فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۹ (پاییز و زمستان ۱۳۹۵) صص. ۹۹ تا ۱۰۵

رابطه‌ای معادل با رابطهٔ فیثاغورس و سه‌تایی فیثاغورسی وارون

جواد بهبودیان، صدیقه بلادی، و مهرداد سیمکانی

چکیده

در این مقاله، یک رابطهٔ کم و بیش معروف معادل با رابطهٔ فیثاغورس ارائه می‌گردد. معادل بودنِ این رابطه با رابطهٔ فیثاغورس با روش‌های هندسی، جبری و مثلثاتی ثابت می‌شود. سپس تعریف سه‌تایی فیثاغورسی اولیه بیان خواهد شد و در پایان در برابر هر سه‌تایی فیثاغورسی اولیه، یک سه‌تایی فیثاغورسی وارون معرفی می‌شود.

۱. مقدمه

این مقاله را به یاد و پاسِ خدمات گران‌بهای استاد پرویز شهریاری می‌نویسیم که در تاریخ ۹۱/۲/۲۲ چشم از جهان فروبست. شهریاری در طول ۸۶ سال زندگیِ خود، با نوشتنِ کتاب‌ها و مقاله‌های گوناگون و سخنرانی‌های متنوع در سمینارهای ریاضی، آموزش ریاضی را در کشور گسترش داد. بسیاری از دانش‌آموختگان پنجاه سال اخیر در ایران، در دوران تحصیل خود، کم و بیش از آثار شهریاری بهره‌مند شده‌اند. شهریاری، این معلم توانا، به ریاضی سنتی و دبیرستانی از جمله هندسه، جبر، مثلثات و حساب استدلالی علاقه و توجه ویژه‌ای داشت.

در این مقاله، مثلث $\triangle ABC$ را با دو زاویهٔ حادهٔ $\angle B$ و $\angle C$ و اضلاعی به طول a، b و c در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم h طول ارتفاع AH باشد. اگر $\angle A = ۹۰^\circ$، در $\triangle ABC$ رابطهٔ زیبا و تاریخی فیثاغورس، یعنی

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \qquad (۱.۱)$$

عبارات و کلمات کلیدی. رابطهٔ فیثاغورس؛ سه‌تایی فیثاغورسی اولیه؛ سه‌تایی فیثاغورسی وارون.

برقرار است. این رابطه، اثبات‌های گوناگون و کاربردهای فراوان دارد (به مرجع‌های [۱] و [۳] نگاه کنید). در ضمن، می‌دانیم که اگر در مثلثی (۱.۱) برقرار باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

در هر مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ کم و بیش معروف

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \tag{۲.۱}$$

نیز برقرار است. این رابطه به‌کمک مساحت مثلث قائم‌الزاویه، S، به شرح زیر به‌آسانی ثابت می‌شود:

$$2S = bc = ah,$$

$$b^2c^2 = a^2h^2,$$

$$b^2c^2 = (b^2 + c^2)h^2. \tag{۳.۱}$$

حال دو طرف (۳.۱) را بر $b^2c^2h^2$ تقسیم می‌کنیم تا (۲.۱) به‌دست آید.

در این مقاله، معادل بودنِ رابطه‌های (۱.۱) و (۲.۱) را بررسی می‌کنیم. به بیان دیگر، نشان می‌دهیم رابطهٔ (۲.۱) شرط لازم و کافی برای رابطهٔ (۱.۱) است. در بند قبل نشان دادیم رابطهٔ (۲.۱) شرط لازم برای رابطهٔ (۱.۱) است. در بخش ۲ کافی بودنِ رابطهٔ (۲.۱) را با سه روش اثبات می‌کنیم. سرانجام در بخش سه، به کمک رابطهٔ (۲.۱) در برابر هر سه‌تایی فیثاغورسی اولیه، یک سه‌تایی فیثاغورسی وارون معرفی خواهیم کرد.

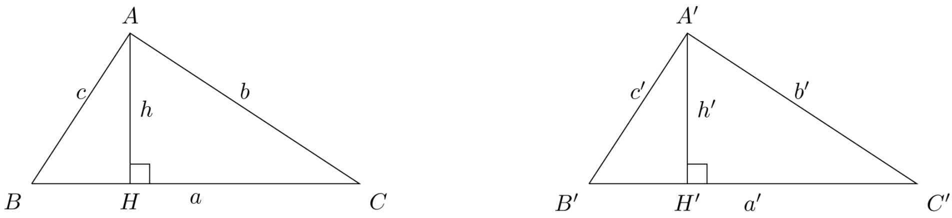
۲. اثبات کفایت

در این بخش، با سه روش هندسی، جبری و مثلثاتی ثابت می‌کنیم که رابطهٔ (۲.۱) شرط کافی برای رابطهٔ (۱.۱) است تا نشان دهیم در رابطهٔ (۲.۱) کاربرد هندسه، جبر و مثلثات نهفته است.

۱.۲ روش هندسی. با روش هندسی نشان می‌دهیم که اگر رابطهٔ (۲.۱) در $\triangle ABC$ برقرار باشد، این مثلث قائم‌الزاویه است. برای اثبات، مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ را طوری رسم می‌کنیم که $\angle A' = 90^\circ$، $A'B' = c' = c$، $A'C' = b' = b$ و $A'H' = h'$ ارتفاع وارد بر $B'C'$ باشد (شکل ۱).

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'B'C'$ بنابر شرط لازم، داریم

$$\frac{1}{h'^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \tag{۱.۲}$$



شکل ۱

از مقایسهٔ (۲.۱) با (۱.۲)، $h = h'$ نتیجه می‌شود. از طرف دیگر، می‌دانیم هرگاه وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر برابر باشند، دو مثلث همنهشت هستند. بنابراین $\triangle ABH \cong \triangle A'B'H'$ و در نتیجه $\angle BAH = \angle B'A'H'$. همچنین

$$\triangle ACH \cong \triangle A'C'H'$$

و از این‌رو $\angle CAH = \angle C'A'H'$. پس

$$\angle A = \angle A' = ۹۰^\circ$$

و لذا $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است.

۲.۲. روش جبری. پیش از اینکه با استفاده از روش جبری نشان دهیم رابطهٔ (۲.۱) شرط کافی برای رابطهٔ فیثاغورس است، یک لم ساده را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲. *شرط لازم و کافی برای قائم‌الزاویه بودنِ $\triangle ABC$ (شکل ۱) این است که*

$$AH^۲ = BH \times CH.$$

اثبات. با استفاده از تشابه دو مثلث ABH و ACH، اثبات می‌شود. □

اینک (۲.۱) را به‌صورت

$$۰ = b^۲c^۲ - b^۲h^۲ - c^۲h^۲$$

می‌نویسیم. به دو طرف تساوی بالا $h^۴$ را می‌افزاییم تا رابطهٔ

$$h^۴ = h^۴ + b^۲c^۲ - b^۲h^۲ - c^۲h^۲$$

و به‌دنبال آن با فاکتورگیری از رابطهٔ به‌دست آمده

$$h^۴ = (b^۲ - h^۲)(c^۲ - h^۲)$$

نتیجه شود. از این‌رو با استفاده از دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و ACH در شکل ۱، می‌نویسیم

$$AH^{۴} = BH^{۲} \times CH^{۲}$$

یا

$$AH^{۲} = BH \times CH.$$

در نتیجه بنابر لم بالا، $\angle A = ۹۰^\circ$.

۳.۲. روش مثلثاتی. با توجه به راه‌حلی که در ادامه ارائه خواهیم داد، می‌بینم که روش مثلثاتی ساده‌ترین روش است. نخست (۲.۱) را به‌صورت

$$\frac{h^{۲}}{b^{۲}} + \frac{h^{۲}}{c^{۲}} = ۱$$

می‌نویسیم. اینک با استفاده از دو مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ در شکل ۱، چون

$$\sin^{۲} C + \sin^{۲} B = ۱,$$

داریم

$$\sin^{۲} C + \sin^{۲} B = \cos^{۲} B + \sin^{۲} B$$

و در نتیجه $\sin^{۲} C = \cos^{۲} B$. از این‌رو $\sin C = \cos B$ و لذا $\angle C = ۹۰^\circ - \angle B$. بنابراین $\angle A = ۹۰^\circ$.

۳. سه‌تایی فیثاغورسی اولیه و سه‌تایی فیثاغورسی وارون

در این بخش، اندکی حساب استدلالی به‌کار می‌بریم و دو تعریف مهم سه‌تایی فیثاغورسی اولیه و سه‌تایی فیثاغورسی وارون را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. سه‌تایی فیثاغورسی، یک مجموعهٔ سه عضوی از اعداد صحیح مانند a، b و c است به‌طوری که $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$. این سه‌تایی، سه‌تایی فیثاغورسی اولیه خوانده می‌شود هرگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a، b و c برابر با یک باشد.

گیریم a، b و c یک سه‌تایی فیثاغورس دلخواه باشد و $d = \gcd(a, b, c)$. اگر قرار دهیم $a = da'$، $b = db'$ و $c = dc'$، داریم

$$b'^{۲} + c'^{۲} = \frac{b^{۲} + c^{۲}}{d^{۲}} = \frac{a^{۲}}{d^{۲}} = a'^{۲}$$

با این ویژگی که $\gcd(a',b',c') = ۱$. پس سه‌تایی a'، b' و c' یک سه‌تایی فیثاغورسی اولیه است. بنابراین هدفمان را یافتن کلیهٔ سه‌تایی‌های فیثاغورسی اولیه قرار می‌دهیم، زیرا هر سه‌تایی فیثاغورسی را می‌توان از یک سه‌تایی فیثاغورسی اولیه به‌دست آورد. همچنین بدون کم شدن از کلیت می‌توان سه‌تایی فیثاغورسی اولیهٔ a، b و c را مثبت در نظر گرفت.

در هر سه‌تایی فیثاغورسی اولیه، هر دوتایی نسبت به هم اول هستند؛ مثلاً $\gcd(a,b) = ۱$، زیرا اگر a و b بر عددی صحیح بخش‌پذیر باشند، با توجه به $a^۲ = b^۲ + c^۲$، c هم باید بر آن عدد بخش‌پذیر باشد که چنین نیست.

قضیهٔ ۲.۳ که برهان جالب آن را *برتون* در [۲] نوشته است، تمام سه‌تایی‌های فیثاغورسی اولیه را تعیین می‌کند.

قضیه ۲.۳. *تمام سه‌تایی‌های فیثاغورسی اولیهٔ a، b و c عبارت‌اند از*

$$a = s^۲ + t^۲, \quad b = ۲st, \quad c = s^۲ - t^۲$$

که در آن، برای اعداد صحیح s و t داریم $s > t > ۰$ و $\gcd(s,t) = ۱$. به‌علاوه، یکی از دو عدد s و t فرد و دیگری زوج است.

پیش از آن که سه‌تایی فیثاغورسی وارون را تعریف کنیم، این نکته را خاطرنشان می‌کنیم که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۱) با سه‌تایی فیثاغورسی اولیهٔ a، b و c، ارتفاع $AH = h$ نمی‌تواند عددی صحیح باشد، زیرا

$$\gcd(a,b) = ۱, \quad \gcd(a,c) = ۱$$

و

$$h = \frac{bc}{a} = \frac{۲st(s^۲ - t^۲)}{s^۲ + t^۲}.$$

اینک سه‌تایی فیثاغورسی اولیهٔ a، b و c را با سه‌تایی فیثاغورسی

$$a' = (s^۲ + t^۲)^۲, \quad b' = ۲st(s^۲ + t^۲), \quad c' = (s^۲ - t^۲)(s^۲ + t^۲)$$

متناظر می‌کنیم. در نتیجه

$$h' = \frac{b'c'}{a'} = ۲st(s^۲ - t^۲)$$

عددی صحیح خواهد شد.

تعریف ۳.۳. سه‌تایی فیثاغورسی وارون، یک مجموعهٔ سه عضوی از اعداد صحیح

$$h' = ۲st(s^۲ - t^۲), \quad b' = ۲st(s^۲ + t^۲), \quad c' = (s^۲ - t^۲)(s^۲ + t^۲)$$

است که در رابطهٔ

$$\frac{۱}{h'^۲} = \frac{۱}{b'^۲} + \frac{۱}{c'^۲}$$

صدق کنند و در آن، اعداد صحیح $s > t > ۰$ چنان باشند که $\gcd(s,t) = ۱$ و یکی از دو عدد s و t فرد و دیگری زوج باشد. می‌توان نشان داد که $\gcd(h', b', c') = ۱$.

مثال ۴.۳. فرض می‌کنیم $s = ۲$ و $t = ۱$. بنابراین سه‌تایی فیثاغورسی اولیه، ۵، ۴ و ۳ خواهد بود. اگر این سه‌تایی را در $s^۲ + t^۲ = ۵$ ضرب کنیم، سه‌تایی فیثاغورسی ۲۵، ۲۰ و ۱۵ متناظر با ۵، ۴ و ۳ به‌دست می‌آید. پس با این سه‌تایی، $h' = \frac{۲۰\times۱۵}{۲۵} = ۱۲$ و در نتیجه سه‌تایی فیثاغورسی وارون، ۱۲، ۲۰ و ۱۵ می‌شود. برای این سه‌تایی داریم

$$\frac{۱}{۱۲^۲} = \frac{۱}{۲۰^۲} + \frac{۱}{۱۵^۲}.$$

مثال ۵.۳. فرض می‌کنیم $s = ۳$ و $t = ۲$. بنابراین سه‌تایی فیثاغورسی اولیه، $a = ۱۳$، $b = ۱۲$ و $c = ۵$ خواهد بود. اینک اگر این سه‌تایی را در $s^۲ + t^۲ = ۱۳$ ضرب کنیم، سه‌تایی فیثاغورسی $a' = ۱۶۹$، $b' = ۱۵۶$ و $c' = ۶۵$ و سه‌تایی فیثاغورسی وارونِ $h' = ۶۰$، $b' = ۱۵۶$ و $c' = ۶۵$ حاصل می‌شود.

در پایان، به‌عنوان نتیجه به نکته‌ای جالب اشاره می‌کنیم. فرض کنیم در $\triangle ABC$، زاویهٔ B منفرجه باشد. بدیهی است که ارتفاع AH بیرون از مثلث قرار می‌گیرد. با یکی از روش‌های بالا، مثلاً روش مثلثاتی، به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که رابطهٔ (۲.۱) شرط لازم و کافی برای $\angle B - \angle C = ۹۰^\circ$ است.

بنابراین به‌طور کلی رابطهٔ (۲.۱) در مثلث ABC شرط لازم و کافی برای $\angle B + \angle C = ۹۰^\circ$ ($\angle B$ و $\angle C$ هر دو حاده) یا $\angle B - \angle C = ۹۰^\circ$ ($\angle B$ منفرجه) است.

مراجع

[۱] بهبودیان، جواد، نگاهی به قضیهٔ فیثاغورس، *رشد آموزش ریاضی*، شمارهٔ ۱۶ (۱۳۶۶)، صص. ۲۶-۲۰.

[2] Burton, D. M., *Elementary Number Theory*, 5th edn., McGraw Hill, 2002.

[3] Loomis, E. S., *The Pythagoriean Proposition*. The National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

جواد بهبودیان: دانشگاه شیراز، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: behboodian@susc.ac.ir

صدیقه بلادی: آموزش و پرورش ناحیه ۱ شیراز، دبیر ریاضی
رایانامه: Sedigheh.Beldadi@yahoo.com

مهرداد سیمکانی: دانشگاه میشیگان فلینت، بخش ریاضی
رایانامه: simkani@umich.edu