فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۶، شمارهٔ ۶۰ (بهار و تابستان ۱۳۹۶) صص. ۳۵ تا ۶۶

پدیده‌های حیرت‌آور در آنالیز ریاضی و سنجش بزرگی مجموعه‌ها

سعید مقصودی

تقدیم به دکتر جعفر زعفرانی به‌پاس سال‌ها خوشه‌چینی از محضر علمی ایشان

چکیده

در این مقاله، به شرحِ برخی مفاهیمی می‌پردازیم که برای سنجش بزرگی یا کوچکیِ مجموعه‌ها در آنالیز ریاضی به‌کار رفته است. به‌ویژه با استفاده از مفهوم توپولوژیکیِ مجموعه‌های رستهٔ اول، نشان می‌دهیم که بسیاری از رفتارهای غیرمتعارف توابع در برخی فضاهای تابعی که گاهی خلافِ عقل سلیم به نظر می‌رسند، رفتارهای به‌اصطلاح «عام» هستند.

۱. سرآغاز

یکی از جذابیت‌های ریاضیات، پیدایش نتایج خلاف شهود در آن است. چنین نتایجی می‌تواند حتی بی‌ذوق‌ترین دانشجو و مدرس ریاضیات را نیز متعجب سازد. شاید شنیده باشید که تابعی روی مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف می‌شود که *همه‌جا پیوسته* ولی *هیچ‌جا مشتق‌پذیر* است. اولین مثال از چنین تابعی را برنهارت بولتسانو، ریاضیدان و فیلسوف اهل کشور چِک، در سال ۱۸۳۴ عرضه کرد اما تا سال ۱۹۲۱ که نسخهٔ دست‌نویس آن را ریاضیدان هم‌وطن او ام. یاشِک[۱] کشف و منتشر کرد، کسی از آن مطلع نبود. اما آنچه معروف است مثالی است که وایرشتراس در ۱۸ ژوئن سال ۱۸۷۲ از این نوع تابع‌ها طی یک سخنرانی در فرهنگستان علوم برلین عرضه کرد: $W(x)=\sum_{k=۱}^{\infty} a^k \cos(b^k\pi x)$ که در آن، $۰<a<۱$، b عدد صحیح مثبت فرد است و $ab>۱+۳\pi/۲$. شرط $۰<a<۱$ تضمین می‌کند که سری تابعی مزبور همگرای یکنواخت است و لذا تابع W پیوسته است. وایرشتراس از شرط‌های روی b استفاده می‌کند تا

عبارات و کلمات کلیدی. بزرگیِ مجموعه‌ها؛ رستهٔ بِر؛ عام بودنِ توپولوژیکی؛ قضیهٔ کرانداری یکنواخت؛ فضای توابع حقیقی.

[1] M. Jašek

مشتق‌ناپذیریِ W را ثابت کند. اما این محدودیت روی مقدار b اندکی غیرطبیعی به نظر می‌رسد، زیرا به‌طور شهودی انتظار داریم به‌ازای هر عدد حقیقی b که $ab > 1$، تابع W مشتق‌پذیر نباشد چون با این شرط به نظر می‌آید سری صوریِ وابسته به W' در هر x واگرا شود. چهار دهه پس از وایرشتراس، در سال ۱۹۱۶ هاردی، ریاضیدانان مشهور انگلیسی، ثابت کرد هرگاه $ab > 1$ تابع W در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد. مثال وایرشتراس را دوبوا–ریمون[۱] در سال ۱۸۷۵ منتشر کرد. وایرشتراس اشاره می‌کند که چنین ساختاری را ریمان در سال ۱۸۶۱ نیز به‌کار برده است. نمودار تابعِ به‌اصطلاح «هیولای وایرشتراس» موضوع برخی پژوهش‌ها بوده است [۸]. معرفی تابع وایرشتراس پاسخ منفی به پرسشی با بیش از نیم قرن قدمت بود: مسئلهٔ وجود مشتق توابع پیوسته در همهٔ نقاط بجز نقاط تنها؛ مسئله‌ای که لاگرانژ در سال ۱۷۸۴ مطرح کرد. برای کسب اطلاعات کامل در این زمینه، [۲۳] و [۲۹] را بخوانید.

اثبات وجودِ چنین تابعی هرچند دنیای ریاضی قرن نوزدهم را تکان داد، به ریاضیدانان آموخت که در *بنا کردن ساختمان آنالیز ریاضی نباید بیش از اندازه به شهود اعتماد کرد*. البته این موضوع هر دانشجوی هوشیاری را به فکر وا می‌دارد. اما شاید مطلب عجیب‌تر این باشد که دریابیم «بیشترِ» توابع پیوسته دارای این خاصیت حیرت‌آور و عجیب هستند. چنین پدیده‌های به‌اصطلاح نامتعارف[۲] که خلاف عقل عرفی‌اند، در آنالیز کم نیستند!

در شاخه‌های مختلف ریاضی اغلب علاقه‌مندیم بدانیم آیا پدیده‌ای خاص، بسیار نادر یا بسیار رایج است. چنین وضعیتی به‌ویژه در آنالیز ریاضی و نظریهٔ احتمال رخ می‌دهد. از این‌رو داشتن معیارهایی برای سنجش بزرگیِ مجموعه‌ها بسیار سودمند است. در این زمینه سه مفهوم عدد اصلی، مجموعهٔ اندازه–صفر (ویژگی‌های تقریباً همه‌جایی) و مجموعهٔ از رسته اول (ویژگی‌های شبه‌حتمی[۳]) را داریم. مثلاً کانتور در سال ۱۸۷۴ با استفاده از مفهوم عدد اصلی، وجود اعداد متعالی را ثابت کرد. او نشان داد که مجموعهٔ اعداد جبری به‌لحاظ تعداد عضوها، مجموعه‌ای کوچک است. به همین نحو چنانچه بدانیم در یک فضای اندازه نقاطی که فاقد ویژگی معینی هستند، مجموعه‌ای اندازه–صفر تشکیل می‌دهند، آن‌وقت می‌توانیم نتیجه بگیریم که تقریباً همهٔ نقاط فضا آن ویژگی را دارند. از سوی دیگر، رنه–لوئی بر[۴] در رسالهٔ دکتری‌اش مجموعه از رستهٔ اول را تعریف و از آن در بررسی توابع از ردهٔ اول استفاده کرده است. لبگ در سال ۱۹۱۷ سه روش شمارا بودن، از رستهٔ اول بودن و اندازه–صفر بودن را به‌عنوان ابزارهایی برای برهان‌های وجودی با هم مقایسه کرده و بارها به‌کاربرده است. باناخ و مستقل از او، مازورکیه‌ویچ[۵] در سال ۱۹۳۱ با استفاده از قضیهٔ بِر، وجود تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌پذیر را ثابت کردند و شناخت ما را در این باره عمقِ بسیار بخشیدند. این برهان‌های وجودی، گرچه غیرسازنده هستند، برآوردی کیفی از رفتار مورد بررسی پیش روی ما می‌گذارند.

[۱] P. du Bois-Reymond [۲] pathological [۳] quasi sure [۴] René-Louis Baire [۵] S. Mazurkiewicz

در این مقاله، نخست مفهوم مجموعه از رسته اول را شرح می‌دهیم و نشان می‌دهیم چگونه این مفهوم برای سنجش کوچکیِ مجموعه‌ها به‌کار گرفته شده است. همچنین به رابطهٔ این مفهوم با مفاهیم دیگری که برای این منظور استفاده شده‌اند، اشاره می‌کنیم. سپس رفتارهای عجیب و غیرمتعارف برخی تابع‌ها را در آنالیز ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم آنهایی که این رفتارهای عجیب را از خود بروز می‌دهند، به تعبیر توپولوژیکی چندان هم «کم» نیستند!

در پایان این مقدمه باید اشاره کنیم که ذکر تمامی منابع مربوط به بحث ما، کاری ناشدنی است. لذا فقط مراجعی را در پایان مقاله آورده‌ایم که در به‌دست دادنِ تصویر کلی از موضوع و روشن‌تر شدن بحث به خواننده یاری می‌رسانند. به نظر می‌رسد با اشاره‌هایی که در متن آورده‌ایم، یافتن مراجع اصلی برای خوانندهٔ مشتاق کار دشواری نباشد. همچنین در این نوشته به دنبال بیان تمامی نتایج نیستیم بلکه می‌خواهیم گزارشی به‌سامان از برخی جنبه‌های موضوع مورد بحث ارائه کنیم و امیدواریم میل به پژوهش در این زمینه را در علاقه‌مندان برانگیزد.

۲. مجموعه‌های لاغر و خواص توپولوژیکی-عام

شمارا بودن و اندازه-صفر بودنِ یک مجموعه هر دو به‌نوعی بر «کوچک بودنِ» آن مجموعه دلالت می‌کنند؛ اولی در چارچوب نظریهٔ مجموعه‌ها و دومی در چارچوب نظریهٔ اندازه. شاید وسوسه شویم که به این مفهومِ کوچک‌بودن، نوع دیگری هم بیفزاییم. مثلاً اگر متمم یک مجموعه، چگال باشد، آن مجموعه را کوچک بنامیم. اما این مفهوم مناسبی نیست، زیرا آن‌وقت هم $\mathbb{Q}$ و هم $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ کوچک خواهند بود و انتظار داریم اجتماع آنها یعنی $\mathbb{R}$ نیز یک مجموعهٔ کوچک باشد که چنین نتیجه‌ای دربارهٔ $\mathbb{R}$ طبیعی نیست. کوچک بودن به مفهوم توپولوژیک یا بِر از این قرار است: $A\subseteq\mathbb{R}$ را لاغر[۱] (یا از رستهٔ اول یا کوچک به‌تعبیر بِر) گوییم اگر در اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته با درون تهی قرار گیرد. با این تعریف، $\mathbb{R}$ دیگر کوچک نیست و این همان مضمون قضیهٔ معروف رستهٔ بِر برای $\mathbb{R}$ است. مفاهیم اندازه و رسته مبتنی بر مفهوم شمارش‌پذیری هستند. خلط این سه مفهومِ کوچک‌بودن در قرن نوزدهم، باعث اشتباهات عجیبی شد و یکی از عامل‌های به‌وجود آمدن نظریهٔ اندازه بود. برای مطالعهٔ شرحی از این موضوع به [۵] رجوع کنید.

در سال ۱۸۷۰، هانکل[۲] در راستای صورت‌بندی معیاری برای ریمان-انتگرال‌پذیری توابع، دو نوع مجموعه تعریف کرد: مجموعه‌ای که بازه را پُر می‌کند (چگال به معنای امروزی) یعنی مجموعه‌ای که بازه‌ای هرچند دوردست وجود نداشته باشد که نقطه‌ای از مجموعه را در بر نداشته باشد؛ و مجموعه‌ای که بازه را پُر نمی‌کند اما در آن پراکنده[۳] است (به اصطلاحِ امروزی، هیچ‌جا چگال است) یعنی مجموعه‌ای که بین هر دو

[۱]meager [۲]H. Hankel [۳]scattered

نقطه از خط حقیقی هر قدر هم نزدیکِ یکدیگر باشند، بازه‌ای موجود باشد که هیچ نقطه‌ای از مجموعه را در بر نداشته باشد. به بیان بهتر، مجموعهٔ هیچ‌جا چگال یعنی مجموعه‌ای که در هیچ بازه‌ای چگال نیست یا معادلاً هر بازه یک زیربازه دارد که هیچ نقطه‌ای از آن مجموعه را در بر ندارد. چنین مجموعه‌ای بین هر دو نقطه‌اش یک بازهٔ خالی از نقاط آن مجموعه جا می‌گیرد. لذا چنین مجموعه‌ای پُر از سوراخ است. روشن است که یک مجموعه هیچ‌جا چگال است اگر و تنها اگر متمم آن شامل یک مجموعهٔ باز چگال باشد. البته چنین مجموعه‌هایی را دیریکله در سال ۱۸۲۹ به‌منظور بررسی رفتار تابع‌های انتگرال‌پذیر معرفی کرده بود. کانتور نیز در سال ۱۸۷۲ در قضیه‌ای دربارهٔ سری‌های فوریه، مفهوم مجموعه از نوع اول را برحسب نقاط حدی تعریف کرده بود. مفهوم مجموعهٔ هیچ‌جا چگال را دوبوا- ریمون در سال ۱۸۸۲ به‌طور مشخص‌تری معرفی کرده و به‌کار گرفته است. کانتور و مستقل از او اشتولتس[۱] در سال ۱۸۸۴ مفهوم محتوای بیرونی مجموعه را تعریف و ارتباط دو مفهوم هیچ‌جا چگال و محتوای صفر را بررسی کرده‌اند.

بِر در رسالهٔ دکتری‌اش در سال ۱۸۹۹ با عنوان «دربارهٔ توابع با متغیر حقیقی» که در حضور هیأتی از داوران متشکل از داربو، آپل، و پیکار از آن دفاع کرد، می‌نویسد: «پیوستار مجموعه‌ای از رستهٔ دوم تشکیل می‌دهد.» این، یکی از حکم‌هایی است که شهرت بِر را در پی داشته است. موضوع رسالهٔ دکتری بِر، مشخص‌سازی توابع دو متغیره‌ای بود که نسبت به هر متغیر جداگانه پیوسته‌اند ولی در هیچ نقطه‌ای توأماً پیوسته نیستند. او نشان داد که چنین تابعی حد دنباله‌ای همگرا از توابع پیوسته است. بعدها این رده از توابع را ردهٔ ۱ بِر نامیدند. موضوع رسالهٔ او اساساً پیوستگی تابع‌ها و بررسی حد دنباله‌های توابع پیوسته بود و در ضمن این کار، مفاهیم رستهٔ اول و دوم را تعریف کرد.

بِر در پایان فصل ۲ی رساله‌اش با استفاده از مجموعه‌های چگال و هیچ‌جا چگال، مفاهیم مجموعه از رسته اول و دوم را تعریف می‌کند: *یک مجموعه از رستهٔ اول است اگر بتوان آن را به‌صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال نوشت واگرنه از رستهٔ دوم است.* بِر پس از تعریف مفهوم رسته، نشان می‌دهد که پیوستار (خط حقیقی) از رستهٔ اول نیست و اشاره می‌کند که مجموعه‌های رستهٔ اول در $\mathbb{R}$ مجموعه‌هایی کوچک هستند. سپس نشان می‌دهد که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابع‌های از ردهٔ ۱، از رستهٔ اول است. وی این نتیجه را گسترش می‌دهد و ثابت می‌کند که خانوادهٔ توابع نیم‌پیوسته با تغییرات کراندار و خانوادهٔ توابع مشتق‌پذیر از رستهٔ اول هستند. البته مفهوم رسته بخش بزرگی از رسالهٔ دکتری بِر را اشغال نمی‌کند. جزئیات بیشتر را می‌توانید در [۱۹] بیابید.

باید توجه کرد که ایدهٔ اصلی در قضیهٔ رستهٔ بِر منسوب به آزگود[۲]، ریاضیدان آمریکایی، به سال ۱۸۹۷ است. پوانکاره هم در تحقیقاتش دربارهٔ مکانیک سماوی در سال ۱۸۹۹ قضیهٔ مهمی ثابت می‌کند که در آن به‌نوعی مفهوم رسته و اندازه به‌کار رفته است. آزگود که در آلمان درجهٔ دکتریِ خود را گرفته بود، دربارهٔ

---
[۱] O. Stolz [۲] W. F. Osgood

امکان جابجایی حد و انتگرال تحقیق می‌کرد. او برای به‌دست آوردنِ شرایط لازم و کافی برای جابه‌جایی حد و انتگرال، نقاطی را که همگرایی دنبالهٔ توابع در آنها یکنواخت است از دیگر نقاط جدا کرد و در این باره قضیهٔ کمکی زیر را ثابت کرد: اگر B مجموعه‌ای از توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد که نقطه‌ای-کراندار است، یعنی برای هر $t \in \mathbb{R}$ عدد $M_t > ۰$ موجود است به‌طوری که برای هر $f \in B$، $|f(t)| \leq M_t$، آن‌گاه B روی بازه‌ای به‌طور یکنواخت کراندار است. به عبارت دیگر، عددهای a و b و $M > ۰$ وجود دارند که به‌ازای هر $f \in B$ و هر $t \in [a, b]$، $|f(t)| \leq M$. او برای اثبات این قضیه دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو و دنباله‌ای از نقاط در این بازه‌ها می‌یابد که به نقطه‌ای همگرا است و شرط کرانداریِ نقطه‌ای را نقض می‌کند. بِر در سال ۱۸۹۹ از این ایده استفاده و ثابت کرد هیچ بازهٔ بازی را نمی‌توان به‌صورت اجتماعی شمارا از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال نوشت. البته آزگود صورت دیگری از این قضیه را برای $\mathbb{R}$ ثابت کرده بود به این مضمون که اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز چگال، چگال است. بِر قضیهٔ آزگود را به فضای $\mathbb{R}^n$ تعمیم داد. تعمیم این قضیه به فضاهای متری کامل همان قضیه‌ای است که به قضیهٔ رستهٔ بِر معروف شده است و اثبات آن اساساً بر پایه قضیهٔ اشتراک کانتور است.

دانژوا[۱]، شاگرد بِر، در مقاله‌ای به سال ۱۹۱۵ واژهٔ «gerbé» (به معنای دسته) را برای نامیدن مجموعه از رستهٔ اول و «résiduel» (به معنای باقی‌مانده) را برای متمم مجموعه‌های رستهٔ اول به‌کار برده است. کِلی[۲] هم درکتاب مشهورش، توپولوژی عمومی، به سال ۱۹۵۵ مجموعه‌های رستهٔ اول را لاغر و مجموعه‌های نالاغر را متمم-لاغر[۳] نامیده است.

اکنون برخی از ویژگی‌های سادهٔ مجموعه‌های رستهٔ اول را بیان می‌کنیم. زیرمجموعهٔ هر مجموعه از رستهٔ اول، از رستهٔ اول است. بستار یک مجموعه، از رستهٔ اول است اگر و تنها اگر آن مجموعه هیچ‌جا چگال باشد. اگر U زیرمجموعه‌ای باز از یک فضای توپولوژیک باشد، آن‌گاه $\bar{U} \setminus U$ لاغر است. درون یک مجموعهٔ لاغر، تهی است اما عکس این مطلب صادق نیست. با وجود این، هر مجموعهٔ F_σ لاغر است اگر و تنها اگر درونش تهی باشد. به یاد آورید که مجموعه با درون تهی یا معادلاً مجموعه‌ای را که هر نقطه‌اش نقطهٔ مرزی‌اش باشد، مجموعهٔ *مرزی* می‌نامند. از این‌رو یک مجموعهٔ F_σ، لاغر است اگر و تنها اگر مرزی باشد. بعداً نتایج کلی دربارهٔ مجموعه‌های از رستهٔ اول در فضای توپولوژیک خواهیم آورد.

خانوادهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ را σ-*ایدال* گوییم در صورتی که نسبت به اجتماع شمارا بسته باشد و اگر $A \in \mathcal{A}$ و $B \subseteq A$، آن‌گاه $B \in \mathcal{A}$. مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌های رستهٔ اول و مجموعه‌های اندازه-صفر σ-ایدال هستند. خانوادهٔ مجموعه‌های پوچ و رستهٔ اول شامل خانوادهٔ مجموعه‌های شمارا است. این امر دال بر این است که این دو رده، نوعی از کوچک‌بودن را نشان می‌دهند. از دیدگاه شهودی، مجموعهٔ هیچ‌جا چگال به‌لحاظ هندسی کوچک است، زیرا سوراخ‌سوراخ شده است. مجموعه‌های رستهٔ

[۱] A. Denjoy [۲] J. L. Kelly [۳] co-meager

اول را نیز می‌توان با مجموعه‌های هیچ‌جا چگال تقریب زد. مجموعه از رستهٔ اول ممکن است دارای سوراخ باشد یا نباشد اما همواره مجموعه‌ای چگال از شکاف‌ها را دربر دارد. مجموعه‌های پوچ نیز به مفهوم متری، کوچک‌اند، زیرا توسط بازه‌هایی با طول به‌قدر کافی کوچک پوشیده می‌شوند. اما آیا این دو مفهومِ کوچک‌بودن با یکدیگر ارتباطی دارند؟

در همان اوایلی که نظریهٔ اندازهٔ لبگ ابداع شده بود، تلاش برای کشف ساختار مجموعه‌های اندازه–صفر مورد توجه برخی ریاضیدانان از جمله بِر، ویتالی و لبگ قرار گرفت. اندازه–صفر بودن، تنها به عدد اصلی مجموعه مربوط نمی‌شود، زیرا مجموعهٔ کانتور ناشمارا است ولی اندازه–صفر است. نقاط این مجموعه به‌گونه‌ای بسیار تُنُک توزیع شده‌اند و لذا درون آن تهی است. آیا این کم بودنِ چگالی نقاط، ارتباطی با اندازه–صفر بودن دارد؟ دو نتیجه وجود دارد که تا حدی به این پرسش پاسخ می‌دهند: یکی اینکه خط حقیقی را می‌توان به دو مجموعه مانند A و B تجزیه کرد طوری که A از رستهٔ اول و B اندازه–صفر باشد و دیگری اینکه هر زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ را می‌توان به‌صورت اجتماع یک مجموعهٔ پوچ و یک مجموعه از رستهٔ اول نوشت. همچنین خانوادهٔ مجموعه‌های رستهٔ اول همعدد با خانوادهٔ مجموعه‌های پوچ در $\mathbb{R}$ است.

چنان‌که گفتیم، پوچ بودن به‌تعبیر لبگ و از رستهٔ اول بودن، دو مفهوم متفاوت هستند. برای نمونه، اندازهٔ لبگ مجموعهٔ کانتور تعمیم‌یافته مثبت است ولی این مجموعهٔ هیچ‌جا چگال و در نتیجه از رستهٔ اول است [۵]. مثال سرراست‌تر این است: فرض کنیم (r_i) شمارشی از اعداد گویا باشد و قرار می‌دهیم

$$U_n = \bigcup_{i=۱}^{\infty}(r_i - ۲^{-ni}, r_i + ۲^{-ni}).$$

در این صورت $\mathbb{R} \setminus U_۱$ هیچ‌جا چگال، بسته و دارای اندازهٔ لبگ مثبت است. همچنین به‌راحتی ثابت می‌شود که مجموعهٔ $U = \bigcap_{n=۱}^{\infty} U_n$ اندازه–صفر است اما چون $\mathbb{R} \setminus U$ از رستهٔ اول است، U از رستهٔ اول نیست. با این حال اگر مجموعه‌ای بسته و پوچ باشد، آن‌گاه هیچ‌جا چگال است. از این مثال می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbb{R}$ را می‌توان به‌صورت اجتماع یک مجموعه از رستهٔ اول با یک مجموعهٔ پوچ نوشت. گرچه دریافتیم که کوچک‌بودن برحسب اندازه و کوچک‌بودنِ توپولوژیکی با هم ارتباطی ندارند، شرپینسکی[۱] در سال ۱۹۳۴ و اردوش[۲] در سال ۱۹۴۳ با اثباتی دیگر، نشان دادند که تابعی دوسویی مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری که E پوچ (از رستهٔ اول) است اگر و تنها اگر $f(E)$ از رستهٔ اول (پوچ) باشد.

با در دست داشتنِ مفهوم‌هایی همچون رسته، می‌توانیم احکامی را بیان کنیم که برخی از رفتارهای کیفی توابع را توصیف می‌کنند. مثلاً مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی مشتق یک تابع، مجموعه‌ای حداکثر از رستهٔ اول است. یا مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابع f روی یک بازه، از رستهٔ اول است اگر و تنها اگر

[۱] W. Sierpiński [۲] P. Erdős

مجموعهٔ نقاط پیوستگی‌اش چگال باشد، زیرا می‌دانیم که نقاط ناپیوستگی یک تابع، مجموعه‌ای F_σ است و همچنین هر مجموعهٔ F_σ از رستهٔ اول است اگر و تنها اگر متمم آن چگال باشد.

فرآیند تعمیم قضیهٔ رستهٔ بِر به فضای متری کامل بیست سال به درازا کشید. ببینیم این تعمیم چگونه بود. مفهوم مجموعهٔ هیچ‌جا چگال به طریق طبیعی تعریف می‌شود: مجموعهٔ A را در فضای توپولوژیک X *هیچ‌جا چگال* گوییم اگر درون بستار A تهی باشد. در مکتب بورباکی اصطلاح مناسب‌ترِ مجموعهٔ *نادر*[۱] به‌کار می‌رود. همانند حالت خط حقیقی می‌توان نشان داد که A هیچ‌جا چگال است اگر و تنها اگر متمم بستار A چگال باشد و این معادل با این است که هر مجموعهٔ باز شامل مجموعه‌ای باز باشد که A را قطع نکند. مرز مجموعهٔ بسته و مجموعهٔ باز، هیچ‌جا چگال است.

قضیه ۱.۲ (قضیهٔ بِر برای فضای متری). *اگر X یک فضای متری کامل و A در X از رستهٔ اول باشد، آن‌گاه $A \setminus X$ چگال است.*

به‌طور کلی در هر فضای توپولوژیک حکم‌های زیر معادل‌اند:

الف) اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته و هیچ‌جا چگال، دارای درون تهی است؛

ب) اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز چگال، چگال است؛

ج) مجموعهٔ باز غیرتهی، لاغر نیست؛

د) متمم هر مجموعهٔ لاغر، چگال است.

فضای توپولوژیک X را *فضای بِر* گوییم اگر در یکی (و در نتیجه در هر چهار شرط بالا) صدق کند.

اغلب قضیهٔ زیر در اثبات بزرگ‌بودنِ یک مجموعه به‌تعبیر بِر مفید است.

قضیه ۲.۲. *در فضای بِر X، E مجموعهٔ مانده‌ای*[۲] *است اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌ای G_δ و چگال داشته باشد.*

در فضای بِر، متمم مجموعهٔ لاغر از رستهٔ دوم است ولی متمم مجموعه از رستهٔ دوم ممکن است از رستهٔ دوم باشد و همچنین مجموعه از رستهٔ دوم لزوماً در فضا چگال نیست! به‌علاوه مجموعهٔ لاغری که G_δ باشد، حتماً هیچ‌جا چگال است. اگر بُعد یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف، شمارا باشد، آن فضا لاغر است. لذا اگر این فضا بِر باشد، بُعدش ناشمارا است. در فضای برداری توپولوژیک خاصیت بِر معادل نالاغر بودن است! زیرفضای بسته و همچنین حاصل‌ضرب فضاهای بِر، لزوماً فضای بِر نیست.

گرچه واضح است که اجتماع شمارا از مجموعه‌های لاغر مجموعه‌ای لاغر است، اجتماع نامتناهی از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال لزوماً هیچ‌جا چگال نیست. در این باره قضیهٔ زیر جالب به نظر می‌رسد.

---
[۱] rare set [۲] residual set

قضیه ۳.۲ (قضیهٔ رستهٔ باناخ، ۱۹۳۰). *در فضای توپولوژیک X اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های بازِ رستهٔ اول، از رستهٔ اول است.*

پس هر فضای توپولوژیک، اجتماع یک زیرفضای بِر باز (یا بسته) است با مجموعه‌ای از رستهٔ اول. اما دربارهٔ حاصل‌ضرب دو مجموعه چه می‌توان گفت؟ به یاد آورید که قضیهٔ فوبینی برای دو فضای اندازه مانند X و Y بیان می‌کند که اگر $E \subseteq X \times Y$ نسبت به اندازهٔ حاصل‌ضربی پوچ باشد، آن‌گاه به‌ازای تقریباً هر $x \in X$ برش E در امتداد x، $E_x := \{y \in Y | (x, y) \in E\}$، مجموعه‌ای پوچ است. قضیهٔ زیر نظیر رسته‌ایِ قضیهٔ فوبینی است.

قضیه ۴.۲ (کوراتوفسکی[۱] –اولام[۲]، ۱۹۳۲). *فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و Y در اصل اول شمارایی صدق کند.*

(۱) اگر $E \subseteq X \times Y$ هیچ‌جا چگال باشد، آن‌گاه به‌ازای هر x به‌استثنای اعضای یک مجموعه از رستهٔ اول در X، E_x مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال است؛

(۲) زیرمجموعهٔ حاصل‌ضربی $A \times B$ از رستهٔ اول است اگر و تنها اگر دست‌کم یکی از A و B رستهٔ اول باشد.

اکنون نتیجه‌ای را می‌آوریم که تعمیم قضیه‌ای از آزگود است که در بالا به آن اشاره کردیم.

قضیه ۵.۲ (کرانداریِ یکنواخت برای توابع نیم‌پیوستهٔ پایینی). *اگر T یک فضای بِر و $\{f_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از توابع نیم‌پیوستهٔ پایینی بر T باشد که به‌طور نقطه‌ای از بالا کراندار است، آن‌گاه به ازای هر مجموعهٔ باز U در T زیرمجموعه باز $V \subseteq U$ وجود دارد که این خانواده روی V به‌طور یکنواخت از بالا کراندار است.*

گفتیم هر فضای متری کامل فضای بِر است. قدرت این نتیجهٔ ساده تعجب‌آور است. کورنر[۳] آنالیزدان معروف، قضیهٔ بِر را از جنس «بدیهیات عمیق» خوانده است. برای اثبات وجود تابع‌ها و یا مجموعه‌هایی با ویژگی‌های خاص، به‌کارگیریِ قضیهٔ رستهٔ بِر بسیار ساده‌تر از یافتن مثال صریح از چنین اشیائی است.

قبل از آنکه جلوتر برویم، چند اصطلاح را که از مفهوم رسته نتیجه می‌شود، تعریف می‌کنیم. اگر اعضای یک مجموعهٔ مانده‌ای دارای خاصیت P باشند یا به عبارت دیگر، مجموعهٔ نقاطی از فضای توپولوژیک که خاصیت P را ندارند، مجموعه‌ای لاغر (از رستهٔ اول) باشد، گوییم خاصیت P *عام*[۴] یا *توپولوژیکی–عام*[۵] یا شبه‌حتمی‌است. هر عضو یک مجموعه با خاصیت عام را *نقطهٔ نوعی*[۶] با آن خاصیت می‌نامیم. از دیدگاه رسته‌ای یا به مفهوم توپولوژیکی، چنین مجموعه‌ای «بزرگ» است. این وضعیت مشابه خاصیت تقریباً

---

[۱]W. Kuratowski [۲]S. M. Ulam [۳]T. Körner [۴]generic [۵]topologically generic [۶]typical point

همه‌جایی در نظریهٔ اندازه است. در اینجا همهٔ اعضای یک فضای توپولوژیک دارای خاصیت P هستند به‌استثنای نقاط مجموعه‌ای که به‌لحاظ توپولوژیکی کوچک است. در واقع از رستهٔ اول بودن، مشابه پوچ بودن در نظریهٔ اندازه است و لذا اگر مجموعهٔ نقاطی که خاصیت P را ندارند، از رستهٔ اول باشد، این خاصیت به‌لحاظ توپولوژیکی تقریباً همه‌جا برقرار است و گفته می‌شود به‌طور نوعی یا عام[۱] برقرار است. برای مثال، می‌توان نشان داد که به‌طور نوعی، دنباله‌های کراندار واگرا هستند. به عبارت دیگر، هر عضو نوعی در فضای دنباله‌های کراندار، واگرا است.

باید توجه کرد که اگر مفهوم‌هایی قوی‌تر مانند مجموعه‌های متخلخل[۲] را برای توصیف کوچک‌بودن توپولوژیک به‌کار بریم، آن‌گاه خاصیت‌های ابرعام[۳] حاصل می‌شوند. برای مطالعهٔ مطالب بیشتر در این باره، به [۳۲] مراجعه کنید. در سال‌های اخیر عام بودنِ جبری[۴] نیز معرفی و بررسی شده است که عبارت از یافتن زیرفضاهای خطی نامتناهی-بُعد در زیرمجموعه‌های غیرخطی از خانوادهٔ توابع است. در این باره می‌توانید اطلاعاتی در [۳] بیابید.

قضیهٔ ۴.۲ حکمی دربارهٔ مجموعه‌های عام برای حاصل‌ضرب فضاهای بِر در اختیار ما می‌گذارد. گروسه-ارتمان[۵] در [۱۵] نشان می‌دهد که وضعیت‌های به‌ظاهر استثنایی در آنالیز حقیقی و مختلط در واقع پدیده‌هایی عام هستند.

۳. نمونه‌هایی از رفتارهای توپولوژیکی-عام در آنالیز

اگر بتوان نشان داد که مجموعه‌ای از نقاط یک فضای مناسب که فاقد خاصیت معینی هستند شمارا، یا پوچ یا از رستهٔ اول است، آن‌گاه نقاطی با خاصیت مذکور وجود دارند و در واقع بیشتر نقاط آن مجموعه (به مفهوم عدد اصلی، اندازه یا رسته) آن خاصیت را دارند. لبگ این روش را بارها به‌کار گرفته است. به‌نظر می‌رسد بعد از مقالهٔ «دربارهٔ برخی برهان‌های وجودی» لبگ به سال ۱۹۱۷ که در آن شیوهای مختلف برهان‌های وجودی اعم از عدد اصلی، مفهوم اندازهٔ لبگ و رستهٔ بِر، بیان و نسبت به هم مقایسه می‌شوند، شاهد به کارگرفتن روش بِر به‌ویژه به دست ریاضیدانان مکتب لهستان در نظریهٔ مجموعه‌ها و نظریهٔ توابع هستیم. در این بخش، به ذکر چند نمونه از کاربردهای قضیهٔ بِر در پدیده‌های عام در آنالیز می‌پردازیم. نخست مجموعهٔ توابع پیوسته روی بازهٔ $[۰,۱]$، $C[۰,۱]$، را در نظر می‌گیریم. فرشه[۶] در سال ۱۹۰۴ نشان داد که این مجموعه با متر سوپریمم:

$$\|f-g\| = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [۰,۱]\}$$

[۱] generically [۲] porous sets [۳] supergeneric [۴] algebrical genericity [۵] K. G. Grosse-Erdmann [۶] M. Fréchet

یک فضای متری کامل است. او اشاره می‌کند که این فاصله بین توابع را اولین بار وایرشتراس تعریف کرده است. چند نمونهٔ ساده از رفتارهای عام توابع پیوسته از این قرار است [۳۰] : (۱) خانوادهٔ توابع پیوسته، مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال در فضای توابع کراندار روی یک بازهٔ فشرده است. (۲) بیشترِ توابع پیوسته روی یک بازهٔ فشرده هیچ‌جا یکنوا هستند، یعنی روی هیچ زیربازه‌ای یکنوا نیستند! قضیهٔ زیر نیز مطلبی جالب دربارهٔ مجموعهٔ صفرهای توابع پیوسته بیان می‌کند؛ اثبات را در [۱۰] ببینید.

قضیه ۱.۳ (بناویدس، ۱۹۸۶). *اندازهٔ مجموعهٔ صفرهای بیشترِ توابع پیوسته روی بازهٔ فشرده برابر با صفر است. همچنین مجموعهٔ صفرهای بیشترِ توابع پیوسته روی بازهٔ فشرده دارای عدد اصلی برابر با پیوستار است.*

اجازه دهید سراغ مسئله‌ای پیچیده‌تر برویم. ظاهراً باناخ اولین کسی است که مفهوم رستهٔ بِر را در فضایی غیر از $\mathbb{R}^n$ به‌کار گرفته است. او در سال ۱۹۲۶ نشان داد که هر تابع پیوستهٔ نوعی روی یک مجموعه با اندازهٔ مثبت، مشتق متناهی ندارد. در سال ۱۹۲۹ اشتاینهاوس[۱] ثابت کرد که خانوادهٔ تابع‌های متناوب پیوسته و هیچ‌جا مشتق‌پذیر در فضای تابع‌های متناوب پیوسته، از رستهٔ دوم است. او در همان مقاله این سؤال را مطرح کرد که مجموعهٔ توابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌پذیر از چه رسته‌ای است. اشتاینهاوس در واقع اولین کسی است که امکان اثبات وجود تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌پذیر را از طریق روش رسته‌ای بِر مطرح کرده است. باناخ و مازورکیه‌ویچ مستقلاً در سال ۱۹۳۱ به این سؤال پاسخ می‌دهند. نتیجه‌ای که باناخ به‌دست آورد، اندکی قوی‌تر است، چراکه نشان می‌دهد مجموعهٔ توابعی که مشتق دینی[۲] آنها حداقل در یک نقطه کراندار است، از رستهٔ اول است ولی نتیجهٔ مازورکیه‌ویچ، دربارهٔ توابع پیوسته با مشتق یک‌طرفهٔ کراندار در یک نقطه است. از کار آنها نتیجه می‌شود که به‌تعبیر رسته‌ای، «تقریباً همه» یا «بیشترِ» توابع در فضای توابع پیوسته هیچ‌جا مشتق ندارند! در واقع برای تابع پیوسته، داشتن مشتق متناهیِ یک‌طرفه، یک رفتار استثنایی است.

قضیه ۲.۳ (باناخ–مازورکیه‌ویچ، ۱۹۳۱). *توابع پیوسته عموماً (نوعاً) در هیچ نقطه‌ای مشتق متناهی ندارند.*

اثبات خوش‌خوانی از این قضیه در کتاب *توپولوژی عمومی* مانکرز آمده است که شمه‌ای از آن چنین است: فرض کنیم D مجموعهٔ توابع پیوسته روی بازهٔ $[0,1]$ باشد که در دست‌کم یک نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشند و

$$A_{n,m} = \left\{ f \in C[0,1] \mid \exists t \in [0,1], 0 < |x-t| < \frac{1}{m} \Longrightarrow \left| \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \right| \leq n \right\}.$$

[۱] H. Steinhaus [۲] U. Dini

در این صورت می‌توان دید که $D \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,m}$ و هر $A_{n,m}$ مجموعه‌ای بسته است. همچنین هر $A_{m,n}$ هیچ‌جا چگال است. در واقع این مجموعه شامل هیچ گوی بازی نیست و در نتیجه اجتماع $A_{n,m}$ها مجموعه‌ای از رستهٔ اول و لذا D نیز از رستهٔ اول (لاغر) است. پس $C[0,1] \setminus D$ یک مجموعهٔ مانده‌ای است.

بیش از اینها می‌توان گفت: در سال ۱۹۲۲ بیسیکویچ[1] نشان داد که تابعی پیوسته وجود دارد که در هیچ نقطه‌ای مشتق یک‌طرفهٔ متناهی یا نامتناهی ندارد. توجه کنید که تابع مثال وایرشتراس روی یک مجموعهٔ چگال مشتق یک‌طرفهٔ متناهی دارد. باناخ و اشتاینهاوس این سؤال را مطرح کردند که آیا متمم مجموعهٔ توابع پیوسته‌ای که در هیچ نقطه‌ای مشتق یک‌طرفهٔ متناهی یا نامتناهی ندارند، از رستهٔ اول است؟ ساکس[2] در سال ۱۹۳۲ نشان داد که وجود این جور تابع‌ها را نمی‌توان با روش رسته‌ای ثابت کرد. در واقع او نشان داد که مجموعهٔ چنین توابعی در فضای توابع پیوسته با متر مذکور در بالا از رستهٔ اول است. به عبارت دقیق‌تر، مجموعهٔ توابع پیوسته‌ای که در تعداد ناشمارا نقطه مشتق راست‌شان ∞ است، یک مجموعهٔ مانده‌ای است.

یک تابع غیر ثابت بر یک بازه را تکین[3] می‌نامیم اگر مشتق آن تقریباً همه‌جا برابر با صفر باشد. سابقهٔ بررسی این گونه توابع به تحقیقات کانتور در سال ۱۸۸۴ و لبگ و مینکوفسکی به سال ۱۹۰۴ برمی‌گردد که مثال‌های مشهورشان از این توابع را معرفی کردند. برای دیدن تابع لبگ–کانتور که به *پلکان شیطان* مشهور است، مثلاً می‌توانید به [۱] مراجعه کنید. از آن زمان به بعد، مثال‌های جالب متعددی از این گونه توابع پیدا شده است. مثال جدیدی را می‌توانید در [۲۷] بیابید. قضیهٔ زیر در این باره جالب به‌نظر می‌رسد.

قضیه ۳.۳ (زامفیرسکو، ۱۹۸۱). *هر تابع نوعی در فضای بِرِ توابع پیوسته و صعودی روی $[0,1]$ تکین است. همچنین هر تابع نوعی در این فضا روی مجموعه‌ای ناشمارا و چگال دارای مشتق بی‌نهایت است.*

زامفیرسکو حکمی مشابه برای فضای توابع پیوسته با تغییرات یکنواخت–کراندار نیز ثابت کرده است. کیتر[4] در سال ۱۹۸۲ نشان داد که این حکم برای توابع پیوسته با تغییرات کراندار برقرار نیست. قضیهٔ بِر به‌ویژه برای اثبات وجود نقاطی از یک فضای متری کامل با خاصیتی مفروض کاربرد دارد. در واقع اگر بتوان نشان داد مجموعهٔ نقاطی از فضا که آن خاصیت را ندارند از رستهٔ اول است، مجموعه‌ای چگال از نقاط فضا با آن خاصیت وجود خواهد داشت. گاهی اوقات اثبات از طریق قضیهٔ بِر نیز روشی برای ساختن مثالی از توابع مورد بحث به‌دست می‌دهد اما همان‌طور که آکستوبی[5] اشاره می‌کند: «اگر اثباتِ هیچ‌جا چگال بودن، غیرمستقیم یا مشکل باشد، آن‌گاه به‌دست آوردنِ مثالی صریح از طریق آن ممکن است دشوار باشد.» [۲۵]

[1] A. S. Besicovitch [2] S. Saks [3] singular [4] F. S. Cater [5] J. C. Oxtoby

با استفاده از قضیهٔ بِر وجود تابع‌هایی را می‌توان ثابت کرد که ساختن مثالی صریح برای آنها دشوار است و مجسم کردن آن دشوارتر. برای مثال، طی دههٔ ۱۸۰۰ ریاضیدانان نمی‌توانستند دربارهٔ وجود توابع مشتق‌پذیر و هیچ‌جا یکنوا به نتیجه‌ای قطعی برسند. توجه می‌کنیم که اگر $f \in C[0,1]$ بخواهد مشتق‌پذیر و هیچ‌جا یکنوا باشد، باید مجموعه‌های $\{x \in [0,1] | f'(x) > 0\}$ و $\{x \in [0,1] | f'(x) < 0\}$ هر دو در $[0,1]$ چگال باشند. دینی، ریاضیدان ایتالیایی، بر این گمان بود که چنین توابعی احتمالاً وجود دارند ولی دوبوا–ریمون می‌اندیشید که چنین توابعی نمی‌توانند وجود داشته باشند. در سال ۱۸۸۷، کوپکه[1] مثالی پیچیده از این گونه توابع ساخت. دیگران این مثال را ساده‌تر کردند اما در ساده‌ترین حالت هم نوشتن فرآیند ساخت این مثال، حدود ده صفحه کاغذ لازم دارد. دانژوا در سال ۱۹۱۵ بررسی مفصلی از این توابع که مشتق آنها در هر بازه هر دو علامت را اختیار می‌کند، انجام داد. توابعی که به‌نوعی به این دسته مربوط می‌شوند، توابع از نوع پومپیو[2] هستند که مشتق آنها روی یک مجموعهٔ چگال برابر با صفر و روی مجموعهٔ چگال دیگری، مخالف صفر است. پومپیو در سال ۱۹۰۶ مثال نسبتاً ساده‌ای از این توابع ساخت که در واقع وارون تابع با نمایش سری $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x-d_n)^{1/3}$ است که A_nها و d_nها در شرایط خاصی صدق می‌کنند. در سال ۱۹۷۴ کتس‌نلسون[3] و استرومبَری[4] صورت بسیار ساده‌تری از این مثال و مثال متعلق به هابسن را در کتاب معروفش [16] به سال ۱۹۵۷ عرضه کردند. گافمن[5] نیز در سال ۱۹۷۵ با استفاده از قضیهٔ عمیقی در آنالیز حقیقی، مثالی بسیار کوتاه‌تر ساخت.

اما در سال ۱۹۷۶، ویل[6] با به‌کارگیریِ قضیهٔ بِر، وجود توابع مشتق‌پذیر و هیچ‌جا یکنوا را در دو صفحه به اثبات رساند. فرض کنیم Δ' (Δ'_0) مجموعهٔ توابع کراندار مانند f روی بازهٔ $[0,1]$ باشد که تابع F روی همین بازه موجود است به‌طوری که $F' = f$ (و f روی مجموعه‌ای چگال برابر با صفر است). به‌راحتی دیده می‌شود که این دو فضا مجهز به متر یکنواخت، فضای متری کامل هستند.

قضیه ۴.۳ (ویل، ۱۹۷۶). *در فضای متری کامل Δ'_0 مجموعهٔ تابع‌هایی که روی حداقل یک بازه علامت ثابتی ندارند، یک مجموعهٔ مانده‌ای است.*

در اینجا مطلبی دربارهٔ قضیهٔ اساسی حسابان بیان می‌کنیم. ولترا[7] در سال ۱۸۸۱ تابعی با مشتق کرندار روی بازهٔ یکه ساخت که مشتق آن، ریمان–انتگرال‌پذیر نبود. برودن[8]، ریاضیدان سوئدی، نیز در سال ۱۸۹۶ دسته‌ای ساده‌تر از این گونه توابع را معرفی کرد. در این باره [1] را بخوانید. گافمن هم در سال ۱۹۷۷ مثال بسیار ساده‌تری ساخته است. در اینجا مسئلهٔ بزرگیِ مجموعهٔ نقاط ناپیوستگیِ تابع مشتق مطرح می‌شود که برای کسب اطلاعات کامل در این باره، خواننده را به [11] ارجاع می‌دهیم. ویل پس از

[1] A. Köpcke [2] D. Pompeiu [3] Y. Katznelson [4] K. Stromberg [5] C. Goffman [6] C. E. Weil [7] V. Volterra [8] T. Brodén

به‌کار گرفتنِ قضیهٔ بِر در اثبات قضیهٔ ۴.۳ و به‌منظور گسترشِ مثال اشاره‌شده از گافمن، دو قضیهٔ زیر را ثابت می‌کند که یکی از آنها به رفتار نقاط پیوستگی توابع مشتق می‌پردازد.

قضیه ۵.۳ (ویل، ۱۹۷۷). *(الف) اعضای Δ' به‌طور نوعی روی هیچ بازه‌ای، ریمان-انتگرال‌پذیر نیستند؛ (ب) اعضای Δ' به‌طور نوعی تقریباً همه‌جا ناپیوسته‌اند.*

به عبارت دیگر، مشتق‌های کراندار نوعاً تقریباً همه‌جا ناپیوسته‌اند و نوعاً روی هیچ بازه‌ای ریمان-انتگرال‌پذیر نیستند.

در سال ۱۹۸۴، بروکنر[۱] قضیهٔ ویل را تعمیم داد و ثابت کرد که مجموعهٔ توابع با مشتق کراندار روی بازهٔ یکه که مجموعهٔ نقاط پیوستگی آنها اندازه-صفر است، مجموعه‌ای از نوع G_δ و چگال در فضای کامل توابع با مشتق کراندار تشکیل می‌دهد. قضیهٔ زیر هم تأییدی است بر این مطلب که انتگرال لبگ نسبت به انتگرال ریمان، رده‌ای گسترده‌تر از توابع را در بر می‌گیرد.

قضیه ۶.۳ (آکستوبی، ۱۹۳۷). *مجموعهٔ توابع پیوسته و مجموعهٔ توابع کراندار و ریمان-انتگرال‌پذیر روی بازهٔ یکه مجموعه‌هایی از نوع $F_{\sigma\delta}$ و از ردهٔ اول در فضای لبگ $L^p[0,1]$، $p \geq 1$، هستند.*

ریموند اَدَمز[۲] و کلارکسون[۳] نتایج فوق را در سال ۱۹۳۹ گسترش داده‌اند.

اکنون نمونه‌ای دیگر از این نوع اثبات‌های وجودی را می‌آوریم که ساختن حتی یک مثال برای آن بسیار دشوار به‌نظر می‌رسد. گوییم تابع $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $x \in [0,1]$ دارای *ماکسیمم موضعی سره* است اگر $\epsilon > 0$ موجود باشد که

$$y \in [0,1], \quad 0 < |y - x| < \epsilon \Longrightarrow f(y) < f(x).$$

به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که یک تابع حداکثر تعداد شمارا نقطهٔ ماکسیمم موضعی سره دارد. در سال ۱۹۸۳، پوزی[۴] و وون[۵] مثالی صریح از تابعی روی بازهٔ $[0,1]$ ساختند که مجموعهٔ نقاط ماکسیمم موضعی سرهٔ آن در $[0,1]$ چگال است. ساختن مثالی از تابعی که مجموعهٔ نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی سرهٔ آن، چگال باشد بسیار پیچیده به نظر می‌آید. اما در سال ۱۹۸۵، دوروبوت[۶] و مارین[۷] وجود چنین تابعی را ثابت کردند.

قضیه ۷.۳ (دوربوت-مارین، ۱۹۸۵). *مجموعهٔ توابع حقیقی روی بازهٔ $[0,1]$ که مجموعهٔ نقاط ماکسیمم موضعی (مینیمم موضعی) سرهٔ آنها چگال باشد، یک مجموعهٔ مانده‌ای در $C[0,1]$ است.*

[۱] A. M. Bruckner [۲] C. Raymond Adams [۳] J. C. Clarkson [۴] E. E. Posey [۵] J. E. Vaughan [۶] V. Drobot [۷] M. Morayne

به یاد آورید که تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در نقطهٔ $x \in \mathbb{R}$ *تحلیلی* گوییم اگر سری تیلور وابسته به آن در یک همسایگیِ x به f همگرا باشد و تابع f را از ردهٔ C^∞ گوییم اگر از هر مرتبه مشتق داشته باشد. با استفاده از قضیهٔ بِر می‌توان نشان داد که بین این دو مفهوم تفاوتی وجود دارد. قضیهٔ زیر متعلق به مورگنشترن[۱] است.

قضیه ۸.۳ (مورگنشترن، ۱۹۳۸). *توابع از ردهٔ C^∞ نوعاً در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیستند.*

باید اضافه کنیم که ریاضیدانان بزرگی همانند لاگرانژ، بَبِج[۲]، هرشل[۳] و پیکاک[۴] بر این باور بودند که هر تابع از ردهٔ C^∞ را می‌شود با سری توانیِ وابسته به آن نمایش داد. چنین فرضی تا سال ۱۸۱۶ درست شمرده می‌شد. این فرض ایجاب می‌کند که تابع و مشتقاتش در یک نقطه، تابع را در یک همسایگی آن نقطه کاملاً مشخص کنند. اما وقتی فوریه سری توانی‌ای ساخت که فقط در بازهٔ $(۰, ۱)$ همگرا بود، فرض مذکور مورد تردید قرار گرفت و این منجر به بازبینیِ انتقادی مفاهیم تابع، سری نامتناهی و مشتق شد. در سال ۱۸۲۱ نیز کُشی مثال نقض معروف خود را برای رد این ادعای لاگرانژ که تابع‌های متمایز، سری‌های توانی متمایز دارند، عرضه کرد: سری توانی تابع حقیقی f که با ضابطه $f(۰) = ۰$ و $f(x) = e^{-۱/x^۲}$ برای $x \neq ۰$ تعریف می‌شود، در یک همسایگی مبدأ با سری توانی تابع ثابت صفر یکی است.

حال که سخن به سری‌های تیلور رسید، خوب است به یکی از سرچشمه‌های آنالیز ریاضی، یعنی نظریهٔ سری‌های فوریه هم نظری بیفکنیم. در سال ۱۸۲۹، دیریکله ثابت کرد که سری فوریهٔ وابسته به یک تابع پیوسته و تکه‌ای-هموار روی $[-\pi, \pi]$ در هر نقطه همگرا است. او در پایان مقاله‌اش می‌گوید که بر این باور است که سری فوریهٔ وابسته به هر تابع پیوسته، در همهٔ نقاط همگرا است. باور ریاضیدانان بزرگی همچون ریمان، وایراشتراس و ددکیند نیز طی ۴۰ سال بعد همین بود. اما در سال ۱۸۷۶ دوبوا-ریمون تابعی پیوسته روی $[-\pi, \pi]$ مثال زد که سری فوریهٔ وابسته به آن روی یک مجموعهٔ چگال همگرا نبود. فِیِر[۵] مثال دوبوا-ریمون را ساده‌تر کرد و تابعی مثال زد که سری آن در برخی نقاط همگرا نبود. هاردی[۶] و روگوسینسکی[۷] هم در سال ۱۹۵۰ مثال دیگری از همین دست ارائه کردند. کولموگُرُف[۸] در سال ۱۹۲۶ ثابت کرد که تابعی در $L^۱[-\pi, \pi]$ وجود دارد که سری فوریهٔ وابسته به آن همه‌جا واگرا است. باور همگان این بود که فقط باید زمان بگذرد تا مثالی از یک تابع پیوسته با سری فوریهٔ همه‌جا واگرا به‌دست آید! این باور همگانی نیز درست نبود، زیرا در سال ۱۹۶۶ کارلسون[۹]، ریاضیدان سوئدی، نشان داد که سری فوریهٔ توابع پیوسته تقریباً همه‌جا همگرا است که نتیجه‌ای بسیار عمیق است. در واقع او ثابت کرد که اگر $X = L^p[-\pi, \pi]$، $۱ \leq p \leq \infty$، یا $X = C[a, b]$، آن‌گاه یا تابعی در X وجود دارد که سری فوریهٔ وابسته به آن همه‌جا واگرا است یا سری فوریهٔ وابسته به هر عضو X تقریباً همه‌جا همگرا است و

[1] A. P. Morgenstern [2] C. Babbage [3] J. Herschel [4] G. Peacock [5] L. Fejér [6] G. H. Hardy [7] W. W. Rogosinski [8] A. N. Kolmogorov [9] L. Carleson

بنابر قضیهٔ کولموگُرُف، $L^{1}[-\pi,\pi]$ از نوع اول است. لوزین[1] در سال ۱۹۱۵ حدس زده بود که مطابقِ تقسیم‌بندی کارلسون، $L^{2}[-\pi,\pi]$ فضایی از نوع دوم است. کارلسون در سال ۱۹۶۸ حدس لوزین را تأیید کرد. پس از آن، هانت[2] در همان سال، نتیجهٔ کارلسون را به فضاهای $L^p[-\pi,\pi]$ که $p>1$ گسترش داد.

یک پرسش طبیعی این است که آیا به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه-صفر، تابعی در L^p ($p>1$) یا تابعی پیوسته وجود دارد که سری فوریهٔ وابسته به آن، روی آن مجموعه واگرا باشد؟ نخست استِچکین[3] در سال ۱۹۵۱ نشان داد که اگر $E\subseteq\mathbb{T}$ اندازه-صفر باشد، تابعی با این خاصیت در $L^{2}(0,2\pi)$ وجود دارد. سپس در سال ۱۹۶۳ تایکِف[4] نشان داد که این تابع را می‌توان در $L^p(0,2\pi)$ که $1\le p\le\infty$ نیز پیدا کرد. در سال ۱۹۶۵، کاهان[5] و کتس‌نلسون نشان دادند که تابعی پیوسته وجود دارد که سری فوریه‌اش روی یک مجموعهٔ اندازه-صفر مفروض واگرا است. بوزدالین[6] در سال ۱۹۷۰ با استفاده از روش کاهان و کتس‌نلسون نشان داد که برای هر مجموعهٔ اندازه-صفر، تابع حقیقی مقدارِ پیوسته‌ای وجود دارد که سری فوریه‌اش روی آن مجموعه واگرا است. در سال‌های ۱۹۶۶ و ۱۹۶۸ کارلسون و هانت مستقلاً نشان دادند که سری فوریهٔ وابسته به هر تابع عضوِ $L^p(\mathbb{T})$ ($p>1$) تقریباً همه‌جا همگرا است. سرانجام، کاهان [20] در سال ۲۰۰۰ با استفاده از قضیهٔ کوراتوفسکی-اولام، قضیهٔ ۴.۲، این نتایج را گسترش داد.

قضیه ۹.۳ (کاهان، ۲۰۰۰). *(۱) سری فوریهٔ وابسته به هر تابع پیوستهٔ نوعی روی $\mathbb{T}$، نوعاً همه‌جا[7] روی $\mathbb{T}$ واگرا است؛*

(۲) مجموعهٔ $\mathbb{T}$ دارای زیرمجموعهٔ چگال G_δ مانند E است به‌طوری که به‌ازای هر $f\in C(\mathbb{T})$ سری مثلثاتی (و نه لزوماً فوریه) وابسته به f دارای مجموع جزئی یکنواخت-کراندار است؛

(۳) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ اندازه-صفر F_σ از $\mathbb{T}$ مانند E، سری فوریهٔ وابسته به هر تابع پیوستهٔ نوعی، روی E واگرا است؛

(۴) عموماً سری‌های فوریهٔ وابسته به تابع‌های لبگ-انتگرال‌پذیر همه‌جا واگرا هستند.

توجه کنید که بنا به قضیهٔ کارلسون، قسمت (۳)ی این قضیه بهترین نتیجهٔ ممکن است. پس اگر $E\subseteq\mathbb{T}$ و

$$\mathcal{F}_E=\{f\in C(\mathbb{T})|\ \text{دنبالهٔ } (S_n(f)(t))_n \text{ برای هر } t\in E \text{ بی‌کران است}\},$$

آن‌گاه $\mathcal{F}_E\neq\emptyset$ اگر و تنها اگر E اندازه-صفر باشد. اگر E شمارا باشد، آن‌وقت $\mathcal{F}_E$ در $C(\mathbb{T})$ یک مجموعهٔ مانده‌ای است. در اینجا $S_n(f)$ مجموع جزئی nاُم سری فوریه را نشان می‌دهد.

[1]N. Luzin [2]R. A. Hunt [3]S. B. Stechkin [4]L. V. Taikov [5]J. P. Kahane [6]V. V. Buzdalin [7]quasi everywhere

در سال ۲۰۱۰ کاراگولیان[۱] حکمی ثابت کرد که بسیاری از این نتایج حالت‌های خاص آن به‌شمار می‌آیند [۲۱]. برای بیان این حکم، به چند تعریف نیاز داریم. فرض کنیم دنباله‌ای از عملگرهای خطی به‌صورت زیر بر فضای $L^1(a,b)$ تعریف شده باشد:

$$T_n f(x) = \int_a^b K_n(x,t) f(t)\, dt, \quad |K_n(x,t)| \le M_n \quad \forall x,t \in [a,b]$$

که در آن، (M_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت است. گوییم دنبالهٔ (T_n) *ویژگی موضعی‌سازی* (ویژگی L) دارد اگر به‌ازای هر $f \in L^1(a,b)$ که روی بازه باز $I = (\alpha,\beta)$ برابر با ۱ است، داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} T_n f(x) = 1 \quad (x \in I)$$

و این همگرایی روی هر مجموعهٔ بسته $A \subseteq I$ یکنواخت باشد.

قضیه ۱۰.۳ (کاراگولیان، ۲۰۱۰). *اگر دنبالهٔ عملگرهای (T_n) که در بالا تعریف شد، دارای ویژگی L باشد، آن‌گاه به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه-صفرِ $E \subseteq [a,b]$ مجموعه‌ای مانند $G \subset [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که*

$$\lim_{n\to\infty} \sup T_n \chi_G(x) \ge 1, \quad \lim_{n\to\infty} \inf T_n \chi_G(x) \le 0 \quad \forall x \in E.$$

این قضیه را مثلاً می‌توان در مورد عملگرهای مجموع‌های جزئی سری فوریه نسبت به هر پایهٔ متعامدیکه به‌کار برد. همچنین به‌جای مجموع‌های جزئی می‌توان میانگین خطی مجموع‌های جزئی نسبت به هر روش مجموع‌یابی منظم $T = (a_{ij})$ را به‌کار گرفت.

نتیجه ۱۱.۳. *فرض کنیم $\Phi = \{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$، $x \in [a,b]$، یک پایهٔ متعامدیکه برای $L^2(a,b)$ و T یک روش مجموع‌یابی خطی منظم دلخواه باشد. در این صورت به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه-صفر مانند E مجموعهٔ $G \subset [a,b]$ وجود دارد که سری فوریهٔ وابسته به تابع $f = \chi_G$ برحسب پایهٔ Φ در هر نقطه از E نسبت به روش T واگرا است.*

ذکر قضیهٔ زیر نیز خالی از لطف نیست.

قضیه ۱۲.۳ (مولر[۲]، ۲۰۱۰). *اگر $f \in C(\mathbb{T})$ و $(S_{n_i}(f))_i$ زیردنباله‌ای از $(S_n(f))_n$ باشد، آن‌گاه زیرمجموعه‌ای چگال و G_δ مانند E از $\mathbb{T}$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $t \in E$ زیردنباله‌ای از $(S_{n_i}(f))_i$ همگرا به $f(t)$ موجود است.*

---

[۱] G. A. Karagulyan [۲] J. Müller

در سال ۲۰۰۵، بایار[1] محکی برای عام بودنِ توپولوژیک عرضه کرد که نتایج قبلی، حالت‌های خاص آن بودند [۹]. او ثابت کرد که اگر یک فرآیند حدی برای یک تابع و در یک نقطه بی‌کران–واگرا باشد، آن‌گاه آن فرآیند در هر نقطهٔ نوعی و برای نوعاً هر تابع، واگرا می‌شود.

قضیه ۱۳.۳ (بایار، ۲۰۰۵). *فرض کنیم X یک فضای باناخ و G یک گروه آبلی متریپذیر کامل باشد. فرض کنیم $(T_t)_{t\in G}$ گروه پیوسته از عملگرهایی باشد که روی X عمل می‌کنند و هر یک از آنها طولپا است. فرض کنیم (ϕ_n) دنباله‌ای از تابعک‌های خطی پیوسته روی X باشد و به‌ازای هر $f \in X$ و هر $t \in G$ تعریف می‌کنیم $\phi_n(f,t) = \phi_n(T_t f)$. اگر به‌ازای هر $M > 0$ و $N \in \mathbb{N}$، عدد $n > N$ و عضو $g \in X$ موجود باشد به‌قسمی که $\|g\| \leq 1$ و $|\phi_n(g,0)| > M$، آن‌گاه برای نوعاً هر $f \in X$ دنبالهٔ $(\phi_n(f,t))_n$ در هر نقطهٔ نوعیِ $t \in G$ بی‌کران–واگرا است.*

به‌ویژه اگر $g \in X$ موجود باشد که دنبالهٔ $(\phi_n(g,0))_n$ بی‌کران–واگرا باشد، آن‌گاه شرط گفته‌شده در قضیه برقرار است. قضیه‌ای دیگر از بایار وجود دارد که نشان می‌دهد اگر فرآیند حدگیری همه‌جا بی‌کران–واگرا باشد، این ویژگی بی‌کران–واگرایی در همه‌جا، توپولوژیکی–عام است.

قضیه ۱۴.۳ (بایار، ۲۰۰۵). *فرض کنیم X یک فضای باناخ و E یک فضای توپولوژیک σ–فشرده باشد. فرض کنیم به‌ازای هر $t \in E$ و هر $n \geq 0$ تابعک خطی $\phi_n(.\,,t)$ چنان باشد که $\phi_n : X \times E \to \mathbb{C}$ پیوسته است. به‌ازای هر $g \in X$ و هر $t \in E$ قرار می‌دهیم*

$$S_n(g,t) = \sup_{n>N} |\phi_n(g,t) - \phi_N(g,t)|.$$

اگر به‌ازای هر $M > 0$، هر $N \in \mathbb{N}$ و هر مجموعهٔ فشرده مانند K در E، $g \in X$ موجود باشد که $\|g\| \leq 1$ و $S_N(g,t) > M$ به‌ازای هر $t \in K$، آن‌گاه به‌ازای نوعاً هر $f \in X$، دنبالهٔ $(\phi_n(f,t))_{n\geq 0}$ در هر نقطهٔ $t \in E$ بی‌کران–واگرا است.

توجه کنید که شرط مذکور در قضیهٔ بالا از شرط قوی‌تر زیر نتیجه می‌شود: $g \in X$ موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $t \in E$، دنبالهٔ $(\phi_n(g,t))_n$ بی‌کران–واگرا است.

بازمی‌گردیم به فضایی که این بخش را با آن آغاز کردیم، یعنی فضای توابع پیوسته روی بازهٔ $[0,1]$. فرض کنیم f و g دو تابع بُرل–اندازه‌پذیر روی بازهٔ $I = [0,1]$ باشند. پیچش آنها را به‌صورت

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

[1] F. Bayart

تعریف می‌کنیم. اگر f و g پیوسته باشند، به‌راحتی می‌توان دید که $f*g$ نیز پیوسته است. میکوسینسکی[۱] در درس‌گفتارهایش دربارهٔ حساب عملگری پرسیده بود آیا دو تابع $f, g \in C[0, \infty)$ وجود دارند که تابع $f*g$ در هیچ نقطه‌ای مشتق نداشته باشد. چنین مسئله‌ای دربارهٔ مشتق‌پذیریِ سری‌های فوریه نیز مطرح می‌شود. در سال ۱۹۵۱ یارنیک[۲] به این سؤال پاسخ داد.

قضیه ۱۵.۳ (یارنیک، ۱۹۵۱). *مجموعهٔ زوج‌های (f, g) در $C[0,1] \times C[0,1]$ (مجهز به توپولوژی حاصل‌ضربیِ توپولوژی یکنواخت روی $C[0,1]$) که $f*g$ در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نباشد، یک مجموعهٔ مانده‌ای است.*

به دیگر سخن، مشتق‌پذیر نبودنِ $f*g$ رفتار عام توابع در $C[0,1] \times C[0,1]$ است. این نتیجه را یارنیک در سال ۱۹۷۳ به حاصل‌ضرب kتاییِ این فضا تعمیم داد. مسئله‌ای مشابه را بُگدانوویچ[۳] در سال‌های ۱۹۵۸ و ۱۹۶۳ بررسی کرده است.

قضیه ۱۶.۳ (بُگدانوویچ، ۱۹۶۳). *مجموعهٔ تابع‌های $f \in C[0,1]$ که f ، $f*f$ ، $f*f*f$ ، ... در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نباشند، یک مجموعهٔ مانده‌ای است.*

واخویچ[۴] در رسالهٔ دکتریِ خود به بررسی برخی مجموعه‌های مانده‌ای در فضاهای تابعی آشنا پرداخت. از جمله مسئلهٔ مشابهی را برای اعمال متداول بین توابع بررسی کرده است [۳۱].

قضیه ۱۷.۳ (واخویچ، ۲۰۰۲). *اگر $\phi : C[0,1] \times C[0,1] \to C[0,1]$ هر یک از اعمال ضرب، جمع یا ترکیب تابع‌ها باشد، آن‌گاه*

$$\{(f,g) \in C[0,1] \times C[0,1] \,|\, \phi(f,g) \text{ در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست}\}$$

در $C[0,1] \times C[0,1]$ یک مجموعهٔ مانده‌ای است.

به زبان رسته‌ای، تقریباً همهٔ اعضای $C[0,1] \times C[0,1]$ چنان هستند که جمع (ضرب و ترکیب) آنها در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست. واخویچ به همراه استاد راهنمایش، بالتسرزاک[۵]، در [۶] لاغر بودنِ برخی مجموعه‌های متداول در فضای حاصل‌ضربی $X \times X$ را بررسی کردند که در آن، X فضای $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$، $(L^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ و $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ است. این قضیه‌ها نشان می‌دهند که پدیده‌های مورد بررسی آنها در واقع رفتارهای عام توابع و دنباله‌ها هستند.

[۱] J. Mikusinski [۲] V. Jarník [۳] W. Bogdanwicz [۴] A. Wachowicz [۵] M. Balcerzak

قضیه ۱۸.۳ (بالتسرزاک–واخویچ، ۲۰۰۰). *(۱) مجموعهٔ*

$$E = \Big\{ ((a_i),(b_i)) \in c_\circ \times c_\circ \,\Big|\, \text{کراندار است}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)_n \text{دنبالهٔ} \Big\}$$

مجموعه‌ای لاغر و از نوع F_σ در فضای باناخ $c_\circ \times c_\circ$ است؛

(۲) مجموعهٔ

$$E = \Big\{ (f,g) \in L^1[\circ,1] \times L^1[\circ,1] \,\Big|\, \int_\circ^1 |fg| < \infty \Big\}$$

مجموعه‌ای لاغر و از نوع F_σ در $L^1[\circ,1] \times L^1[\circ,1]$ است.

برهان‌ها مقدماتی هستند. مثلاً برای اثبات قسمت (۱) قرار می‌دهیم $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{mn}$ که در آن،

$$E_{mn} = \Big\{ ((a_k),(b_k)) \,\Big|\, \Big|\sum_{1}^{n} a_k b_k\Big| < m \Big\}.$$

به‌راحتی دیده می‌شود که E_{mn}ها بسته‌اند و در نتیجه E مجموعه‌ای F_σ است. سپس ثابت می‌شود که مجموعهٔ E مرزی نیز هست و لذا مجموعه‌ای لاغر است. اثبات اساساً به روشی انجام می‌شود که در نتایجی از این گونه، مرسوم است و به باناخ و مازورکیه‌ویچ منسوب است. در بخش بعد، گسترش این نتایج را خواهیم آورد. خوانندهٔ هوشیار همین‌جا بوی روش اثبات اصل کرانداری یکنواخت را احساس می‌کند!

پیش از به پایان بردنِ این بخش، اجازه دهید همان‌طور که امروزه مرسوم است، کاربردی از این نتایج را در آنالیز غیرخطی و نظریهٔ نقطهٔ ثابت بیان کنیم. اما نخست چند اصطلاح رایج را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) دو فضای متری باشند. تابع $f : X \to Y$ را نگاشت *غیرانبساطی* گوییم اگر به‌ازای هر $x,y \in X$، $\rho(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$ و *انقباضی* گوییم اگر عدد $k < 1$ موجود باشد که به‌ازای هر $x,y \in X$، $\rho(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$. فضای همهٔ توابع کراندار پیوسته از X به Y با متر

$$d_s(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x)) | x \in X\}$$

یک فضای متری کامل است.

قضیه‌ای معروف از باناخ بیان می‌کند که هر نگاشت انقباضی روی یک فضای متری کامل نقطهٔ ثابت یکتا دارد و از طرفی، نگاشتی غیرانبساطی روی فضای متری کامل وجود دارد که نقطهٔ ثابت ندارد. لذا به‌طور طبیعی این پرسش مطرح می‌شود که در خانوادهٔ نگاشت‌های غیرانبساطی، بزرگی مجموعهٔ نگاشت‌هایی که شرایط قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ را دارند، چقدر است؟ با در نظرگرفتنِ مجموعهٔ نگاشت‌هایی

بجز غیرانبساطی‌ها و تعریف‌های دیگری برای نقطهٔ ثابت، این پرسش جنبه‌های گوناگونی می‌یابد. ظاهراً اولین‌بار دِبلَزی[۱] و مِیاک[۲] در سال ۱۹۷۶ به این‌گونه پرسش‌ها پرداخته‌اند [۱۴].

قضیه ۱۹.۳ (دِبلَزی–مِیاک، ۱۹۷۶). *مجموعهٔ نگاشت‌های انقباضی از یک مجموعهٔ کراندار، محدب، بسته و ناتهی در یک فضای باناخ K به K مجموعه‌ای لاغر در فضای همهٔ نگاشت‌های غیرانبساطی از K به K است.*

دو نفر از پژوهشگران برجسته در این حوزه، اهم نتایج را در [۲۶] گرد آورده‌اند.

۴. اصل کرانداری یکنواخت، قضیهٔ بِر، و عام بودنِ توپولوژیکی

اولین بار لبگ در سال ۱۹۰۵ ضمن پژوهش دربارهٔ سری‌های فوریه روشی را به‌کار برد که به روش *برآمدگیِ شناور*[۳] موسوم است [۲۸]. او برای ساختن تابعی پیوسته با دورهٔ تناوب 2π روی $[0, 2\pi]$ که سری فوریه‌اش در 0 واگرا باشد، به این روش عمل کرد: به‌ازای تابعی پیوسته مانند g دنبالهٔ (g_n) از توابع متناوب پیوسته و با تغییرات کراندار را چنان یافت که $|g_n| \leq 1$ روی $[0, 2\pi]$ و $S_n(g_n)(0) \to \infty$. سپس تعریف کرد

$$F(x) = \epsilon_1 f_1(n_1 x) + \epsilon_2 f_2(n_2 x) + \cdots + \epsilon_k f_k(n_k x) + \cdots$$

که در آن، $\epsilon_k > 0$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = 1$ و f_k توابع با تغییرات کراندار، متناوب و پیوسته هستند به‌طوری که $|f_k| \leq 1$ روی $[0, 2\pi]$ و به‌ازای دنباله‌ای صعودی مانند (p_k) از اعداد صحیح، $|S_{p_k}(f_k)(0)| \geq \frac{k}{\epsilon_k}$. سپس دنبالهٔ صعودی (n_k) از اعداد طبیعی را چنان انتخاب کرد که $n_k > n_{k-1}p_{k-1}$ و برای تابع پیوسته با تغییرات کراندار $F_k(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \epsilon_i f_i(n_i x)$ داشته باشیم $|S_n(F_k(0))| \leq 2$ به‌ازای هر $n \geq n_k$. لذا برای $j > k$ مجموع $n_k p_k$ جملهٔ اول سری فوریهٔ $f_j(n_j x)$ به جملهٔ نخست سری، تقلیل می‌یابد و لذا از ۱ کمتر است. در نتیجه به‌ازای همهٔ kها، $|S_{n_k p_k}(F)(0)| \geq k - 3$. لبگ همچنین در سال ۱۹۰۹ از این روش برای یافتن شرایطی روی هسته $K_n(t, x)$ استفاده کرد که همگرایی دنبالهٔ $\int_0^b f(t) K_n(t, x) dx$ را به $f(x)$ تضمین کنند. اینجا نمونه‌ای از نتایج او را می‌آوریم.

قضیه ۱.۴ (لبگ، ۱۹۰۹). *فرض کنیم f تابعی انتگرال‌پذیر باشد. شرط لازم و کافی برای اینکه برای دنبالهٔ (ϕ_n) از توابع کراندار داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\phi_n(x) dx = 0$ این است که $M > 0$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر n و تقریباً هر x، $|\phi_n(x)| \leq M$ و $\lim_{n\to\infty} \int_0^\alpha \phi_n(x) dx = 0$ به‌ازای هر $\alpha \in (0, 1)$.*

[۱] F. S. De Blasi [۲] J. Myjak [۳] gliding hump

لبگ با استفاده از روش برآمدگیِ شناور در فضاهای $L^{۲}[a,b]$ و $L^{\infty}[a,b]$ نشان داد اگر دنباله‌ای در $L^{۲}[a,b]$ همگرای ضعیف باشد، روی گوی یکه کراندار است. طی ۲۰ سال پس از آن، از این روش به صورت‌های گوناگونی استفاده می‌شد. در سال ۱۹۰۷ لانداو[۱] ثابت کرد که اگر به‌ازای هر $(x_k) \in \ell^p$ سری $\sum_{k=۱}^{\infty} x_k y_k$ همگرا باشد، آنگاه $(y_k) \in \ell^q$ که در آن، q *نمای مزدوج* $p \geq ۱$ است. یک سال بعد از لبگ، هلینگر[۲] و توپلیتس[۳]، شاگردان هیلبرت، به روشی مشابه و مستقل از لبگ، نتیجه‌ای را ثابت کردند که تعریف هیلبرت برای کرانداریِ فرم‌های دوخطی را کامل می‌کرد و در عین حال عجیب به نظر می‌رسید. در واقع آنها نشان دادند که اگر (a_{ij}) دنباله‌ای دوگانه باشد و سری $A(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$ به‌ازای هر $x = (x_i)$ و $y = (y_j)$ در $\ell^{۲}$ همگرا باشد، آنگاه

$$\sup\{|A(x,y)| \mid \|x\|_{۲}, \|y\|_{۲} \leq ۱\} < \infty.$$

به دیگر سخن، A روی حاصل‌ضرب گوی واحد بسته در $\ell^{۲}$ یکنواخت–کراندار است. شور[۴] نیز در سال ۱۹۲۱ به روشی مشابه، قضیهٔ معروفش دربارهٔ یکی بودنِ همگرایی نسبت به نرم و همگرایی ضعیف در فضای $\ell^{۱}$ را ثابت کرد.

در سال ۱۹۱۲، هلی[۵] صورتی از اصل کرانداری یکنواخت را برای تابعک‌های خطی پیوسته روی $C[a,b]$ ثابت کرد که در نظر ما بسیار مدرن است. او نشان داد که اگر (u_i) دنباله‌ای از تابعک‌های خطی کراندار پیوسته روی $C[a,b]$ باشد به‌طوری که $\lim_i u_i(f) = u(f)$ برای هر $f \in C[a,b]$ موجود باشد و u تابعک خطی پیوسته باشد، آنگاه $\sup_i \|u_i\| < \infty$.

در سال ۱۹۲۲، هانس هان[۶] با توجه به نتایج لبگ دربارهٔ انتگرال‌های تکین و نتایج شور دربارهٔ جمع‌پذیری، صورت مجردی از اصل کرانداری یکنواخت را برای تابعک‌های خطی پیوسته روی فضاهای باناخ عرضه کرد. آنچه او ثابت کرد، نتایج قبلی از جمله نتایج لبگ دربارهٔ همگرایی ضعیف در فضای $L^p[a,b]$ را ایجاب می‌کرد. باناخ نیز در رسالهٔ دکتریِ خود [۷] که آن را در سال ۱۹۲۰ ارائه کرد و در ۱۹۳۲ چاپ شد، صورت مجردی از این اصل را برای عملگرهای خطی پیوسته بین فضاهای برداری نرمدار کامل ثابت کرد. این صورت را امروزه قضیهٔ باناخ–اشتاینهاوس می‌نامند: گیریم X و Y دو فضای باناخ باشند. اگر (T_k) دنباله‌ای از عملگرهای خطی پیوسته از X به Y باشد و $\lim_k T_k(x) = T(x)$ به‌ازای هر $x \in X$ موجود باشد، آنگاه T عملگر خطی پیوسته و دنبالهٔ $(\|T_k\|)_k$ کراندار است. برای آشنایی مختصر با زندگی‌نامه باناخ، [۲] را ببینید. در سال ۱۹۲۳ هیلدبرانت[۷] صورت غیرخطیِ این اصل را برای تابعک‌های زیرجمعی کراندار ثابت کرد.

---

[۱] E. Landau [۲] E. Hellinger [۳] O. Toeplitz [۴] I. Schur [۵] E. Helly [۶] H. Hahn [۷] T. H. Hildebrandt

در سال ۱۹۲۶ باناخ باتوجه به کارهای لبگ و به‌ویژه قضیهٔ ۱.۴ شرط لازم و کافی روی دنبالهٔ توابع $(K_n(x,y))_n$ را به‌دست می‌دهد که به‌ازای هر x و هر تابع انتگرال‌پذیر f داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{۱} K_n(x,y)f(y)\,dy = ۰.$$

سپس می‌پرسد تحت چه شرایطی تساوی بالا برای هر تابع اندازه‌پذیر و تقریباً هر x برقرار است. او حالت مجرد را در نظر می‌گیرد: فرض کنیم E فضای برداری نرمدار کامل و U عملگر خطی باشد که به هر $x \in E$ تابعی اندازه‌پذیر مانند $z(t)$ روی $[۰,۱]$ نسبت می‌دهد. به‌علاوه فرض کنیم اگر $x_n \to x$ در E، آن‌گاه $U(x_n) \to U(x)$ در اندازه (نمادها و اصطلاحات باناخ را تغییر نداده‌ایم). اگر $(U_n(x))_n$ دنباله‌ای از چنین عملگرهایی باشد و $\lim_n \sup_{[۰,۱]} U_n(x)$ به‌ازای هر x تقریباً همه‌جا متناهی باشد و $\lim_n U_n(x)$ برای هر x متعلق به مجموعه‌ای چگال در E تقریباً همه‌جا موجود باشد، آن‌وقت عملگر خطی پیوستهٔ U وجود دارد که دنبالهٔ $(U_n(x))_n$ به‌ازای هر x تقریباً همه‌جا به $U(x)$ همگرا است و $U(x)$ نسبت به همگرایی در اندازه پیوسته است. سپس چندین کاربرد از این قضیه را عرضه می‌کند که یکی از آنها اثبات قضیهٔ گفته‌شده در بالا از لبگ است. همچنین پاسخی به سؤالی که در بالا مطرح کردیم می‌دهد. در پایان، اثباتی برای وجود تابع همه‌جا پیوسته و هیچ‌جا مشتق‌پذیر می‌آورد. در واقع برای تابع پیوسته مانند x روی $[۰,۱]$ تعریف می‌کند

$$U_n(x)(t) = \frac{x(t+\lambda_n) - x(t)}{\lambda_n}$$

که در آن، (λ_n) دنباله‌ای از اعداد مثبت همگرا به صفر است. اگر هر تابع همه‌جا پیوسته تقریباً همه‌جا روی $[۰,۱]$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تقریباً همه‌جا

$$x'(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(x)(t) = U(x)(t).$$

لذا بنابر قضیه، $x'(t) = U(x)(t)$ باید در اندازه پیوسته باشد اما این طور نیست، زیرا دنبالهٔ توابع پیوسته $x_n(t) = ۱/n \sin(nt/۲\pi)$ به‌طور یکنواخت روی $[۰,۱]$ به صفر میل می‌کند ولی دنبالهٔ مشتق آن $(۱/۲\pi \cos(nt/۲\pi))_n$ در اندازه به صفر میل نمی‌کند. پس بنابر قضیهٔ بالا، تابع پیوستهٔ $x(t)$ موجود است که روی یک مجموعه با اندازهٔ مثبت در $[۰,۱]$ داریم

$$\limsup_{n\to\infty} U_n(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{x(t+\lambda_n) - x(t)}{\lambda_n} = \infty.$$

در سال ۱۹۲۷ باناخ و اشتاینهاوس به *اصل متراکم‌سازی تکینی‌ها* می‌پردازند. اصل متراکم‌سازی تکینی‌ها را هانکل، ریاضیدان قرن نوزدهم آلمان، معرفی کرده و به‌کار برده است. وی که در پیشرفت نظریهٔ

انتگرال ریمان سهمی مهم برعهده داشت، این روش را در سال ۱۸۷۰ برای ساختن توابع با تکینی‌هایی از نوع پیوستگی، مشتق‌پذیری یا نوسان در نامتناهی نقطه، معرفی کرده و آن را اصل متراکم‌سازی تکینی‌ها نامیده است. این روش را دینی به‌دقت مطالعه و بررسی کرده است. کانتور هم در سال ۱۸۸۲ صورتی از این اصل را برای حالتی که بخواهیم تکینی‌ها در یک مجموعهٔ چگال واقع باشند، به‌دست داده است. در این مقاله، باناخ و اشتاینهاوس این روش را برای تابعک‌های خطی به‌کار می‌گیرند. حاصل کار آنها قضیه‌هایی است که امروزه به اصل متراکم‌سازی تکینی باناخ–اشتاینهاوس معروف است و کاربردهای بسیاری در آنالیز حقیقی و مختلط و به‌ویژه در سری‌های مثلثاتی و سری‌های تابعی متعامد دارد. قضیهٔ آنها نتایج خاص قبلی را یکشکل می‌کند و آنها در پایان آن مقاله حالت‌های خاص شناخته‌شده و جدید را نیز می‌آورند.

قضیه ۲.۴ (باناخ–اشتاینهاوس، ۱۹۲۷). *(۱) فرض کنیم $(u_n(x))$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی پیوسته از یک فضای برداری نرمدار کامل به یک فضای برداری نرمدار باشد که $\limsup_{n\to\infty}\|u_n(x)\|$ به‌ازای xهای عضو یک مجموعه از رستهٔ دوم موجود و متناهی است. در این صورت $\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|$ نیز متناهی است؛*
(۲) فرض کنیم $(u_{pq}(x))$ دنباله‌ای دوگانه از عملگرهای خطی پیوسته از یک فضای برداری نرمدار کامل به یک فضای برداری نرمدار باشد. اگر برای هر p نقطهٔ x_p چنان موجود باشد که

$$\limsup_{q\to\infty}\|u_{pq}(x_p)\| = \infty,$$

آن‌وقت نقطه‌ای مانند x (مستقل از p) وجود دارد که $\limsup_{q\to\infty}\|u_{pq}(x)\| = \infty$؛
(۳) اگر $(u_{pq}(x))$ دنباله‌ای دوگانه از عملگرهای خطی پیوسته از یک فضای برداری نرمدار کامل به یک فضای برداری نرمدار باشد و به‌ازای هر p نقطهٔ x_p چنان موجود باشد که $\limsup_{q\to\infty} u_{pq}(x_p)$ واگرا باشد، آن‌وقت نقطه‌ای مانند x مستقل از p وجود دارد که دنبالهٔ $\lim_{q\to\infty} u_{pq}(x)$ واگرا است.

آنها برای اثبات این قضیه‌ها، همان‌طور که اکنون مرسوم است، نشان می‌دهند که اگر (u_n) دنباله‌ای از عملگرهای خطی پیوسته از یک فضای برداری نرمدار کامل به یک فضای برداری نرمدار باشد، آنگاه مجموعهٔ $A = \{x \mid \limsup_{n\to\infty}\|u_n(x)\| < \infty\}$ بسته است. برای این کار می‌نویسند

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \mid \|u_n(x)\| \le m\}$$

و نشان می‌دهند که اگر A از رستهٔ دوم باشد، $\limsup_{n\to\infty}\|u_n\| < \infty$. این روشِ اثبات را ساکس در مقاله‌ای در همان سال به‌کار برده است (توضیحات پایین را ببینید). توجه کنید که این روش، برهانی

برای قضیهٔ ۵.۲ نیز در اختیار می‌گذارد و با استفاده از آن می‌توان صورتی قوی‌تر از قسمت (۱) قضیهٔ بالا را ثابت کرد: چنانچه H خانواده‌ای از نگاشت‌های خطی پیوسته بین دو فضای برداری نرمدار کامل باشد به‌طوری که $\sup_{u\in H}\|u(x)\| < \infty$ به‌ازای هر x، آن‌گاه تابع $f(x) := \sup_{u\in H}\|u(x)\|$ نیم‌پیوستهٔ پایینی است و لذا در یک همسایگیِ صفر، کراندار است. پس $\sup_{u\in H}\|u\|$ متناهی است.

آنها چندین کاربرد از این قضیه را بیان می‌کنند. مثلاً می‌توان $\{g_k\}$ را دستگاه متعامد از توابع پیوسته روی بازهٔ $[\alpha,\beta]$ در نظر گرفت و تعریف کرد

$$S_n(f)=S_n(x)=\int_\alpha^\beta K_n(x,y)f(y)\,dy \quad \text{و} \quad K_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)g_k(y)$$

که در اینجا S_n، nاُمین مجموع جزئی بسط f برحسب g_k است. حال $C[a,b]$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x_p\in[\alpha,\beta]$ $(p\in\mathbb{N})$ و

$$u_{pq}(f)=S_q(f)|_{x=x_p}=\int_\alpha^\beta K_q(x_p,y)f(y)\,dy.$$

به‌روشنی u_{pq} عملگر خطی پیوسته روی $C[a,b]$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت که اگر (g_k) دستگاه متعامد از توابع پیوسته در $C[\alpha,\beta]$ باشد و به‌ازای هر نقطه مانند x_p تابع پیوستهٔ f موجود باشد که بسط آن برحسب (g_k) در نقطهٔ x_p واگرا باشد، آن‌گاه تابعی پیوسته وجود دارد که بسط آن همین خاصیت را نسبت به همهٔ نقاط x_p دارد. به‌جای توابع پیوسته می‌توان توابع انتگرال‌پذیر را در نظر گرفت و ثابت کرد تابع انتگرال‌پذیری مانند f وجود دارد که سری فوریهٔ وابسته به آن دارای خاصیت

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta |S_n(f,x)|dx=\infty$$

بر هر بازه مانند $[\alpha,\beta]$ است.

اما نکته جالبی که کمتر کسی دربارهٔ مقالهٔ مشترک باناخ–اشتاینهاوس می‌داند و آن را زیگموند[۱] در مقاله‌ای به‌مناسبت یادبود ساکس نقل می‌کند، این است که داور آن مقاله ریاضیدان معروف لهستانی، ساکس، بوده است. اثبات اولیهٔ باناخ و اشتاینهاوس مبتنی بر همان روش‌های معمول بوده است ولی ساکس روشی کاملاً جدید بر پایهٔ قضیهٔ رستهٔ بِر برای اثبات قضیه می‌یابد و آن را به آنها پیشنهاد می‌کند. آنها نیز این روش را ضمن یادآوریِ پیشنهاد ساکس به‌کار می‌برند [۳۳]. بدین ترتیب روش دیگری برای اثبات اصل کرانداری یکنواخت مبتنی بر قضیهٔ رستهٔ بِر، مرسوم می‌شود. ساکس در سال‌های ۱۹۲۷ و ۱۹۳۲ برخی از این نتایج و نتیجهٔ سال ۱۹۲۶ باناخ را تعمیم می‌دهد. برای نمونه، قضیهٔ زیر را ببینید که ساکس آن را در سال ۱۹۲۷ در مسیر تعمیم نتایج باناخ ثابت کرده است. روش اثبات همانی است که

[۱] A. Zygmund

به باناخ و اشتاینهاوس برای اثبات اصل متراکم‌سازی پیشنهاد داده بود. ساکس یکی از شخصیت‌های سرشناس ریاضیات لهستان بعد از جنگ جهانی اول است.

قضیه ۳.۴ (ساکس، ۱۹۲۷). *فرض کنیم $(u_n(x))$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی پیوسته از یک فضای نرمدار کامل به فضای توابع اندازه‌پذیر روی بازهٔ $(۰,۱)$ باشد (این فضا مجهز به همگرایی در اندازه است). اگر α عددی باشد که مجموعهٔ نقاط x که به‌ازای آنها $\limsup_{n\to\infty} u_n(x) < \infty$ روی زیرمجموعهٔ L از $(۰,۱)$ با اندازه بزرگتر از α برقرار است از رستهٔ دوم باشد، آن‌گاه گوی K و اعداد M و $\alpha_۰$ موجودند به‌طوری که $\alpha_۰ > \alpha$ و به‌ازای هر $x \in K$ روی زیرمجموعه‌ای از L که اندازه‌اش از $\alpha_۰$ بزرگتر است، داریم $\limsup_{n\to\infty} u_n(x) \leq M$.*

اشتاینهاوس در مقاله‌ای به سال ۱۹۲۹ نتایج سال ۱۹۲۶ باناخ را که در بالا اشاره کردیم و نیز مطالعات ساکس در این باره را تعمیم می‌دهد. او در آغاز مقاله اشاره می‌کند که قصد دارد روش‌هایی را که باناخ و ساکس به‌کار برده‌اند و ماهیت آنالیز تابعی دارند، برای حل مسئله‌های نظریهٔ توابع به‌کار گیرد. عنوان مقالهٔ او نزدیک به همین مضمون است. در ادامه، نمونه‌ای از قضیه‌های این مقاله را ذکر خواهیم کرد. اما پیش از آن، اجازه دهید نکته‌ای را بیفزاییم تا روشن شود چرا این افراد با ابزارهای نوین به بررسی مسائل و مثال‌های ریاضیات کلاسیک دوران خود می‌پرداختند. اشتاینهاوس که پیش از سال ۱۹۱۴ در گوتینگن آلمان دانشجو بود، در بازگشت به لووف[1] آموخته‌هایش، یعنی پیشرفت‌ها و جریان‌های معاصر در آنالیز ریاضی را به ارمغان آورد. از جملهٔ این آموزه‌ها آنالیز تابعی بود که به‌ویژه تحت تأثیر تحقیقات ولترا، آدامار و هیلبرت در حال تولد بود. آنالیز تابعی با ایده‌های بدیعِ باناخ و شاگردان او نظیر مازور، شاودر، اورلیچ، اولام و دیگران جان گرفت و ریاضیات را در لووف قدرت و هویتی مستقل داد. اشتاینهاوس، باناخ را مهم‌ترینِ کشف‌های خود می‌دانست. اغلب گفته می‌شود که ریاضیات در بخش دیگر لهستان یعنی ورشاو تحت تأثیر توپولوژی و متغیرهای حقیقی بوده است که البته این ادعا دور از حقیقت نیست. این مطلب یکی از بسیار شاهدهایی است بر این باور خام فلسفیِ نویسنده که ریاضیات در هر زمان در وهلهٔ اول تحت تأثیر مسائل خوب و پس از آن تحت تأثیر افراد برجسته با ایده‌های بدیع برای حل آن مسائل بوده است.

بازگردیم به اشتاینهاوس! فرض کنیم E یک فضای برداری نرمدار کامل و T عملگری از E به فضای توابع اندازه‌پذیر (روی یک بازه یا روی یک فضای اندازهٔ مجرد Ω) باشد. دنبالهٔ (y_n) از توابع اندازه‌پذیر را *همگرای مجانبی* به تابع اندازه‌پذیر y گوییم اگر برای هر $\epsilon > ۰$ عدد طبیعی $n_۰$ یافت شود که اندازهٔ مجموعهٔ $\{t \in \Omega | \, |y_n(t) - y(t)| < \epsilon\}$ به‌ازای $n > n_۰$ از ϵ کمتر باشد. عملگر F را شبه‌جمعی (شبه‌همگن) گوییم اگر به‌ازای هر $x, y \in E$ و هر عدد λ

$$|T(x+y)| \leq |T(x)| + |T(y)|, \qquad |T(\lambda x)| \leq |\lambda| T(x).$$

[1] Lwów

اشتاینهاوس عملگر شبه‌جمعی، شبه‌همگن و پیوسته را شبه‌خطی و عملگر جمعی، همگن و پیوسته را خطی می‌نامد و اصطلاح اخیر را به آدامار به سال ۱۹۰۳ نسبت می‌دهد.

قضیه ۴.۴ (اشتاینهاوس، ۱۹۲۹). *فرض کنیم $(T_n)_n$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی یا شبه‌خطی از یک فضای برداری نرمدار کامل به فضای توابع اندازه‌پذیر روی Ω باشد. فرض کنیم به‌ازای هر نقطه x از مجموعه‌ای چگال مانند B^* در فضای E، $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ به‌ازای تقریباً هر نقطه از Ω. آن‌گاه می‌توان Ω را به دو زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر مانند $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ و E را به دو زیرمجموعه مانند $E_۱$ و $E_۲$ تجزیه کرد که $E_۱$ در E از رستهٔ اول و $E_۲$ از رستهٔ دوم باشد. به‌علاوه به‌ازای هر $x \in E$، تقریباً همه‌جا روی $\Omega_۱$ داریم $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ و به‌ازای هر $x \in E_۲$، $\limsup_{n\to\infty} |T_n(x)| = \infty$ تقریباً همه‌جا روی $\Omega_۲$.*

اشتاینهاوس سپس کاربردهای مختلفی از این قضیه از جمله وجود تابع همه‌جا پیوسته و تقریباً هیچ‌جا مشتق‌پذیر مانند f را نتیجه می‌گیرد که برای هر $|s| < \alpha$ و هر t

$$|f(t+s) - f(t)| \leq \phi(|s|)$$

که در اینجا ϕ یک تابع نامنفی با شرط $\lim_{s\to ۰} \phi(|s|)/|s| = +\infty$ است. همچنین تابعی پیوسته مانند $x(t)$ را می‌یابد به‌طوری که عبارت $\int_۰^۱ |x(\xi+t) - x(\xi)| w(t)\, dt$ برای تقریباً هر ξ نامتناهی باشد.

اکنون برمی‌گردیم به قضیهٔ ۱۸.۳. بنابه گفته نویسندگان [۶] داور مقاله اشاره می‌کند که روش اثبات بسیار شبیه به قضیهٔ باناخ–اشتاینهاوس است ولی آنها این ارتباط را درنمی‌یابند. یاخیمسکی که عضو هیأت داوران دفاع از رسالهٔ دکتری واخویچ بود، این مطلب را به‌درستی درمی‌یابد و نتایج آنها را گسترش می‌دهد. ابتدا اجازه دهید صورتی از قضیهٔ باناخ–اشتاینهاوس را بیان کنیم: فرض کنیم X یک فضای باناخ و Y یک فضای برداری نرمدار و (T_n) دنباله‌ای از عملگرهای خطی پیوسته از X به Y باشد. چنانچه (T_n) یکنواخت–کراندار نباشد، مجموعهٔ

$$\{x \in X \mid \text{دنبالهٔ } (T_n(x))_n \text{ کراندار است}\}$$

از رستهٔ اول است. برای به‌کار بردن این روش در اثبات قضیهٔ مذکور، به نسخهٔ غیرخطی قضیهٔ باناخ–اشتاینهاوس نیاز است. اشاره کردیم که برخی از این شکل‌ها اثبات شده‌اند. برای مثال، اگر $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $F_n : X \to \mathbb{R}^+$ نیم‌پیوستهٔ پایینی باشد و قرار دهیم

$$E = \{x \in X \mid \text{دنبالهٔ } (F_n(x))_n \text{ کراندار است}\},$$

آن‌گاه اگر E از رستهٔ دوم باشد، خانوادهٔ $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ روی مجموعه‌ای باز در X یکنواخت–کراندار است. تعمیمی از این حکم را یاخیمسکی در سال ۲۰۰۵ ثابت کرد: تابع $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ را L– زیرجمعی گوییم اگر عدد $L \geq ۱$ موجود باشد که $\phi(x+y) \leq L(\phi(x)+\phi(y))$ برای هر $x, y \in X$. همچنین ϕ زوج است اگر $\phi(-x) = \phi(x)$ به‌ازای هر $x \in X$.

قضیه ۵.۴ (یاخیمسکی، ۲۰۰۵). *فرض کنیم $X_۱$، $X_۲$، ...، X_k که $k \in \mathbb{N}$ فضاهای باناخ باشند و $X = X_۱ \times \cdots \times X_k$. فرض کنیم $L \geq ۱$ و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $F_n : X \to \mathbb{R}^+$ نیم‌پیوسته پایینی باشد و توابع $x_i \mapsto F_n(x_۱, \ldots, x_k)$ برای $۱ \leq i \leq k$ همگی L–زیرجمعی و زوج باشند. قرار می‌دهیم*

$$E = \{x \in X \mid \text{دنبالهٔ } (F_n(x))_n \text{ کراندار است}\}.$$

در این صورت حکم‌های زیر معادل‌اند:

الف) E لاغر است؛

ب) $E \neq X$؛

پ) $\sup\{F_n(x) | n \in \mathbb{N}, \|x\| \leq ۱\} = \infty$.

اگر X, Y, Z فضاهای باناخ باشند، $(T_n) \subseteq B(X \times Y, Z)$ و قرار دهیم

$$E = \{(x,y) \in X \times Y \mid \text{دنبالهٔ } (T_n(x,y)) \text{ کراندار است}\},$$

آن‌گاه حکم‌های زیر معادل‌اند:

الف) E در $X \times Y$ لاغر است؛

ب) $E \neq X \times Y$؛

پ) $\sup\{\|T_n\| | n \in \mathbb{N}\} = \infty$.

یاخیمسکی به‌عنوان کاربردی از این قضیه، تعمیمی از قضیه‌های بالتسرزاک–واخویچ را به‌دست می‌دهد.

قضیه ۶.۴ (یاخیمسکی، ۲۰۰۵). *(۱) فرض کنیم (α_n) دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد و قرار می‌دهیم*

$$E = \left\{((x_n),(y_n)) \in c_۰ \times c_۰ \;\middle|\; \text{دنبالهٔ } \Big(\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i y_i\Big)_n \text{ کراندار است}\right\}.$$

در این صورت E در $c_\circ \times c_\circ$ لاغر است اگر و تنها اگر $\alpha \notin l^1$؛

(۲) فرض کنیم (X, Σ, μ) یک فضای اندازه باشد و

$$E_p = \{(f, g) \in L^p(\mu) \times L^p(\mu) | fg \in L^p(\mu)\}.$$

در این صورت حکم‌های زیر معادل‌اند:

الف) E_p در $L^p(\mu) \times L^p(\mu)$ لاغر است؛

ب) $E_p \neq L^p(\mu) \times L^p(\mu)$؛

ج) $\inf\{\mu(A) | A \in \Sigma, \circ < \mu(A) < \infty\} = \circ$.

البته قضیه‌های اخیر صورت‌های قوی‌تری از نتایج اصلی یاخیمسکی است.

۵. باز هم معیارهایی برای سنجش بزرگیِ مجموعه‌ها

اندازهٔ لبگ روی $\mathbb{R}^n$ معیاری برای سنجش کوچکی مجموعه‌ها و شناخت ویژگی‌های تقریباً همه‌جایی در اختیار ما قرار می‌دهد. اما روی فضاهای مجرد کلی از پیش نمی‌توان اندازه‌ای قرار داد که مجموعه‌های اندازه–صفرِ کارآمدی به‌دست آید. گرچه روی هر گروه موضعاً فشرده می‌توانیم اندازهٔ بُرل منظم یکتایی تعریف کنیم، روی فضاهایی مانند $C[\circ, 1]$ چنین اندازه‌ای در اختیار نداریم و لذا در این گونه فضاها، کوچک‌بودن به مفهوم اندازه را نمی‌توان به‌کار گرفت. اما چنان‌که دیدیم، می‌توان از مفهوم رستهٔ اول بودن استفاده کرد. البته این مفهوم توپولوژیک است و در شناخت دلایل برخی از ویژگی‌های اشیاء در آنالیز ریاضی کارآمدیِ لازم را ندارد. برای نمونه، در بررسی رفتار مشتق‌پذیریِ توابع لیپ‌شیتسی، مفهوم رسته چندان مناسب به نظر نمی‌رسد. به همین دلیل، کریستنسن[1] در سال ۱۹۷۳ مفهوم مجموعه‌های هار–پوچ[2] را معرفی کرد [۱۲]. روی گروه‌های موضعاً فشرده، این مفهوم با مفهوم مجموعهٔ اندازه–صفر نسبت به اندازهٔ هار یکی می‌شود. توجه کنید که در حالت کلی بدون شرط موضعاً فشردگی روی یک گروه آبلی لزوماً اندازهٔ پایا تحت انتقال و یا حتی شبه‌پایا وجود ندارد (حتی روی فضاهای باناخ نامتناهی–بُعد جدایی‌پذیر هم چنین اندازهٔ غیرصفری وجود ندارد). لذا در بهترین حالت هم تعمیمی از اندازه لبگ وجود ندارد. اما می‌توان مفهوم مجموعهٔ پوچ (تحت انتقال پایا) را تعریف کرد. فرض کنیم X یک گروه آبلی مجهز به متر d باشد که تحت انتقال پایا است. اگر فضای متری (X, d) کامل و جدایی‌پذیر باشد، گوییم مجموعهٔ $A \subseteq X$ هار–پوچ است اگر یک اندازهٔ احتمال بُرل مانند μ روی X و مجموعهٔ بُرل $B \subseteq X$ موجود باشد به‌طوری که $A \subseteq B$ و $\mu(x + B) = \circ$ به‌ازای هر $x \in X$. توجه می‌کنیم که اندازه‌های بُرل متناهی روی فضاهای متری کامل جدایی‌پذیر، منظم و لذا خوش‌رفتار هستند. کریستنسن نشان داد

[1] J. P. R. Christensen [2] Haar-null

که مجموعه‌های هار–پوچ یک σ–ایدآل تشکیل می‌دهند و برای گروه موضعاً فشرده، مجموعهٔ هار–پوچ همان مجموعهٔ اندازه–صفر نسبت به اندازهٔ هار است. مجموعهٔ هار–پوچ را مجموعهٔ محجوب[۱] و متمم آن را مجموعهٔ *غالب*[۲] می‌نامند. یک مجموعهٔ عام (به‌تعبیر رسته‌ای) لزوماً غالب نیست و به‌عکس. اثبات محجوب بودن معمولاً دشوارتر از اثبات لاغر بودن است.

باید اشاره کرد که هانت[۳]، سور[۴] و یورک[۵] نیز در سال ۱۹۹۲ مستقل از کریستنسن این مفهوم را تعریف کرده‌اند و آن را در مطالعهٔ دستگاه‌های دینامیکی به‌کار گرفته‌اند [۱۷].

قضیهٔ زیر به نوعی نظیر قضیهٔ باناخ–مازورکیه‌ویچ است که مقاله را با آن آغاز کردیم اما نه نظیر عام بودنِ توپولوژیک بلکه عام بودن در چارچوب نظریهٔ اندازه.

قضیه ۱.۵ (هانت، ۱۹۹۴ و زائیچک، ۲۰۰۵). *(۱) ویژگی هیچ‌جا مشتق‌پذیری (نداشتن مشتق متناهی) در فضای $C[0,1]$ غالب است؛*

(۲) مجموعهٔ توابعی را در فضای $C[0,1]$ در نظر بگیرید که دست‌کم در یک نقطه مشتق (متناهی یا نامتناهی) دارند. نه این مجموعه و نه متمم آن هیچ‌یک هار–پوچ نیستند.

نتیجهٔ هانت را کولار[۶] در سال ۲۰۰۰ تعمیم داده است.

در [۲۲] که نویسندگان آن از برجسته‌ترین پژوهشگران معاصر هستند، نتایجی دربارهٔ توابع مشتق‌پذیر بین فضاهای باناخ آمده است. این موضوع ریشه در قضیهٔ معروف لبگ دربارهٔ تقریباً همه‌جا مشتق‌پذیریِ توابع یکنوا دارد. همچنین به‌آسانی می‌توان دید که در فضای دنباله‌هایی که مجموع مربعات آنها همگراست، ℓ^2، واگرا بودنِ سری حاصل از هر دنباله یک خاصیت غالب است. تعمیم‌های مختلفی بر اساس مفهوم هار–پوچ معرفی شده است؛ از جمله مفهوم هار–لاغر که در سال ۲۰۱۳ ارائه شده است [۱۳].

مفهوم دیگری که در این اواخر تعریف شده است، مجموعهٔ Γ–پوچ است که به شیوه‌ای ظریف مفهوم اندازه و رسته را در بر می‌گیرد. این مفهوم را لیندنشتراوس و پرایس[۷] در سال ۲۰۰۳ معرفی کردند و آن را به‌منظور بررسی مشتق فرشه برای توابع بین فضاهای باناخ به‌کار بردند.

فرض کنیم X فضای باناخ و $T=[0,1]^{\mathbb{N}}$ مجهز به توپولوژی حاصل‌ضربی و اندازهٔ لبگ حاصل‌ضربی $\lambda^{\mathbb{N}}$ باشد. مجموعهٔ توابع پیوسته مانند $\gamma : T \to X$ را که دارای مشتق‌های جزئی پیوستهٔ $D_j\gamma$، $j=0,1$، هستند با $\Gamma(X)$ نشان می‌دهیم. $\Gamma(X)$ را به توپولوژی حاصل از شبه‌نرم‌های

$$\|\gamma\|_{\leq k} = \max\{\|\gamma\|_\infty, \|\gamma\|_1, \dots, \|\gamma\|_k\}$$

[۱] shy set [۲] prevalent set [۳] B. R. Hunt [۴] T. Sauer [۵] J. A. Yorke [۶] J. Kolár [۷] D. Preiss

مجهز می‌کنیم که در آن،

$$\|\gamma\|_\infty = \sup_{t\in T}\|\gamma(t)\| \quad \text{و} \quad \|\gamma\|_k = \sup_{t\in T}\|D_k\gamma(t)\| \quad (k\geq ۱).$$

مجموعه بُرل $A\subseteq X$ را Γ–پوچ‌گوییم اگر یک مجموعهٔ مانده‌ای از $\gamma\in\Gamma(X)$ها موجود باشد به‌طوری که $\lambda^{\mathbb{N}}\{t\in T|\gamma(t)\in A\}=۰$. به عبارت دیگر، اگر مجموعهٔ

$$\{\gamma\in\Gamma(X)|\lambda^{\mathbb{N}}\{t\in T|\gamma(t)\in A\}>۰\}$$

در $\Gamma(X)$ از رستهٔ اول باشد. نشان داده می‌شود که در فضای l^p $(۱<p<\infty)$ مجموعه‌ای از رستهٔ اول وجود دارد که Γ–پوچ نیست در حالی که در $c_۰$ خانواده‌ای از مجموعه‌های رستهٔ اول وجود دارد (مجموعه‌های σ–متخلخل بالایی) که Γ–پوچ‌اند. برای دریافت آگاهی بیشتر در این مورد، به [۲۲] که نویسندگان آن از پژوهشگران برجسته در این زمینه هستند، مراجعه کنید.

تشکر و قدردانی

دکتر جهانی‌پور چندین بار از سرلطف نسخهٔ نهایی مقاله را خواندند و بسیاری از نادرستی‌ها و ابهام‌های علمی و نگارشی متن را برطرف کردند و از این بابت نویسنده و خواننده را مدیون خویش ساختند. از دو داور محترم مقاله هم سپاسگزارم. به‌ویژه یکی از داوران با تصحیح نادرستی‌هایی که به متن راه یافته بود و همچنین پیشنهادهای سودمند دیگر نویسنده را منت‌دار خویش ساختند. همچنین نویسنده از حمایت‌های صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور در قالب طرح شمارهٔ ۹۳۰۲۷۶۴۵ قدردانی می‌کند.

مراجع

[۱] برسود، د.، *رویکردی بنیادین به نظریهٔ انتگرال‌گیری لبگ*، ترجمهٔ سعید مقصودی، انتشارات دانشگاه زنجان، زنجان ۱۳۹۳.

[۲] صال‌مصلحیان، م.، اسماعیل‌زاده، ح.، استفان باناخ، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، ۳۸، بهار ۱۳۸۶، ۶۷-۷۴.

[۳] مقصودی، س.، فضاهای خطی در زیرمجموعه‌های غیرخطی: خطی‌پذیری، فضاپذیری و این گونه مفاهیم، *درحال تکمیل*.

[۴] مقصودی، س.، مجموعه‌های متخلخل و پدیده‌های ابرعام در آنالیز، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، پذیرفته‌شده برای انتشار.

[۵] مقصودی، س.، انتگرال: از ارشمیدس تا لبگ (بخش دوم)، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، ۵۳، زمستان ۱۳۹۲، ۱۷-۳۱.

[6] Balcerzak, M., Wachowicz, A., Some examples of meager sets in Banach spaces, *Real Anal. Exchange*, **26** (2000/01), 877-884.

[7] Banach, S., *Théorie des Opérations Linéares*, Monogr. Mat., Warszawa-Lwów, 1932.

[8] Barański, K., Bárány, B., Romanowska, J., On the dimension of the graph of the classical Weierstrass function, *Adv. Math.*, **265** (2014), 32-59.

[9] Bayart, F., Topological and algebraic genericity of divergence and universality, *Studia Math.*, **167** (2005), 161-181.

[10] Benavides, T. D., How many zeros does a continuous function have?, *Amer. Math. Monthly* **93** (1986), 464-466.

[11] Bruckner, A. M., *Differentiation of Real Functions*, 2nd. edn., CRC Monograph Series, **5**, AMS, 1994.

[12] Christensen, J. P. R., On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups, *Israel J. Math.*, **13** (1972), 255-260.

[13] Darji, U. B., On Haar meager set, *Topology Appl.*, **160** (2013), 2396-2400.

[14] De Blasi, F. S., Myjak, J., Sur la convergence des approximations successives pour les contractions non linéaires dans un espaces de Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **283** (1976), 185-187.

[15] Grosse-Erdmann, K.-G., Universal families hypercyclic operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **36** (1999), 345-381.

[16] Hobson, E. W., *The theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*. Vol. I., Dover Publications, New York, 1958.

[17] Hunt, B. R., Sauer, T., Yorke, J. A., Prevalence: a translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992), 217-238.

[18] Jachymski, J., A nonlinear Banach-Steinhaus theorem and some meager sets in Banach spaces, *Studia Math.*, **70** (2005), 303-320.

[19] Jones, S. H., *The Baire Category Theorem: Its Scope*, Ph.D. Thesis, University of California, Santa Barbara, 1995.

[20] Kahane, J.-P., Baire's category theorem and trigonometric series, *J. Anal. Math.*, **80** (2000), 143-181.

[21] Karagulyan, G. A., Divergence of general operators on sets of measure zero, *Colloq. Math.*, **121** (2010), 113-119.

[22] Lindenstrauss, J., Preiss, D., Tišer, J., *Fréchet Differentiability of Lipschitz Functions and Porous Sets in Banach Spaces*, Princeton University Press, Princeton, 2012.

[23] Medvedev, F., *Scenes from the History of Real Functions*, Birkhäuser Verlag, New York, 1991.

[24] Myjak, J., Orlicz type category theorems for functional and differential equations, *Dissertationes Math.*, **206** (1983), 81 pp.

[25] Oxtoby, J., *Measure and Category*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[26] Reich, S., Zaslavski, A. J., *Genericity in Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[27] Sánchez, J. F., Viader P., Paradís, J., Carrillo, M. D., A singular function with a non-zero derivative on a dense set, *Nonlinear Anal.*, **95** (2014), 703-713.

[28] Swartz, C., The evolution of uniform boundedness principle, *Math. Chron.*, **19** (1990), 1-18.

[29] Thim, J., *Continuous Nowhere Differentiable Functins*, M. Sc. Thesis, Lulea University of Technology, 2003.

[30] Thomson, B. S., Bruckner, J. B., Bruckner, A. M., *Elementary Real Analysis*, Prentice-Hall, New York, 2001.

[31] Wachowicz, A., Baire category and standard operations on paires of continuous functions, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **24** (2002), 141-146.

[32] Zajíček, L., Porosity and σ-porosity, *Real Anal. Exchange*, **13** (1987/1988), 314-350

[33] Zygmund, A., Stanislaw Saks, 1897-1942, *Math. Intelligencer*, **9** (1987), 36-41.

سعید مقصودی: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

رایانامه: s_maghsodi@znu.ac.ir