فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۶، شمارهٔ ۶۰ (بهار و تابستان ۱۳۹۶) صص. ۱۲۱ تا ۱۳۰

# تعامد بِرکوف-جیمز در فضاهای برداری نرمدار

فاطمه عبداللهزاده گنابادی و محمد صال مصلحیان

**چکیده**

در این مقاله به بیان چگونگی گسترش رابطهٔ تعامد دو بردار در فضاهای ضرب داخلی به فضاهای برداری نرمدار میپردازیم. رابطهٔ تعامد بِرکوف-جیمز و انواع دیگر تعامد را معرفی و ویژگیهای آنها را از دید هندسهٔ فضاهای برداری نرمدار بیان میکنیم.

## ۱. سرآغاز

پس از پیدایش ضرب داخلی، مفهوم تعامد با الهام از عمود بودنِ دو خط در صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ بهعنوان رابطهای بین بردارهای یک فضای ضرب داخلی تعریف شد. مطالعات دربارهٔ این رابطه به معرفی شرایط معادل برای تعامد دو بردار در فضاهای ضرب داخلی انجامید. برخی از این شرایط معادل، تنها برحسب نرم بیان میشوند و لذا میتوان آنها را برای تعریف تعامد بردارها در فضاهای برداری نرمدار (که الزاماً فضای ضرب داخلی نیستند) بهکار برد. بِرکوف در مقالهای به سال ۱۹۳۵ اشارهای مختصر به این موضوع کرد اما مطالعات اصلی و جامع در این باره را حدود ده سال بعد جیمز انجام داد.

روبرت جیمز[۱] که عضو هیأت هفت نفرهٔ مؤسس دانشگاه «هاروی مود[۲]» در ایالت کالیفرنیا بود، در سال ۱۹۴۶ مدرک دکتریِ خود را در موضوع «تعامد در فضاهای برداری نرمدار» از مؤسسهٔ فناوری کالیفرنیا دریافت کرد. او در بین مؤسسان دانشگاه هاروی مود، اولین استاد ریاضیات بود. به همین سبب، این دانشگاه هر ساله به دو نفر از دانشجویان برگزیده در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ «روبرت جیمز» را اهدا میکند. شهرت جیمز بیشتر بهدلیل تحقیقات او در حوزهٔ فضاهای باناخ و معرفی فضای جیمز و کاربرد

*عبارات و کلمات کلیدی.* فضای ضرب داخلی؛ بردارهای متعامد؛ تعامد بِرکوف-جیمز؛ اتحاد متوازیالاضلاع.

[۱] Robert C. James [۲] Harvey Mudd

آنها در ارائهٔ مثال‌های نقض است. همچنین «قضیهٔ جیمز» که می‌گوید فضای باناخ $X$ بازتابی است اگر و تنها اگر هر تابعک خطی روی $X$ نرم خود را در نقطه‌ای از گوی واحد $X$ اختیار کند، به‌طور ویژه در اثبات قضایای مربوط به تعامد بِرکوف-جیمز کاربرد دارد.

گرت بِرکوف[۱] پسر جرج دیوید بِرکوف تحصیلات دانشگاهی خود را در هاروارد به سال ۱۹۲۸ آغاز کرد. سپس به قصد تغییر رشته از ریاضیات به فیزیک-ریاضی، به کمبریج رفت اما سرانجام جبر مجرد را انتخاب کرد و شاگرد فیلیپ هال[۲] شد. بیشترِ مقالات بِرکوف در دههٔ ۱۹۳۰ به چاپ رسیده است. او به همراه هم‌دانشگاهیِ خود، مک‌لین[۳] کتاب‌ها و مقاله‌های بسیاری در حوزه‌های مختلف جبر مجرد به چاپ رساند؛ از جمله مقاله‌ای با عنوان «دربارهٔ ساختارهای جبرهای مجرد» که در سال ۱۹۳۵ منتشر شد و باعث پیدایش شاخه‌ای جدید در ریاضیات به نام *جبرهای جهانی*[۴] گردید. بِرکوف در طول جنگ جهانی دوم به شاخهٔ، به قول خودش، «ریاضیات مهندسی» جذب شد و روی هدف‌بندی رادارها، محاسبات و مهندسی اسلحه‌ها و تانک‌ها برای پرتاب گلوله و... پژوهش‌هایی انجام داد. او دوستیِ نزدیکی با جان فون نویمان[۵] داشت و تحقیقات مشترکی با فون نویمان در زمینهٔ علوم رایانه‌ای نیز انجام داد. از جمله شاگردان بِرکوف می‌توان به ریچارد آرنز[۶] اشاره کرد.

اکنون به هدف اصلی مقاله که تعریف تعامد در فضاهای برداری نرمدار است می‌پردازیم. ابتدا چند تعریف مقدماتی را که مورد نیاز است بیان می‌کنیم. در این تعریف‌ها همواره $X$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ است که در آن، $\mathbb{K}$ میدان اعداد حقیقی یا اعداد مختلط است.

یک نرم روی $X$ عبارت است از تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ب) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(پ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

جفت $(X, \|.\|)$ را *فضای برداری نرمدار* می‌خوانیم. در واقع نرم هر نقطه از فضای برداری $X$ را می‌توان فاصلهٔ آن نقطه تا مبدأ تلقی کرد. می‌توان بررسی کرد که $d(x, y) = \|x - y\|$ یک متر روی فضای برداری نرمدار $X$ است.

یادآوری می‌کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در فضای متری $(X, d)$ کُشی گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که اگر $n, m \geq n_0$، آنگاه $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر دنبالهٔ همگرا در یک فضای متری، کُشی است اما عکس این مطلب برقرار نیست. فضای

[۱] Garret Birkhoff [۲] Philip Hall [۳] Saunders MacLane [۴] universal algebras [۵] John Von Neumann
[۶] Richard Arens

متری را که در آن هر دنبالهٔ کُشی، همگرا باشد، *کامل* می‌نامیم. اگر فضای برداری نرمدار $X$ با متر ناشی از نرم کامل باشد، $(X, \|.\|)$ را *فضای باناخ* می‌خوانیم.

یک ضرب داخلی روی فضای برداری $X$ عبارت است از تابع $\langle .,. \rangle : X \to \mathbb{K}$ به‌طوری که برای هر $x, y, z \in X$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $\langle x, x \rangle \geq 0$ و $x = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0$.

(ب) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

(پ) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$.

(ت) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

جفت $(X, \langle .,. \rangle)$ را *فضای ضرب داخلی* می‌نامیم. به‌کمک نامساوی کُشی–شوارتز:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad \forall x, y \in X$$

می‌توان نشان داد که $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی فضای ضرب داخلی $X$ است که از *ضرب داخلی ناشی می‌شود*. اگر $X$ با این نرم فضای باناخ باشد، آن را *فضای هیلبرت* می‌نامیم.

به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که در فضای ضرب داخلی $X$ برای هر $x, y \in X$،

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

این، *اتحاد متوازی‌الاضلاع* نامیده می‌شود، زیرا اگر متوازی‌الاضلاعی در صفحهٔ اقلیدسی در نظر بگیرید که یک ضلع آن بردار $x$ و ضلع مجاور آن بردار $y$ باشد، آن‌گاه قطرهای متوازی‌الاضلاع بردارهای $x+y$ و $x-y$ خواهند بود و بنابر قضیه‌ای در هندسهٔ مسطحه، مجموع مربعات قطرهای یک متوازی‌الاضلاع برابر است با مجموع مربعات ضلع‌های آن. این تساوی اهمیت زیادی دارد، چراکه شرط لازم و کافی است برای اینکه نرم یک فضای برداری نرمدار از ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ ناشی شده باشد.

در فضای ضرب داخلی $X$، بردارهای $x$ و $y$ را *متعامد* گوییم اگر $\langle x, y \rangle = 0$. می‌توان نشان داد که در فضای ضرب داخلی $X$ حکم‌های زیر معادل هستند:

(الف) $\langle x, y \rangle = 0$؛

(ب) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$؛

(پ) $\|x+y\| = \|x-y\|$؛

(ت) $\|x + \lambda y\| \geq x$ برای هر $\lambda \in \mathbb{K}$.

فرض کنیم $x$ و $y$ دو بردار متعامد در صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ باشند. هر بردار در $\mathbb{R}^2$ با پاره‌خطی جهت‌دار از مبدأ رسم می‌شود و می‌توان آن را با نقطهٔ انتهایش یکی گرفت. قسمت (ب)، فرمول فیثاغورس در مثلث

قائم‌الزاویه‌ای است که بردارهای $x$ و $y$ دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن و بردار $x-y$ وتر آن است. در واقع وقتی دو بردار در فضای $\mathbb{R}^۲$ متعامد هستند، زاویه بین آنها $\frac{\pi}{۲}$ است و در نتیجه تشکیل دو ساق از یک مثلث قائم‌الزاویه را می‌دهند که بردار $x-y$ وتر آن است. بنابراین $\|x-y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$. اما چون بردار $x$ بر $-y$ نیز عمود است، در فرمول فوق می‌توان $-y$ را با $y$ جایگزین کرد که نتیجه همان (الف) خواهد بود. قسمت (پ) می‌گوید طول بردارهای $x+y$ و $x-y$ با هم برابر است. در واقع وقتی $x$ و $y$ بر هم عمود هستند، $x+y$ و $x-y$ قطرهای مستطیلی هستند که از رسم بردارهای $x$ و $y$ حاصل می‌شود. در نتیجه طول‌های برابر دارند. قسمت (ت) به این معنا است که فاصلهٔ بردار $x$ تا زیرفضای تولید شده توسط بردار $y$ همواره بزرگتر یا مساوی طول بردار $x$ است. در $\mathbb{R}^۲$ زیرفضای تولید شده توسط بردار $y$، خط گذرنده از مبدأ و در راستای بردار $y$ است. توصیف این رابطه در فضای $\mathbb{R}^۲$ به این صورت است که کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ انتهای بردار $x$ تا خط تولید شده توسط $y$ همان فاصلهٔ $x$ تا مبدأ است، زیرا مبدأ پای خط عمودی است که از نقطهٔ انتهای $x$ به خط متناظر با بردار هادی $y$ رسم می‌شود و می‌دانیم که کوتاه‌ترین فاصله از یک نقطه تا یک خط، طول خط عمود از آن نقطه بر خط مفروض است.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید شرایط معادلی که برای تعامد به‌دست آمده است، تنها برحسب نرم بیان شده‌اند. از این‌رو با استفاده از آنها می‌توان تعامد را از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای برداری نرمدار گسترش داد.

## ۲. انواع مهم تعامد در فضاهای برداری نرمدار

گسترش تعریف تعامد از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای برداری نرمدار، در ابتدا توسط روبرتز[۱] در سال ۱۹۳۴ مطرح شد. او تعریف زیر را برای تعامد دو بردار در یک فضای نرمدار ارائه کرد:

$$x \perp_r y \Longleftrightarrow \|x-\lambda y\| = \|x+\lambda y\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{۱.۲}$$

پس از آن جیمز نشان داد که تعریف روبرتز مناسب نیست. جیمز ثابت کرد که اگر $X$ فضای برداری متشکل از همهٔ چندجمله‌های درجه ۲ به‌شکل $ax^۲ + bx$ با ضرایب در $\mathbb{R}$ روی بازهٔ $(۰,۱)$ باشد، آن‌گاه شرط لازم برای تعامد دو بردار $f$ و $g$ با تعریفِ (۱.۲) این است که دست‌کم یکی از آنها صفر باشند. سپس با الهام از ویژگی‌های هندسی تعامد دو بردار در فضای اقلیدسی، دو تعریف *تعامدِ متساوی‌الساقین* و *تعامدِ فیثاغورسی* را در فضاهای برداری نرمدار به معنایی که خواهیم دید، تعریف کرد. جیمز نشان داد که تعامد متساوی‌الساقین روی یک فضای برداری نرمدار $X$، جمعی و یا همگن نیست مگر وقتی که $X$ یک فضای ضرب داخلی باشد. همچنین حکمی مشابه را برای تعامد فیثاغورسی اثبات کرد و به‌تفصیل

[۱] B. D. Roberts

به آنها پرداخت. جیمز سپس در [۶] و [۷] رابطهٔ

$$x \perp_{BJ} y \Longleftrightarrow \|x+\lambda y\| = \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{۲.۲}$$

را برای تعامد دو بردار در یک فضای برداری نرمدار مطرح کرد و به بررسی ویژگی‌های آن پرداخت که در واقع قسمت (ت) در حکم‌های معادل پیش‌گفته و همان مطلبی است که بِرکوف در [۲] به آن اشاره کرده است. بِرکوف در ابتدای این مقاله تعریف خود را از تعامد این طور بیان می‌کند: دو بردار $pq$ و $pr$ در یک فضای ضرب داخلی $X$ با بعد ناکمتر از ۳ برهم عمودند هرگاه طول بردار $pr$ مینیمم فاصلهٔ $r$ تا سایر نقاط پاره‌خط $pq$ باشد. در واقع همین تعریف بود که ایده‌ای برای جیمز شد تا تعامد را با (۲.۲) تعریف کند. گاهی این تعامد تنها به نام جیمز نامیده می‌شود، چون هدف بِرکوف در مقاله‌اش کاملاً مستقل از این موضوع بود.

در این بخش، هر یک از صورت‌های معادل برای تعامد را که توسط جیمز در [۷] به‌دست آمده است، به‌عنوان نوعی از تعامد در فضاهای برداری نرمدار تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.** در فضای برداری نرمدار $X$،

(الف) دو بردار $x$ و $y$ را به‌تعبیر بِرکوف–جیمز متعامد گوییم و می‌نویسیم $x \perp_{BJ} y$ هرگاه

$$\|x+\lambda y\| \geq \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

(ب) گوییم دو بردار$x$ و $y$ تعامد متساوی‌الساقین دارند و می‌نویسیم $x \perp_i y$ هرگاه

$$\|x+y\| = \|x-y\|.$$

(پ) گوییم دو بردار $x$ و $y$ تعامد فیثاغورسی دارند و می‌نویسیم $x \perp_p y$ هرگاه

$$\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲.$$

در فضاهای ضرب داخلی هر سهٔ این تعامدها با هم معادل هستند اما در فضاهای برداری نرمدار، این تعامدها کاملاً مستقل‌اند و هیچ‌کدام دیگری را نتیجه نمی‌دهد. برای مثال، در فضای برداری $l^۱$ :

۱. فرض کنیم $x = (۳, ۲, ۰, ۰, \ldots)$ و $y = (۸, -۴, ۰, ۰, \ldots)$. در این صورت $x \perp_p y$ اما $x \not\perp_i y$ و $x \not\perp_{BJ} y$.

۲. فرض کنیم $x = (۱, ۱, ۰, ۰, \ldots)$ و $y = (۲, -۱, ۰, ۰, \ldots)$. در این صورت $x \perp_i y$ اما $x \not\perp_p y$ و $x \not\perp_{BJ} y$.

۳. فرض کنیم $x = (۱, ۰, ۰, \ldots)$ و $y = (۱, -۱, ۰, ۰, \ldots)$. در این صورت $x \perp_{BJ} y$ اما $x \not\perp_p y$ و $x \not\perp_i y$.

اولین حکمی که جیمز باید اثبات می‌کرد، این بود که تعامدی که او تعریف کرده بود، ضعف تعامد تعریف‌شده توسط روبرتز را در هندسهٔ فضاهای برداری نرمدار ندارد. به عبارت دیگر، در هر فضای برداری نرمدار $X$ و برای هر $x \in X$ بردارهای ناصفر $z_۱, z_۲ \in X$ وجود دارند به‌طوری که $z_۱ \perp_{BJ} x$ و $z_۲ \perp_{BJ} x$. جیمز در [۶] با استفاده از قضیهٔ هان-باناخ حکمی در این باره به‌دست آورد: *برای هر دو بردار $x, y \in X$ اعداد $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری که $x \perp_{BJ} \lambda x + y$ و $\mu x + y \perp_{BJ} x$. به‌علاوه اگر $x \perp_{BJ} \alpha_۱ x + y$، $x \perp_{BJ} \alpha_۲ x + y$، $\beta_۱ x + y \perp_{BJ} x$ و $\beta_۲ x + y \perp_{BJ} x$، آن‌گاه برای هر $\alpha_۱ \leq \lambda \leq \alpha_۲$ و هر $\beta_۱ \leq \mu \leq \beta_۲$ داریم $x \perp_{BJ} \lambda x + y$ و $\mu x + y \perp_{BJ} x$.*

حال که از وجود ضرایب $\lambda$ و $\mu$ سخن به میان آوردیم، می‌پرسیم این ضرایب با چه شرایطی یکتا هستند. چون رابطهٔ $\perp_{BJ}$ متقارن نیست، تعریف‌های متفاوتی از یکتایی این اعداد می‌توان ارائه کرد.

**تعریف ۲.۲.** فرض کنیم $x, y \in X$ و $x \neq ۰$. در این صورت گوییم رابطهٔ $\perp_{BJ}$،

(الف) از راست یکتا است اگر یک و تنها یک $\lambda \in \mathbb{K}$ موجود باشد که $x \perp_{BJ} \lambda x + y$؛

(ب) از چپ یکتا است اگر یک و تنها یک $\mu \in \mathbb{K}$ موجود باشد که $\mu x + y \perp_{BJ} x$.

شرایط یکتاییِ چپ و یکتاییِ راست در رابطهٔ $\perp_{BJ}$ بسیار متفاوت است و فقط در حالتی که تعامد بِرکوف-جیمز متقارن باشد، می‌توان آنها را به هم ارتباط داد. همان‌طور که در احکام بعدی خواهید دید، یکتاییِ چپ به ساختار فضای برداری $X$ بستگی دارد در حالی که یکتاییِ راست، به خواص رابطهٔ $\perp_{BJ}$ وابسته است.

**گزاره ۳.۲.** *رابطهٔ $\perp_{BJ}$ از راست یکتا است اگر و تنها اگر جمعی باشد. به عبارت دیگر، $x \perp_{BJ} y$ و $x \perp_{BJ} z$ نتیجه دهند $x \perp_{BJ} (y + z)$.*

برای به‌دست آوردن حکمی دربارهٔ یکتاییِ چپ، تعریف زیر را نیاز داریم.

**تعریف ۴.۲.** فضای برداری نرمدار $X$ را اکیداً محدب گوییم اگر برای هر دو نقطه مانند $x$ و $y$ متعلق به مرز گوی واحد $X$، خط گذرنده از $x$ و $y$ مرز این گوی را تنها در همین دو نقطه قطع کند.

می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای اینکه رابطهٔ $\perp_{BJ}$ روی فضای برداری $X$ از چپ یکتا باشد این است که $X$ اکیداً محدب باشد.

## ۳. زاویهٔ نظیر تعامد بِرکوف-جیمز

زاویهٔ بین دو بردار در یک فضای ضرب داخلی $(X, \langle .,. \rangle)$ تابع دومتغیرهٔ $A : X \times X \to \mathbb{R}$ است با ضابطهٔ $A(x,y) = \arccos \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$. تابع زاویه $A$ دارای این ویژگی‌ها است: اول، *توازی* به

این معنی که $A(x,y)=0$ اگر و تنها اگر $x$ و $y$ هم‌جهت باشند و $A(x,y)=\pi$ اگر و تنها اگر $x$ و $y$ در جهت‌های مخالف باشند؛ دوم، *تقارن* به این معنی که به‌ازای هر $x,y\in X$، $A(x,y)=A(y,x)$؛ سوم، همگنی به این معنی که به‌ازای هر $x,y\in X$ و هر $s,t\in\mathbb{R}$،

$$A(sx,ty)=\begin{cases} A(x,y) & st>0\\ \pi-A(x,y) & st<0\end{cases}$$

و سرانجام، پیوستگی به این معنی که اگر $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ و $\lim_{n\to\infty}y_n=y$، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty}A(x_n,y_n)=A(x,y).$$

همگام با توسیع‌های مختلف مفهوم تعامد از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای برداری نرمدار، متناسب با این تعامدها توابع زاویه‌ای جدیدی با ضابطه‌های مختلف تعریف شده‌اند. برای مثال، در $\mathbb{R}^2$ اگر زاویهٔ بین دو بردار $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ را که به‌صورت $\arctan\frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}$ تعریف می‌شود در نظر بگیریم، آن‌گاه تعامد فیثاغورسیِ دو بردار معادل است با اینکه زاویهٔ بین آنها برابر با $\frac{\pi}{4}$ شود. در این بخش، هدف این است که با استفاده از توابع تصویر، تابعی زاویه‌ای مانند $A_q$ تعریف کنیم به‌طوری که

$$x\perp_{BJ}y\Longleftrightarrow A_q(x,y)=\frac{\pi}{2}.$$

به عبارت دیگر، تعامد بِرکوف–جیمزِ دو بردار معادل با این باشد که زاویهٔ بین آنها به این تعبیر برابر با $\frac{\pi}{2}$ شود. از آنجا که انتظار داریم زاویهٔ بین دو بردار در فضای برداری نرمدار $X$ با زاویهٔ بین آنها در زیرفضای تولید شده توسط آن دو با هم برابر باشد، کافی است مطالعهٔ خود را روی فضای برداری دو بعدی متمرکز کنیم. فرض کنیم $X$ یک فضای برداری با پایهٔ $\{e_1,e_2\}$ و $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ نمایش دو بردار مستقل خطی در $X$ برحسب این پایه باشد. قرار می‌دهیم

$$D_{xy}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}.$$

در این صورت $|D_{xy}|=y_2x_1-y_1x_2\neq 0$، زیرا $x$ و $y$ مستقل خطی هستند. برای هر $z\in X$ عددهای یکتای $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ وجود دارند به‌طوری که $z=\alpha x+\beta y$. بنابراین تابع تصویر $P_{xy}$ که در راستای بردار $y$ از $X$ به‌توی فضای تولید شده توسط $x$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود، خوش‌تعریف خواهد بود:

$$P_{xy}:X\longrightarrow\{tx;\ t\in\mathbb{R}\},\qquad P_{xy}(\alpha x+\beta y)=\alpha x.$$

ملاحظه می‌کنید که $P_{xy}$ تنها به بردارهای $x$ و $y$ وابسته است. اگر نمایش آن را برحسب پایهٔ $\{e_۱, e_۲\}$ بنویسیم، خواهیم داشت

$$P_{xy} = \frac{۱}{|D_{xy}|}\begin{bmatrix} x_۱y_۲ & -x_۱y_۱ \\ x_۲y_۲ & -x_۲y_۱ \end{bmatrix}.$$

اکنون ابزار کافی را برای تعریفِ $q$-زاویه در اختیار داریم. برای هر دو بردار $x, y \in X$ قرار می‌دهیم

$$q(x,y) = \begin{cases} ۰ & \text{وابسته خطی‌اند } y \text{ و } x \\ \|P_{xy}\|^{-۱} & \text{مستقل خطی‌اند } y \text{ و } x \end{cases}$$

$q$-زاویهٔ بین دو بردار را با $A_q(x,y)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_q(x,y) = \arcsin(q(x,y)).$$

حال اگر $x = (x_۱, x_۲)$ و $y = (y_۱, y_۲)$ دو بردار در $X$ با پایه $\{e_۱, e_۲\}$ باشند، آن‌گاه

$$x \perp_{BJ} y \Longleftrightarrow A_q(x,y) = \frac{\pi}{۲}.$$

## ۴. کاربردهای تعامد بِرکوف-جیمز

یکی از شرایطی که برای نرمدار بودنِ یک فضای برداری مانند $X$ لازم است این است که تابع نرم در نامساوی مثلثی، یعنی $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in X$ صدق کند. مطالعات بسیاری روی این رابطه، معکوس آن و شرایطی که تحت آنها این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود، انجام گرفته است [۱، ۵]. در اینجا با استفاده از تعامد بِرکوف-جیمز، یک شرط معادل برای برقراریِ تساوی در این نامساوی در فضاهای برداری نرمدار بیان می‌کنیم.

**گزاره ۱.۴.** *فرض کنیم $X$ یک فضای نرمدار باشد و $x, y \in X$. در این صورت حکم‌های زیر معادل‌اند:*

(الف) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$؛

(ب) $(\|x\|y - \|y\|x) \perp_{BJ} y$؛

(پ) $(\|x\|y - \|y\|x) \perp_{BJ} x$.

تاکنون شرایط متعددی معرفی شده‌اند که با برقراریِ هر یک از آنها نرم یک فضای برداری نرمدار مانند $X$ از ضرب داخلی ناشی می‌شود. شناخته‌شده‌ترینِ این شرایط، اتحاد متوازی‌الاضلاع است. مشخصه‌های دیگری نیز به‌دست آمده است که در اینجا به‌طور خلاصه آنها را بیان می‌کنیم:

(الف) $\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۴$ برای هر $x, y \in X$ که $\|x\| = \|y\| = ۱$؛

(ب) اگر $\|x+y\| = \|x-y\|$، آنگاه $\|x+\lambda y\| = \|x-\lambda y\|$ برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$؛
(پ) اگر $\|x+y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$، آنگاه $\|x+\lambda y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|\lambda y\|^۲$ برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ [۴].

با استفاده از تعامدهای مختلفی که معرفی کرده‌ایم، می‌توان مشخصه‌های جدیدی برای فضاهای ضرب داخلی یافت. کاپور در [۸] در حکم جالبی ثابت کرده است: شرط لازم و کافی برای اینکه فضای نرمدار $X$ یک فضای ضرب داخلی باشد این است که تنها یکی از تعامدهای معرفی‌شده بقیه را نتیجه دهد. به بیان کامل‌تر، برای فضای برداری نرمدار $X$ حکم‌های زیر معادل هستند:

(الف) *$X$ یک فضای ضرب داخلی است؛*
(ب) *برای هر $x, y \in X$ اگر $x \perp_p y$، آنگاه $x \perp_i y$؛*
(پ) *برای هر $x, y \in X$ اگر $x \perp_i y$، آنگاه $x \perp_p y$؛*
(ت) *برای هر $x, y \in X$ اگر $x \perp_p y$، آنگاه $x \perp_{BJ} y$؛*
(ث) *برای هر $x, y \in X$ اگر $x \perp_{BJ} y$، آنگاه $x \perp_p y$؛*
(ج) *برای هر $x, y \in X$ اگر $x \perp_i y$، آنگاه $x \perp_{BJ} y$؛*
(چ) *برای هر $x, y \in X$ اگر $x \perp_{BJ} y$، آنگاه $x \perp_i y$.*

همان‌طور که دیده می‌شود کوچکترین ارتباطی بین این تعامدها منجر به این می‌شود که $X$ یک فضای ضرب داخلی باشد. به عبارت دیگر، یک شرط بسیار قوی است. در پایان متذکر می‌شویم که به‌عنوان یک مسئله می‌توان فکر کرد که اگر یک تبدیل خطی، یعنی یک نگاشت حافظ اعمال جمع و ضرب اسکالر بین دو فضای نرمدار داشته باشیم، در چه صورت این نگاشت حافظ تعامد است؛ یعنی اگر دو بردار در دامنهٔ تابع برهم عمود باشند، تحت چه شرایطی تصویرهای آن دو نیز برهم عمود خواهند بود؟ [۹]

## مراجع


[1] Ansari, A. H., Moslehian, M. S., Refinements of reverse triangle inequalities in inner product spaces, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **6** (3) (2005), 1-12.

[2] Birkhoff, G., Orthogonality in linear metric spaces, *Duke. Math. J.*, **1** (1935), 169–172.

[3] Chorianopoulos, Ch., Psarrakos, P., Birkhoff-James approximate orthogonality sets and numerical ranges, *Linear Algebra Appl.*, **434** (2011), 2089–2108.

[4] Dadipour F., Moslehian, M. S., A characterization of inner product spaces related to the p-angular distance, *J. Math. Anal. Appl.*, **371** (2010) (2), 677-681.

[5] Dadipour, F., Moslehian, M. S., Rassias J. M., Takahasi, S.-E., Characterization of a generalized triangle inequality in normed spaces, *Nonlinear Anal.-TMA.*, **75** (2012) (2), 735-741.

[6] James, R. C., Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), 265–292.

[7] James, R. C., Orthogonality in normed linear spaces, *Duke. Math. J.*, **12** (1945), 291–302.

[8] Kapoor, O. P., Prasad, J., Orthogonality and characterizations of inner product spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **19** (1978), 403–416.

[9] Moslehian M. S., Zamani, A., Exact and approximate operator parallelism, *Canad. Math. Bull.*, **58** (2015), 207-224.

[10] Moslehian M. S., Rassias, J. M., A characterization of inner product spaces concerning an Euler-Lagrange identity, *Commun. Math. Anal.*, **8** (2010) (2), 16-21.

[11] Zhi, Ch. Zh., Wei, L., Lü-Lin, L., Projections, Birkhoff-orthogonality and angles in normed spaces, *Commu. Math. Res.*, **24** (2011) (4), 378–384.

فاطمه عبدالله‌زاده گنابادی: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکدهٔ علوم ریاضی
*رایانامه:* gonabadi69@yahoo.com

محمد صال مصلحیان: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکدهٔ علوم ریاضی
*رایانامه:* moslehian@um.ac.ir