

## حجم گوی‌های واحد تعمیم‌یافته\*

زیانفو وانگ

برگردان: رضا کهکشانی و رسول کاظمی نجف‌آبادی

### ۱. سرآغاز

هر دانشجویی با شکل‌های هندسی لوزی، استوانه، مربع، ستاره و گوی‌آشنایی دارد. اما از دیدگاه ما، این‌ها همگی گوی‌های تعمیم‌یافته هستند. به وسیله تبدیل‌های خطی و غیرخطی می‌توان گوی اقلیدسی استاندارد را به انواع گوی‌های عجیب تغییر شکل داد. هدف از این مقاله، ارائه دستوری واحد برای محاسبه حجم گوی‌های یکه تعمیم‌یافته در فضاها  $n$  - بعدی است. گوی واحد تعمیم‌یافته در  $\mathbb{R}^n$  عبارت است از مجموعه

$$\mathbb{B}_{p_1 p_2 \dots p_n} = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : |x_1|^{p_1} + \dots + |x_n|^{p_n} \leq 1 \} \quad (1.1)$$

که در آن،

$$p_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

اگر اعداد  $p_1, p_2, \dots, p_n$  همگی بزرگتر یا مساوی ۱ باشند، گوی واحد  $\mathbb{B}_{p_1 p_2 \dots p_n}$  محدب است. چون به‌ازای  $1 < p < \infty$  تابع  $x \mapsto |x|^p$  روی  $[-1, 1]$  محدب نیست،  $\mathbb{B}_{p_1 p_2 \dots p_n}$  نیز وقتی  $n > 1$  ممکن است محدب نباشد. اگر قرار دهیم  $1 \leq p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ ، گوی واحد فضای  $\ell_p(\mathbb{R}^n)$  به‌دست می‌آید. گوی واحد فضای  $\ell_2(\mathbb{R}^n)$  را با  $\mathbb{B}$  نشان می‌دهیم. همان‌طور که در شکل ۱

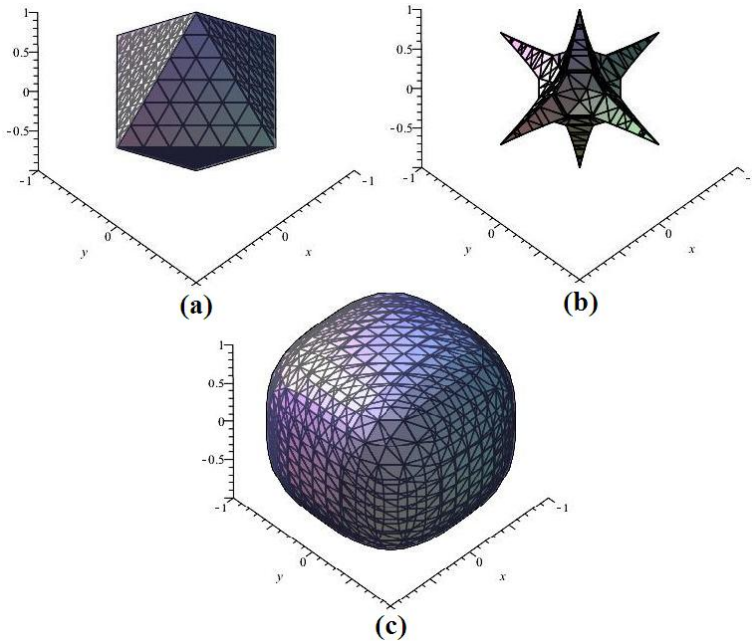
عبارات و کلمات کلیدی. فضای اقلیدسی؛ دستور تعویض متغیر؛ حجم گوی واحد؛ گوی واحد تعمیم‌یافته.  
\* نام و نشان مقاله اصلی از این قرار است:

Wang, Xianfu, Volumes of generalized unit balls, *mathematics magazine*, 78 (2005), 390-395.

با ارائه مثال‌هایی در  $\mathbb{R}^3$  نشان داده شده است، با انتخاب مقادیر مختلف برای  $p_i$  ها، می‌توان در شکل گوی‌های تعمیم‌یافته تغییر زیادی ایجاد کرد.

## ۲. دستور حجم گوی واحد تعمیم‌یافته

مقاله‌ای از فولند<sup>۱</sup> [۵] انگیزه‌ای گردید تا دستوری واحد برای محاسبه حجم این گوی‌ها به دست آوریم. اگرچه دستورهای حجم گوی اقلیدسی استاندارد  $\mathbb{B}$  و سادک<sup>۲</sup> مدت زیادی است که شناخته شده‌اند ([۴]، صفحه‌های ۲۰۸ و ۲۲۰)، این دستور واحد (نسبتاً) جدید است. حیرت‌آور است که گوی‌ها هر قدر هم عجیب به نظر برسند، حجم آنها را می‌توان با دستوری واحد به شرح زیر محاسبه نمود:



شکل ۱. (a)  $|x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1$ ؛ (b)  $|x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2} + |x_3|^{1/2} \leq 1$  و (c)  $|x_1|^3 + |x_2|^{3/2} + |x_3|^3 \leq 1$

<sup>۱</sup>Folland

<sup>۲</sup>یک سادک  $n$  - بعدی در یک فضای اقلیدسی، مجموعه ترکیب‌های محدب  $(n + 1)$  بردار مستقل خطی مانند  $p_0, p_1, \dots, p_n$  است؛ یعنی مجموعه همه نقاط  $x = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n$  به طوری که  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  و برای هر  $i$ ،  $\lambda_i \geq 0$ . مثلاً یک مثلث همراه با درونش یک سادک دو بعدی است - م.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم

$$p_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

حجم گوی واحد تعمیم یافته  $\mathbb{B}_{p_1 p_2 \dots p_n}$  در  $\mathbb{R}^n$  برابر است با

$$2^n \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{p_1}) \cdots \Gamma(1 + \frac{1}{p_n})}{\Gamma(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} + 1)}. \quad (1.2)$$

حجم آتربیک - هشتم مثبت، یعنی جایی که همه مؤلفه‌های  $x$  مثبت‌اند، با حذف عامل  $2^n$  از دستور بالا به دست می‌آید.

دستور بالا شامل تابع گاما است که تعریف آن را برای خوانندگانی که ممکن است آشنا نباشند، یادآوری می‌کنیم. به ازای هر  $0 < t < \infty$  تعریف می‌کنیم

$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} s^{t-1} e^{-s} ds.$$

این انتگرال برای هر  $t > 0$  همگرا است و در مورد آن، از دو نتیجه استفاده می‌کنیم. یکی اینکه برای  $u > 0$  و  $v > 0$  داریم

$$\Gamma(u+1) = u\Gamma(u) \quad (2.2)$$

و دیگری این است که

$$\int_0^1 s^{u-1} (1-s)^{v-1} ds = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \quad (3.2)$$

اگرچه انتگرال مذکور در تعریف  $\Gamma(t)$  به ازای  $t \leq 0$  بی‌نهایت می‌شود، تساوی (۲.۲) یک دستور تحلیلی برای ادامه تعریف  $\Gamma(t)$  روی  $(-\infty, 0)$  فراهم می‌آورد. آن وقت تابع  $\Gamma$  تنها در نقاط

$$t = 0, -1, -2, \dots$$

ناپایسته است. جزئیات بیشتر را می‌توان در [۶] صفحه‌های ۳۴۴-۳۴۶ یافت.

اثبات. گام اول: با این واقعیت که

$$V(\mathbb{B}_{p_1 \dots p_n}) = \int_{\mathbb{B}_{p_1 p_2 \dots p_n}} 1 dx$$

و به‌کارگیری تعویض متغیری که گوی تعمیم‌یافته را به گوی استاندارد  $\mathbb{B}$  تغییر شکل می‌دهد، شروع می‌کنیم.

گیریم  $y_1 = x_1^{p_1/2}$ ،  $y_2 = x_2^{p_2/2}$ ، ...،  $y_n = x_n^{p_n/2}$ . برای تابع

$$\phi(\mathbf{y}) := (y_1^{\frac{2}{p_1}}, \dots, y_n^{\frac{2}{p_n}})$$

درمیان ماتریس ژاکوبی برابر است با

$$J\phi(\mathbf{y}) = \frac{2}{p_1} \dots \frac{2}{p_n} y_1^{\frac{2}{p_1}-1} \dots y_n^{\frac{2}{p_n}-1}.$$

خواننده می‌تواند برای ملاحظه جزئیات اثبات دستور تعویض متغیر که در گام بعدی برهان مورد نیاز است، [۶] صفحه ۴۳۲ را مطالعه کند. با استفاده از این دستور، به دست می‌آوریم

$$\int_{\mathbb{B}_{p_1 \dots p_n}} 1 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{B}} |J\phi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = \frac{2^n}{p_1 \dots p_n} \int_{\mathbb{B}} |y_1|^{\frac{2}{p_1}-1} \dots |y_n|^{\frac{2}{p_n}-1} d\mathbf{y}.$$

گام دوم: فرض کنیم

$$\alpha_j > -1 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

ادعا می‌کنیم

$$\int_{\mathbb{B}} |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n} d\mathbf{x} = \frac{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1 + \dots + \beta_n + 1)} \quad (4.2)$$

که در آن، برای هر  $i = 1, \dots, n$ ،  $\beta_i := (\alpha_i + 1)/2$ . برای بررسی صحت این ادعا، یک دستور بازگشتی به دست می‌آوریم. انتگرال موجود در (۴.۲) را با  $I(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  نشان می‌دهیم. سپس آن را به صورت یک انتگرال مکرر که با  $x_1$  به عنوان بیرونی‌ترین متغیر شروع می‌شود، محاسبه می‌کنیم:

$$I(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \int_{-1}^1 |x_1|^{\alpha_1} \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 - x_1^2} |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n} dx_2 \dots dx_n dx_1.$$

انتگرال داخلی روی گوی به شعاع  $r = \sqrt{1 - x_1^2}$  محاسبه می‌شود. مجدداً با تعویض متغیر

$$(x_2, \dots, x_n) = r(y_2, \dots, y_n),$$

به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2} |x_2|^{\alpha_2} \dots |x_n|^{\alpha_n} dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq 1} r^{(n-1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} |y_2|^{\alpha_2} \dots |y_n|^{\alpha_n} dy_2 \dots dy_n \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد  $I(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  برابر است با

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |x_1|^{\alpha_1} (1-x_1^{\gamma})^{\frac{(n-1)}{\gamma} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\gamma}} \int_{y_2^{\gamma} + \dots + y_n^{\gamma} \leq 1} |y_2|^{\alpha_2} \dots |y_n|^{\alpha_n} dy_2 \dots dy_n dx_1 \\ &= \gamma \int_0^1 x_1^{\alpha_1} (1-x_1^{\gamma})^{\frac{(n-1)}{\gamma} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_n}{\gamma}} dx_1 \cdot \int_{y_2^{\gamma} + \dots + y_n^{\gamma} \leq 1} |y_2|^{\alpha_2} \dots |y_n|^{\alpha_n} dy_2 \dots dy_n \\ &= \int_0^1 (x_1^{\gamma})^{\frac{\alpha_1-1}{\gamma}} (1-x_1^{\gamma})^{\frac{(\alpha_2 + \dots + \alpha_n + n+1)}{\gamma} - 1} d(x_1^{\gamma}) \int_{y_2^{\gamma} + \dots + y_n^{\gamma} \leq 1} |y_2|^{\alpha_2} \dots |y_n|^{\alpha_n} dy_2 \dots dy_n. \end{aligned}$$

لذا بنابر (۳.۲)،

$$I(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\Gamma((\alpha_1 + 1)/\gamma) \Gamma((\alpha_2 + \dots + \alpha_n + n + 1)/\gamma)}{\Gamma((\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n + \gamma)/\gamma)} \cdot I(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

این رابطه، یک دستور بازگشتی میان  $I(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  و  $I(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$  به دست می‌دهد. با  $n-1$  بار به کار بردن این دستور بازگشتی و پس از ساده‌سازی‌های لازم، به دست می‌آوریم

$$I(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_1+1}{\gamma}) \dots \Gamma(\frac{\alpha_{n-1}+1}{\gamma}) \frac{\alpha_n+1}{\gamma} \Gamma(\frac{\alpha_n+1}{\gamma})}{\Gamma(\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n+n}{\gamma} + 1)} \cdot I(\alpha_n). \quad (5.2)$$

اما

$$I(\alpha_n) = \int_{x^{\gamma} \leq 1} |x|^{\alpha_n} dx = \gamma \int_0^1 x^{\alpha_n} dx = \frac{\gamma}{\alpha_n + 1}$$

که با قرار دادن این مقدار در (۵.۲)، تساوی (۴.۲) نتیجه می‌شود.

گام سوم: اگر برای  $\alpha_i = \gamma/p_i - 1, i = 1, \dots, n$  نتیجه می‌دهد که

$$I(\gamma/p_1 - 1, \dots, \gamma/p_n - 1) = \frac{\Gamma(1/p_1) \dots \Gamma(1/p_n)}{\Gamma(1/p_1 + \dots + 1/p_n + 1)}.$$

لذا

$$\begin{aligned} V(\mathbb{B}_{p_1 \dots p_n}) &= \gamma^n \frac{1}{p_1} \dots \frac{1}{p_n} I(\gamma/p_1 - 1, \dots, \gamma/p_n - 1) \\ &= \gamma^n \frac{\Gamma(1 + 1/p_1) \dots \Gamma(1 + 1/p_n)}{\Gamma(1/p_1 + \dots + 1/p_n + 1)}. \end{aligned}$$

حجم قسمت مثبت دستگاه مختصات در  $\mathbb{R}^n$  از این دستور حاصل می‌شود، زیرا  $\gamma^n$  تا ابریک - هشتم در

□

$\mathbb{R}^n$  وجود دارد.

## ۳. حالت‌های خاص

ممکن است استدلال کنید که مقدار  $p_i$  در (۱.۱) نمی‌تواند بی‌نهایت باشد، اما خواننده می‌تواند حالت حدی را در نظر بگیرد. می‌نویسیم

$$x^\infty = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

و با جدا کردن برخی حالت‌های خاص ادامه می‌دهیم (برای دانشجویان حسابان):

(الف)  $p_i = +\infty$ : چون  $\Gamma$  بر  $(0, +\infty)$  پیوسته است،  $V(\mathbb{B}_{p_1, \dots, p_n})$  برابر است با

$$2 \cdot 2^{n-1} \frac{\Gamma(1 + 1/p_1) \cdots \Gamma(1 + 1/p_{i-1}) \Gamma(1 + 1/p_{i+1}) \cdots \Gamma(1 + 1/p_n)}{\Gamma(1/p_1 + \cdots + 1/p_{i-1} + 1/p_{i+1} + \cdots + 1/p_n + 1)}.$$

به‌ویژه وقتی  $p_1 = \cdots = p_n = +\infty$ ، حجم گوی برابر با  $2^n$  است و شکل آن یک اَبَرْمکعب  $n$ -بعدی است (به‌استثنای بخشی از مرز که آنجا حداقل دو تا از  $x_i$ ها همزمان برابر با ۱ هستند). وقتی

$p_1 = p_2 = 2$  و  $p_3 = \infty$ ، گوی تعمیم‌یافته، یک استوانه مستدیر در  $\mathbb{R}^3$  است.

(ب) وقتی  $0 < p < \infty$ ،  $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$  داریم

$$V(\mathbb{B}_{p, \dots, p}) = 2^n \frac{(\Gamma(1 + 1/p))^n}{\Gamma(n/p + 1)} = \frac{(2/p)^n (\Gamma(1/p))^n}{(n/p) \Gamma(n/p)}.$$

به یاد آورید که  $\Gamma(1) = 1$ ،  $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$  و  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . به‌ازای  $p = 2$ ، گوی تعمیم‌یافته همان گوی اقلیدسی استانده با حجم  $\frac{2^n \pi^{n/2}}{n! \Gamma(n/2)}$  است. به‌ازای  $p = 1$ ، گوی تعمیم‌یافته

$$\{(x_1, \dots, x_n) : |x_1| + \cdots + |x_n| \leq 1\}$$

یک لوزی  $n$ -بعدی با حجم  $\frac{2^n}{n!}$  است. به‌ازای  $p = 1/2$ ، حجم گوی تعمیم‌یافته برابر با  $\frac{2^{2n}}{(2n)!}$  است و به شکل یک ستاره  $n$ -بعدی است. این‌ها دو تا از گوی‌های نشان داده شده در شکل ۱ هستند. شگفت این‌که به‌ازای  $0 < p < \infty$ ، درمی‌یابیم که وقتی  $n$  بزرگتر می‌شود، حجم گوی  $n$ -بعدی کمتر می‌شود و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\mathbb{B}_{p, p, \dots, p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2/p)^n (\Gamma(1/p))^n}{(n/p) \Gamma(n/p)} = 0.$$

در اینجا دستور استرلینگ را به‌کار برده‌ایم:

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}$$

که در آن، نماد  $\sim$  بدین معنی است که وقتی  $x \rightarrow \infty$ ، نسبت مقادیرهای چپ و راست به ۱ میل می‌کند ([۶] صفحه ۳۵۳).

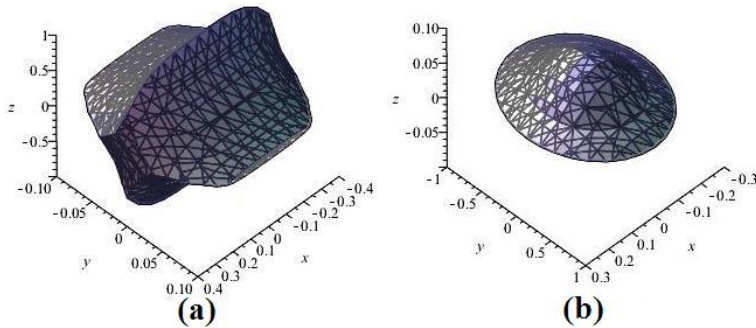
(پ) برای بیضی‌گون

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) : \frac{|x_1|^{p_1}}{a_1^{p_1}} + \dots + \frac{|x_n|^{p_n}}{a_n^{p_n}} \leq 1 \right\}$$

با  $a_i > 0$ ، یک تبدیل خطی ساده آن را به صورت (۱) تبدیل می‌کند و بر مبنای قضیه، حجم آن از دستور

$$a_1 \dots a_n \times \frac{\Gamma(1 + 1/p_1) \dots \Gamma(1 + 1/p_n)}{\Gamma(1/p_1 + \dots + 1/p_n + 1)}$$

به دست می‌آید. برای اینکه ایده‌ای از شکل بیضی‌گون در  $\mathbb{R}^3$  به دست آورید، در شکل ۲، دو بیضی‌گون را در  $\mathbb{R}^3$  نشان داده‌ایم.



شکل ۲. (a)  $16|x_1|^4 + 3|x_2|^{1/2} + |x_3| \leq 1$  و (b)  $16|x_1|^2 + |x_2|^2 + 4|x_3|^{1/2} \leq 1$

پس از اینکه این نتیجه را به دست آوردم، دکتر ج. م. بوروین از دانشگاه سیمون فریزر به اینجانب اطلاع داد که دیریکله، ریاضیدان آلمانی قرن نوزدهم، با استفاده از روشی متفاوت، نتیجه‌ای مشابه به دست آورده است ([۳] صفحه‌های ۱۵۳-۱۵۹). یک برهان فاقد استقرا برای دستور حجم گوی واحد در  $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ ، از طریق تبدیل لاپلاس، توسط بوروین و بایلی در ([۲] صفحه‌های ۱۹۵-۱۹۷) ارائه شده است. به‌طور مشابه، با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توان برهانی فاقد استقرا برای دستور حجم گوی‌های تعمیم‌یافته (۱.۲) استخراج نمود. در خاتمه، باید ذکر کنیم که ویژگی‌های بیشتری درباره‌ی تابع گاما و حجم گوی‌های اقلیدسی را می‌توان در استرومبرگ ([۷] صفحه‌های ۳۹۴-۳۹۵) یافت.

## مراجع

- [1] Baker, J. A., Integration over spheres and the divergence theorem for balls, *Amer. Math. Monthly*, **104** (1997), 36-47.
- [2] Borwein, J. M., Bailey, D. H., *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, A K Peters, Natick Mass., 2003.
- [3] Edwards, J., *A Treatise on the Integral Calculus*, Vol. II, Chelsea Publishing Company, New York, 1992.
- [4] Fleming, W., *Functions of Several Variables*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] Folland, G. B., How to integrate a polynomial over a sphere, *Amer. Math. Monthly*, **108** (2001), 446-448.
- [6] ———, *Advanced Calculus*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [7] Stromberg, K. R., *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth International Mathematics Series, 1981.

---

رضا کهکشانی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

رایانامه: [kahkeshanireza@kashanu.ac.ir](mailto:kahkeshanireza@kashanu.ac.ir)

رسول کاظمی نجف‌آبادی: دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

رایانامه: [r.kazemi@kashanu.ac.ir](mailto:r.kazemi@kashanu.ac.ir)