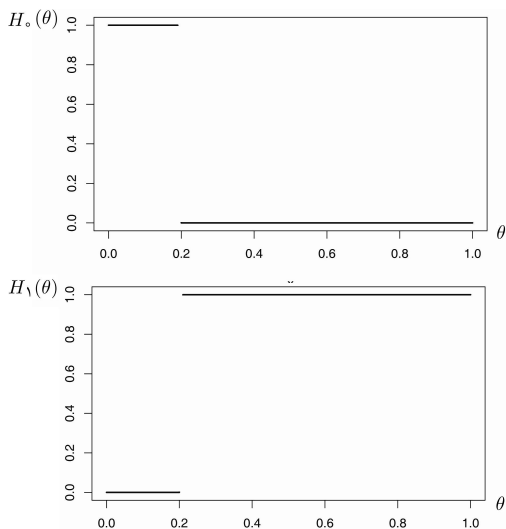
هر دو فرضیه بالا، فرضیه‌های دقیق (غیرفازی) هستند و البته می‌توان این فرضیه‌ها را حالت‌های خاص از فرضیه‌های فازی با توابع عضویت زیر در نظر گرفت (شکل ۲ را ببینید):

$$H_0(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq 0.20 \\ 0 & 0.20 < \theta \leq 1 \end{cases} \quad H_1(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta \leq 0.20 \\ 1 & 0.20 < \theta \leq 1 \end{cases}$$

مثال ۳.۲. میزان جذب عنصر سمی کادمیوم توسط ریشه گیاه تربچه از یک خاک آلوده به  $CdNO_3$ ، به‌عنوان متغیر تصادفی در یک تحقیق کشاورزی در نظر گرفته شده است. بر اساس تحقیقات پایس و بنتون [۱۳]، اگر میزان جذب کادمیوم توسط گیاه (برحسب میلی‌گرم در هر کیلوگرم ماده خشک) در بازه  $[0/05, 0/2]$  باشد، آن‌گاه جذب ایده‌آلی توسط گیاه صورت گرفته است. همچنین حداکثر میزان جذب



شکل ۱. نمودار توابع عضویت سه فرضیه فازی در مثال ۲.۲



شکل ۲. نمودار توابع عضویت فرضیه‌های دقیق  $H_0$  (نمودار بالایی) و  $H_1$  (نمودار پایینی) در مثال ۲.۲

قابل قبول کادمیوم برای گیاه تربچه برابر ۳ میلی‌گرم در هر کیلوگرم ماده خشک است. فرض کنید ادعایی

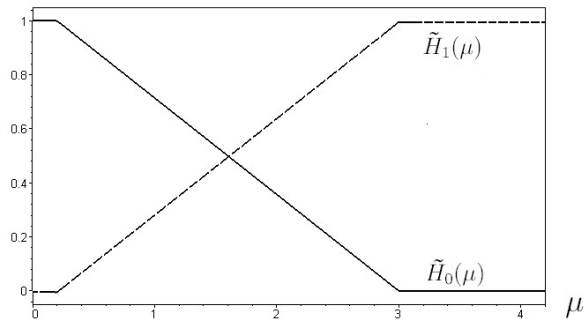
در بارهٔ تریچه‌های کاشته‌شده در یک تحقیق گلخانه‌ای مطرح شده است مبنی بر اینکه میانگین جذب کادمیوم ( $\mu$ ) منطبق بر جذب مناسب معرفی‌شده توسط پایس و بنتون [۱۳] است. برای بررسی صحت و سقم این ادعا، فرضیه‌ها به شکل زیر صورت‌بندی شده‌اند:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \text{ میانگین جذب کادمیوم کم است} \\ \tilde{H}_1: \text{ میانگین جذب کادمیوم زیاد است} \end{cases} \quad (1.2)$$

در اینجا مفاهیم نادقیق «کم» و «زیاد» به ترتیب به وسیلهٔ

$$H_0(\mu) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \mu < 0.2 \\ \frac{3-\mu}{2.8} & 0.2 \leq \mu < 3 \\ 0 & \mu \geq 3 \end{cases}$$

و  $H_1(\mu) = 1 - H_0(\mu)$  مشخص شده‌اند (شکل ۳). از آنجا که کادمیوم عنصری سمی است، می‌توان



شکل ۳. توابع عضویت فرضیه‌های فازی در مثال ۳.۲

ادعا کرد که جذب کمتر آن برای گیاه مناسب‌تر بوده و لذا در معرفی  $H_0(\mu)$ ، میزان عضویت اعداد  $[0, 0.2]$  به مجموعهٔ فازی جذب مناسب کادمیوم، برابر ۱ در نظر گرفته شده است (شکل ۳ را ببینید). توجه داشته باشید که اگر به منظور صورت‌بندی این ادعا، از فرضیه‌های معمولی و غیرفازی

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 0.2 + 2/8t \\ H_1: \mu > 0.2 + 2/8t \end{cases} \quad (2.2)$$

استفاده کنیم، آن‌گاه به ازای مقادیر مختلف  $0 \leq t \leq 1$  می‌توان فرضیه‌های  $H_0$  و  $H_1$  زیادی را مطرح ساخت که لزوماً آزمون آنها منتهی به جواب یکسان نمی‌شود و امکان متناقض شدن نتایج آزمون فرضیه‌های دقیق (۲.۲) به ازای مقادیر مختلف  $t \in [0, 1]$  وجود دارد. دلیل این امر، ابهام موجود در تعیین میزان

مناسب مقدار جذب توسط پاپس و بنتون است و لذا ادعای مبهم آنها نیز قابلیت صورت‌بندی دقیق در قالب فرضیه‌های دقیق را ندارد. بنابراین برای رفع این مشکل، می‌توان به کمک مجموعه‌های فازی، مسئله را به وسیله فرضیه‌های فازی (۱.۲) صورت‌بندی کرد. این موضوع از مزیت‌های به کارگیری فرضیه‌های فازی در برخی از مسائل کاربردی و واقعی به شمار می‌آید.

**تعریف ۴.۲.** ([۲۰]) فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع چگالی احتمال  $f(x; \theta)$  و انتگرال تابع عضویت فرضیه  $\tilde{H}$  متناهی باشد. «تابع چگالی احتمال وزنی  $X$  تحت فرضیه فازی  $\tilde{H}$ » را با نماد  $f(x; \tilde{H})$  نشان می‌دهیم و به صورت

$$f(x; \tilde{H}) = \int_{\theta} H^*(\theta) f(x; \theta) d\theta$$

تعریف می‌کنیم که در آن،  $H^*$  تابع عضویت نرمال‌شده فرضیه  $\tilde{H}$ ، عبارت است از

$$H^*(\theta) = \frac{H(\theta)}{\int_{\theta} H(\theta) d\theta}.$$

در حالت گسسته به جای انتگرال از مجموع‌یابی استفاده می‌شود.

توجه داشته باشید که در حالت پیوسته، تابع عضویت نرمال‌شده لزوماً یک تابع عضویت نیست، زیرا اگر  $\int_{\theta} H(\theta) d\theta < 1$ ، آن‌گاه ممکن است به‌ازای برخی از  $\theta$ ها تابع عضویت نرمال‌شده،  $H^*(\theta)$ ، مقدارهایی بزرگتر از یک اختیار کند.

تابع  $f(x; \tilde{H})$  یک تابع چگالی احتمال است، زیرا اولاً  $f(x; \tilde{H})$  نامنفی است و ثانیاً

$$\begin{aligned} \int_x f(x; \tilde{H}) dx &= \int_x \int_{\theta} H^*(\theta) f(x; \theta) d\theta dx \\ &= \int_{\theta} H^*(\theta) \left( \int_x f(x; \theta) dx \right) d\theta \\ &= \int_{\theta} H^*(\theta) d\theta = 1. \end{aligned}$$

به‌علاوه اگر  $H$  فرضیه معمولی (غیرفازی) « $H : \theta = \theta_0$ » باشد، آن‌گاه  $f(x; H) = f(x; \theta_0)$ .

**تعریف ۵.۲.** فرض‌های تعریف ۴.۲ را در نظر بگیرید. در این صورت احتمال پیشامد  $A$  تحت فرضیه فازی  $\tilde{H}$  با

$$P_{\tilde{H}}(A) = \int_{\theta} H^*(\theta) P_{\theta}(A) d\theta$$

مقایسه‌ای از رویکردهای نیمن - پیرسون، بیز و کم- بیشینه در آزمون فرضیه‌های فازی \_\_\_\_\_ ۵۰  
 تعریف می‌شود. در حالت گسسته، به جای انتگرال مجموع‌یابی قرار می‌گیرد.

دقت کنید که با فرض امکان جابه‌جایی ترتیب انتگرال‌گیری، داریم

$$\begin{aligned} \int_{\theta} H^*(\theta) P_{\theta}(A) d\theta &= \int_{\theta} H^*(\theta) \int_A f(x; \theta) dx d\theta \\ &= \int_A \int_{\theta} H^*(\theta) f(x; \theta) d\theta dx \\ &= \int_A f(x; \tilde{H}) dx. \end{aligned}$$

اگر  $H$  فرضیه مرکب و غیرفازی « $H : \theta \in \Theta'$ » و  $\Theta'$  متناهی باشد، آنگاه می‌توان  $P_H(A)$  را متوسط  $P_{\theta}(A)$  روی  $\theta \in \Theta'$  دانست، زیرا بنابر تعریف ۵.۲ در این حالت داریم

$$\begin{aligned} P_H(A) &= \frac{\int_{\Theta'} I_{\Theta'}(\theta) P_{\theta}(A) d\theta}{\int_{\Theta'} d\theta} \\ &= \frac{\int_{\Theta'} P_{\theta}(A) d\theta}{\int_{\Theta'} d\theta} \\ &= E_{\Theta'} P_{\theta}(A) \end{aligned}$$

که در اینجا، منظور از  $E_{\Theta'}$  امید ریاضی نسبت به توزیع یکنواخت روی مجموعه  $\Theta'$  است. همچنین در حالت خاص‌تر اگر  $H$  فرضیه ساده غیرفازی « $H : \theta = \theta_0$ » باشد، آنگاه  $P_H(A) = P_{\theta_0}(A)$ .

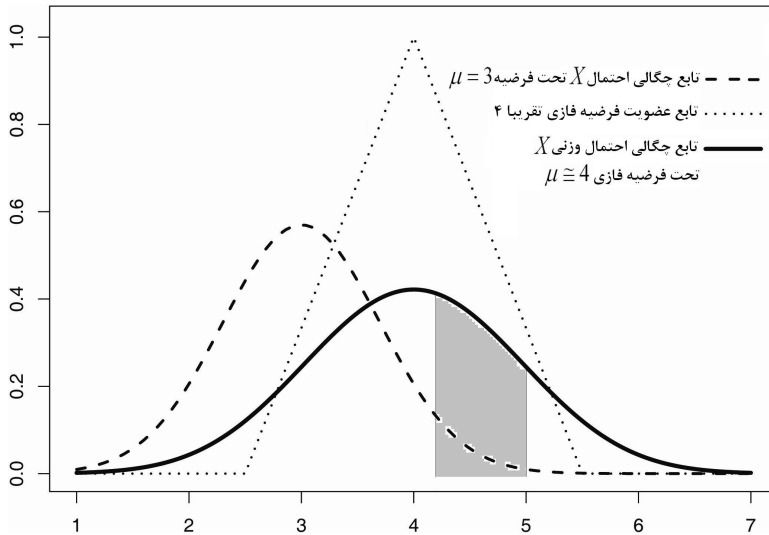
مثال ۶.۲. فرض کنید  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول  $\mu$  و واریانس  $1/5$  باشد. همچنین فرض کنید مفهوم «تقریباً ۴» به وسیله تابع عضویت زیر ارائه شده باشد:

$$H(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu - 2/5}{1/5} & 2/5 < \mu \leq 4 \\ \frac{5/5 - \mu}{1/5} & 4 < \mu \leq 5/5 \\ 0 & \text{اگر نه} \end{cases}$$



طبق تعریف ۴.۲، تابع چگالی احتمال وزنی  $X$  تحت فرضیه فازی « $\tilde{H} : \mu \cong 4$ » به صورت زیر است (شکل ۴ را ببینید):

$$\begin{aligned} f(x; \mu \cong 4) &= \int_{\mu} H^*(\mu) f(x; \mu) d\mu \\ &= \frac{2}{3} \int_{\mu} H(\mu) \frac{1}{\sqrt{1/4}\pi} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{1/4}} d\mu \\ &= \frac{2}{3\sqrt{1/4}\pi} \int_{2/5}^4 \frac{\mu - 2/5}{1/5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{1/4}} d\mu \\ &+ \frac{2}{3\sqrt{1/4}\pi} \int_4^{5/5} \frac{5/5 - \mu}{1/5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{1/4}} d\mu, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



شکل ۴. تابع چگالی احتمال وزنی نرمال تحت فرضیه فازی  $\mu \cong 4$  و تابع چگالی احتمال نرمال تحت فرضیه  $\mu = 3$  در مثال ۶.۲

حال بر اساس تعریف ۵.۲ و به کمک تابع چگالی احتمال وزنی  $X$ ، مثلاً می توان احتمال این پیشامد را که متغیر تصادفی  $X$  بین اعداد  $4/2$  و  $5$  باشد تحت فرضیه فازی « $\tilde{H} : \mu \cong 4$ » به صورت زیر محاسبه

کرد:

$$\begin{aligned}
 P_{\tilde{H}}(4/2 < X < 5) &= \int_{4/2}^5 f(x; \tilde{H}) dx \\
 &= \frac{2}{3\sqrt{1/4}\pi} \int_{4/2}^5 \int_{2/5}^4 \frac{\mu - 2/5}{1/5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{1/4}} d\mu dx \\
 &\quad + \frac{2}{3\sqrt{1/4}\pi} \int_{4/2}^5 \int_2^{5/5} \frac{5/5 - \mu}{1/5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{1/4}} d\mu dx \\
 &= 0/255
 \end{aligned}$$

که برابر با سطح ناحیه خاکستری در شکل ۴ است.

### ۳. آزمون نیمن-پیرسون

در ابتدای این بخش، برخی از تعریف‌های مربوط به آزمون فرضیه‌های فازی را بر اساس مراجع [۱۸، ۶] مرور می‌کنیم. فرض کنید  $X = (X_1, \dots, X_n)$  نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال یا تابع جرم احتمال  $f(x_i; \theta)$  و  $x = (x_1, \dots, x_n)$  بردار مقادیرهای مشاهده‌شده باشد که در آن،  $\theta \in \Theta$  پارامتر مجهول است. می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را آزمون کنیم:

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \theta \text{ به صورت تابع } H_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \theta \text{ به صورت تابع } H_1 \text{ است} \end{cases} \quad (1.3)$$

**تعریف ۱.۳.** در مسئله آزمون فرضیه‌های فازی (۱.۳) هر تابع  $\Phi$  (تابعی از مجموعه مقادیرهای ممکن نمونه تصادفی به بازه  $[0, 1]$ ) به طوری که  $\Phi(x)$  احتمال رد  $\tilde{H}_0$  به ازای مقدار مشاهده‌شده  $x$  را نشان دهد، یک تابع آزمون نامیده می‌شود.

از این پس، آزمونی که تابع آزمون آن  $\Phi(X)$  باشد را به اختصار «آزمون  $\Phi$ » می‌نامیم.

**تعریف ۲.۳.** تابع توان آزمون  $\Phi$  به صورت

$$\beta_{\Phi}(\theta) = P_{\theta} \{d(X) = a_1\} = E_{\theta} [\Phi(X)]$$

تعریف می‌شود که در آن،  $d(X) = a_1$  به معنی رد  $H_0$  است.

**تعریف ۳.۳.** فرض کنید  $\Phi(X)$  یک تابع آزمون برای آزمون فرضیه‌های فازی (۱.۳) باشد و همچنین  $\int_{\Theta} H_0(\theta) d\theta < \infty$  و  $\int_{\Theta} H_1(\theta) d\theta < \infty$ . احتمال ارتکاب خطای نوع اول آزمون  $\Phi$  عبارت

$$\begin{aligned}\alpha_{\Phi} &= P_{\tilde{H}_0} \{d(X) = a_1\} \\ &= \int_{\Theta} H_0^*(\theta) P_{\theta} \{d(X) = a_1\} d\theta \\ &= \int_{\Theta} H_0^*(\theta) E_{\theta} \Phi(X) d\theta\end{aligned}$$

و احتمال ارتکاب خطای نوع دوم، عبارت است از

$$\begin{aligned}\beta_{\Phi} &= P_{\tilde{H}_1} \{d(X) = a_0\} \\ &= \int_{\Theta} H_1^*(\theta) P_{\theta} \{d(X) = a_0\} d\theta \\ &= \int_{\Theta} H_1^*(\theta) [1 - E_{\theta} \Phi(X)] d\theta.\end{aligned}$$

(در حالت گسسته، از مجموع یابی به جای انتگرال استفاده می‌شود).

اگر به تسامح، تابع عضویت فرضیه فازی  $\tilde{H}_0$  را به چشم تابع چگالی احتمال  $\theta$  بنگریم، آن‌گاه  $\alpha_{\Phi}$  را می‌توان میانگین وزنی  $E_{\theta} \Phi(X)$  تلقی نمود. تفسیری مشابه را می‌توان برای  $\beta_{\Phi}$  بیان کرد. در حالت آزمون فرضیه ساده در مقابل ساده (مانند آنچه در لم نیمن-پیرسون معمولی وجود دارد)،  $\alpha_{\Phi}$  و  $\beta_{\Phi}$  به احتمال ارتکاب خطاهای نوع اول و دوم معمولی تبدیل می‌شوند.

تعریف ۴.۳. آزمون  $\Phi$  را یک آزمون در سطح  $\alpha$  (معناداری) می‌نامیم اگر  $\alpha_{\Phi} \leq \alpha \in [0, 1]$ . همچنین  $\alpha_{\Phi}$  را اندازه آزمون  $\Phi$  می‌گوییم.

تعریف ۵.۳. آزمون در سطح  $\alpha$   $\Phi$  را بهترین آزمون در سطح  $\alpha$  می‌نامیم اگر به ازای هر آزمون در سطح  $\alpha$   $\Phi^*$  داشته باشیم  $\beta_{\Phi} \leq \beta_{\Phi^*}$ .

قضیه ۶.۳ (لم نیمن-پیرسون تعمیم یافته [۱۸]). فرض کنید  $X = (X_1, \dots, X_n)$  نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال یا تابع جرم احتمال  $f(x_i; \theta)$  و  $x = (x_1, \dots, x_n)$  بردار مقدارهای مشاهده شده باشد که در آن،  $\theta \in \Theta$  پارامتر مجهول است. برای آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \theta \text{ به صورت تابع } H_0 \text{ است;} \\ \tilde{H}_1: \theta \text{ به صورت تابع } H_1 \text{ است;} \end{cases}$$

الف) هر آزمون به صورت

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\int_{\Theta} H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta} > k \\ 0 & \frac{\int_{\Theta} H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta} < k \end{cases} \quad (۲.۳)$$

برای هر  $k \geq 0$ ، بهترین آزمون در اندازه خود است. به علاوه به ازای  $k = \infty$ ، آزمون

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta = 0 \\ 0 & \int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta > 0 \end{cases} \quad (۳.۳)$$

بهترین آزمون در اندازه صفر است.

ب) برای هر  $0 \leq \alpha \leq 1$  آزمون  $\alpha$  به شکل (۲.۳) یا (۳.۳) وجود دارد به طوری که در آن،  $\alpha_{\Phi} = \alpha$ .

#### ۴. آزمون کم-بیشینه

در ابتدای این بخش، مفاهیم مقدماتی نظریه تصمیم را به کوتاهی مرور می‌کنیم [۱۵، ۱۶]. فرض کنیم  $\mathbb{R} \rightarrow \Theta \times \mathcal{A} : \mathcal{L}(\theta, a)$  تابع زیان باشد که در آن،  $\mathcal{A}$  فضای اعمال است. تابع  $\mathcal{L}(\theta, a)$  نشان‌دهنده مقدار زیان است وقتی مقدار پارامتر  $\theta$  است و ما تصمیم  $a$  را اتخاذ نموده‌ایم. فرض کنیم  $\mathcal{D}$  رده توابع تصمیم (توابعی از  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathcal{A}$ ) باشد. تابع  $\{0\} \cup \mathbb{R}^+ \rightarrow \Theta \times \mathcal{D} : \mathcal{R}$  را که به صورت  $\mathcal{R}(\theta, d) = E_{\theta}\mathcal{L}(\theta, d(X))$  تعریف می‌شود، تابع ریسک می‌نامیم. بر اساس این تعریف‌ها، رویکرد کم-بیشینه، تصمیم  $d_m \in \mathcal{D}$  را به گونه‌ای انتخاب می‌کند که

$$\max_{\theta} \mathcal{R}(\theta, d_m) \leq \max_{\theta} \mathcal{R}(\theta, d).$$

چنین تصمیمی، در صورت وجود، تصمیم کم-بیشینه (مینیماکس) نامیده می‌شود. مسئله آزمون فرضیه « $H_0 : \theta = \theta_0$ » در مقابل فرضیه « $H_1 : \theta = \theta_1$ » را می‌توان حالتی خاص از بحث فوق در نظر گرفت که در آن، فضای اعمال متشکل از دو عمل  $a_0$  (پذیرش  $H_0$ ) و  $a_1$  (پذیرش  $H_1$ ) است. بنابراین در این حالت،  $\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$  و  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ . تابع زیان نیز در مسئله آزمون فرضیه معمولاً به صورت

$$\begin{cases} \mathcal{L}(H_1, a) = C_1 & a = a_0, C_1 > 0 \\ \mathcal{L}(H_0, a) = C_0 & a = a_1, C_0 > 0 \\ \mathcal{L}(H_0, a) = 0 & a = a_0 \\ \mathcal{L}(H_1, a) = 0 & a = a_1 \end{cases} \quad (۱.۴)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن،  $C_0$  زیان ناشی از ارتکاب خطای نوع اول و  $C_1$  زیان ناشی از ارتکاب خطای نوع دوم است.

در مسئلهٔ آزمون فرضیه‌های فازی نیز حالتی را در نظر می‌گیریم که فضای اعمال متشکل از تنها دو نقطهٔ  $a_0$  و  $a_1$  است که در آن، به‌ازای  $1, 0 = j$ ، عمل  $a_j$  نشان‌دهندهٔ پذیرش فرضیهٔ فازی « $\theta$  به‌صورت تابع  $H_j$  است:  $\tilde{H}_j$ » (و رد فرضیهٔ دیگر) است.

تعریف ۱.۴. در آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : \theta \text{ به‌صورت تابع } H_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1 : \theta \text{ به‌صورت تابع } H_1 \text{ است} \end{cases}$$

تصمیم  $d_m$  را تصمیم کم-بیشینه و یا به‌طور معادل،  $\Phi_m$  را آزمون کم-بیشینه نامیم اگر به‌ازای هر  $d \in \mathcal{D}$  داشته باشیم

$$\max \left\{ \mathcal{R}(\tilde{H}_0, d_m), \mathcal{R}(\tilde{H}_1, d_m) \right\} \leq \max \left\{ \mathcal{R}(\tilde{H}_0, d), \mathcal{R}(\tilde{H}_1, d) \right\}.$$

قضیه ۲.۴ ([۱۴]). فرض کنید  $X = (X_1, \dots, X_n)$  نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال  $f(x_i; \theta)$  و بردار مقدارهای مشاهده‌شده باشد که در آن،  $\theta \in \Theta$  پارامتر مجهول است. در آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : \theta \text{ به‌صورت تابع } H_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1 : \theta \text{ به‌صورت تابع } H_1 \text{ است} \end{cases}$$

با در نظر داشتن تابع زیان

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\tilde{H}_1, a) = C_1 & a = a_0, C_1 > 0 \\ \mathcal{L}(\tilde{H}_0, a) = C_0 & a = a_1, C_0 > 0 \\ \mathcal{L}(\tilde{H}_0, a) = 0 & a = a_0 \\ \mathcal{L}(\tilde{H}_1, a) = 0 & a = a_1 \end{cases} \quad (۲.۴)$$

آزمون کم-بیشینه، فرضیهٔ فازی  $\tilde{H}_0$  را رد می‌کند اگر و تنها اگر  $\lambda(x) \geq k$  که در آن

$$\lambda(x) = \frac{\int_{\Theta} H_1(\theta) f(x; \theta) d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta) f(x; \theta) d\theta} \quad (۳.۴)$$

و مقدار ثابت  $k$  به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$C_1 P_{\tilde{H}_1} \left\{ \frac{\int_{\Theta} H_1(\theta) f(X; \theta) d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta) f(X; \theta) d\theta} < k \right\} = C_0 P_{\tilde{H}_0} \left\{ \frac{\int_{\Theta} H_1(\theta) f(X; \theta) d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta) f(X; \theta) d\theta} \geq k \right\}. \quad (۴.۴)$$

نتیجه ۳.۴. تحت زبان  $1-0$ ، یعنی حالتی که  $C_0 = C_1 = 1$ ، آزمون کم-بیشینه، فرضیه فازی  $\tilde{H}_0$  را در مقابل  $\tilde{H}_1$  رد می‌کند اگر و تنها اگر  $\lambda(x) \geq k$  که در آن، ثابت  $k$  از رابطه

$$P_{\tilde{H}_1} \left\{ \frac{\int H_1(\theta) f(X; \theta) d\theta}{\int H_0(\theta) f(X; \theta) d\theta} < k \right\} = P_{\tilde{H}_0} \left\{ \frac{\int H_1(\theta) f(X; \theta) d\theta}{\int H_0(\theta) f(X; \theta) d\theta} \geq k \right\},$$

یعنی رابطه  $\alpha_{\Phi} = \beta_{\Phi}$  به دست می‌آید.

به کمک قضیه ۶.۳ می‌توان احتمال ارتکاب خطای نوع دوم ( $P_{\tilde{H}_1} \{ \tilde{H}_0 \}$ ) در آزمون فرضیه‌های فازی را با فرض ثابت بودن احتمال ارتکاب خطای نوع اول ( $P_{\tilde{H}_1} \{ \tilde{H}_0 \}$ ) کمینه کرد. اما در قضیه ۲.۴، سطح ثابت  $\alpha$  بی برای  $P_{\tilde{H}_0} \{ d(X) = a_1 \}$  در آزمون فرضیه‌های فازی در نظر گرفته نمی‌شود و در عوض، آزمون کم-بیشینه با آزاد اختیار کردن احتمالات خطای نوع اول و دوم، مقدار

$$\max \left\{ \mathcal{R}(\tilde{H}_0, d), \mathcal{R}(\tilde{H}_1, d) \right\}$$

را کمینه می‌سازد.

ایده اصلی قضیه ۲.۴ جانشینی توابع عضویت فرضیه‌های  $\tilde{H}_0$  و  $\tilde{H}_1$  به جای تابع‌های نشانگر

$$H_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta = \theta_1 \\ 0 & \theta = \theta_0 \end{cases} \quad \text{و} \quad H_0(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta = \theta_0 \\ 0 & \theta = \theta_1 \end{cases}$$

است. در این حالت داریم

$$\int_{\Theta} H_0(\theta) f(x; \theta) d\theta = f(x; \theta_0), \quad \int_{\Theta} H_1(\theta) f(x; \theta) d\theta = f(x; \theta_1)$$

و در نتیجه با توجه به قضیه ۲.۴، آزمون کم-بیشینه، فرضیه  $H_0$  را رد می‌کند اگر و تنها اگر  $\frac{f(x; \theta_1)}{f(x; \theta_0)} \geq k$  که در آن، ثابت  $k$  از رابطه زیر به دست می‌آید

$$C_1 P_{\theta_1} \left\{ \frac{f(X; \theta_1)}{f(X; \theta_0)} < k \right\} = C_0 P_{\theta_0} \left\{ \frac{f(X; \theta_1)}{f(X; \theta_0)} \geq k \right\}.$$

بنابراین آزمون کم-بیشینه برای فرضیه ساده در مقابل ساده که در صفحه ۵۲۱ از [۱۶] مطرح شده است، حالتی خاص از قضیه ۲.۴ است.

فرض کنیم  $X = (X_1, \dots, X_n)$  نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع جرم احتمال  $f(x_i; \theta)$ ، و بردار مقادیرهای مشاهده شده باشد. در این حالت اگر خود را محدود به آزمون‌های غیرتصادفی کنیم، آن‌گاه در بسیاری از حالت‌ها  $k$  بی نمی‌توان یافت که در رابطه (۴.۴) صدق کند. در این

موارد، آزمون کم-بیشینه برای فرضیه‌های فازی در رده آزمون‌های غیرتصادفی وجود ندارد و باید آن را در رده آزمون‌های تصادفی که به شکل

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\int_{\Theta} H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta} > k \\ \delta & \frac{\int_{\Theta} H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta} = k \\ 0 & \frac{\int_{\Theta} H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta} < k \end{cases} \quad (5.4)$$

هستند، جستجو کرد. لذا با توجه به قضیه ۲.۴، در این حالت باید  $k$  به گونه‌ای یافت شود که در رابطه

$$\mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}_0, k) = \mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}_1, k)$$

صدق کند. توجه داشته باشید که در رابطه اخیر، ریسک آزمون تصادفی (۵.۴) را می‌توان برحسب ریسک آزمون غیرتصادفی با ناحیه بحرانی  $\frac{\int_{\Theta} H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta} \geq k$  به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}, k) &= E_{\theta} \mathcal{L}(\tilde{H}, d_m(X)) \\ &= \mathcal{L}(\tilde{H}, a_0) P_{\tilde{H}_1} \{d_m(X) = a_0\} + \mathcal{L}(\tilde{H}, a_1) P_{\tilde{H}_0} \{d_m(X) = a_1\} \\ &= \begin{cases} \mathcal{R}(\tilde{H}_1, k) + (1 - \delta) \left( \mathcal{R}(\tilde{H}_1, \bar{k}) - \mathcal{R}(\tilde{H}_1, k) \right) & \text{تحت فرضیه } \tilde{H}_1 \\ \mathcal{R}(\tilde{H}_0, \bar{k}) + \delta \left( \mathcal{R}(\tilde{H}_0, k) - \mathcal{R}(\tilde{H}_0, \bar{k}) \right) & \text{تحت فرضیه } \tilde{H}_0 \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن،  $\bar{k}$  اولین (کوچکترین) عضو دنباله تغییرات  $\frac{\int_{\Theta} H_1(\theta)f(x;\theta)d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta)f(x;\theta)d\theta}$  بعد از  $k$  است.

## ۵. آزمون بیز

فرض کنیم  $X = (X_1, \dots, X_n)$  نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی احتمال یا تابع جرم احتمال  $f(x_i; \theta)$  با بردار مشاهدات  $x = (x_1, \dots, x_n)$  و  $\theta \in \Theta$  دارای تابع چگالی پیشین  $\pi(\theta)$  باشد. طاهری و بهبودیان [۱۹] ناحیه بحرانی آزمون بیز را برای فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_0: \theta \text{ به صورت تابع } H_0 \text{ است} \\ \tilde{H}_1: \theta \text{ به صورت تابع } H_1 \text{ است} \end{cases}$$

تحت تابع زیان  $1-0$  به صورت

$$\int_{\Theta} H_0(\theta)\pi(\theta|x)d\theta \leq \int_{\Theta} H_1(\theta)\pi(\theta|x)d\theta$$

معرفی نمودند که در آن،  $\pi(\theta|x)$  توزیع پسین  $\theta$  به شرط مشاهدات می‌باشد. این آزمون بیز تحت تابع زیان (۲.۴) نیز قابل تعمیم است:

تعریف ۱.۵. یک آزمون بیز تحت تابع زیان (۲.۴) فرضیه فازی  $\tilde{H}_0$  را در مقابل فرضیه فازی  $\tilde{H}_1$  رد می‌کند اگر و تنها اگر

$$C_0 \int_{\Theta} H_0(\theta)\pi(\theta|x)d\theta \leq C_1 \int_{\Theta} H_1(\theta)\pi(\theta|x)d\theta. \quad (1.5)$$

بنابر تعریف ۱.۵، آزمون بیز فرضیه فازی  $\tilde{H}_0$  را در مقابل فرضیه فازی  $\tilde{H}_1$  رد می‌کند اگر و تنها اگر  $\frac{\int_{\Theta} H_1(\theta)\pi(\theta|x)d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta)\pi(\theta|x)d\theta}$  بیشتر از نسبت زیان ارتکاب خطای نوع اول به زیان ارتکاب خطای نوع دوم، یعنی  $\frac{C_0}{C_1}$  باشد. بنابراین در حالت خاص  $C_0 = C_1 = 1$ ، تعریف ۱.۵ معادل با تعریف آزمون بیز در حالت فرضیه‌های فازی تحت تابع زیان  $1-0$  می‌شود ([۱۹]، صفحه ۴۰).

در آزمون فرضیه « $H_0: \theta \in \Theta_0$ » در مقابل « $H_1: \theta \in \Theta_1$ »، توابع عضویت فرضیه‌ها به صورت

$$H_0(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \text{اگر نه} \end{cases} \quad \text{و} \quad H_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_1 \\ 0 & \text{اگر نه} \end{cases}$$

تعریف می‌شوند و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$\int_{\Theta} H_0(\theta)\pi(\theta|x)d\theta = \int_{\Theta_0} \pi(\theta|x)d\theta = P(\theta \in \Theta_0|x)$$

و

$$\int_{\Theta} H_1(\theta)\pi(\theta|x)d\theta = \int_{\Theta_1} \pi(\theta|x)d\theta = P(\theta \in \Theta_1|x)$$

که در آن،  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  و  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ . در نتیجه همانند آزمون فرضیه‌های معمولی به روش بیز، ناحیه رد این آزمون بیز به صورت

$$C_0 P(\theta \in \Theta_0|x) \leq C_1 P(\theta \in \Theta_1|x) \quad (2.5)$$

است (صفحه ۱۶۴ از [۸] را ببینید).

## ۶. مثال کاربردی در کشاورزی

فرض کنید یک محقق کشاورزی با توجه به امکان گسترش یک آفت، می‌خواهد نسبت به سمپاشی یا عدم سمپاشی یک مزرعه تصمیم‌گیری کند. در حالت معمولی، نسبت گیاهانی که دچار آفت می‌شوند حدود  $10\%$  است، در حالی که این احتمال وجود دارد که به دلیل مسائل محیطی، این نسبت به حدود  $30\%$



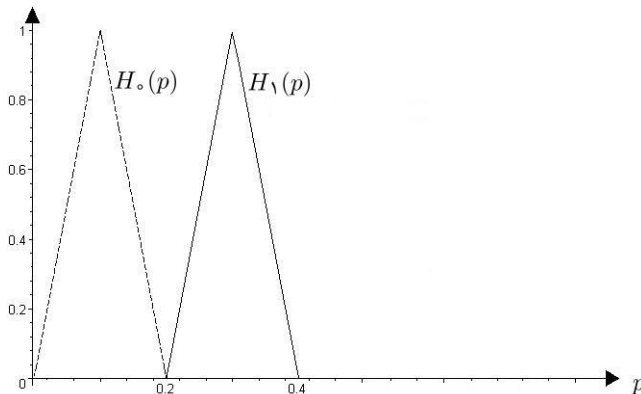
افزایش یافته باشد. بنابراین تمایل او آزمون فرضیه‌های فازی

$$\begin{cases} \tilde{H}_0 : p \cong \circ/1^\circ \text{ (تقریباً } \circ/1^\circ \text{ است)} \\ \tilde{H}_1 : p \cong \circ/3^\circ \text{ (تقریباً } \circ/3^\circ \text{ است)} \end{cases}$$

است که مفاهیم فازی تقریباً  $\circ/1^\circ$  و تقریباً  $\circ/3^\circ$  به ترتیب به وسیله توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند (شکل ۵):

$$H_0(p) = \begin{cases} 1^\circ p & \circ \leq p < \circ/1 \\ 1^\circ - 1^\circ p & \circ/1 \leq p < \circ/2 \\ \circ & \text{اگر نه} \end{cases}, H_1(p) = \begin{cases} 1^\circ p - 2^\circ & \circ/2 \leq p < \circ/3 \\ 4^\circ - 1^\circ p & \circ/3 \leq p < \circ/4 \\ \circ & \text{اگر نه} \end{cases}$$

وی نمونه‌ای شامل ۲۲ گیاه را بررسی می‌کند و متوجه می‌شود که ۴ گیاه آفت دارند. اگر فرض کنیم متغیرهای تصادفی مستقل از هم  $X_i$  به‌ازای  $i = 1, \dots, 22$  در نمونه تصادفی دارای توزیع برنولی با احتمال موفقیت  $p$  است، آن‌گاه آماره  $S = \sum_{i=1}^{22} X_i$  دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای  $n = 22$  و  $p$  خواهد بود و مقدار مشاهده شده آن برابر است با  $\sum_{i=1}^{22} x_i = 4$ .



شکل ۵. توابع عضویت فرضیه‌های فازی  $\tilde{H}_0$  و  $\tilde{H}_1$  در مثال کاربردی

الف) آزمون نیمن-پیرسون: با توجه به گسسته بودن توزیع آماره آزمون، طبق قضیه ۶.۳، آزمون

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\int H_1(p)f(x;p)dp}{\int H_0(p)f(x;p)dp} > k \\ \delta & \frac{\int H_1(p)f(x;p)dp}{\int H_0(p)f(x;p)dp} = k \\ \circ & \frac{\int H_1(p)f(x;p)dp}{\int H_0(p)f(x;p)dp} < k \end{cases} \quad (1.6)$$

مقایسه‌ای از رویکردهای نیمن - پیرسون، بیز و کم- بیشینه در آزمون فرضیه‌های فازی \_\_\_\_\_ ۶۰

پرتوان‌ترین آزمون در سطح  $\alpha = 0/10$  است که در آن، مقدارهای ثابت  $k$  و  $\delta(x)$  از رابطه  $\alpha_{\Phi} = 0/10$  به دست می‌آیند. طبق نتایج جدول ۱، تابعی اکیداً صعودی از آماره  $\sum_{i=1}^{22} x_i$  است و لذا می‌توان پرتوان‌ترین آزمون را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{22} x_i > k \\ \delta & \sum_{i=1}^{22} x_i = k \\ 0 & \sum_{i=1}^{22} x_i < k. \end{cases} \quad (2.6)$$

از طرفی، با توجه به تعریف ۳.۳،  $\alpha_{\Phi}$  برابر است با

$$\begin{aligned} & P_{p \cong 0/10} \{d(X) = a_1\} \\ &= \int H_0^*(p) P_p(d(X) = a_1) dp \\ &= 10 \int_0^1 H_0(p) \left\{ P_p \left( \sum_{i=1}^{22} X_i > k \right) + \delta P_p \left( \sum_{i=1}^{22} X_i = k \right) \right\} dp \\ &= 10 \int_0^{0/10} 10p \left\{ \left( \sum_{s=k+1}^{22} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) + \delta \binom{22}{k} p^k (1-p)^{22-k} \right\} dp \\ &+ 10 \int_{0/10}^{0/20} (2-10p) \left\{ \left( \sum_{s=k+1}^{22} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) + \delta \binom{22}{k} p^k (1-p)^{22-k} \right\} dp. \end{aligned}$$

مقادیر  $\alpha_{\Phi}$  برای همه مقدارهای محتمل  $k$  به ازای  $\delta = 0$  محاسبه شده و در جدول ۴ با نماد  $\alpha_{\Phi|_{\delta=0}}$  نشان داده شده است. با توجه به ستون‌های اول و دوم این جدول، می‌توان نتیجه گرفت که  $k = 4$  و در نتیجه عدد ثابت  $\delta$  از رابطه تک‌مجهولی

$$\begin{aligned} 0/10 &= 0/95 + 10\delta \left\{ \int_0^{0/10} 10p \binom{22}{4} p^4 (1-p)^{18} dp \right. \\ &\left. + \int_{0/10}^{0/20} (2-10p) \binom{22}{4} p^4 (1-p)^{18} dp \right\} \end{aligned}$$

برابر با  $0/46$  محاسبه می‌گردد. پس در این مثال کاربرد، آزمون تصادفی

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{22} x_i > 4 \\ 0/46 & \sum_{i=1}^{22} x_i = 4 \\ 0 & \sum_{i=1}^{22} x_i < 4 \end{cases}$$

پرتوان‌ترین آزمون در سطح  $0/10$  است. در نتیجه بر اساس مشاهده  $\sum_{i=1}^{22} x_i = 4$ ، پرتوان‌ترین آزمون، فرضیه فازی  $\tilde{H}_0$  را با احتمال  $0/46$  رد و با احتمال  $0/954$  می‌پذیرد.

جدول ۱. مقدارهای عددی  $\frac{\int H_1(p)f(x;p)dp}{\int H_0(p)f(x;p)dp}$  برای یافتن پرتوان‌ترین آزمون و همچنین مقدارهای عددی  $\frac{\int H_1(p)\pi(p|x)dp}{\int H_0(p)\pi(p|x)dp}$  برای یافتن آزمون بیز به‌ازای مقدارهای مختلف  $\sum_{i=1}^{22} x_i$  در مثال کاربرد:

$\frac{\int_0^1 H_1(p)\pi(p x)dp}{\int_0^1 H_0(p)\pi(p x)dp}$	$\frac{\int_0^1 H_1(p)f(x;p)dp}{\int_0^1 H_0(p)f(x;p)dp}$	$\sum_{i=1}^{22} x_i$
۰/۰۰۷	۰/۰۰۵	۰
۰/۰۲۸	۰/۰۲۵	۱
۰/۰۹۶	۰/۰۹۷	۲
۰/۲۸	۰/۳۲۳	۳
۰/۸۰	۰/۹۳۲	۴
۲/۰۹	۲/۴۹	۵
۵/۲۶	۶/۴۸	۶
۱۲/۹	۱۶/۷	۷
۳۱/۰	۴۳/۹	۸
۷۴/۳	۱۱۶	۹
۱۷۷	۳۱۶	۱۰
۴۲۳	۸۷۶	۱۱
$1/01 \times 10^3$	۲۴۶۶	۱۲
$2/46 \times 10^3$	۷۰۴۹	۱۳
$1/31 \times 10^4$	$2/04 \times 10^4$	۱۴
$3/85 \times 10^4$	$5/96 \times 10^4$	۱۵
$1/15 \times 10^5$	$41/76 \times 10^5$	۱۶
$3/51 \times 10^5$	$5/23 \times 10^5$	۱۷
$1/09 \times 10^6$	$1/56 \times 10^6$	۱۸
$3/44 \times 10^6$	$4/68 \times 10^6$	۱۹
$1/07 \times 10^7$	$1/41 \times 10^7$	۲۰
$2/62 \times 10^7$	$4/25 \times 10^7$	۲۱
$7/92 \times 10^7$	$1/28 \times 10^8$	۲۲

مقایسه‌ای از رویکردهای نیمن - پیرسون، بیز و کم- بیشینه در آزمون فرضیه‌های فازی \_\_\_\_\_ ۶۲

(ب) آزمون کم-بیشینه: علاوه بر فرض‌های فوق، فرض کنید هزینه سمپاشی برابر  $10^\circ$  واحد پولی و هزینه زیان ناشی از عدم سمپاشی در حالی که آفت شیوع پیدا کرده باشد، معادل  $60^\circ$  واحد پولی باشد. بنابراین تابع زیان مالی را می‌توان همانند جدول ۲ برحسب واحد پولی در نظر گرفت.

جدول ۲. تابع زیان مالی برای سمپاشی و یا عدم سمپاشی برحسب واحد پولی  
 $(\mathcal{L}^*(\theta, a))$ :

حالت طبیعت		عمل
آفت حدود $0/10^\circ$	آفت حدود $0/30^\circ$	
$0^\circ$	$60^\circ$	عدم سمپاشی
$10^\circ$	$10^\circ$	سمپاشی

اگر نسبت شیوع آفت حدودا  $0/30^\circ$  باشد، بهترین حالت آن است که مزرعه سمپاشی شود. ولی حالت دوم آن است که با وجود حدودا  $0/30^\circ$  آفت، مزرعه سمپاشی نشود که در این صورت، زیان کشاورز برابر  $60^\circ$  واحد خواهد بود. از مقایسه این دو حالت درمی‌یابیم که در حالت دوم، زیان کشاورز  $50^\circ$  واحد بیشتر از حالت اول است و تنها افسوس و تأسف  $50^\circ$  واحد پولی را خواهد خورد. با توجه به آنچه مطرح شد، تابع زیان جدول ۲ نیاز به تصحیح داشته و مناسب‌تر است که به‌ازای هر حالت طبیعت، تمامی زیان‌ها نسبت به بهترین (کمترین) زیان مقایسه گردند. لذا با توجه به جدول ۲، به‌وسیله فرمول

$$\mathcal{L}(\theta, a) = \mathcal{L}^*(\theta, a) - \inf_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{L}^*(\theta, a)$$

تابع زیان تصحیح‌شده در جدول ۳ درج شده است (برای توضیحات بیشتر به صفحه ۱۱۳ از [۱۵] و یا صفحه ۳۷۶ از [۸] مراجعه کنید). بنابراین برای تصمیم‌گیری کم-بیشینه، می‌توان زیان مطرح شده در جدول ۳ را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{H}_0, a_0) &= 0, & \mathcal{L}(\tilde{H}_0, a_1) &= 10, \\ \mathcal{L}(\tilde{H}_1, a_0) &= 50, & \mathcal{L}(\tilde{H}_1, a_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

جدول ۳. تابع زیان تصحیح‌شده مالی برای سمپاشی و یا عدم سمپاشی برحسب واحد پولی:

حالت طبیعت		تصمیم
آفت حدود $0/10$ ( $\tilde{H}_0$ )	آفت حدود $0/30$ ( $\tilde{H}_1$ )	
۰	۵۰	عدم سمپاشی ( $a_0$ )
۱۰	۰	سمپاشی ( $a_1$ )

توجه داشته باشید که اگرچه ناحیه بحرانی آزمون کم-بیشینه به صورت (۵.۴) مطرح شده است، با توجه به اکیداً صعودی بودن  $\frac{\int H_1(p)f(x;p)dp}{\int H_0(p)f(x;p)dp}$  نسبت به  $\sum_{i=1}^{22} x_i$ ، این آزمون معادل آزمون

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{22} x_i > k \\ \delta & \sum_{i=1}^{22} x_i = k \\ 0 & \sum_{i=1}^{22} x_i < k \end{cases} \quad (4.6)$$

است. از طرفی، دامنه تغییرات متغیر تصادفی گسسته  $\sum_{i=1}^{22} X_i$  مجموعه  $\{0, 1, \dots, 22\}$  است و لذا همان‌طور که در جدول ۴ مشهود است نمی‌توان  $k$ ی در این دامنه یافت که در  $\mathcal{R}(\tilde{H}_0, k) = \mathcal{R}(\tilde{H}_1, k)$  صدق کند. جدول ۴ حاوی مقدارهای ریسک آزمون غیرتصادفی تحت فرضیه‌های فازی  $\tilde{H}_1$  و  $\tilde{H}_0$  است که با در نظر داشتن مقدارهای  $C_0 = 10$  و  $C_1 = 50$  به صورت زیر برحسب  $k$  محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tilde{H}_0, k) &= C_0 P_{p \approx 0/10} \left( \sum_{i=1}^{22} X_i \geq k \right) \\ &= 10 C_0 \int_0^1 H_0(p) P_p \left( \sum_{i=1}^{22} X_i \geq k \right) dp \\ &= 10^2 \int_0^{0/10} 10 p \left( \sum_{s=k}^{22} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) dp \\ &\quad + 10^2 \int_{0/10}^{0/20} (2 - 10 p) \left( \sum_{s=k}^{22} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(\tilde{H}_1, k) &= C_1 P_{p \cong \circ / \circ} \left( \sum_{i=1}^{22} X_i < k \right) \\
 &= 1 \circ C_1 \int_{\circ}^1 H_1(p) P_p \left( \sum_{i=1}^{22} X_i < k \right) dp \\
 &= 5 \circ \circ \int_{\circ / \circ}^{\circ / \circ} (1 \circ p - 2) \left( \sum_{s=0}^{k-1} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) dp \\
 &\quad + 5 \circ \circ \int_{\circ / \circ}^{\circ / \circ} (4 - 1 \circ p) \left( \sum_{s=0}^{k-1} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) dp.
 \end{aligned}$$

به‌طور مشابه با توجه به مقدارهای  $C_1 = 5 \circ$  و  $C_0 = 1 \circ$  می‌توان ریسک آزمون تصادفی را نیز تحت فرضیه‌های فازی  $\tilde{H}_1$  و  $\tilde{H}_0$  برحسب  $k$  به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}_0, k) &= C_0 \left\{ P_{p \cong \circ / 1 \circ} \left( \sum_{i=1}^{22} X_i > k \right) + \delta P_{p \cong \circ / 1 \circ} \left( \sum_{i=1}^{22} X_i = k \right) \right\} \\
 &= 1 \circ^2 \int_{\circ}^{\circ / 1 \circ} 1 \circ p \left\{ \left( \sum_{s=k+1}^{22} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) + \delta \binom{22}{k} p^k (1-p)^{22-k} \right\} dp \\
 &\quad + 1 \circ^2 \int_{\circ / 1 \circ}^{\circ / \circ} (2 - 1 \circ p) \left\{ \left( \sum_{s=k+1}^{22} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) + \delta \binom{22}{k} p^k (1-p)^{22-k} \right\} dp
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{Rand}(\tilde{H}_1, k) &= C_1 \left\{ P_{p \cong \circ / \circ} \left( \sum_{i=1}^{22} X_i < k \right) + (1 - \delta) P_{p \cong \circ / \circ} \left( \sum_{i=1}^{22} X_i = k \right) \right\} \\
 &= 5 \circ \circ \int_{\circ / \circ}^{\circ / \circ} (1 \circ p - 2) \left\{ \left( \sum_{s=0}^{k-1} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) + (1 - \delta) \binom{22}{k} p^k (1-p)^{22-k} \right\} dp \\
 &\quad + 5 \circ \circ \int_{\circ / \circ}^{\circ / \circ} (4 - 1 \circ p) \left\{ \left( \sum_{s=0}^{k-1} \binom{22}{s} p^s (1-p)^{22-s} \right) + (1 - \delta) \binom{22}{k} p^k (1-p)^{22-k} \right\} dp.
 \end{aligned}$$

اکنون باید مقدار  $k$  را به‌گونه‌ای از دامنه تغییرات آن به‌دست آورد که در دو رابطه

$$\mathcal{R}(\tilde{H}_0, k) > \mathcal{R}(\tilde{H}_1, k) \quad \text{و} \quad \mathcal{R}(\tilde{H}_0, k+1) < \mathcal{R}(\tilde{H}_1, k+1)$$

صدق کند. بر اساس اطلاعات جدول ۴، ابتدا  $k = ۳$  به دست می‌آید و سپس نتیجه می‌شود که

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{22} x_i > ۳ \\ \delta & \sum_{i=1}^{22} x_i = ۳ \\ 0 & \sum_{i=1}^{22} x_i < ۳ \end{cases}$$

تابع آزمون تصادفی کم-بیشینه است و در آن، عدد ثابت  $\delta$  از رابطه

$$\mathcal{R}(\tilde{H}_0, ۴) + \delta (\mathcal{R}(\tilde{H}_0, ۳) - \mathcal{R}(\tilde{H}_0, ۴)) = \mathcal{R}(\tilde{H}_1, ۳) + (1 - \delta) (\mathcal{R}(\tilde{H}_1, ۴) - \mathcal{R}(\tilde{H}_1, ۳))$$

به دست می‌آید. رابطه اخیر را می‌توان به کمک اطلاعات جدول ۴ به صورت

$$۲/۰۴ + \delta (۳/۸۰ - ۲/۰۴) = ۱/۴۶ + (1 - \delta) (۴/۲۵ - ۱/۴۶)$$

بازنویسی کرد و در نتیجه  $\delta = ۰/۴۸۶$ . بنابراین با در نظر داشتن تابع زیان (۳.۶)، آزمون تصادفی کم-بیشینه به صورت

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{22} x_i > ۳ \\ ۰/۴۸۶ & \sum_{i=1}^{22} x_i = ۳ \\ 0 & \sum_{i=1}^{22} x_i < ۳ \end{cases}$$

است و لذا بر اساس مشاهده  $\sum_{i=1}^{22} x_i = ۴$ ، تابع زیان (۳.۶)، فرضیه فازی  $\tilde{H}_0$  در مقابل فرضیه فازی  $\tilde{H}_1$  در این مثال کاربردی رد می‌گردد.

(ج) آزمون بیز: اکنون علاوه بر فرض‌های بالا و تابع زیان بند (ب)، فرض کنید بتوانیم طبق شواهد موجود و نظرات کارشناسان، توزیع پیشین  $Beta(۲, ۶)$  را برای  $p$  در نظر بگیریم، یعنی به ازای  $۱ \geq p \geq ۰$  داریم  $\pi(p) = ۴۲p(1-p)^۵$  (شکل ۶ را ببینید). برای محاسبه توزیع پسین، می‌نویسیم

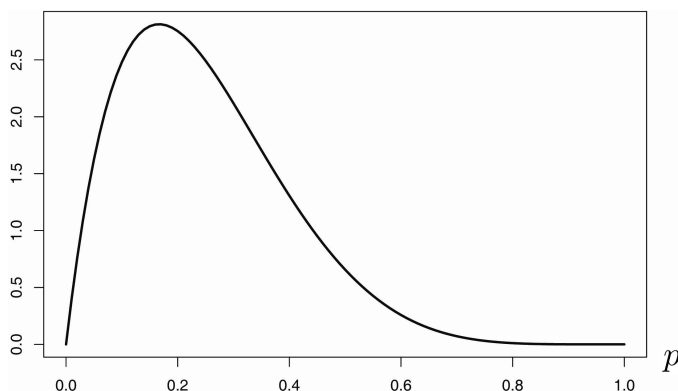
$$\begin{aligned} \pi(p|x) &\propto \pi(p) f(x|p) \\ &= (۴۲p(1-p)^۵) \left( p^{\sum_{i=1}^{22} x_i} (1-p)^{۲۲-\sum_{i=1}^{22} x_i} \right) \\ &\propto p^{۱+\sum_{i=1}^{22} x_i} (1-p)^{۲۷-\sum_{i=1}^{22} x_i} \end{aligned}$$

و بنابراین  $p|x \sim Beta(۲ + \sum_{i=1}^{22} x_i, ۲۸ - \sum_{i=1}^{22} x_i)$

جدول ۴. مقادیر  $\alpha_{\Phi}$  به‌ازای  $\delta = 0$  برای یافتن پرتوان‌ترین آزمون تصادفی و همچنین مقدارهای  $\mathcal{R}(\tilde{H}_1, k)$  و  $\mathcal{R}(\tilde{H}_0, k)$  برای یافتن آزمون تصادفی کم-بیشینه برای همه مقدارهای محتمل  $k$ :

$\mathcal{R}(\tilde{H}_1, k)$	$\mathcal{R}(\tilde{H}_0, k)$	$\alpha_{\Phi}  _{\delta=0}$	$k$
0	10	1	0
0/039	8/46	0/846	1
0/339	6/12	0/612	2
1/46	3/80	0/380	3
4/25	2/04	0/204	4
9/30	0/95	0/095	5
16/5	0/39	0/039	6
24/9	0/13	0/013	7
33/0	$4/36 \times 10^{-2}$	$4/36 \times 10^{-3}$	8
39/7	$1/19 \times 10^{-2}$	$1/19 \times 10^{-3}$	9
44/5	$2/84 \times 10^{-3}$	$2/84 \times 10^{-4}$	10
47/4	$4/12 \times 10^{-3}$	$4/12 \times 10^{-4}$	11
48/9	$6/42 \times 10^{-5}$	$6/42 \times 10^{-6}$	12
49/6	$8/47 \times 10^{-6}$	$8/47 \times 10^{-7}$	13
49/8	$9/39 \times 10^{-7}$	$9/39 \times 10^{-8}$	14
49/9	$8/66 \times 10^{-8}$	$8/66 \times 10^{-9}$	15
$\approx 50$	$6/57 \times 10^{-9}$	$6/57 \times 10^{-10}$	16
$\approx 50$	$4/03 \times 10^{-10}$	$4/03 \times 10^{-11}$	17
$\approx 50$	$1/95 \times 10^{-11}$	$1/95 \times 10^{-12}$	18
$\approx 50$	$7/17 \times 10^{-13}$	$7/17 \times 10^{-14}$	19
$\approx 50$	$1/88 \times 10^{-14}$	$1/88 \times 10^{-15}$	20
$\approx 50$	$3/70 \times 10^{-16}$	$3/70 \times 10^{-17}$	21
$\approx 50$	$\approx 0$	$\approx 0$	22





شکل ۶. تابع چگالی احتمال  $Beta(2, 6)$  به عنوان پیشین  $p$  در مثال کاربردی

بر اساس تعریف ۱.۵ و با توجه به مقدار  $\frac{C_0}{C_1} = \frac{10}{60} = 0.167$ ، آزمون بیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Phi_B(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\int H_1(p)\pi(p|x)dp}{\int H_0(p)\pi(p|x)dp} \geq 0.167 \\ 0 & \frac{\int H_1(p)\pi(p|x)dp}{\int H_0(p)\pi(p|x)dp} < 0.167. \end{cases}$$

بر اساس نتایج جدول ۱،  $\frac{\int H_1(p)\pi(p|x)dp}{\int H_0(p)\pi(p|x)dp}$  تابعی اکیداً صعودی از آماره  $\sum_{i=1}^{22} x_i$  است و در نتیجه آزمون فوق معادل آزمون

$$\Phi_B(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{22} x_i \geq 3 \\ 0 & \sum_{i=1}^{22} x_i < 3 \end{cases}$$

خواهد بود. بنابراین با به‌کار بردن تابع زیان (۳.۶) و چگالی پیشین  $Beta(2, 6)$  و همچنین مقدار مشاهده شده  $\sum_{i=1}^{22} x_i = 4$  در این مثال کاربردی، آزمون بیز فرضیه فازی  $\tilde{H}_0$  را در مقابل فرضیه فازی  $\tilde{H}_1$  رد می‌کند.

## ۷. نتیجه‌گیری و کارهای آینده

سه رویکرد نیمن-پیرسون، کم-بیشینه و بیز که در این مقاله برای آزمون فرضیه‌های فازی مبتنی بر داده‌های دقیق مطرح شد، قابل مقایسه با برخی از تحقیقات دیگر در این زمینه است. آرنولد [۷] پرتوان‌ترین آزمون برای فرضیه‌های فازی (با داده‌های دقیق) را به گونه‌ای متفاوت با رویکرد نیمن-پیرسونی بخش ۳،

معرفی کرده است. وی احتمال خطاهای نوع اول و دوم را با

$$\alpha_{\Phi} = \sup_{\{\theta \in \Theta: H_0(\theta) > H_1(\theta)\}} \{(H_0(\theta) - H_1(\theta)) \Phi(t, \theta)\}$$

و

$$\beta_{\Phi} = \sup_{\{\theta \in \Theta: H_0(\theta) < H_1(\theta)\}} \{(H_1(\theta) - H_0(\theta)) (1 - \Phi(t, \theta))\}$$

تعریف می‌کند که در آن،  $\Phi(t, \theta)$  تابع توان بر اساس آماره آزمون  $T$  است. لذا تعمیم او برای احتمال خطاهای نوع اول و دوم مبتنی بر سوپریم اختلاف توابع عضویت فرضیه‌های فازی است، در حالی که تعمیم مطرح شده در این مقاله مبتنی بر احتمال وزنی پیشامدهای فازی است. رویکرد مطرح شده در بخش ۴ از این مقاله برای تعمیم آزمون کم-بیشینه با کار کازالس و همکاران [۹] متفاوت است، زیرا آنها آزمون کم-بیشینه را برای فرضیه‌های غیرفازی مبتنی بر داده‌های فازی معرفی کردند ولی ما در این مقاله مسئله آزمون کم-بیشینه را برای فرضیه‌های فازی مبتنی بر داده‌های غیرفازی مورد بررسی قرار داده‌ایم. دلگادو و همکاران [۱۰] نیز روش بیزی متفاوتی را نسبت به آنچه در بخش ۵ برای آزمون فرضیه‌های فازی مطرح شد، مبتنی بر تجزیه مسئله فازی به خانواده‌ای از مسائل غیرفازی، ارائه کردند. در آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس داده‌های معمولی، که در مقاله حاضر بررسی شد، ناحیه‌های بحرانی آزمون‌های کم-بیشینه و نیمن-پیرسون (در سطح معناداری  $\alpha$ ) به صورت

$$\frac{\int_{\Theta} H_1(\theta) f(x; \theta) d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta) f(x; \theta) d\theta} \geq k$$

است که در آن، مقدار ثابت  $k$  به ترتیب از رابطه‌های

$$C_1 P_{\tilde{H}_1} \{\tilde{H}_0 \text{ قبول}\} = C_0 P_{\tilde{H}_0} \{\tilde{H}_0 \text{ رد}\}$$

و  $\alpha = P_{\tilde{H}_0} \{\tilde{H}_0 \text{ رد}\}$  محاسبه می‌شوند. از سوی دیگر، ناحیه بحرانی آزمون بیز، به صورت

$$\frac{\int_{\Theta} H_1(\theta) \pi(\theta) f(x; \theta) d\theta}{\int_{\Theta} H_0(\theta) \pi(\theta) f(x; \theta) d\theta} \geq k$$

است که  $k = \frac{C_0}{C_1}$ . در این مقاله، آزمون‌های کم-بیشینه و بیز مبتنی بر تابع زیان (۲.۴) محاسبه و معرفی شده‌اند. از آنجا که معمولاً مسائل واقعی و کاربردی در علوم مختلف آمیخته با ابهام هستند، لذا یک مثال کاربردی در بخش ۶ به منظور اشاره بیشتر به قابلیت‌های کاربردی این آزمون‌ها مطرح و حل شد.

گفتنی است که موضوع آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس رویکردهای مختلف توسط دیگر محققان دنبال و بررسی شده است که برای مرور برخی از پژوهش‌های اخیر می‌توانید به [۱، ۲، ۳، ۱۱، ۱۲، ۱۷، ۲۰]

مراجعه نمایید. همچنین حقیقی‌نژاد و طاهری در [۴، ۵] به بررسی برآوردگرهای بیز و کم-بیشینه بر پایه تابع زیان فازی پرداخته‌اند. لذا ایده به‌کارگیری تابع زیان فازی را می‌توان برای آزمون فرضیه‌های فازی در روش‌های بیز و کم-بیشینه به‌عنوان کارهای آینده مورد بررسی قرار داد. همچنین در راستای این تحقیق می‌توان به تعمیم ایده پیشنهادی برای آزمون‌های کم-بیشینه و بیز در حالتی که تابع زیان ثابت نبوده، بلکه به مقدار پارامتر  $\theta$  بستگی داشته باشد، پرداخت. از دیگر موضوعات بالقوه، می‌توان به آزمون فرضیه در چارچوب نظریه تصمیم مبتنی بر متغیر تصادفی فازی و آزمون فرضیه برای ارزیابی مدل‌های رگرسیون فازی اشاره کرد.

## مراجع

- [۱] پرچی، ع.، ماشین‌چی، م.، آزمون فرضیه در محیط فازی بر پایه  $p$ -مقدار، سری سیستم‌های فازی و محاسبات نرم، جلد ۲ (مباحثی در آمار و احتمال فازی)، انتشارات انجمن سیستم‌های فازی ایران، تهران ۱۳۹۰، ۱۸-۱.
- [۲] ترابی، ح.، شمشیری، ر.، تعمیمی از آزمون نسبت درستی برای فرض‌های فازی، اندیشه آماری، سال سیزدهم، شماره یکم (۱۳۸۷)، ۲۶-۲۰.
- [۳] چاچی، ج.، روش‌های آماری بر اساس اطلاعات نادقیق، رساله دکتری آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان ۱۳۹۱.
- [۴] حقیقی‌نژاد، ا.، طاهری، س.م.، برآوردگرهای بیز و مینیمکس بر پایه تابع زیان فازی، گزارش هفتمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران ۱۳۸۳، ۵۸۰-۵۶۷.
- [۵] حقیقی‌نژاد، ا.، طاهری، س.م.، برآوردگرهای بیز و مینیمکس بر پایه داده‌های فازی، گزارش چهارمین همایش مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن، دانشگاه مازندران، بابلسر، ۱۳۸۲، ۵۴-۴۲.
- [۶] طاهری، س.م.، ماشین‌چی، م.، مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان ۱۳۸۷.
- [7] Arnold, B. F., An approach to fuzzy hypothesis testing, *Metrika*, **44** (1996), 119-126.
- [8] Berger, J. O., *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, 2nd. edn., Springer-Verlag, New York, 1985.
- [9] Casals, M. R., Gil, M. A., Gil, P., The fuzzy decision problem: An approach to the problem of testing statistical hypotheses with fuzzy information, *European Journal of Operational Research*, **27** (1986), 371-382.
- [10] Delgado, M., Verdegay, J. L., Vila, M. A., Testing fuzzy hypotheses, a Bayesian approach, in: M. M. Gupta et al. (editors), *Approximate Reasoning in Expert Systems*, North-Holland, Amsterdam, 307-316, 1985.
- [11] Hesamian, G., Chachi, J., Two-sample Kolmogorov-Smirnov fuzzy test for fuzzy random variables, *Statistical Papers*, **56** (2015), 61-82.
- [12] Hesamian, G., Shams, M., Parametric testing statistical hypotheses for fuzzy random variables, *Soft Computing*, **20** (2016), 1537-1548.

- [13] Pais, I., Benton, J. J., *The Handbook of Trace Elements*, St. Lucie Press, Florida, 1997.
- [14] Parchami, A., Mashinchi, M., Testing fuzzy hypotheses with crisp data: The minimax approach, *2nd. Joint Congress on Fuzzy and Intelligent Systems*, Maleke-Ashtar University, Tehran, 2008.
- [15] Parmigiani, G., Inoue, L. Y. T., Lopes, H. F., *Decision Theory Principles and Approaches*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2009.
- [16] Rohatgi, V. K., Ehsanes Saleh, A. K., *An Introduction to Probability and Statistics*, 2nd. edn., John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [17] Taheri, S. M., Arefi, M., Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistics, *Soft Computing*, **13** (2009), 617-625.
- [18] Taheri, S. M., Behboodan, J., Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing, *Metrika*, **49** (1999), 3-17.
- [19] Taheri, S. M., Behboodan, J., A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing, *Fuzzy Sets and Systems*, **123** (2001), 39-48.
- [20] Torabi, H., Behboodan, J., Sequential probability ratio test for fuzzy hypotheses testing with vague data, *Austrian Journal of Statistics*, **34** (2005), 25-38.

---

عباس پرچمی: گروه آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان  
رایانامه: parchami@uk.ac.ir

سید محمود طاهری: دانشکده فنی، دانشگاه تهران  
رایانامه: sm\_taheri@ut.ac.ir

ناصررضا ارقامی: گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد  
رایانامه: arghami\_nr@yahoo.com