فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۶، شمارهٔ ۶۰ (بهار و تابستان ۱۳۹۶) صص. ۱ تا ۳۴

نگاهی تاریخی به
پیدایش جبرنوین و برخی از بنیادی‌ترین دستاوردهای آن*

احمد حقانی

چکیده

جبر نوین که از دههٔ ۱۹۳۰ میلادی با نفوذ و تأثیر امی نوتر و مبتنی بر دستاوردهای پیشین او، آرتین، ودربورن، براوئر و دیگران شروع شد، با گرایش‌های متنوعی که بعداً در آن به‌وجود آمد، بخشی مهم از ریاضیات را به خود اختصاص داد که پژوهش در این بخش تا به امروز ادامه دارد. در این نوشته زمینه‌های فکری و نتایج پیشین را که به پیدایش جبر نوین منجر شد، به‌اختصار بیان می‌کنیم و رهیافت‌های نویی را مرور می‌کنیم که تعدادی از مهم‌ترین دستاوردهای پیشگامان جبر را در یک دورهٔ زمانی پنجاه ساله (۱۹۲۱–۱۹۷۱) میسر ساختند. البته تنها به تعدادی از مکاتب جبری، عمدتاً در زمینهٔ جبرهای تعویض‌ناپذیر پرداخته‌ایم و به انتخاب خود، به تعدادی از گرایش‌ها (نظیر نظریهٔ اتحادهای چندجمله‌ای) که بعد از سال ۱۹۷۰ میلادی کمتر ادامه یافتند، اشاره نکرده‌ایم.

۱. سرآغاز

در اوایل قرن نوزدهم میلادی، گاوس در رسالهٔ دکتری خود ثابت کرد که میدان اعداد مختلط به‌طور جبری بسته است. به‌تدریج سودمندیِ اعداد مختلط در نظریهٔ اعداد آشکار شد و گسترش آنالیز ریاضی از

عبارات و کلمات کلیدی. نظریهٔ رادیکال‌ها؛ نظریهٔ بعد؛ حلقهٔ خارج‌قسمتی؛ هم‌ارزیِ موریتا.
مایلم سپاسگزاری خود را از داوران محترمی که این متن را خواندند و اصلاحاتی را پیشنهاد کردند، ابراز دارم. همچنین از آقای اصغر دانشور که در امور نرم‌افزاری مربوط به آماده‌سازی مقاله به اینجانب کمک کردند، سپاسگزارم.
* بخشی از این نوشته به مناسبت روز جبر در خانه ریاضیات اصفهان در تاریخ ۱۳۹۵/۸/۶ ارائه شده است.

حقیقی به مختلط صورت گرفت. داستان ما از زمانی در سال ۱۸۳۵ آغاز می‌شود که هامیلتون[۱] دریافت مجموعهٔ اعداد مختلط یک فضای برداری نرمدار دو بُعدی بر میدان اعداد حقیقی است: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^۲$. لذا این پرسش طبیعی برای هامیلتون و دوست و همکلاسش جان گرِیوز[۲] و برخی دیگر از معاصران آنها مطرح شد که چگونه می‌توان $\mathbb{R}^۳$ را به یک میدان تبدیل کرد. داستانی مشهور حاکی است که پس از سال‌ها کوشش ناموفق، سرانجام هامیلتون در اکتبر سال ۱۸۴۳ توانست $\mathbb{R}^۴$ را به یک میدان تعویض‌ناپذیر تبدیل کند و آن را *چهارگان‌های* حقیقی نامید. این میدان که آن را با $\mathbb{H}$ نشان می‌دهیم، مجموعهٔ اشیائی به‌شکل $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ است به‌طوری که a، b، c و d اعداد حقیقی هستند و

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k},\ \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i},\ \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}, \quad \mathrm{i}^۲ = \mathrm{j}^۲ = \mathrm{k}^۲ = -۱.$$

او چنان شیفتهٔ کشف خود شده بود که بقیهٔ عمر را در راه یافتن کاربردهای چهارگان‌ها در هندسه سپری کرد. روز بعد از یافتن چهارگان‌ها، هامیلتون موضوع را به گرِیوز گزارش کرد و او هم در جواب، هامیلتون را ترغیب کرد که کار را در مورد سایر $\mathbb{R}^n$ها ادامه دهد. گرِیوز هم در ۲۶ دسامبر همان سال، هامیلتون را از کشف هشتگان‌ها به دست خودش آگاه کرد. این میدان، $\mathbb{R}^۸$ همراه با ضربی بود که آن را تبدیل به دستگاهی می‌کرد که در آن، تقسیم امکان‌پذیر بود. گرِیوز از هشتگان‌ها در اثبات قضیهٔ هشت مربع استفاده کرد: حاصل‌ضرب دو مجموع از هشت مربع، مجدداً مجموعی از هشت مربع است. طبیعی بود که حاصل‌ضرب سایر ۲^nتایی‌ها را هم بخواهد بررسی کند. با اینکه هامیلتون به گرِیوز پیشنهاد انتشار هشتگان‌ها را داده بود ولی به‌علت مشغلهٔ فکریِ هر دوی آنها، این کار صورت نگرفت. اما چندی بعد، هامیلتون به گرِیوز نوشت که هشتگان‌ها فاقد شرط شرکت‌پذیری است و لذا یک حلقهٔ تقسیم به‌شمار نمی‌رود. متأسفانه این تنها بداقبالی گرِیوز نبود، زیرا معلوم شد که قضیهٔ هشت مربع او نیز قبلاً و در سال ۱۸۱۸ توسط دِگِن[۳] کشف شده بود و کِیلی[۴] نیز در سال ۱۸۴۵ دستگاه هشتگان‌ها را در مقاله‌ای معرفی کرد که امروزه به‌نام اعداد کِیلی مشهور هستند. ناگفته نماند که خودِ چهارگان‌ها نیز (البته نه با این نام) توسط اویلر در سال ۱۷۴۸ در کشف اتحاد چهار مربع به‌کار رفته بود. به هر حال توجه و علاقه‌مندی فراوان به تبدیل $\mathbb{R}^n$ به یک حلقهٔ تقسیم، سال‌های متمادی ادامه یافت تا آنکه در سال ۱۸۷۷ فروبنیوس[۵] پایان این داستان را با قضیهٔ زیر اعلام کرد.

قضیه ۱.۱ (فروبنیوس [۱۹]). *دقیقاً سه حلقهٔ تقسیم وجود دارد که بر $\mathbb{R}$ جبری‌اند:* $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$ و $\mathbb{H}$.

در دههٔ ۱۸۸۰ ددکیند مفهوم ایدآل و پیرس[۶] دو مفهوم عضو خودتوان و عضو پوچ‌توان را مطرح و تجزیهٔ حلقه‌ها را بررسی کردند. هیلبرت نیز در سال ۱۸۹۸ ثابت کرد که در حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با ضرایب صحیح

[۱] William Rowan Hamilton [۲] John Thomas Graves [۳] Carl Ferdinand Degen [۴] Arthur Cayley
[۵] Ferdinand Georg Frobenius [۶] Benjamin Pierce

(و یا عضوِ یک میدان)، ایدآل‌های همگن، متناهیاً تولید شده هستند. همهٔ این مفاهیم و نتایج به‌دست آمده بعدها کاربردهای بسیاری یافتند اما توجه اصلی همچنان به ساختار جبرها بر میدان‌ها معطوف بود. البته مرکز هر حلقهٔ تقسیم، یک میدان است و لذا حلقهٔ تقسیم، یک جبر بر مرکز خود است. در سال‌های پایانی قرن نوزدهم، ساختار جبرها بر $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ توسط فروبنیوس، الی کارتان و مولین[۱] مورد بررسی قرار گرفت و مولین حالت خاصی از قضیهٔ ودربورن[۲] را که در آن میدان زمینه $\mathbb{C}$ است، ثابت کرد.

قضیه ۲.۱ (ودربورن (۱۹۰۷) [۱۴]). *اگر R یک جبر متناهی-بُعد بر میدان F و فاقد ایدآل پوچ‌توان ناصفر باشد، آن‌گاه*

$$R \cong \mathrm{Mat}_{n_۱}(D_۱) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_k}(D_k)$$

که در آن، اعداد طبیعی $n_۱$، ...، n_k به‌طور یکتا (مگر از نظر ترتیب) معین می‌شوند و D_iها حلقه‌های تقسیم هستند که با تقریب یکریختی، یگانه‌اند.

بی‌شک این قضیهٔ ساختاری، یکی از بنیادی‌ترین قضیه‌های نظریهٔ جبرها است که بعداً توسط امیل آرتین[۳] در سال ۱۹۲۷ تعمیم یافت. ودربورن در سال ۱۹۰۵ همچنین ثابت کرده بود که هر حلقهٔ تقسیم متناهی لزوماً یک میدان است. موضوع یافتن حلقه‌های تقسیم جدید توسط دیکسون[۴] با ابداع روشی جالب وارد مرحله‌ای جدید شد. برای رعایت ترتیب تاریخی، لازم است نخست روش هیلبرت را موسوم به *پیچش هیلبرت*[۵] یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم $\sigma : K \longrightarrow K$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. اگر بر هر یک از گروه‌های آبلی متشکل از چندجمله‌ای‌ها یا سری‌های توانی که ضرایب‌شان متعلق به K است و در سمت چپ متغیر x نوشته می‌شود، ضربی با استفاده از دستور $xk = \sigma(k)x$ $(k \in K)$ تعریف کنیم، آنها به حلقه‌های (شرکت‌پذیر) تبدیل می‌شوند که به‌ترتیب با $K[x;\sigma]$ و $K[[x;\sigma]]$ نشان می‌دهیم. این فرآیند را در حالتی که σ یکریختی باشد، می‌توان در مورد گروه آبلی سری‌های لوران، یعنی سری‌هایی مانند $\sum_{i=-n}^{\infty} k_i x^i$ که $n \geq ۰$ نیز به‌کار برد. حلقهٔ حاصل را با $K((x;\sigma))$ نشان می‌دهیم. اگر $\sigma \neq id_K$، آن‌گاه هر سه حلقهٔ فوق تعویض‌ناپذیرند و در صورتی که σ یکریختی باشد، K حلقهٔ تقسیم است اگر و تنها اگر $K((x;\sigma))$ حلقهٔ تقسیم باشد.

اینک حلقه‌های تقسیم از نوع دیکسون را توضیح می‌دهیم [۱۹]. ابتدا جبرهای دوری دیکسون را با استفاده از یک توسیع از میدان‌ها مانند $K \subseteq F$ که گروه گالوای آن (یعنی گروه خودریختی‌های $\sigma : K \longrightarrow K$ به‌طوری که $\sigma(a) = a$ برای هر $a \in F$) دوری از مرتبهٔ s است، معرفی می‌کنیم. فرض کنیم σ مولدی از این گروه گالوا باشد و $۰ \neq a \in F$. فضای برداری

$$D = K.۱ + K.X + \cdots + K.X^{s-۱}$$

[۱] Theodor Georg Andreas Molien [۲] Joseph Wedderburn [۳] Emil Artin [۴] Leonard Dickson [۵] Hilbert twist

را با استفاده از روابط $X^s = a$ و $Xb = \sigma(b)X$ برای هر $b \in K$ تبدیل به یک حلقه می‌کنیم. در این صورت F در مرکز حلقهٔ D است و در نتیجه D یک F–جبر با بُعد $s^۲$ است که عموماً با نماد $D := (K/F, \sigma, a)$ نشان داده می‌شود. چون در حلقهٔ چندجمله‌ای‌های پیچشی $K[X;\sigma]$، عضو $X^s - a$ در مرکز قرار دارد و

$$D = (K/F, \sigma, a) \cong K[x;\sigma]/(X^s - a),$$

D یک F–جبر ساده است (یعنی ایدآل نابدیهی ندارد) و K را به‌عنوان یک زیرمیدان ماکسیمال در بر دارد. ثابت می‌شود $D = \mathrm{Mat}_s(F)$ اگر و تنها اگر $a \in N_{K/F}(K^*)$ که در اینجا $N = N_{K/F}$ تابع نرم برای توسیع $F \subseteq K$ و K^* گروه ضربی عضوهای ناصفر میدان K است (برای هر $v \in K^*$ داریم $N(v) = \prod_{i=۱}^{s} \sigma^i(v) \in F^*$). حال اگر s عددی اول باشد، D حلقهٔ تقسیم است اگر و تنها اگر $a \notin N(K^*)$. مطالب فوق آشکار می‌کند که در مورد توسیع $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ که گروه گالوای آن توسط تابع مزدوج مختلط تولید می‌شود، به‌ازای $a = -۱$ داریم $\mathbb{H} = (\mathbb{C}/\mathbb{R}, \sigma, -۱)$. به عبارت دیگر، چهارگان‌های حقیقی، یک جبر دوری بر $\mathbb{R}$ از نوع دیکسون است. طبیعی است که حلقه‌های تقسیم را برحسب اینکه دارای بُعد متناهی یا بُعد نامتناهی بر مرکزشان باشند، دسته‌بندی کنیم. به‌طورکلی‌تر جبرهای ساده بر یک میدان نیز در دو دستهٔ مجزا قرار می‌گیرند: آنها که متناهی–بُعدند و آنهایی که نامتناهی–بُعدند. اگر F یک میدان باشد، منظور از F–جبر سادهٔ مرکزی، یک F–جبر ساده مانند A است به‌طوری که F برابر با مرکز A باشد. برای هر عدد اول p یک F–جبر تقسیم مرکزی وجود دارد که البته بُعدش $p^۲$ است. به‌عنوان نمونه، ذیلاً مثال دیکسون از یک $\mathbb{Q}$–جبر تقسیم مرکزی با بُعد $p^۲$ را بیان می‌کنیم.

یک ریشهٔ هفتم واحد که اولیه باشد، مثلاً $\eta = e^{\frac{۲\pi i}{۷}}$ و توسیع $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\eta)$ را که یک توسیع گالوا از میدان‌ها است با $[\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}] = \varphi(۷) = ۶$ در نظر می‌گیریم. گروه گالوای این توسیع، دوری و از مرتبهٔ ۶ است که به‌وسیلهٔ $\mathbb{Q}$–نگاشت τ با ضابطهٔ $\tau(\eta) = \eta^۳$ تولید می‌شود. این گروه دارای زیرگروه H با شاخص سه است و در نتیجه میدان یگانهٔ میانی $E = H'$ (با نمادگذاری متداول در نظریهٔ گالوا) به‌دست می‌آید: $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq \mathbb{Q}(\eta)$، $[E : \mathbb{Q}] = ۳$ و $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}} E = \{۱, \sigma, \sigma^۲\}$ که σ تحدید $\tau^۲$ به E است. حال می‌بینیم که $\nu = \eta + \eta^{-۱} = ۲\cos\frac{۲\pi}{۷}$ یک عدد حقیقی است که ریشهٔ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $x^۳ + x^۲ - ۲x - ۱ \in \mathbb{Q}[x]$ است و

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\nu) \subseteq \mathbb{Q}(\eta) \cap \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{Q}(\eta).$$

در نتیجه $K := \mathbb{Q}(\nu) = \mathbb{Q}(\eta) \cap \mathbb{R}$ و توسیع $\mathbb{Q} \subseteq K$ یک توسیع گالوایی است با $[K : \mathbb{Q}] = ۳$. برای ساختن $\mathbb{Q}$–جبر تقسیم مرکزی از بُعد $۳^۲$ کافی است عددی بیابیم که در $N_{K/\mathbb{Q}}(K^*)$ نباشد و عدد ۲ چنین است.

جا دارد که یک روش ساختن $\mathbb{Q}$–جبر تقسیم مرکزی نامتناهی–بُعد نیز ذکر شود. برای هر عدد اول p_i یک $\mathbb{Q}$–جبر تقسیم مرکزی A_i با بُعد p_i^2 وجود دارد. اگر

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_i < \cdots$$

اعداد اول باشند، قرار می‌دهیم $D_n = A_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \cdots \otimes_{\mathbb{Q}} A_n$ که یک $\mathbb{Q}$–جبر تقسیم مرکزی است. با در نظرگرفتن D_n به‌عنوان یک زیرجبرِ $D_{n+1} = D_n \otimes_{\mathbb{Q}} A_{n+1}$ و با فرضِ $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$، می‌بینیم که D یک $\mathbb{Q}$–جبر تقسیم مرکزی نامتناهی–بُعد است. روش استفاده از حاصل‌ضرب بی‌نهایت تانسور برای ساختن جبرهای تقسیم مرکزی نامتناهی–بُعد، منسوب به کوته[1] در سال ۱۹۳۱ است. همچنین با تعمیم روش پیچشی هیلبرت نیز چنین جبرهایی ساخته شده‌اند [۱۹].

۲. دههٔ ۱۹۲۱–۱۹۳۱

در سال ۱۹۲۱ امی نوتر[2] در مقاله‌ای شرط توقف زنجیرهای افزایشی از ایدآل‌ها (و مدول‌ها) را معرفی کرد که عموماً با نماد $A.C.C$ نشان داده می‌شود. در واقع $A.C.C$ با دو شرط دیگر معادل است: یکی اینکه هر ایدآل، متناهیاً تولید شده باشد و دوم، وجود عضو ماکسیمال در هر مجموعهٔ ناتهی از ایدآل‌ها. او این شرط را که امروزه *شرط نوتری* نامیده می‌شود، با موفقیت در تعمیم قضیه‌ای از هیلبرت و قضیه‌ای از لاسکر[3] به سال ۱۹۰۵ به‌کار برد. هیلبرت و لاسکر به‌ترتیب متناهیاً تولیدشدگیِ ایدآل‌ها در حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در یک میدان و اینکه هر ایدآل، اشتراک ایدآل‌های اولیه[4] است را ثابت کرده بودند. نوتر در واقع تجزیه و یگانگی تجزیهٔ ایدآل‌ها در حلقه‌های تعویض‌پذیر نوتری را به‌دست آورد.

در سال ۱۹۲۷ امیل آرتین شرط توقف زنجیرهای کاهشی از ایدآل‌های یک‌طرفه (مثلاً راست) در یک حلقه را معرفی کرد. این شرط با نماد $D.C.C$ نشان داده می‌شود که با شرط مینیمم راست (یعنی وجود عضو مینیمال در هر مجموعهٔ ناتهی از ایدآل‌های راست) معادل است و هر دو به نام شرط آرتینی راست نیز شناخته می‌شوند. آرتین با جایگزین کردن جبر با حلقه و متناهی–بُعد بودن با شرایط نوتری و آرتینی (توأماً)، قضیهٔ ساختاریِ ودربورن را برای حلقه‌ها تعمیم داد. بعدها و در سال ۱۹۳۹ بود که لیویتسکی[5]، شاگرد آرتین، ثابت کرد که در هر حلقهٔ یکدار شرط $D.C.C$ شرط $A.C.C$ را نتیجه می‌دهد. امروزه این مطلب به نام لیویتسکی و هاپکینز[6] شناخته می‌شود. در اینجا صورت اصلاح‌شدهٔ قضیهٔ آرتین را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲ (ودربورن–آرتین [۱۹]). *اگر R یک حلقهٔ آرتینی راست و بدون ایدآل پوچ‌توان ناصفر باشد، آن‌گاه حلقه‌های تقسیم D_1، D_2، …، D_k و اعداد طبیعی n_1، n_2، …، n_k به‌طور یکتا وجود دارند*

[1] Gottfried Köthe [2] Emmy Noether [3] Emanuel Lasker [4] primary ideal [5] Jacob Levitzki [6] Charles Hopkins

چنان‌که

$$R \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_k}(D_k).$$

حلقه با شرایط مذکور در قضیهٔ فوق به *نیم‌سادهٔ راست* موسوم است. این شرایط صورت‌های معادل دیگری هم دارد از جمله اینکه همهٔ مدول‌های راست بر R نیم‌ساده باشند، یعنی حاصل‌جمع مستقیم مدول‌های ساده باشند. نیم‌سادهٔ راست بودن معادل نیم‌سادهٔ چپ بودن است. این قضیه سنگ‌بنای نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌ناپذیر است و بسیاری از نتایج مهم این نظریه بر آن استوارند [۱۹].

نوتر در سال ۱۹۲۸ مقاله‌ای دربارهٔ جبرها (سیستم‌های هایپرکمپلکس: نامی که در آن زمان متداول بود) منتشر کرد و سپس در سال ۱۹۳۲ مقاله‌ای با عنوان (به ترجمهٔ انگلیسی)

Proof of a Main Theorem in the Theory of Algebras

انتشار یافت که نویسندگان آن ریچارد براوئر[۱]، هلموت هاسه[۲] و امی نوتر بودند. منظور از قضیهٔ اصلی در عنوان مقاله، قضیهٔ زیر است.

قضیه ۲.۲ (براوئر–هاسه–نوتر [۵]). *هر جبر تقسیم نرمال بر یک میدان عددی، دوری است.*

در این مقاله همهٔ جبرها متناهی–بُعد هستند و منظور از نرمال همان است که امروزه مرکزی گفته می‌شود و میدان عددی نیز یعنی توسیعی از $\mathbb{Q}$. مقاله با عجلهٔ زیاد تهیه شده بود تا به‌مناسبت هفتادمین سال تولد کورت هِنزِل[۳]، استاد پیشین هاسه، به وی تقدیم شود. در واقع تنها چند روز قبل از چاپ، نتیجهٔ نهایی آن با کمک نوتر به‌دست آمد؛ اگرچه سال‌ها دربارهٔ آن فکر و تلاش صورت گرفته بود. این مقاله دارای یک متن اهدا به هِنزِل است که توسط هاسه نوشته شده بود:

> «باعث شادمانی ویژهٔ ما است که می‌توانیم این نتیجه را که ضرورتاً به روش p–ادیک تعلق دارد، به بنیانگذار این روش، آقای کورت هِنزِل، به‌مناسبت هفتادمین سال تولدشان پیشکش کنیم.»

اما امی نوتر چندان از این متن راضی نبود، زیرا در جواب به هاسه نوشت:

> «البته با پاسداشتِ هِنزِل موافقم. روش‌های من آنقدر کارساز و مفهومی هستند که در هر جایی، بدون نام و نشان نفوذ کرده‌اند.»

روشن است که نوتر به روش‌های خود اطمینان داشت. خوب! این روش‌ها کدام‌اند؟ با کندوکاو در آثارش، به‌ویژه مقالهٔ فوق به نظر می‌رسد که او بر دو رویکرد تازهٔ خود اصرار می‌ورزید و می‌خواست روش خود را از روش p–ادیک هِنزِل متمایز سازد. در وهلهٔ نخست مایل بود که نظریهٔ کلاسیک نمایش در

[۱] Richard Brauer [۲] Helmut Hasse [۳] Kurt Hensel

چارچوپ نظریهٔ مجرد جبرها، به‌جای گروه‌های ماتریسی که شور[۱] ابداع کرده بود، انجام پذیرد. در وهلهٔ دوم قویاً پیشنهاد می‌کرد که نظریهٔ جبرهای تعویض‌ناپذیر به‌جای نظریهٔ جبری تعویض‌پذیر اعداد و به‌ویژه نظریهٔ کلاسیکِ میدان مطالعه شود. به‌طور خلاصه دلیل رویکرد او به نظریهٔ نمایش جبرها این است: هرگاه $f : G \longrightarrow GL(V)$ نمایشی از گروه متناهی G درگروه تبدیلات خطی ناتکین یک فضای برداری V_F (به‌طور معادل یک گروه ماتریسی) باشد، آن‌گاه می‌توان V را به یک FG-مدول متناهیاً تولید شده تبدیل کرد. در اینجا FG یعنی جبر گروهی F بر G. به‌عکس اگر W یک FG-مدول متناهیاً تولید شده باشد، با استفاده از همریختیِ حلقه‌ای $FG \longrightarrow \mathrm{End}(W)$ نمایشی از G در $GL(W)$ به‌دست می‌آید (که تحدید این همریختیِ حلقه‌ای است).

رهیافت تازهٔ نوتر و نفوذ معنوی او در میان ریاضیدانان زمان خود، نظریهٔ نمایش جبرهای تعویض‌ناپذیر و به‌دنبال آن، نظریهٔ مدول‌ها را در کانون توجه قرار داد و از جملهٔ اولین نتایج آن کاربردهای دو نظریهٔ حلقه و گروه در یکدیگر بود. دو تن از نامداران عرصهٔ جبر، یکی آلبرت[۲] در امریکا و دیگری وان دِر واردِن[۳] در آلمان، به‌ترتیب در سال‌های ۱۹۳۷ و ۱۹۳۱ واژهٔ «مدرن» را در عنوان کتاب جبر خود گنجاندند [۱، ۲۹]. واژهٔ «مدرن» در نوشتجات ریاضی به‌تدریج جای خود را به واژهٔ «مجرد» (انتزاعی) داده است. شاید برخی نقدهایی که بر کتاب «جبر مدرن» تألیف وان دِر واردِن شد، سبب این جایگزینی باشد. در واقع در چاپ‌های بعدی، واژهٔ «مدرن» از عنوان کتاب مزبور حذف گردید. بی‌شک این مدرن بودن متأثر از دستاوردهای آرتین، نوتر و رهیافت تازهٔ نوتر در موضوع نظریهٔ نمایش جبرها بود و بجا است که نوتر، مادر «جبر نوین» نامیده شود. البته پژوهش‌های جبری در عرصه‌های متنوع و با رهیافت‌هایی متفاوت از جبر نوین نیز ادامه یافت ولی سهم نتایج حاصل از رویکرد نوتری قطعاً چشمگیرتر از سایر رهیافت‌ها است.

در ادامهٔ این بخش، نتایجی از ادغام روش‌های گروه و حلقه را در مورد حلقه‌های تقسیم ذکر خواهیم کرد. ولی پیش از آن شایسته است که بدانیم امروزه قضیهٔ براوئر-هاسه-نوتر با افزودن نام آلبرت در ابتدای فهرست پدیدآورندگان این قضیه شناخته می‌شود، زیرا آلبرت در اکتبر سال ۱۹۳۱ بخشی مهم از «قضیهٔ اصلی» را انتشار داده بود و با وجود آنکه در نامهٔ خود به هاسه نوشته بود که این بخش «in print» است، هاسه متوجه نشده بود که منظور آلبرت این است که آن بخش «چاپ شده» است. البته این موضوع در مقالهٔ مشترک آنها در سال ۱۹۳۲ رفع و رجوع شد [۲]. داستان پیدایش «قضیهٔ اصلی» و مکاتبات بین نویسندگان آن در یک مقالهٔ بلند (۹۲ صفحه‌ای!) در سال ۲۰۰۵ میلادی توسط پیتر روکِت[۴] نشر یافته است [۲۵]. در این نوشته اشاره‌های فراوانی به ویژگی‌های شخصیتی هر کدام از نویسندگان نیز شده است. از

[۱] Issai Schur [۲] Abraham Adrian Albert [۳] Bartel Leendert van der Waerden [۴] Peter Roquette

جمله لحن مقتدرانه، آمرانه و راهگشای نوتر، تواضع و فروتنی براوئر، احترام و شیفتگی هاسه به استادش هِنزِل و سرانجام ادب همراه با حق‌طلبیِ آلبرت.

تأثیرات متقابل گروه و حلقه به‌خوبی در گروه براوئر دیده می‌شود. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر A و B دو F–جبر سادهٔ مرکزی باشند، آن‌گاه $A \otimes_F B$ نیز چنین است. حال اگر هر دوی A و B متناهی–بُعد روی F باشند، رابطهٔ $A \sim B$ را به‌منزلهٔ وجود اعداد طبیعی m و n می‌گیریم به‌طوری که $A \otimes_F \mathrm{Mat}_m(F) \cong B \otimes_F \mathrm{Mat}_n(F)$. چون بنابر قضیهٔ ودربورن، $A \cong D_۱ \otimes_F \mathrm{Mat}_k(F)$ و $B \cong D_۲ \otimes_F \mathrm{Mat}_l(F)$ (که $D_۱$ و $D_۲$ دو حلقهٔ تقسیم هستند)، پس $A \sim B$ به این معنی است که $D_۱ \sim D_۲$. به هر تقدیر این یک رابطهٔ هم‌ارزی است و $B(F)$، گروه براوئر میدان F، مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $[A]$ است که با قاعدهٔ $[A]+[B]=[A\otimes_F B]$ تشکیل یک گروه آبلی می‌دهند. در این گروه هر عضو، دارای مرتبهٔ متناهی است و لذا $B(F)$ یک گروه تابدار است. اگر $A \sim D \otimes_F \mathrm{Mat}_n(F)$، مرتبهٔ $[A]$ به‌عنوان عضوی از $B(F)$ عدد $\sqrt{[D:F]}$ را عاد می‌کند و در نتیجه برای mی مناسب $A \otimes_F \cdots \otimes_F A \cong \mathrm{Mat}_m(F)$. سرانجام به قیاس قضیهٔ سیلو در نظریهٔ گروه‌ها، قضیهٔ جالب زیر را از براوئر داریم.

قضیه ۳.۲ ([۱۴]). *فرض کنیم D یک حلقهٔ تقسیم مرکزی متناهی–بُعد و مرتبهٔ $[D]$ در گروه براوئر $B(F)$ برابر با $p_k^{m_k} \cdots p_۱^{m_۱}$ باشد که در آن، p_iها اعداد اول متمایزند. در این صورت*

$$D \cong D_۱ \otimes_F \cdots \otimes_F D_k$$

به‌طوری که مرتبهٔ هر $[D_i]$ در $B(F)$ برابر با $p_i^{m_i}$ است.

در ادامه، به برخی از مهم‌ترین گرایش‌هایی که در جبر نوین پدیدار شد و ذکر برخی از نتایجی مهم آنها خواهیم پرداخت. در این بررسی خود را به دورهٔ زمانی ۱۹۲۱–۱۹۷۱ محدود کرده‌ایم. البته به مرور زمان، قضیه‌ها و نظریه‌های پیشین گسترش یافته و در کتاب‌های تخصصی با اثبات‌های نو، ساده‌تر و کوتاه‌تر عرضه شده‌اند. به این دلیل، ارجاع‌های ما بیشتر به این دست از کتاب‌ها خواهد بود و نه به مقالات نویسندگان که احیاناً دسترسی به آنها چندان میسر نباشد.

۳. قضایای تعویض‌پذیری و گروه یکه‌ها

بنابر قضیهٔ (کوچکِ) ودربورن به سال ۱۹۰۵، هر حلقهٔ تقسیم متناهی، یک میدان است. این قضیه انگیزه‌ای قوی برای جستجوی شرایطی شد که موجب تعویض‌پذیری یک حلقه می‌شود. به‌علاوه مطالعهٔ گروه ضربی عنصرهای یکهٔ حلقه را که از قرن نوزدهم برای حلقه‌هایی ویژه در جبر تعویض‌پذیر شروع شده

بود، اینک برای دیگر حلقه‌ها نیز مطرح می‌ساخت. جیکوبسن[۱] که آخرین دانشجوی دکتری ودربورن بود، قضیهٔ کوچک را این گونه تعمیم داد.

قضیه ۱.۳ ([۱۹]). *فرض کنیم D یک جبر تقسیم بر یک میدان متناهی F است. اگر D بر F جبری باشد، آن‌گاه D یک میدان است.*

گروه یکه‌ها نخست در مورد حلقهٔ اعداد صحیح میدان‌های عددی (توسیع‌های متناهی $\mathbb{Q}$) مورد توجه قرار گرفت. در این زمینه دیریکله در سال ۱۸۴۰ قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲.۳ ([۱۷]). *گیریم R حلقهٔ اعداد صحیح میدان عددی $F = \mathbb{Q}(a)$ و چندجمله‌ای کمین a بر $\mathbb{Q}$ دارای r_1 ریشهٔ حقیقی و $2r_2$ ریشهٔ مختلط باشد. در این صورت گروه یکه‌های حلقهٔ R یکریخت با گروه $t(F^*) \times A$ است که در آن، $t(F^*)$ زیرگروه تابیِ F^* و A یک گروه آبلی آزاد و از رتبهٔ $r_1 + r_2 - 1$ است.*

صد سال بعد، یعنی در سال ۱۹۴۰ قضیهٔ فوق توسط شِوالی[۲] و هاسه تعمیم داده شد [۱۹]. ما تنها به ذکر نام برخی از ریاضیدانان نامداری که در مورد یکه‌های حلقهٔ اعداد صحیح میدان‌های عددی ویژه، نتایجی به‌دست آورده‌اند، بسنده می‌کنیم: ارنست کومر[۳]، هرمان مینکوفسکی[۴] و داوید هیلبرت. اما مطالعهٔ یکه‌های حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، گویا با مقاله‌ای از امی نوتر در سال ۱۹۲۹ شروع شده باشد. او وجود عضوهای تفکیک‌پذیر[۵] را برای حلقه‌های تقسیم متناهی–بُعد ثابت کرد. سپس جیکوبسن آن را تعمیم داد.

قضیه ۳.۳ ([۱۴]). *اگر حلقهٔ تقسیم تعویض‌ناپذیر D بر مرکزش جبری باشد، آن‌گاه عضو a در $D\backslash Z(D)$ وجود دارد که بر $Z(D)$ (مرکز D) تفکیک‌پذیر است.*

اینک برخی از قضایای عمده‌ای را که دربارهٔ مسئلهٔ تعویض‌پذیری به‌دست آمده است، ذکر می‌کنیم. کاپلانسکی[۶] با استفاده از قضیهٔ نوتر–جیکوبسن ثابت کرد که

قضیه ۴.۳ ([۱۴]). *اگر F مرکز یک حلقهٔ تقسیم D و گروه D^*/F^* تابدار باشد، آن‌گاه $D = F$.*

یکی دیگر از کاربردهای قضیهٔ نوتر–جیکوبسن را در اثبات نتیجه‌ای از کاپلانسکی و هرستاین[۷] می‌توان دید.

قضیه ۵.۳ ([۱۴]). *گیریم حلقهٔ R دارای این ویژگی باشد که برای هر $a \in R$ عدد طبیعی n وابسته به a وجود دارد به‌طوری که a^n در مرکز حلقه است. اگر R دارای ایدآل پوچ (ناصفر) نباشد، آن‌گاه R تعویض‌پذیر است.*

---

[۱] Nathan Jacobson [۲] Claude Chevally [۳] Ernst Kummer [۴] Hermann Minkowski [۵] separable [۶] Irving Kaplansky [۷] Israel Nathan Herstein

اما پیش از آن، جیکوبسن ثابت کرده بود که هرگاه به‌ازای هر عضو a از حلقهٔ R عددی مانند $n > ۱$ وابسته به a وجود داشته باشد به‌طوری که $a^n = a$، آن‌گاه R تعویض‌پذیر است. البته حلقه‌های تعویض‌پذیری که هر عضوشان در معادله‌ای مانند $x^n = x$ صدق کنند، فراوان نیستند. این مشکل با قضیهٔ جالب زیر از هرستاین برطرف می‌شود.

قضیه ۶.۳ ([۱۴]). *حلقهٔ R تعویض‌پذیر است اگر و تنها اگر به‌ازای هر دو عضو a و b در آن، عددی طبیعی مانند $n > ۱$ وابسته به آنها یافت شود به‌طوری که $(ab - ba)^n = ab - ba$.*

در مورد سؤال مربوط به تعویض‌پذیری، نتایج دیگری توسط هرستاین، مِی[۱] و دیگران به‌دست آمده است که ما به ذکر نتیجهٔ زیر از هرستاین در سال ۱۹۷۸ بسنده می‌کنیم.

قضیه ۷.۳ ([۱۷]). *اگر در حلقهٔ تقسیم D برای تمام اعضای ناصفر x و y، عضو $xyx^{-۱}y^{-۱}$ از مرتبهٔ متناهی باشد، آن‌گاه D تعویض‌پذیر است.*

با مرگ هرستاین در سال ۱۹۸۸ گرایش به این گونه تحقیقات به‌تدریج کم‌رنگ شد ولی پژوهش‌ها در مورد گروه یکه‌ها هنوز هم ادامه دارد. طبیعی است که این موضوع ابتدا در مورد حلقه‌های تقسیم انجام شده باشد. نتیجهٔ جالب زیر متعلق به کارتان[۲]، براوئر و هوا[۳] است که در سال‌های ۱۹۴۸ و ۱۹۴۹ مستقلاً به‌دست آمده است.

قضیه ۸.۳ (کارتان–براوئر–هوا [۱۹]). *فرض کنیم $C \subseteq D$ توسیعی از حلقه‌های تقسیم باشد به‌طوری که C^* یک زیرگروه نرمال در D^* است. اگر $C \neq D$، آن‌گاه C در مرکز D قرار دارد.*

این قضیه انگیزهٔ پژوهش‌های مشابه در مورد حلقه‌های دیگر شده است ولی در همین زمینه، پژوهش در مورد سری بالایی مرکزیِ گروه D^* از حلقهٔ تقسیم D، نتیجهٔ زیبای زیر را به‌دست داده است.

قضیه ۹.۳ ([۱۹]). *برای حلقهٔ تقسیم D، گروه ضربی D^* پوچ‌توان است اگر و تنها اگر D میدان باشد.*

این پرسش طبیعی است که نقش گروه ضربی یکه‌های یک حلقه در شناخت خودِ حلقه چیست؟ از طرف دیگر، شناخت گروه یکه‌های حلقه‌های کلاسیک به‌ویژه حلقه‌های گروهی، نه‌تنها برای ریاضیدانان در رشتهٔ جبر مطرح بوده است، بلکه در رشته‌ها و گرایش‌های دیگری مانند توپولوژی دیفرانسیل مورد نیاز واقع شده است. هایمن بَس[۴] در سال ۱۹۶۶ توانست در حلقهٔ $\mathbb{Z}G$ که G دوری از مرتبهٔ بیش از ۲ است، دستگاهی از یکه‌های مستقل از مرتبهٔ نامتناهی بسازد که زیرگروهی با شاخص متناهی در گروه یکه‌های $\mathbb{Z}G$ به‌وجود می‌آورد. برای درک اهمیت این قضیه، نتیجه‌ای از آن را که هیلبرت در سال ۱۸۹۷ ثابت کرده است، ذکر می‌کنیم.

[۱] Jon Peter May [۲] Henri Cartan [۳] Loo-Keng Hua [۴] Hyman Bass

قضیه ۱۰.۳ ([۱۷]). *فرض کنیم d در مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های n تغییر کند و φ_d مجموعهٔ همهٔ ریشه‌های dام اولیهٔ واحد بر $\mathbb{Q}$ باشد. در این صورت یکه‌های $\frac{1-a}{1-b}$ که $a, b \in \varphi_d$، زیرگروهی با شاخص متناهی در گروه یکه‌های حلقهٔ $\mathbb{Z}[\epsilon_n]$ تولید می‌کند که در آن، $\mathbb{Z}[\epsilon_n]$ حلقهٔ اعداد صحیح میدان $\mathbb{Q}[\epsilon_n]$ است و ϵ_n یک ریشهٔ nام اولیهٔ واحد بر $\mathbb{Q}$ است.*

با ایجاد و گسترش $K-$ تئوریِ جبری توسط بَس و دیگران، ابزار لازم برای به‌دست آوردن نتیجهٔ مهم زیر در سال ۱۹۷۴ فراهم شد که با بیان آن این بخش را به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۱۱.۳ (بَس [۱۷]). *فرض کنیم R حلقهٔ اعداد صحیح و یا حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها بر یک میدان متناهی باشد. در این صورت*

(آ) $GL_n(R)$ گروهی متناهیاً تولید شده است هرگاه $n \geq ۳$؛

(ب) $GL_n(R[x_۱, \dots, x_d])$ گروهی متناهیاً تولید شده است هرگاه $n \geq d + ۳$.

۴. نظریهٔ رادیکال‌ها

در دههٔ ۱۹۳۰، مفاهیم ایدآل‌های ماکسیمال، مینیمال، اول[۱]، نیم‌اول[۲]، رادیکال اول و رادیکال‌های پوچ پایینی و بالایی برای حلقه‌های تعویض‌ناپذیر تعریف و بعضاً مورد تحقیق قرار گرفت، زیرا با استفاده از لم زُرن وجود آنها محرز شده بود. پیش از آنها، ودربورن مفهوم رادیکال را برای جبرها تعریف کرده بود که در واقع بزرگترین ایدآل پوچ‌توان جبر است. رادیکال اول حلقهٔ R با نماد $P(R)$ نشان داده می‌شود، اشتراک همهٔ ایدآل‌های اول R است (البته این رادیکال، نخست برای حلقه‌هایی که در هر دو شرط زنجیری صدق می‌کنند، تعریف شد). در حالتی که R تعویض‌پذیر باشد، این رادیکال برابر مجموعهٔ تمام عضوهای پوچ‌توان R است اما اگر R تعویض‌ناپذیر باشد، عضوهای پوچ‌توان لزوماً تشکیل یک ایدآل نمی‌دهند. این رادیکال (و نیز رادیکال‌های دیگر) گاه با اسامی اشخاص نیز ظاهر شده‌اند و نماد $\mathrm{Nil}_*(R)$ نیز برای $P(R)$ به‌کار می‌رود که آن را رادیکال پوچ پایینی می‌نامند. رادیکال پوچ بالایی، حاصل‌جمع تمام ایدآل‌های دوطرفهٔ پوچ است و با نماد $\mathrm{Nil}^*(R)$ نشان داده می‌شود. همواره

$$\mathrm{Nil}_*(R) \subseteq \mathrm{Nil}^*(R)$$

ولی حلقه‌هایی وجود دارند که در آنها این دو با هم مساوی نیستند. تساوی برای حلقه‌های نوتری یک‌طرفه برقرار است و در این حالت هر ایدآل پوچ یک‌طرفه و به‌ویژه $\mathrm{Nil}^*(R)$ پوچ‌توان است و این قضیه‌ای از لیویتسکی است (۱۹۳۹).

[۱] prime [۲] semiprime

در نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌ناپذیر حدسی مشهور از دههٔ ۱۹۳۰ همچنان مبارز می‌طلبد و آن حدس *کوته* است:

مسئله ۱.۴ (مسئلهٔ باز، کوته). اگر $\mathrm{Nil}^*(R) = \circ$، آن‌گاه R ایدآل پوچ یک‌طرفه ندارد.

درستیِ این حدس برای حلقه‌های نوتری یک‌طرفه بنابر قضیهٔ لیویتسکی روشن است. حدس فوق دارای صورت‌های معادل هم هست که یکی از آنها چنین است.

مسئله ۲.۴. اگر I یک ایدآل پوچ در حلقهٔ R باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathrm{Mat}_n(I)$ در $\mathrm{Mat}_n(R)$ پوچ است.

در بین رادیکال‌های یک حلقه، از همه معروف‌تر آن است که توسط جیکوبسن در سال ۱۹۴۵ مطرح و سپس به نام او مشهور شد. رادیکال جیکوبسن برخلاف رادیکال‌های پیش‌گفته که تنها برحسب عضوهای درونی یک حلقه تعریف شده‌اند، پیوندی هم با نظریهٔ مدول دارد. قبلاً گفتیم که تغییر توجه از ساختار درونی حلقه به عمل آن بر روی گروه‌های آبلی، از ثمرات آموزه‌های نوتر است. در دههٔ ۱۹۳۰ معلوم شده بود که حلقهٔ R نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر R– مدول، مثلاً خودِ R، حاصل‌جمع مدول‌های ساده باشد. ابتکار جیکوبسن تعریف زیر است:

تعریف ۳.۴. $\mathrm{Jac}(R)$ اشتراک همهٔ پوچسازهای R–مدول‌های چپ ساده است.

جیکوبسن نشان داد که $\mathrm{Jac}(R)$ با اشتراک همهٔ ایدآل‌های چپ ماکسیمال، با اشتراک همهٔ ایدآل‌های راست ماکسیمال و با اشتراک همهٔ پوچسازهای R–مدول‌های راست ساده برابر است. به‌علاوه

$$\mathrm{Jac}\Big(\frac{R}{\mathrm{Jac}(R)}\Big) = \circ$$

و این همان ویژگی است که از واژهٔ رادیکال مراد می‌شود. به هر حال

$$\mathrm{Nil}_*(R) \subseteq \mathrm{Nil}^*(R) \subseteq \mathrm{Jac}(R)$$

و در مورد حلقه‌های تعویض‌پذیر، دو رادیکال نخست بالا برابرند که همان مجموعهٔ عضوهای پوچ‌توان است. در مورد حلقه‌های آرتینی یک‌طرفه، هر سه رادیکال برابرند. کوشش‌های وسیعی برای شناخت رادیکال‌های مختلف یک حلقهٔ توسیعی از R، نظیر $R[x]$ و یا RG و یا تعیین انواع ایدآل‌های آنها و رابطه‌شان با ایدآل‌های R انجام گرفته است. ولی ما وارد این مباحث نمی‌شویم و تنها به رادیکال جیکوبسن می‌پردازیم که در یک قضیهٔ ساختاری دخیل است.

اگر $\mathrm{Jac}(R)=0$، حلقهٔ R را J–نیم‌ساده و یا *نیم‌ابتدایی*[۱] نامند و این دقیقاً زمانی اتفاق می‌افتد که حلقه دارای یک مدول چپ نیمسادهٔ وفادار باشد. اما R *ابتدایی*[۲] چپ *(راست)* نامیده می‌شود اگر دارای یک R–مدول چپ (راست) سادهٔ وفادار باشد (وفادار[۳] به معنی داشتنِ پوچساز صفر است). در سال ۱۹۶۴ برگمن[۴] اولین مثال از یک حلقهٔ ابتدایی راست را ارائه کرد که ابتدایی چپ نبود [۲۷]. نکتهٔ جالب اینکه $\mathrm{Jac}(R)$ در واقع اشتراک همهٔ ایدآل‌های I است که R/I یک حلقهٔ ابتدایی چپ باشد و در این گزاره می‌توان «راست» را به‌جای «چپ» نشاند. در مورد حلقه‌های آرتینی یک‌طرفه، مفاهیم نیم‌ساده و نیم‌اول معادل‌اند [۱۹]. همچنین مفاهیم ساده، ابتدایی (اعم از راست یا چپ) و اول نیز برای حلقه‌های آرتینی یک‌طرفه، معادل هستند.

برای بیان قضیهٔ ساختاری حلقه‌های ابتدایی که از رهگذر نتایج فوق به‌دست آمده است، ابتدا تعریف چگال بودنِ یک زیرمجموعه مانند S از تبدیلات خطی فضای برداری V_K را یادآوری می‌کنیم (K یک حلقهٔ تقسیم است). گوئیم S ویژگی m–انتقالی بر V دارد هرگاه برای هر n بردار مستقل خطی مانند v_1، $\ldots$، v_n (که $n \leq m$) و هر مجموعه از n بردار w_1، $\ldots$، w_n در V عضوی مانند $s \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری که $w_i = s(v_i)$ برای $i = 1, \ldots, n$. گوئیم S یک مجموعهٔ *چگال* از تبدیلات خطی بر V_K است اگر S برای هر عدد طبیعی m، m–انتقالی باشد.

قضیه ۴.۴ (چگالی جیکوبسن [۸، ۱۹، ۲۷]). *فرض کنیم R یک حلقهٔ ابتدایی چپ باشد که مدول چپ ساده وفادار V دارد و $K = \mathrm{End}_R(V)$. در این صورت R با یک زیرحلقهٔ چگال از تبدیلات خطی فضای برداری راست V بر حلقهٔ تقسیم K یکریخت است. به‌علاوه*

(آ) اگر R آرتینی چپ باشد، آن‌گاه $\dim_K V = n$ متناهی است و $R \cong \mathrm{Mat}_n(K)$؛

(ب) اگر R آرتینی چپ نباشد، آن‌گاه $\dim_K V$ نامتناهی است و برای هر عدد طبیعی m زیرحلقه‌ای از R وجود دارد که $\mathrm{Mat}_m(K)$ تصویر همریخت آن زیرحلقه است.

بند (آ) از قضیهٔ چگالی، اثباتی جدید از (یک بخش) قضیهٔ ودربورن–آرتین به‌دست می‌دهد. بدین مناسبت، قضیهٔ چگالی به‌عنوان تعمیمی در خور توجه از قضیهٔ ودربورن–آرتین شناخته می‌شود. این پرسشی طبیعی است که اگر R ابتدایی چپ باشد، آیا حلقه‌هایی وابسته به R، مثلاً RG نیز چنین هستند؟ پاسخ به پرسش‌هایی از این نوع بیشتر در دههٔ ۱۹۸۰ میلادی داده شده است که خارج از دورهٔ زمانی مورد بررسی ما است. به‌عنوان نمونه، قضیهٔ زیر از جیکوبسن را در مورد $R[x]$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۴ ([۱۱]). *فرض کنیم R یک حلقهٔ آرتینی ساده با مرکز K است. حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(آ) همهٔ حلقه‌های $\mathrm{Mat}_n(R)$ بر K جبری‌اند؛

[۱] semiprimitive [۲] primitive [۳] faithful [۴] George M. Bergman

(ب) $R \otimes_K K(x)$ *سادهٔ آرتینی است؛*
(پ) $R[x]$ *ابتدایی راست نیست.*

لذا اگر D یک حلقهٔ تقسیم با مرکز D باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای اینکه $D[x]$ ابتدایی راست باشد این است که دست‌کم یک عدد طبیعی n یافت شود به‌طوری که $\mathrm{Mat}_n(D)$ بر میدان K جبری نباشد. در سال ۱۹۴۵ جیکوبسن این مسئلهٔ باز را مطرح کرده بود که آیا برای یک حلقهٔ تقسیم مانند D که بر مرکزش جبری است، لازم است که $\mathrm{Mat}_n(D)$ به‌ازای هر n بر مرکز D جبری باشد؟ در سال ۱۹۵۶ آمیتسور[۱] به این پرسش برای حلقه‌های تقسیمی که مرکزشان ناشمارا است، پاسخ مثبت داد.

اینک از یک حدس و یک حلقه یاد می‌کنیم که با نام جیکوبسن شناخته می‌شوند. بنابر یک حالت خاص از قضیهٔ اشتراکی کرول[۲] در جبر تعویض‌پذیر، اگر R یک حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری باشد، آن‌گاه اشتراک همهٔ توان‌های $\mathrm{Jac}(R)$ صفر است.

مسئله ۶.۴ (جیکوبسن). اگر R یک حلقهٔ نوتری دوطرفه باشد و $J = \mathrm{Jac}(R)$، آن‌گاه

$$\bigcap_{i=۱}^{\infty} J^i = ۰.$$

این حدس برای حلقه‌های نوتری یک‌طرفه درست نیست: اگر S زیرحلقهٔ $\mathbb{Q}$ متشکل از تمام اعداد گویایی باشد که مخرج‌شان فرد است، آن‌گاه حلقهٔ

$$R = \begin{pmatrix} S & \mathbb{Q} \\ ۰ & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

نوتری راست است ولی نوتری چپ نیست و

$$J = \mathrm{Jac}(R) = \begin{pmatrix} ۲S & \mathbb{Q} \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \bigcap_{i=۱}^{\infty} J^i \neq ۰.$$

برای حلقه‌های نوتری یک‌طرفه‌ای که مثلاً بُعد کرول آنها یک است، درستی حدس جیکوبسن محقق شده است. R *حلقهٔ جیکوبسن* نامیده می‌شود اگر برای هر ایدآل اول P در R داشته باشیم $\mathrm{Jac}(R/P) = ۰$. انتقال ویژگی جیکوبسن از یک حلقه به توسیع‌های آن مسئله‌ای تمام‌شده نیست. با وجود این، اسمال[۳] و کُرتزن[۴] نتیجهٔ زیر را در سال ۱۹۸۸ به‌دست آوردند.

قضیه ۷.۴ ([۱۱]). *توسیع حلقه‌ها* $R \subseteq S$ *به‌طوری‌که* ${}_RS$ *و* S_R *متناهیاً تولید شده‌اند مفروض است. اگر* R *نوتری و جیکوبسن باشد، آن‌گاه* S *نیز چنین است.*

[۱] Shimshon Avraham Amitsur [۲] Wolfgang Krull [۳] Lance W. Small [۴] Barbara Cortzen

در پایان این بخش اضافه می‌کنیم که مطالعهٔ رادیکال‌ها بخشی گسترده از پژوهش‌های مربوط به نظریهٔ حلقه‌ها را دست‌کم به مدت ربع قرن به خود اختصاص داد. کتاب‌هایی نیز در موضوع رادیکال‌ها توسط دیوینسکی [۷] و گرِی [۱۲] انتشار یافته‌اند.

۵. نظریه‌های بُعد

در نظریهٔ بُعد برای حلقه‌ها و مدول‌ها، واژهٔ بُعد به‌منزلهٔ اندازهٔ دوری از یک موقعیت مطلوب است. در این بخش انواع بُعدهای همولوژیک، بُعد یکنواخت و بُعد کرول بررسی می‌شوند.

۱.۵. بُعدهای همولوژیک. پس از آنکه بِر[۱] در سال ۱۹۳۹ مفهوم مدول‌های تزریقی[۲] را بررسی کرد، به‌تدریج نظریه‌های رسته و جبر همولوژیک پا گرفت و بُعدهای تصویری[۳] و تزریقی برای مدول‌ها معرفی و مطالعه شد. برای هر مدول M یک مدول تصویری P وجود دارد که M تصویر همریخت P است و نیز یک مدول تزریقی I وجود دارد که با زیرمدولی از آن یکریخت است. لذا به‌سادگی ثابت می‌شود که حلقهٔ R نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر R–مدول تصویری باشد؛ اگر و تنها اگر هر R–مدول تزریقی باشد. به این ترتیب مطالعهٔ مدول‌های یک حلقه از این دیدگاه که تا چه اندازه از تصویری یا تزریقی بودن دور هستند، آغاز شد.

بُعد تصویری M_R این گونه تعریف می‌شود: ابتدا دنبالهٔ دقیق

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \xrightarrow{d_{-1}} 0$$

که در آن، P_iها تصویری هستند در نظر گرفته می‌شود. اگر j کوچکترین عددی باشد (در صورت وجود) به‌طوری که $\ker d_j$ یک مدول تصویری باشد، آن‌گاه $j + 1$ طول دنبالهٔ فوق قلمداد می‌شود. در غیر این صورت طول دنباله بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود. ثابت می‌شود که طول هر دو چنین دنباله‌ای برای M مساوی است که آن را بُعد تصویری M می‌نامیم و با $\mathrm{p.\,dim}\ M$ نشان می‌دهیم. بُعد تزریقی با استفاده از دنباله‌های دقیق مانند

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots$$

که در آن، E_iها تزریقی هستند، مشابه بالا تعریف می‌شود. اما به‌طور معادل می‌توان گفت این بُعد متناهی و کوچکترین عدد n است (در صورت وجود) که چنین دنباله‌ای برای M وجود داشته باشد به‌طوری که $E_k = 0$ برای هر $k > n$. آن‌وقت می‌نویسیم $\mathrm{i.\,dim}\ M = n$. اکنون

$$\mathrm{r.gl.p.\,dim}\ R = \sup\{\mathrm{p.\,dim}\ M \mid \text{یک } R\text{–مدول راست است } M\}$$

[۱] Reinhold Baer [۲] injective [۳] projective

بُعد فراگیر تصویری راست[۱] R نامیده می‌شود. به روش مشابه $\text{l.gl.p.}\dim\ R$، $\text{r.gl.i.}\dim\ R$ و $\text{l.gl.i.}\dim\ R$ تعریف و نامگذاری می‌شوند. کاپلانسکی در سال ۱۹۵۸ اولین مثال از حلقه‌ای را ارائه کرد که بُعد فراگیر تصویری راست آن متفاوت از بُعد فراگیر تصویری چپ آن بود. جاتگااُنکار[۲] توانست به‌ازای هر دو عدد $m < n$، حلقه‌ای بسازد که بُعد فراگیر تصویری راست آن n و بُعد فراگیر تصویری چپ آن m باشد [۱۶]. اما بنابر قضیه‌ای از اوسلندر[۳] در سال ۱۹۵۵، برای حلقه‌های نوتری دوطرفه، بُعدهای فراگیر تصویری برابرند [۲۶]. در حالت کلی برای هر حلقهٔ R داریم

$$\text{r.gl.p.}\dim\ R = \text{r.gl.i.}\dim\ R.$$

هیلبرت در سال ۱۸۹۸ قضیهٔ معروف خود موسوم به سی‌زیگی[۴] را ثابت کرد که با مفاهیم فوق به این معنی است که برای هر میدان F

$$\text{gl.p.}\dim\ F[x_1, \ldots, x_n] = n.$$

گرچه بُعدهای فراگیر حلقه، پایاهایی از حلقه هستند اما برای رده‌بندیِ حلقه‌ها کافی نیستند. حلقه‌های نایکریختی وجود دارند که بُعد فراگیر تصویری آنها مساوی است. با وجود این، محاسبهٔ بُعد فراگیر تصویری و بُعد تزریقی برای حلقه‌های خاص و یافتن ارتباط آنها با سایر پایاهای حلقه، بخشی ضروری از کارهای پژوهشی در شناخت حلقه محسوب شده است. به‌عنوان نمونه، موارد زیر ذکر می‌شود.

قضیه ۱.۵ ([۲۲]). *برای هر حلقه مانند R داریم* $\text{r.gl.p.}\dim\ R[x] = \text{r.gl.p.}\dim\ R + 1$.

$A_n(K)$ یا nاُمین جبر وایل بر یک حلقهٔ K عبارت است از $K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ همراه با ضربی که برایش روابط زیر برقرار باشند:

$$x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

قضیهٔ زیر را روس[۵] در سال ۱۹۷۲ ثابت کرد.

قضیه ۲.۵ ([۲۶]). *اگر K میدانی با مشخصهٔ صفر باشد، آن‌گاه* $\text{gl.p.}\dim\ A_n(K) = n$.

البته بُعد تصویری R_R همواره صفر است اما بُعد تزریقی آن در شناخت حلقه نقش مهمی ایفا می‌کند. حلقهٔ نوتری دوطرفهٔ R که R_R تزریقی باشد، حلقهٔ QF[۶] نام دارد و برای چنین حلقه‌ای، ${}_RR$ نیز تزریقی است. قضیهٔ جالب زیر دربارهٔ حلقه‌های QF که مطالعهٔ آنها توسط ناکایاما[۷] از سال ۱۹۳۹ آغاز شده بود، قابل ذکر است ولی ما برای پرهیز از به درازا کشیدنِ متن، برخی شرایط معادل آن را ذکر نمی‌کنیم.

---

[۱] right global projective dimension [۲] Arun Vinayak Jategaonkar [۳] Maurice Auslander [۴] syzygy
[۵] Jan-Erik Ingvar Roos [۶] quasi-Frobenius [۷] Tadashi Nakayama

قضیه ۳.۵ ([۲۰]). *برای حلقهٔ نوتری R حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(آ) R *یک حلقهٔ* QF *است؛*

(ب) ${}_RR$ *تزریقی است؛*

(پ) *هر* ${}_RM$ *تصویری، تزریقی هم هست؛*

(ت) R *آرتینی دوطرفه است و هر دوی* R_R *و* ${}_RR$ *تزریقی‌اند.*

جبر A بر میدان K *جبر فروبنیوس* نامیده می‌شود اگر به‌عنوان A-مدول

$$A \cong A^* := \mathrm{Hom}_K(A, K).$$

مثال آن، KG است برای هر گروه متناهی G بر میدان K. در واقع هر جبر فروبنیوس یک حلقه QF است. اینک به بیان مفهوم *مدول تخت*[1] می‌پردازیم که در دههٔ ۱۹۵۰ توسط ژان-پی‌یر سِر[2] و دیگران مطالعه شد. مدول ${}_RA$ تخت نامیده می‌شود اگر استلزام زیر برقرار باشد:

$$(\text{دنبالهٔ دقیق } 0 \longrightarrow B_R \xrightarrow{f} C_R) \Rightarrow (\text{دنبالهٔ دقیق } 0 \longrightarrow B\otimes_R A \xrightarrow{f\otimes id} C\otimes_R A)$$

و *بُعد تخت* ${}_RM$ متناهی و کوچکترین عدد n است به‌طوری که دنباله‌ای دقیق مانند

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

وجود داشته باشد که در آن، همهٔ F_iها تخت باشند. این بُعد با نماد $\mathrm{f.\,dim}\ M$ نشان داده می‌شود. البته هر مدول تصویری، لزوماً تخت است ولی عکس آن صادق نیست. *بُعد فراگیر تخت چپ* حلقهٔ R (که با نامِ *بُعد ضعیف* نیز از آن یاد می‌شود) عبارت است از

$$\mathrm{l.gl.f.\,dim}\ R = \sup\{\mathrm{f.\,dim}\ M \mid \text{یک } R\text{-مدول چپ است } M\}$$

و به روش مشابه $\mathrm{r.gl.f.\,dim}\ R$ تعریف می‌شود. نکتهٔ جالب این است که این دو بُعد همواره مساوی‌اند ولی از بُعدهای چپ و راست فراگیر تصویری نابیشترند. در حالتی که حلقهٔ R مثلاً نوتری راست باشد، $\mathrm{gl.f.\,dim}\ R = \mathrm{r.gl.p.\,dim}\ R$ [۲۶].

قضیه ۴.۵. *برای حلقهٔ R حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(آ) *برای هر* $a \in R$ *وجود دارد* $x \in R$ *به‌طوری که* $a = axa$*؛*

(ب) *برای هر ایدآل چپ* I *و هر ایدآل راست* J *رابطه* $JI = J \cap I$ *برقرار است؛*

(پ) *هر* R*-مدول تخت است؛*

[1] flat [2] Jean-Pierre Serre

(ت) هر ایدآل راست متناهیاً تولید شده جمعوند مستقیم R است؛

(ث) هر ایدآل چپ متناهیاً تولید شده جمعوند مستقیم R است.

حلقه‌ای که واجد حکم‌های معادل در قضیهٔ بالا باشد، *حلقهٔ منظم فون‌نویمان*[۱] نام دارد. مطالعهٔ این گونه حلقه‌ها از دههٔ ۱۹۳۰ توسط فون‌نویمان آغاز شد. البته هر حلقهٔ نیم‌ساده، منظم است ولی عکس این استلزام برقرار نیست. حلقهٔ تبدیلات خطی یک فضای برداری نامتناهی–بُعد، حلقه‌ای منظم است که نیم‌ساده نیست. البته با افزودن هر یک از شرایط زنجیری به فرضِ منظم بودن، یک حلقهٔ نیم‌ساده به‌دست می‌آید [۱۹].

یک حلقه نیم‌ساده است اگر و تنها اگر بُعد فراگیر تصویری راست (یا چپ) آن صفر باشد. اما دربارهٔ حلقه‌هایی که این بُعد یک است، چه می‌توان گفت؟ دامنهٔ تعویض‌پذیر نوتری، یک حلقهٔ ددکیند است هرگاه بُعد فراگیر تصویری آن حداکثر یک باشد. این مطلب انگیزه‌ای شد برای بررسی حلقه‌های تعویض‌ناپذیر اول یا ساده ولی نوتری که بُعد فراگیر تصویری آنها یک است. گوئیم یک حلقه *موروثی*[۲] *راست* است اگر هر ایدآل راست آن، تصویری باشد. کاپلانسکی در سال ۱۹۵۲ ثابت کرد اگر حلقهٔ R موروثی راست باشد، آن‌گاه هر زیرمدول یک مدول آزاد، مساوی حاصل‌جمع مستقیم مدول‌هایی است که هر یک از آنها با یک ایدآل راست در R یکریخت است. به‌علاوه حلقهٔ R موروثی راست است اگر و تنها اگر هر زیرمدول یک R–مدول تصویری نیز تصویری باشد؛ اگر و تنها اگر هر عامل R–مدول تزریقی هم تزریقی باشد. یادآوری می‌کنیم که حلقهٔ R موروثی راست است اگر و تنها اگر بُعد فراگیر تصویری راست آن حداکثر یک باشد [۶].

نظیر قضیه‌های بالا، در مورد حلقه‌هایی که بُعد فراگیر تصویری آنها دست‌کم دو باشد، بسیار نادر است. واشکونسلوش[۳] در سال ۱۹۷۶ کتابی منتشر کرد [۳۰] که در آن فقط به حلقه‌های تعویض‌پذیر با بُعد فراگیر تصویری ۲ می‌پردازد. در واقع روش‌های جبر همولوژیک بیشتر در نظریهٔ جبر تعویض‌پذیر کاربرد یافته است و تنها در حالت‌های بسیار خاص در حلقه‌های تعویض‌ناپذیر می‌توانند به‌کار آیند.

۲.۵. بُعد یکنواخت. در سال ۱۹۵۸ آلفرد گُلدی[۴] [۹] مدول‌های دارای رتبهٔ یکنواخت متناهی را تعریف کرد و با موفقیت این مفهوم را در مسئلهٔ یافتن حلقهٔ کسرهای یک حلقهٔ نیم‌اول واجد شرایطی که بعداً به نام وی مشهور شد، به‌کار برد. کار گُلدی بر زیرمدول‌های یکنواخت و اساسی استوار بود. *مدول یکنواخت* مدول ناصفری است که در آن، هر دو زیرمدول ناصفر دارای اشتراک ناصفر باشند. در واقع این شرط معادل است با اینکه *پوش تزریقی*[۵] مدول، تجزیه‌ناپذیر باشد. زیرمدول N را در مدول M *اساسی* نامند هرگاه اشتراک N با هر زیرمدول ناصفر در M، ناصفر باشد. بنابر تعریفِ گُلدی، مدول M رتبهٔ

[۱] John von Neumann [۲] hereditary [۳] Wolmer Vasconcelos [۴] Alfred Goldie [۵] injective envelope

یکنواخت متناهی دارد اگر حاوی یک حاصل‌جمع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های ناصفر خود نباشد و این معادل است با اینکه M دارای زیرمدول اساسی نظیر E باشد به‌طوری که E حاصل‌جمع مستقیم تعدادی متناهی از زیرمدول‌های یکنواخت در M است. برای M از رتبهٔ یکنواخت متناهی، عدد یگانهٔ n وجود دارد به‌طوری که M حاوی یک حاصل‌جمع مستقیم از n زیرمدول یکنواخت است و این حاصل‌جمع در M اساسی است. این عدد یگانه را رتبهٔ یکنواخت، بُعد گُلدی و یا بُعد یکنواخت نامیده‌اند و از هر یک از نمادهای $\operatorname{rank} M$ یا $\operatorname{G.dim} M$ یا $\operatorname{u.dim} M$ برای نشان دادن آن استفاده کرده‌اند. اگر M دارای رتبهٔ یکنواخت متناهی نباشد، قرار می‌دهیم $\operatorname{G.dim} M = \infty$ [۲۰، ۲۲].

هر مدول نوتری دارای بُعد گُلدی متناهی است و لذا دارای زیرمدول یکنواخت است. چنانچه M یک فضای برداری بر میدان F باشد، رابطهٔ $\operatorname{G.dim} M = \dim M_F$ برقرار است اما در حالت کلی، بُعد گُلدی فاقد ویژگی‌هایی است که بُعد فضاهای برداری یا بُعد فراگیر تصویری حلقه‌ها دارند. شاک[۱] در سال ۱۹۷۲ قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیه ۵.۵. *برای هر حلقه مانند R داریم $\operatorname{G.dim} S_S = \operatorname{G.dim} R_R$ که در آن، $S = R[x]$.*

دانستنِ اینکه یک مدول دارای بُعد گُلدی متناهی است، بیشتر از دانستنِ مقدار دقیق این بُعد، کاربرد دارد. با وجود این، گُلدی نتیجهٔ جالب زیر را به‌دست آورد.

قضیه ۶.۵ ([۱۱]). *اگر R یک دامنه و بُعد گُلدی R_R متناهی باشد، آن‌گاه $\operatorname{G.dim} R_R = ۱$.*

کاربرد اصلی بُعد گُلدی در موضوع حلقهٔ کسرها است و ما در این نوشته بدان خواهیم پرداخت. اما در همین زمینه قضیه‌ای از گابریل[۲] را که در سال ۱۹۶۲ به‌دست آمده است، ذکر می‌کنیم. پوش تزریقی مدول R_R را با $E(R_R)$ نشان می‌دهیم. همچنین حلقهٔ R را *ناتکین راست* گوییم اگر $Z(R_R) = ۰$.

تعریف ۷.۵. $Z(M_R)$ برابر است با مجموعهٔ همهٔ mهای متعلق به M به‌طوری که پوچساز راست عضو m ($\operatorname{r.ann}_R(m)$)، در R_R اساسی باشد.

اگر $Z(R_R) = ۰$، می‌توان بر مدول $E(R_R)$ ضربی یگانه تعریف کرد که آن را به یک حلقه تبدیل کند، با ساختار R-مدولی $E(R_R)$ سازگار باشد و R زیرحلقهٔ $E(R_R)$ شود.

قضیه ۸.۵ ([۱۱]). *فرض کنیم حلقهٔ R ناتکین باشد. در این صورت $\operatorname{G.dim} R_R$ متناهی است اگر و تنها اگر $E(R_R)$ یک حلقهٔ نیم‌ساده باشد.*

[۱] Robert C. Shock [۲] Peter Gabriel

یک کاربرد دیگر از متناهی بودنِ بُعد گُلدی برای حلقه، در قضیهٔ زیر از ساندومیرسکی[۱] در مورد حلقه‌های موروثی ظاهر می‌شود.

قضیه ۹.۵. *فرض کنیم R حلقهٔ موروثی راست باشد. در این صورت R نوتری راست است اگر و تنها اگر بُعد گُلدی R_R متناهی باشد.*

با استفاده از قضیهٔ فوق، اسمال نتیجهٔ زیر را برای حلقه‌های نیم‌موروثی به‌دست آورد. گوئیم حلقه *نیم‌موروثی راست (چپ)* است اگر هر ایدآل راست (چپ) متناهیاً تولید شدهٔ آن، تصویری باشد. در چنین حلقه‌ای، هر زیرمدول متناهیاً تولید شده از یک مدول آزادِ (چپ) متناهیاً تولید شده، تصویری است.

قضیه ۱۰.۵. *فرض کنیم $\mathrm{G.dim}\ R_R$ یا $\mathrm{G.dim}\ {}_RR$ متناهی باشد. در این صورت R نیم‌موروثی راست است اگر و تنها اگر نیم‌موروثی چپ باشد.*

برای بیان نتیجه‌ای دربارهٔ بُعد گُلدی نامتناهی، ابتدا باید مفهوم *زیرمدول مکمل* ارائه شود. اگر D زیرمدولی از M باشد، یک زیرمدول C از M را مکملی برای D در M نامیم هرگاه نسبت به ویژگی $C \cap D = 0$ ماکسیمال باشد. با استفاده از لم زُرن، ثابت می‌شود هر زیرمدول دارای مکمل است. قضیهٔ زیر را گُلدی ثابت کرده است.

قضیه ۱۱.۵. *برای مدول M حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(آ) $\mathrm{G.dim}\ M = \infty$؛

(ب) یک زنجیر بی‌پایان اکیداً صعودی از زیرمدول‌های مکمل در M وجود دارد؛

(پ) یک زنجیر بی‌پایان اکیداً نزولی از زیرمدول‌های مکمل در M وجود دارد؛

نتیجهٔ جالبی از قضیهٔ فوق، یک تعریف معادل برای بُعد گُلدی است [۲۰]:

$$\mathrm{G.dim}\ M = \sup\{k \mid \text{حاوی زنجیری از مکمل‌ها به طول } k \text{ است } M\}.$$

در پایان این بخش، به مفهوم رتبهٔ تقلیل‌یافته که برای مدول‌های M بر حلقهٔ نیم‌اول گُلدی تعریف می‌شود، اشاره می‌کنیم. نمی‌خواهیم این مفهوم را به‌طور دقیق تعریف کنیم. فقط گوئیم اگر رتبهٔ تقلیل‌یافته را با ρ نشان دهیم، آن‌گاه برای دنبالهٔ دقیق کوتاه مانند

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

از مدول‌ها بر یک حلقهٔ نوتری، خواهیم داشت $\rho(B) = \rho(A) + \rho(C)$. لذا وقتی حلقه نوتری باشد، رتبهٔ تقلیل‌یافته برتری آشکار بر رتبهٔ یکنواخت دارد.

[۱] Francis Louis Sandomierski

۳.۵. بُعد کرول. در سال ۱۹۲۳ امی نوتر مقاله‌ای در چارچوب هندسهٔ جبری کلاسیک منتشر کرد که الهام‌بخش کرول شد در آنچه وی در مورد زنجیرهای ایدآل‌های اول در یک حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری انجام داد. نوتر برای یک واریته بر میدان F، مثلاً $V \subseteq F^n = F \times \cdots \times F$ و ایدآل آن در $R = F[x_۱, \ldots, x_n]$ به‌نام

$$P = \{f \in R \mid f(v) = ۰ \text{ برای هر } v \in V\}$$

و حلقهٔ R/P ارتباط‌های جالبی به‌دست آورد. نخست آنکه بُعد V به‌عنوان یک فضای توپولوژیک برابر با درجهٔ *تعالی*[۱] میدان کسرهای R/P بر F است. سپس ثابت کرد به فرض آنکه F نامتناهی باشد، بُعد مزبور برابر است با ماکسیمم طول زنجیرهای ایده‌آل‌های اول که از P آغاز می‌شوند و صعود می‌کنند:

$$P = P_۰ \subseteq P_۱ \subseteq \cdots \subseteq P_t.$$

در سال ۱۹۲۸ کرول سوپریمم طول‌های زنجیرهای متشکل از همهٔ ایدآل‌های اول در یک حلقهٔ نوتری تعویض‌پذیر را مطالعه کرد که بعدها به افتخار او، *بُعد کلاسیک کرول* $(\mathrm{cl.K.\,dim})$ حلقه نامیده شد. این بُعد ابزار نیرومندی در مطالعهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر است ولی در حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، مثلاً حلقه‌های ساده که فاقد ایدآل اول ناصفرند، موضوعیت چندانی ندارد. گابریل و رنتشلر[۲] در سال ۱۹۶۷ بُعد کرول مدول‌های یک حلقهٔ دلخواه را همچون تابعی از مدول که مقادیر صحیح یا بی‌نهایت دارد، معرفی کردند. به‌طور کلی فرض کنیم $(E; \preceq)$ یک مجموعهٔ جزئی–مرتب باشد. گابریل و رنتشلر [۲۴] نخست انحراف E یا $dev\ E$ را چنین ارائه کردند: برای هر $a, b \in E$ که $a \preceq b$، قرار می‌دهیم

$$(a, b) = \{e \in E \mid a \preceq e \preceq b\}.$$

اگر $a \preceq b$ نتیجه دهد $a = b$، آنگاه $dev\ E = -\infty$. اگر $dev\ E \neq -\infty$ و در E هر زنجیر نزولی از اعضا متناهی باشد، آنگاه $dev\ E = ۰$. اگر $dev\ E \neq -\infty, ۰, ۱, \ldots, n-۱$ و هر زنجیر مانند $e_۱ \succ e_۲ \succ e_۳ \succ \cdots$ با $dev(e_{i+۱}, e_i) \npreceq n-۱$، برای $i = ۱, ۲, \ldots$ متناهی باشد، قرار می‌دهیم $dev\ E = n$. اگر عدد صحیح نامنفی n یافت نشود به‌طوری که $dev\ E \leq n$، آنگاه می‌نویسیم $dev\ E = \infty$. سپس برای مدول M_R، مجموعهٔ زیرمدول‌های آن را با $L(M)$ نشان می‌دهیم و برای این مجموعه که با رابطهٔ ترتیب شمول، جزئی–مرتب شده است، $dev\ L(M)$ را به‌عنوان بُعد کرول M تعریف می‌کنیم و با $\mathrm{K.\,dim}\ M$ نشان می‌دهیم. برای خودِ حلقه، دو بُعد کرول $K.\dim\ R_R$ و $\mathrm{K.\,dim}\ {}_RR$ به‌ترتیب با $\mathrm{r.K.\,dim}\ R$ و $\mathrm{l.K.\,dim}\ R$ نشان داده می‌شوند.

[۱] transcendence degree [۲] Rudolf Rentschler

ثابت می‌شود که $\mathrm{K.dim}\ M_R = ۰$ اگر و تنها اگر $M \neq ۰$ و M آرتینی باشد. از طرفی، اگر مدول M حاوی یک حاصل‌جمع مستقیم نامتناهی از نسخه‌های یک مدول مانند N باشد، M نمی‌تواند بُعد کرول (متناهی) داشته باشد و لذا می‌نویسیم $\mathrm{K.dim}\ M = \infty$. رنتشلر و گابریل نشان دادند که اگر R حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری باشد، آن‌گاه $\mathrm{K.dim}\ R = \mathrm{cl.K.dim}\ R$ و لذا اگر F یک میدان باشد، داریم $\mathrm{K.dim}\ F[x_۱, \ldots, x_n] = n$. کراوزه[۱] در سال ۱۹۷۲ و سپس مستقل از او، گوردن[۲] و رابسُن[۳] در سال ۱۹۷۳ تساوی بُعد کرول یک حلقهٔ FBN با بُعد کلاسیک آن را به‌دست آوردند [۲۲]. ردهٔ چنین حلقه‌هایی شامل حلقه‌های تعویض‌پذیر نوتری است ولی در اینجا ضرورتی برای به‌دست دادن تعریف آنها وجود ندارد. به هر حال، برای یک حلقهٔ نوتری راست R داریم $\mathrm{cl.K.dim}\ R \leq \mathrm{r.K.dim}\ R$.

یک مسئلهٔ باز این است که آیا برای یک حلقهٔ نوتری دوطرفه مانند R لزوماً $\mathrm{l.K.dim}\ R$ با $\mathrm{r.K.dim}\ R$ مساوی است؟ برای حلقه‌هایی که تنها از یک طرف نوتری باشند، جواب منفی است. مثلاً برای حلقهٔ

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ ۰ & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

که آرتینی راست است، $\mathrm{r.K.dim}\ R = ۰$ در حالی که ${}_R R$ حاوی یک حاصل‌جمع مستقیم نامتناهی از نسخه‌های یک مدول ساده است و لذا $\mathrm{l.K.dim}\ R = \infty$.

رفتار بُعد کرول چگونه است؟ در این زمینه رنتشلر و گابریل نشان دادند که اگر R حلقهٔ نوتری راست باشد، آن‌گاه $\mathrm{r.K.dim}\ S = \mathrm{r.K.dim}\ R + ۱$ که در آن، $S = R[x]$. اما هدف اصلیِ پدیدآورندگان بُعد کرول برای حلقه‌های عام، قضیهٔ زیر بوده است که در مقالهٔ ۱۹۶۷ رنتشلر و گابریل آمده است.

قضیه ۱۲.۵. *اگر F میدانی با مشخصهٔ صفر و $A_n(F)$، nاُمین جبر وایل بر F باشد، آن‌گاه*

$$n = \mathrm{r.K.dim}\ A_n(F) = \mathrm{l.K.dim}\ A_n(F).$$

از سال ۱۹۷۰ به این سو، بُعد کلاسیک کرول برای حلقه‌ها و بُعد کرول برای مدول‌ها که مقادیرشان اردینال است، مطرح شد و این تعمیم‌ها سال‌ها مورد پژوهش قرار گرفت. این بخش را با قضیهٔ زیر از هارت[۴] که در سال ۱۹۷۱ انتشار یافته است، به پایان می‌بریم.

قضیه ۱۳.۵ ([۱۳]). *فرض کنیم A دامنهٔ نوتری تعویض‌پذیر باشد که $\mathrm{gl.p.dim}\ A < \infty$ و d یک تابع مشتق بر A است. اگر حلقهٔ $R = A[x; d]$ ساده باشد، آن‌گاه*

$$\mathrm{gl.dim}\ .\ A = \mathrm{gl.dim}\ R, \qquad \mathrm{K.dim}\ A = \mathrm{K.dim}\ R.$$

[۱] Güntar Krause [۲] Robert Gordon [۳] James Christopher Robson [۴] Robert Hart

شرایط این قضیه برای حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها بر یک میدان F با مشخصهٔ صفر همراه با تابع مشتق معمولی، محقق است. لذا $\text{gl.p.}\dim\ A_1(F) = \text{K.}\dim\ A_1(F) = 1$.

۶. حلقهٔ خارج‌قسمتی

به قیاس روشی که میدان $\mathbb{Q}$ از دامنهٔ $\mathbb{Z}$ ساخته می‌شود، یکی از راه‌های ساختن حلقه‌های تقسیم، تشکیل حلقهٔ کسرهای یک دامنه (مناسب) است. اما این روش گرچه برای دامنه‌های تعویض‌پذیر همواره میسر است، در مورد دامنه‌های تعویض‌ناپذیر گاهی عملی نیست، زیرا اصولاً نشاندن برخی از دامنه‌های تعویض‌ناپذیر در یک حلقهٔ تقسیم هم امکان‌پذیر نیست. اولین مثال از چنین وضعی را مالتسف[۱] در سال ۱۹۳۸ ارائه کرد.

می‌دانیم در یک دامنهٔ تعویض‌پذیر مانند R، برای هر مجموعهٔ ناتهیِ به‌طور ضربی بسته شامل ۱ مانند S که $0 \notin S$، حلقهٔ RS^{-1} وجود دارد که هر عضوش به‌صورت نمادین rs^{-1} است که در آن، $r \in R$ و $s \in S$. این مطلب انگیزه‌بخش تعریف حلقهٔ خارج‌قسمتی است. توسیع حلقه‌ها $R \subseteq Q$ مفروض است. گوئیم Q یک *حلقهٔ خارج‌قسمتی راست* R است و یا R یک *ترتیب راست* در Q است اگر هر عضو منظم R در Q یکه باشد و هر عضو Q به‌شکل rs^{-1} باشد که در آن، $r \in R$ و s عضوی منظم در R است. به همین نحو *حلقهٔ خارج‌قسمتی چپ* برای R و *ترتیب چپ* در یک حلقه تعریف می‌شود. اویستن اُر[۲] در سال ۱۹۳۱ شرط لازم و کافی برای وجود حلقهٔ خارج‌قسمتی راست را به‌دست آورد که به شرط اُر راست مشهور است.

قضیه ۱.۶ ([۱۴]). *توسیع حلقه‌ها $R \subseteq Q$ مفروض است. شرط لازم و کافی برای اینکه Q یک حلقهٔ خارج‌قسمتی راست R باشد این است که به‌ازای هر $a \in R$ و هر عضو منظم مانند b در R، عضو c و عضو منظم d در R یافت شوند به‌طوری که $ad = bc$.*

شرط اُر راست در واقع تکلیف عضو $b^{-1}a$ را در Q معین می‌کند و آن را به‌شکل cd^{-1} ارائه می‌دهد. اما باید دانست که شرط اُر راست و شرط اُر چپ لزوماً یکدیگر را نتیجه نمی‌دهند. برای مثال، در حلقهٔ $R = F[x][y;\alpha]$ که در آن، F میدان و α درونریختی بر $F[x]$ با ضابطهٔ $\alpha(f(x)) = f(x^2)$ است، برای R شرط اُر چپ برقرار است ولی R در شرط اُر راست صدق نمی‌کند. دلیل این است که R نوتری چپ است ولی نوتری راست نیست.

بنابر قضیهٔ اُر، هر دامنه که در شرط اُر راست صدق کند، یک حلقهٔ خارج‌قسمتی راست دارد که یک حلقهٔ تقسیم است. برای آلفرد گُلدی این سؤال مطرح بود که چه حلقه‌هایی ترتیب راست در یک حلقهٔ

[۱] Anatoly Ivanovich Maltsev [۲] Oystein Ore

نیم‌ساده هستند. پاسخی که یافت در مقاله‌های او در سال‌های ۱۹۵۸ و ۱۹۶۰ انتشار یافت و به قضیه‌های اول و دوم گُلدی مشهور شد [۹]. این قضیه‌ها در زمان خود، بسیار مهم تلقی شدند آنچنان که جیکوبسن در مقدمهٔ چاپ دوم از کتاب مشهورش [۱۵] به سال ۱۹۶۴ نوشت:

«قضایای گُلدی مهم‌ترین سهم را در نظریهٔ ساختار حلقه‌ها از زمان چاپ اول کتاب (یعنی ۱۹۵۶) تاکنون داشته است.»

او پیوستی از کتاب خود را به شرح قضایای گُلدی اختصاص داد. اما تحولات و پژوهش‌های بعدی اهمیت قضایای گُلدی را بیش از پیش نشان داد به‌طوری که این قضایا به روش‌های متعدد دیگر اثبات شدند. در اینجا شایسته است بگوییم نتیجه‌ای که بعدها به قضیهٔ اول گُلدی موسوم شد، مستقل از گُلدی توسط دو نفر دیگر در یک مقالهٔ مشترک، در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ چاپ شده است [۲۱].

اکنون می‌خواهیم قضیه‌های اول و دوم گُلدی و نتایج آنها را بیان کنیم. یادآوری می‌کنیم که حلقهٔ R را *حلقهٔ گُلدی راست* می‌خوانیم اگر هر زنجیر اکیداً صعودی از ایدآل‌های راستِ پوچساز در R، متناهی باشد و $\mathrm{G.\,dim}\ R_R < \infty$.

قضیه ۲.۶ (قضیهٔ اول گُلدی). *حلقهٔ R یک ترتیب راست در یک حلقهٔ سادهٔ آرتینی Q است اگر و تنها اگر R اول و گُلدی راست باشد.*

قضیه ۳.۶ (قضیهٔ دوم گُلدی). *حلقهٔ R یک ترتیب راست در یک حلقهٔ نیم‌ساده Q است اگر و تنها اگر R نیم‌اول و گُلدی راست باشد.*

اثبات‌های این قضیه‌ها را می‌توان در [۱۱، ۱۴، ۲۰، ۲۲، ۲۷] یافت. نتایج زیر فوراً از قضیهٔ دوم گُلدی به‌دست می‌آیند.

نتیجه ۴.۶ ([۱۱]). *اگر R نیم‌اول و گُلدی راست باشد، آن‌گاه R دارای یک تجزیهٔ حلقه‌ای به‌صورت $R = S \oplus T$ است طوری که برای عضو خودتوان مناسب e در R داریم $S = eR$ و $T = (1-e)R$ و S برابر است با حاصل‌جمع (مستقیم) ایدآل‌های راست مینیمال R. در نتیجه R به‌عنوان یک حلقه، نیم‌ساده است و T حلقه‌ای فاقد هرگونه ایدآل راست مینیمال است.*

نتیجه ۵.۶ ([۱۱]). *گیریم R نیم‌اول و گُلدی راست باشد که در این صورت یک ترتیب راست در حلقهٔ نیم‌سادهٔ Q است. بنابر قضیهٔ ودربورن–آرتین،*

$$Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$$

و هر Q_i سادهٔ آرتینی است. ایدآل‌های $P_i = \sum_{j \neq i} Q_j$ برای $i = 1, \ldots, n$ در Q اول هستند. در نتیجه $p_i = R \cap P_i$ در R اول است و این‌ها همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال در R را تشکیل می‌دهند.

از قضیهٔ اول گُلدی نیز نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید که قضیه‌ای از بخش پیش (قضیهٔ ۶.۵) را تکمیل می‌کند.

قضیه ۶.۶. *برای دامنهٔ R حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(آ) $\mathrm{G.dim}\ R_R = 1$؛

(ب) $\mathrm{G.dim}\ R_R < \infty$؛

(پ) R *در شرط اُر راست صدق می‌کند.*

اکنون می‌پرسیم آیا انتقال ویژگی‌های یک حلقهٔ نیم‌اول گُلدی فرضاً چپ به حلقه‌های توسیعی از R امکان‌پذیر است؟ در پاسخ به این پرسش، نخست دو نتیجهٔ مثبت را بیان می‌کنیم. اول اینکه فرض کنیم دامنهٔ R دارای درونریختی یک‌به‌یک σ است و $S = R[x;\sigma]$. اگر R اُر چپ باشد، آن‌گاه S نیز چنین است و اگر σ یکریختی باشد، عکس این مطلب نیز برقرار است. دوم اینکه فرض کنیم دامنهٔ R دارای تابع مشتق d است و $S = R[x;d]$. در این صورت R اُر چپ است اگر و تنها اگر S چنین باشد. در نتیجه حلقهٔ خارج‌قسمتی nاُمین جبر وایل بر میدان F یک حلقهٔ تقسیم است. اما یک پاسخ منفی به پرسش بالا در سال ۱۹۸۲ توسط کر[1] داده شد [۱۸]. او بعدها نیز دامنهٔ اُر راستی ساخت که حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها بر آن در شرط اُر راست صدق نمی‌کرد.

در جبر تعویض‌پذیر، موضعی‌سازی، به‌ویژه در مورد ایدآل‌های اول، فرآیند بسیار سودمندی است. در حلقه‌های تعویض‌ناپذیر چنان‌که پژوهش‌های انجام شده به‌ویژه در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ نشان می‌دهد، برای فرآیند موضعی‌سازی محدودیت‌های زیادی وجود دارد. برای هر ایدآل در یک حلقهٔ R، مجموعهٔ *عضوهای منظم* به پیمانهٔ I را عبارت است از

$$\tau(I) = \{x \in R \mid \text{منظم است } R/I \text{ در حلقهٔ } x+I\}.$$

قضیه ۷.۶ ([۲۲]). *فرض کنیم R یک حلقهٔ نوتری راست باشد. در این صورت R دارای یک حلقهٔ آرتینی راست به‌عنوان حلقهٔ خارج‌قسمتی راست است اگر و تنها اگر $\tau(N) = \tau(0)$ که در آن، N رادیکال اول R است.*

اینک از دیدگاهی دیگر به مسئلهٔ حلقه‌های خارج‌قسمتی می‌پردازیم. در بخش ۵ دیدیم که برای یک حلقهٔ ناتکین راست R با $\mathrm{G.dim}\ R_R$ متناهی، R در حلقهٔ نیم‌سادهٔ $E = E(R_R)$ یک زیرحلقه است. آیا می‌توان گفت که E در واقع حلقهٔ خارج‌قسمتی راست R است؟ جواب مثبت است، زیرا $R \leq_e E$، یعنی R زیرمدول اساسی در $E(R_R)$ است و ما قضیهٔ کلی زیر را در این زمینه داریم که متعلق به جانسُن[2] در سال ۱۹۵۱ است.

[1] Jeanne Wald Kerr [2] R. E. Johnson

قضیه ۸.۶ ([۱۰]). *فرض کنیم R زیرحلقه‌ای از Q است به‌طوری‌که $R \leq_e Q$ یعنی R_R زیرمدول اساسی در Q_R است. در این صورت حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(آ) Q یک حلقهٔ منظم است و Q به‌عنوان یک Q–مدول راست، تزریقی است؛

(ب) R ناتکین راست است و Q_Q تزریقی است؛

(پ) R ناتکین راست است و $Q = E(R_R)$.

از تلفیق مطالب پیشین معلوم می‌شود که شرط

$$R \text{ نیم‌اول، ناتکین راست است و } \mathrm{G.dim}\ R_R < \infty$$

معادل با شرایط مندرج در قضیهٔ دوم گُلدی است. بنابراین مسئلهٔ کلی شناخت توسیع‌های $R \subseteq Q$ (دو حلقهٔ دلخواه) به‌طوری که $R \leq_e Q$ مطرح گردید. تحقیق در این مسئله با مفهوم چگال بودن که شرطی قوی‌تر از اساسی بودن است، میسر شد: گیریم A در B_R یک زیرمدول باشد به‌طوری‌که برای هر زیرمدول M از B حاوی A داشته باشیم $\mathrm{Hom}(M/A, B) = \circ$. آن‌وقت می‌نویسیم $A \leq_r B$ و می‌گوییم A در B چگال است. البته همواره

$$A \leq_e B \Rightarrow A \leq_r B$$

و اگر B ناتکین باشد، عکس این استلزام نیز برقرار است. در حالت کلی B یک *توسیع گویای* مدول A نامیده می‌شود اگر تکریختی مدولی $f : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(A) \leq_r B$. وقتی که $f(A)$ در B سره است، توسیع گویا را سره گوییم. می‌توان ثابت کرد که هر مدول A دارای یک توسیع گویای ماکسیمال $E_r(A)$ است [۱۰] به این معنی که $E_r(A)$ دارای یک توسیع گویای سره A نیست. در واقع

$$E_r(A) = \bigcap\{\ker f \mid f \in \mathrm{End}_R(E(A)),\ f(A) = \circ\}.$$

مدول $Q := E_r(A)$ دارای یک ساختار حلقه‌ایِ یگانه است که با ساختار R–مدولی آن سازگار و برای آن، تابع شمول $R \longrightarrow Q$ تکریختی حلقه‌ای است. این حلقهٔ Q موسوم به *حلقهٔ خارج‌قسمتی راست ماکسیمال* R و دارای یک ویژگی عام است: فرض کنیم R در یک حلقهٔ Q' به‌عنوان زیرمدول راست چگال باشد: $R \leq_r Q'$. در این صورت تابع شمول $R \longrightarrow Q'$ به یک تکریختی حلقه‌ها $Q \longrightarrow Q'$ توسیع می‌یابد. این ویژگی عام مشخص می‌کند که $Q = E_r(A)$ به‌تقریبِ یکریختی حلقه‌ها، یگانه است. به روش مشابه، *حلقهٔ خارج‌قسمتی چپ ماکسیمال* R ساخته می‌شود اما در حالت کلی متفاوت از حلقهٔ خارج‌قسمتی راست ماکسیمال R است؛ گرچه وقتی R نیم‌اول گُلدی راست باشد، این دو بر هم منطبق‌اند. انواع دیگری از حلقه‌های به‌اصطلاح خارج‌قسمتی برای یک حلقهٔ R تعریف و مطالعه شده است و سؤال‌هایی از این قبیل که چه‌وقت به‌عنوان R–مدول، تزریقی یا تخت هستند، مطرح شده است.

همچنین برای مدول‌ها نیز مدول‌های خارج‌قسمتی تعریف و پژوهش‌های دامنه‌داری دربارهٔ آنها انجام شده است. این مباحث بخش بزرگی از *نظریهٔ تاب*[۱] را تشکیل می‌دهد. در این نظریه آمیخته‌ای از نظریهٔ رسته و توپولوژی در نظریهٔ مدول به‌کار می‌رود و لذا بحث دربارهٔ آن در این مقالهٔ کوتاه نمی‌گنجد. یکی از بهترین کتاب‌ها در این زمینه [۲۸] است.

۷. دوگانی و هم‌ارزیِ موریتا

سال ۱۹۵۸ در تاریخ نظریهٔ حلقه‌ها یک سال استثنایی به‌شمار می‌رود. نه‌تنها گُلدی اولین مقالهٔ خود را در مورد حلقه‌های خارج‌قسمتی در این سال منتشر کرد، بلکه موریتا[۲] نیز در همین سال مقاله‌ای به چاپ رساند که به دنبال خود، آثار بسیار راهگشا و ماندگار در نظریهٔ حلقه‌ها به‌وجود آورد [۲۳]. او توانست از نظریهٔ رسته که در دههٔ ۱۹۴۰ میلادی توسط آیلنبرگ[۳] و مک‌لین[۴] ابداع و به‌تدریج گسترش یافته بود، به بهترین وجه در نظریهٔ مدول‌ها استفاده کند و قضایایی به‌دست آورد که در گسترهٔ وسیعی کاربردهای شگفت دارد. موریتا دو مفهوم دوگانی[۵] و هم‌ارزی[۶] را برای رسته‌های مدولی بر حلقه‌ها تعریف و مطالعه کرد.

۱.۷. دوگانیِ موریتا. موریتا در بخش نخست مقاله‌اش، رسته‌های $\mathrm{Mod}-R$ و $S-\mathrm{Mod}$ را در نظر گرفت و مفهوم دوگانی را برای آنها بررسی کرد. فرض کنیم $\mathcal{A}_۱$ و $\mathcal{A}_۲$ دو رسته از $\mathrm{Mod}-R$ باشد و $d_۱ : \mathcal{A}_۱ \longrightarrow \mathcal{A}_۲$ و $d_۲ : \mathcal{A}_۲ \longrightarrow \mathcal{A}_۱$ دو تابعگون پادورد باشند. چنانچه $d_۲d_۱ \equiv id_{\mathcal{A}_۱}$ و $d_۱d_۲ \equiv id_{\mathcal{A}_۲}$، گوئیم زوج $(d_۱, d_۲)$ یک دوگانی بین $\mathcal{A}_۱$ و $\mathcal{A}_۲$ است. نماد $\equiv$ به معنی هم‌ارزیِ تابعگون‌ها است.

قضیه ۱.۷. *اگر $\mathcal{A}_۱$ زیررستهٔ $\mathrm{Mod}-R$ با $R \in \mathcal{A}_۱$ و $\mathcal{A}_۲$ زیررستهٔ $S-\mathrm{Mod}$ با $S \in \mathcal{A}_۲$ باشد، آن‌گاه برای هر دوگانی $(d_۱, d_۲)$ بین $\mathcal{A}_۱$ و $\mathcal{A}_۲$ یک دومدول ${}_SU_R$ و هم‌ارزی‌های*

$$d_۱ \equiv \mathrm{Hom}_R(-, U), \qquad d_۲ \equiv \mathrm{Hom}_S(-, U)$$

وجود دارد و در واقع می‌توان U را $d_۱(R)$ گرفت.

با استفاده از این قضیه، موریتا برای مشخصه‌سازی حلقه‌های QF گزاره‌های معادل دیگری یافت. اگر $S = R$ و U را خودِ R بگیریم، آن‌گاه برای زیررسته‌های $\mathcal{A}_۱$ متشکل از R–مدول‌های راست متناهیاً تولید شده و $\mathcal{A}_۲$ متشکل از R–مدول‌های چپ متناهیاً تولید شده، تابعگون‌های R–دوگان یعنی $\mathrm{Hom}_R(-, R_R)$ و $\mathrm{Hom}_R(-, {}_RR)$ یک دوگانی بین $\mathcal{A}_۱$ و $\mathcal{A}_۲$ ایجاد می‌کنند. در واقع برای هر

[۱] torsion theory [۲] Kiiti Morita [۳] Samuel Eilenberg [۴] Saunders Maclane [۵] Morita duality [۶] Morita equivalence

R–مدول (اعم از راست یا چپ) متناهیاً تولید شده داریم

$$M \cong M^{**} = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R).$$

لذا می‌توان گزارهٔ «R–دوگان یک تابعگون بر مدول‌های متناهیاً تولید شده، دقیق است» را به فهرست شرایط معادل قضیهٔ مشخصه‌سازی که در بخش ۵ (قضیهٔ ۳.۵) بیان شد، اضافه کرد. شرایط معادل گوناگون دیگری هم وجود دارد از جمله اینکه «هر R–مدول، تصویری است اگر و تنها اگر تزریقی باشد.»

می‌دانیم برای حلقهٔ دلخواه R چنانچه $\mathcal{A}_1$ را متشکل از R–مدول‌های راست بازتابی (همچون M به‌طوری که $M \cong M^{**}$) و $\mathcal{A}_2$ را متشکل از R–مدول‌های چپ بازتابی بگیریم، بار دیگر زوج $\mathrm{Hom}_R(-, {}_R R)$ و $\mathrm{Hom}_R(-, R_R)$ یک دوگانی بین $\mathcal{A}_1$ و $\mathcal{A}_2$ است؛ یعنی نقش دومدول U را خودِ R بازی می‌کند. اینک فرض کنیم دومدول ${}_S U_R$ را داشته باشیم. می‌پرسیم برای چه زیررسته‌هایی از $\mathrm{Mod} - R$ و $S - \mathrm{Mod}$ یک دوگانی وجود دارد؟ برای مدول M_R، مدول $\mathrm{Hom}_R(M, U)$ را U–دوگان M می‌نامیم و با M^* نشان می‌دهیم که یک S–مدول چپ است. همین طور برای هر مدول${}_S N$، مدول $\mathrm{Hom}_R(N, U)$ را U–دوگان N می‌نامیم و باز هم با N^* نشان می‌دهیم که در واقع یک R–مدول راست است. در این حالت‌ها نیز R–همریختی کانونی $\theta_M : M \longrightarrow M^{**}$ و S–همریختی کانونی $\theta_N : N \longrightarrow N^{**}$ مطرح هستند. اگر θ_M یکریختی (به‌ترتیب یک‌به‌یک) باشد، M را U–*بازتابی* (به‌ترتیب U–*بی‌تاب*) نامند و همین طور برای θ_N.

پیش از بیان قضیهٔ دیگری از موریتا چند تعریف را یادآور می‌شویم. مدول M_R را *هم‌مولد* گوییم اگر حاوی یک نسخه از هر مدول ساده باشد. دومدول ${}_S U_R$ را *وفادارانه متوازن* نامیم اگر نگاشت‌های طبیعی زیر یکریختی حلقه‌ای باشند:

$$R \longrightarrow \mathrm{End}({}_S U), \qquad\qquad S \longrightarrow \mathrm{End}(U_R).$$

با استفاده از نام ژان–پی‌یر سِر، گوئیم $\mathcal{A}$ یک *سِر–زیررسته* از $\mathrm{Mod} - R$ است در صورتی که

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

دنباله‌ای دقیق در $\mathrm{Mod} - R$ باشد. آن‌وقت $B \in \mathcal{A}$ اگر وتنها اگر $A, C \in \mathcal{A}$.

قضیه ۲.۷. *حلقه‌های R و S و دومدول ${}_S U_R$ داده شده‌اند. فرض کنیم $\mathcal{A}_1$ متشکل است از R–مدول‌های راست U–بازتابی و $\mathcal{A}_2$ متشکل از S–مدول‌های چپ U–بازتابی است. در این صورت حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(آ) $\mathcal{A}_1$ و $\mathcal{A}_2$ سِر–زیررسته‌های $\mathrm{Mod} - R$ و $S - \mathrm{Mod}$ هستند به‌طوری‌که $R \in \mathcal{A}_1$ و $S \in \mathcal{A}_2$؛

(ب) هر عاملی از R_R، ${}_SS$، U_R و ${}_SU$ مدولی U-بازتابی است؛
(پ) U_R و ${}_SU$ هم‌مولد تزریقی هستند و ${}_SU_R$ وفادارانه متوازن است.

هرگاه U در هر یک از حکم‌های قضیهٔ بالا صدق کند، گوییم U یک *دوگانیِ موریتا* از R به S تعریف می‌کند. اما بنابر قضیه‌ای از اُسوفسکی[1] (۱۹۶۶) در چنین وضعیتی، R لزوماً یک حلقهٔ نیم‌کامل است، یعنی $R/\mathrm{Jac}(R)$ نیم‌ساده است و خودتوان‌های آن را می‌توان به R بالا برد. همین ویژگیِ نیم‌کامل بودن در مورد S هم وجود دارد. از قضیهٔ فوق ویژگی‌های دوگانیِ موریتا به شرح زیر آشکار می‌گردد (ذیلاً ${}_SM$ و N_R را U-بازتابی فرض می‌کنیم و منظور از نماد l_X پوچساز چپ در X و r_Y به معنای پوچساز راست در Y است):

(۱) اگر K زیرمدولی از M و L زیرمدولی از M^* باشد، آن‌گاه

$$l_M r_{M^*}(K) = K, \quad r_{M^*} l_M(L) = L;$$

(۲) اگر L زیرمدولی از N و K زیرمدولی از N^* باشد، آن‌گاه

$$l_{N^*} r_N(K) = K, \quad r_N l_{N^*}(L) = L;$$

(۳) شبکهٔ زیرمدول‌های M یکریخت متقابل با شبکهٔ زیرمدول‌های M^* تحت نگاشت $K \longrightarrow r_{M^*}(K)$ است؛

(۴) شبکهٔ زیرمدول‌های N یکریخت متقابل با شبکهٔ زیرمدول‌های N^* تحت نگاشت $L \longrightarrow l_{N^*}(L)$ است.

ویژگی‌های دیگر دوگانیِ موریتا در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیه ۳.۷ ([۴، ۲۰]). *فرض کنیم ${}_SU_R$ یک دوگانیِ موریتا از R به S تعریف کند. در این صورت*

(۱) شبکهٔ ایدآل‌های دوطرفهٔ حلقه‌های R و S یکریخت هستند و هر یک از آنها با شبکهٔ زیردومدول‌های U یکریخت متقابل است؛

(۲) اگر I ایدآلی در R، J ایدآلی در S و V زیردومدول در U متناظر باشند، آن‌گاه برای $\bar{R} = R/I$ و $\bar{S} = S/J$ دومدول ${}_SM_R$ یک دوگانیِ موریتا از $\bar{R}$ به $\bar{S}$ تعریف می‌کند؛

(۳) مرکزهای حلقه‌های R و S یکریخت هستند.

گوئیم حلقهٔ R یک *دوگانیِ موریتا می‌پذیرد* اگر یک حلقهٔ S و یک دومدول ${}_SU_R$ وجود داشته باشد به‌طوری که U یک دوگانیِ موریتا از R به S باشد. این پرسش که چه حلقه‌ای یک دوگانیِ موریتا می‌پذیرد،

[1] Barbara L. Osofsky

توسط موریتا و آزومایا[۱] ابتدا برای حلقه‌های آرتینی بررسی شد. در سال ۱۹۷۰ مولر[۲] ارتباط دوطرفه میان پذیرفتنِ دوگانیِ موریتا و مفهوم مدول‌های خطی-فشرده[۳] را برای حلقه‌های عام به‌دست آورد.

۲.۷. هم‌ارزیِ موریتا. اینک به بخش دوم مقالهٔ ۱۹۵۸ موریتا می‌پردازیم که در مورد هم‌ارزی رسته‌های مدولی است. خواهیم دید که هم‌ارزی بیشتر از دوگانی اهمیت و کاربرد دارد، زیرا در حالی که دوگانیِ موریتا محدودیت‌های جدی بر حلقه‌های زمینه قرار می‌دهد، هم‌ارزیِ موریتا برای هر حلقه یک ردهٔ بی‌پایان از حلقه‌های دیگر را نظیر $\mathrm{Mat}_n(R)$ درگیر می‌کند. هدف از هم‌ارزیِ موریتا، شناختن کل رسته $R-\mathrm{Mod}$ و رسته‌های دیگر $S-\mathrm{Mod}$ است که با آن معادل‌اند و در اینجا از تابعگون‌های همورد استفاده می‌شود. لذا یادآور می‌شویم که تابعگون (همورد) $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را *هم‌ارزی رسته* گوییم اگر تابعگون $\beta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ و یکریختی‌های طبیعی $\beta\alpha \equiv id_{\mathcal{C}}$ و $\alpha\beta \equiv id_{\mathcal{D}}$ وجود داشته باشند که در این صورت β را *هم‌ارز وارون* α می‌نامیم و دو رسته را هم‌ارز گوییم و با $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$ نشان می‌دهیم. حال اگر R و S دو حلقه باشند و $S-\mathrm{Mod} \approx R-\mathrm{Mod}$ می‌نویسیم $R \approx S$ و این حلقه‌ها را *هم‌ارز موریتا* می‌نامیم. ویژگی‌های یک مدول که تحت هم‌ارزی رسته حفظ می‌شوند، به *پایاهای موریتا* موسوم هستند. فرض کنیم $\alpha : R-\mathrm{Mod} \longrightarrow S-\mathrm{Mod}$ یک هم‌ارزی رسته است. گزاره‌های زیر برخی از پایاهای مدولی موریتا را بیان می‌کنند.

(۱) دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

در $R-\mathrm{Mod}$ کوتاه دقیق است اگر و تنها اگر دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow \alpha(A) \xrightarrow{\alpha(f)} \alpha(B) \xrightarrow{\alpha(g)} \alpha(C) \longrightarrow 0$$

در $S-\mathrm{Mod}$ کوتاه دقیق باشد.

(۲) $\mathrm{p.dim}\ \alpha(M) = \mathrm{p.dim}\ M$ و $\mathrm{i.dim}\ \alpha(M) = \mathrm{i.dim}\ M$.

(۳) M ساده است اگر و تنها اگر $\alpha(M)$ باشد.

(۴) M متناهیاً تولید شده است اگر و تنها اگر $\alpha(M)$ متناهیاً تولید شده باشد.

(۵) M نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر $\alpha(M)$ چنین باشد.

(۶) $\mathrm{K.dim}\ M = \mathrm{K.dim}\ \alpha(M)$.

(۷) M مولد است اگر و تنها اگر $\alpha(M)$ مولد باشد.

---
[۱] Goro Azumaya [۲] B. J. Müller [۳] linearly compact

(۸) $N \leq_e M$ اگر وتنها اگر $\alpha(N) \leq_e \alpha(M)$ و در نتیجه $\mathrm{G.dim}\ M = \mathrm{G.dim}\ \alpha(M)$.

⋮

آن ویژگی‌هایی از یک حلقه را که تحت هم‌ارزیِ موریتا حفظ می‌شوند، *پایای موریتا* می‌خوانیم. تعدادی از پایاهای موریتا برای حلقه عبارت‌اند از: آرتینی بودن، نوتری بودن، اول بودن، نیم‌اول گُلدی بودن، داشتن بُعد فراگیر تصویری، ساده بودن، ابتدایی بودن، داشتن رادیکال جیکوبسن صفر، منظم بودن، داشتن بُعد کرول، ... [۲۲].

مجدداً فرض کنیم $\alpha : R-\mathrm{Mod} \longrightarrow S-\mathrm{Mod}$ یک هم‌ارزی رسته باشد. اگر برای هر ایدآل دوطرفه مانند I از R قرار دهیم $\bar{I} = l_S(\alpha(R/I))$، آن‌گاه نگاشت $I \longrightarrow \bar{I}$ یک یکریختی بین شبکهٔ ایدآل‌های دوطرفهٔ R و S به‌دست می‌دهد و نیز $R/I \approx S/\bar{I}$ ، یعنی این دوحلقه هم‌ارز موریتا هستند. در حالت خاص برای رادیکال جیکوبسن داریم

$$\mathrm{Jac}(S) = l_S(\alpha(R/\mathrm{Jac}(R)), \quad R/\mathrm{Jac}(R) \approx S/\mathrm{Jac}(S).$$

جهت استفاده در قضیهٔ زیر، یادآوری می‌کنیم که مدول P_R را *تصویری مولد* نامیم، هرگاه متناهیاً تولید شده، تصویری و مولد باشد.

قضیه ۴.۷. *فرض کنیم حلقه‌های R و S هم‌ارز موریتا توسط هم‌ارزی‌های وارون*

$$\alpha : R-\mathrm{Mod} \longrightarrow S-\mathrm{Mod}, \qquad \beta : S-\mathrm{Mod} \longrightarrow R-\mathrm{Mod}$$

باشند. قرار می‌دهیم $P = \alpha(R)$ و $Q = \beta(S)$. در این صورت P و Q دارای ساختارهای دومدولیِ طبیعی هستند: ${}_SP_R$ و ${}_RQ_S$ و برایشان ویژگی‌های زیر برقرار است.

(۱) P و Q هر دو وفادارانه متوازن هستند؛
(۲) P_R، ${}_SP$، Q_R و ${}_SQ$ هرکدام تصویری مولد است؛
(۳) ${}_SP_R \cong \mathrm{Hom}_R(Q,R) \cong \mathrm{Hom}_s(Q,S)$ و

$${}_RQ_S \cong \mathrm{Hom}_R(P,R) \cong \mathrm{Hom}_S(P,S);$$

(۴) $\alpha \equiv \mathrm{Hom}_R(Q,-)$ و $\beta \equiv \mathrm{Hom}_S(P,-)$؛
(۵) $\alpha \equiv P \otimes_R -$ و $\beta \equiv Q \otimes_S -$.

موریتا در قضیهٔ زیر روشن می‌کند چه تابعگون‌هایی می‌توانند هم‌ارزیِ موریتا باشند.

قضیه ۵.۷ ([۴، ۸، ۲۰، ۲۷]). *فرض‌کنیم R و S دو حلقه و*

$$\alpha : R - \mathrm{Mod} \longrightarrow S - \mathrm{Mod}, \qquad \beta : S - \mathrm{Mod} \longrightarrow R - \mathrm{Mod}$$

دو تابعگون جمعی باشند. آن‌وقت α و β هم‌ارزی‌های وارون هستند اگر و تنها اگر یک دومدول ${}_SP_R$ با شرایط زیر وجود داشته باشد.

(۱) ${}_SP$ و P_R تصویری مولد هستند؛

(۲) ${}_SP_R$ متوازن است؛

(۳) $\alpha \equiv P \otimes_R -$ و $\beta \equiv \mathrm{Hom}_S(Q, -)$.

به‌علاوه اگر P با شرایط بالا وجود داشته باشد، آن‌گاه برای $Q \cong \mathrm{Hom}_R(P, R)$ خواهیم داشت ${}_RQ$ و Q_S تصویری مولدند، $\alpha \equiv \mathrm{Hom}_S(Q, -)$ و $\beta \equiv Q \otimes_S -$.

سه نتیجهٔ جالب از قضیهٔ فوق موارد زیر هستند.

(۱) $R - \mathrm{Mod} \approx S - \mathrm{Mod}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Mod} - R \approx \mathrm{Mod} - S$.

(۲) $R \approx S$ اگر و تنها اگر یک تصویری مولد P_R موجود باشد به‌طوری که $S \cong \mathrm{End}(P)$؛ اگر و تنها اگر یک تصویری مولد ${}_RQ$ موجود باشد به‌طوری که $S \cong \mathrm{End}(Q)$.

(۳) از آنجا که R^n همواره تصویری مولد است از بند (۲) بالا خواهیم داشت: $R \approx \mathrm{Mat}_n(R)$.

بنابر نتایج فوق، حدس کوته (مسئلهٔ ۱.۴ و مسئلهٔ ۲.۴) مربوط می‌شود به این پرسش که آیا ایدآل پوچ‌توان بودن، یک پایای موریتا است؟

انبوهی از نتایج در نظریهٔ حلقه‌ها و مدول‌ها مبتنی بر هم‌ارزیِ موریتا به‌دست آمده است و به نظر می‌رسد کاربرد قضایای موریتا در پژوهش‌های نوین همچنان ادامه یابد. اما برخی از مهم‌ترین قضایای پیشین، به‌ویژه قضیهٔ ساختاری ودربورن–آرتین و قضیهٔ گُلدی در مورد ساختار حلقهٔ نیم‌اول گُلدی، با استفاده از هم‌ارزیِ موریتا اثبات‌های تازه و ساده یافته‌اند. مورد اخیر توسط آمیتسور انجام شد [۳]. در در پایان این بخش، فقط مورد قضیهٔ ودربورن–آرتین را بیان می‌کنیم. حلقهٔ نیم‌سادهٔ R را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_t \oplus I_{t+1} \oplus \cdots \oplus I_s$$

که در آن، هر I_i یک ایدآل راست مینیمال است و

$$I_i \ncong I_j, i \neq j \qquad (i, j = 1, \ldots, t)$$

و هر I_k ($k \geq t+1$) یکریخت است با یک I_j که $1 \leq j \leq t$. قرار می‌دهیم

$$P = I_1 \oplus \cdots \oplus I_t.$$

آن‌گاه $S := \mathrm{End}(P_R) \cong D_۱ \times \cdots \times D_t$ که در آن، هر D_i یک حلقهٔ تقسیم است و لذا

$$R \cong \mathrm{End}({}_S P) \cong \mathrm{Mat}_{n_۱}(D_۱) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_t}(D_t).$$

مراجع

[1] Albert, A. A., *Modern Higher Algebra*, The University of Chicago Press, Chicago illinois, 1937.

[2] Albert, A. A, Hasse, H., A determination of all normal division algebras over an algebraic number field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932), 722-726.

[3] Amitsur, S. A., Rings of Quotients and Morita contexts, *J. Algebra*, **17** (1971), 273-298.

[4] Anderson, F. W., Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics, **13**, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1974.

[5] Brauer, R., Hasse, H., Noether, E., Beweis eines hauptsatzes in der theorie der algebren (in German), *J. Reine Angew. Math.*, **167** (1932), 399-404.

[6] Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, 1956.

[7] Divinsky, N. J., *Rings and Radicals*, University of Toronto Press, Toronto, Ontario, 1965.

[8] Faith, C., *Algebra: Rings, Modules and Categories I*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1973.

[9] Goldie, A. W., The structure of prime rings under ascending chain conditions, *Proc. London Math. Soc.*, **8** (1958), 589-608.

[10] Goodearl, K. R., *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, 1976.

[11] Goodearl, K. R., Warfield jr, R. B., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society Student Texts (**16**), Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[12] Grey, M., *A Radical Approach to Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.

[13] Hart, R., Krull dimension and global dimension of simple Ore-extensions, *Math. Z.*, **121** (1971), 341-345.

[14] Herstein, I. N., *Noncommutative Rings*, The Carus Mathematical Monographs (**15**), Published by The Mathematical Association of America, distributed by John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.

[15] Jacobson, N., *Structure of Rings*, American Mathematical Society Colloquium Publications (**37**), Revised edn., American Mathematical Society, Providence, RI, 1964.

[16] Jategaonkar, A. V. A counter-example in ring theory and homological algebra, *J. Algebra*, **12** (1969), 418-440.

[17] Karpilovsky, G., *Unit Groups of Classical Rings*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1988.

[18] Kerr, J. W., An example of a Goldie ring whose matrix ring is not Goldie, *J. Algebra*, **61** (1979) , 590-592.

[19] Lam, T. Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics (**131**), Springer-Verlag, New York, 1991.

[20] Lam, T. Y., *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics (**189**), Springer-Verlag, New York, 1999.

[21] Lesieur, L., Croisot, R., Sur les anneaux premiers Notheriens à gauche, *Ann. Sci. Ecol Norm. Sup.*, **76** (1959), 215-216.

[22] McConnell, J. C., Robson, J. C., *Noncommutative Noetherian Rings*, With the cooperation of L. W. Small, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1987.

[23] Morita, K., Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A*, **6** (1958), 83-142.

[24] Rentschler, R., Gabriel, P., Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **265** (1967), 712-715.

[25] Roquette, P., *The Brauer-Hasse-Noether Theorem in Historical Perspective*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[26] Rotman, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, London, 1979.

[27] Rowen, L. H., *Ring Theory*, Vols . I & II, Academic Press, Inc., Boston, 1988.

[28] Stenstrom, B., *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[29] Van der Waerden, B. L., *Modern Algebra*, Vols. I & II, Translated from German 1931, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1949.

[30] Vasconcelos, W. V., *The Rings of Dimension Two*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics (**22**), Marcel Dekker, Inc., New Yor, Basel,1976.

احمد حقانی: دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: ahaghany@gmail.com