فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۶، شمارهٔ ۶۱ (پاییز و زمستان ۱۳۹۶) صص. ۶۳ تا ۷۹

حل حدسیّهٔ رُتا*

جی. جیلن، بی. جراردز، و جی. ویتل

مترجم: سیّد محمدباقر کاشانی

۱. سرآغاز

در سال ۱۹۷۰ جان کارلو رُتا[۱] حدسیه‌ای مطرح کرد که یک مشخص‌سازی ترکیبیاتیِ زیبایی را برای وابستگی خطی در فضاهای برداری روی هر میدان متناهی داده‌شده، پیش‌بینی می‌کرد. اخیراً یک برنامهٔ پژوهشی پانزده ساله را که منجر به حل حدسیّهٔ رُتا شده است، به پایان برده‌ایم. در این مقاله، این حدسیّه را شرح و یک توصیف کلی از اثبات آن ارائه می‌دهیم.

ماتریس‌وار[۲]، یک انتزاعِ ترکیبیاتی از مفهوم استقلال خطی بردارها است. هر زیرمجموعه از یک گردایهٔ متناهی از بردارها در یک فضای برداری، یا وابستهٔ خطی است یا مستقل خطی. ماتریس‌وار، ساختاری است متشکل از یک *مجموعهٔ زمینهٔ* متناهی همراه با گردایه‌ای از زیرمجموعه‌هایش که آنها را مجموعه‌های *مستقل* می‌نامیم. مجموعه‌های مستقل در دسته‌ای از بنداشت‌های طبیعی ترکیبیاتی صدق می‌کنند که ریشه در جبرخطی دارند. با وجود این، هر ماتریس‌واری را نمی‌توان با گردایه‌ای از بردارها نمایش داد و از زمان معرفی ماتریس‌وارها توسط هاسلِر ویتنی[۳] [۲۶] در سال ۱۹۳۵، ریاضیدانان در جستجوی راه‌هایی برای مشخص‌سازی ماتریس‌وارهای نمایش‌پذیر بوده‌اند. حدسیّهٔ رُتا مدعی است که مشخص‌سازی نمایش‌پذیریِ ماتریس‌وارها روی هر *میدان متناهی* داده‌شده، توسط فهرستی متناهی از

* نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:
Geelen, J., Gerards, B., Whittle, G., Solving Rota’s conjecture, *Notices of AMS.*, **61** (2014), 736-743.

[۱] Gian-Carlo Rota (۱۹۳۲–۱۹۹۹) ریاضیدان و فیلسوف آمریکایی متولد ایتالیا، در سیزده سالگی به همراه خانواده از ایتالیا به آمریکا مهاجرت کرد–م.

[۲] matroid [۳] Hassler Whitney

مانع‌ها[۱] امکان‌پذیر است. ما این مفهوم‌ها و حدسیّه را در بخش بعدی به‌صورت رسمی بیان می‌کنیم. در باقیمانده این پیش‌گفتار، مسیر حرکت به سوی حل حدسیّه را شرح می‌دهیم.

در پایان دهۀ ۱۹۹۰ درستیِ حدسیّۀ رُتا برای میدان‌های دو، سه و چهار عضوی معلوم شده بود. در آن زمان جیلن، جراردز و کاپور [۴] اعلام کردند که برای نمایش‌پذیری روی میدان چهار عضوی، هفت مانع وجود دارد. اگر تا سال ۱۹۵۸ به عقب برگردیم، می‌بینیم که تات قبلاً ثابت کرده بود که برای ردۀ ماتریس‌وارهای دودویی[۲] یک مانع وجود دارد [۲۲] و در دهۀ ۱۹۷۰، بیکسبی [۱] و سیمور [۲۰] مستقلاً ثابت کردند که برای ردۀ ماتریس‌وارهای سه‌سه‌یی[۳]، چهار مانع وجود دارد که تأییدکنندۀ نتیجه‌ای است که قبلاً توسط رالف رِید[۴] اعلام شده بود.

پایان دهۀ ۱۹۹۰ زمانی امیدبخش برای نظریۀ ماتریس‌وارها بود، زیرا چندین روش جدید سودمند از دهۀ پیش در دسترس بودند و به نظر می‌رسید توان واقعی برای پیشرفت اصلی در این زمینه فراهم شده است. با وجود این، بین موضوع عملیِ یافتن مجموعۀ کامل مانع‌ها برای یک میدان خاص و موضوع مجردِ اثبات وجود تعدادی متناهی مانع برای یک میدان متناهی دلخواه، فرقی اساسی وجود دارد. روش‌های در دسترس در آن زمان چنان نبودند که بتوان به حل حدسیّۀ رُتا در حالت کلی، امید داشت.

امید ما به حل حدسیّۀ رُتا در سال ۱۹۹۹ پس از شرکت در کارگاهی دربارۀ نظریۀ گراف در اُبِرؤُلفاخ آلمان فزونی یافت. در آن کارگاه، نیل رابرتسون[۵] و پاول سیمور[۶] ایده‌هایی برای گسترش پروژۀ کهادهای گراف به ماتریس‌وارها ارائه دادند. این چالش را مشتاقانه پیگیر شدیم. نظریۀ کهادهای گراف دقیقاً آن نوع ابزارهای عمومی مطلوب را که ما نداشتیم، در خود داشت. نتایجی که آنها به‌دست آوردند، در ۲۳ مقالۀ پی در پی مشتمل بر بیش از ۷۰۰ صفحه منتشر شده بود و ما تمام سال بعد را صرف آموختن چگونگی کارکرد روش‌های آن نظریه کردیم.

پس از آن، اقدام به کار عظیمِ گسترش نظریۀ کهادهای گراف به ماتریس‌وارها نمودیم. این تحقیق، کاری بزرگ بود که تکمیلش یک دهه طول کشید. سه سالِ اولِ این تحقیق، سخت‌ترین دورۀ کار بود و در خلال آن سه سال، هیچ نشانی از موفقیت درکارمان دیده نمی‌شد. هنگامی که در نوامبر سال ۲۰۰۲، اولین پیشرفت عمده نصیبمان شد، گشایش و امید نیز پدیدار گشت. آن پیشرفت، نقطۀ عطفی بزرگ در پروژه بود. پس از آن، شک نداشتیم که پروژه را علی‌رغم کار بزرگی که هنوز در پیش داشتیم، به پایان خواهیم برد. حتی در خلال سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ که با وجود تلاش‌های زیاد، هیچ پیشرفت قابل‌توجهی نداشتیم، هنوز خوشبین بودیم.

---

[۲] ماتریس‌وارهای نمایش‌پذیر بر میدان دو عضوی–م.
[۳] ماتریس‌وارهای نمایش‌پذیر بر میدان سه عضوی–م.

[۱] obstructions [۴] Ralph Reid [۵] Neil Robertson [۶] Paul Seymour

در آغاز سال ۲۰۱۱، بخش اصلی پروژهٔ کهادهای گراف را به ماتریس‌وارها گسترش داده بودیم. روش‌هایی که به‌وجود آوردیم، کلی و توانمند بودند اما هنوز مسئله‌های زیادی دربارهٔ حدسیّهٔ رُتا وجود داشت که باید به آنها می‌پرداختیم. واقعیت این است که در آن هنگام رویکردی عملی در ذهن نداشتیم و اولین تلاش‌های جدی‌مان برای اثبات حدسیّه در سال ۲۰۱۱ به شکست انجامید. در اوایل سال ۲۰۱۲، طرحی نو برای حمله به مسئله درانداختیم و بقیهٔ آن سال را صرف ایجاد ابزارهای لازم کردیم. هنگامی که در ژانویهٔ سال ۲۰۱۳ همدیگر را ملاقات کردیم، مطمئن شدیم که در مسیری درست قرار گرفته‌ایم و همهٔ ابزارهای مورد نیاز را در اختیار داریم. پس از سه هفته کارِ مشترک، موفق شدیم جزئیات باقیمانده را حل و فصل کنیم.

اکنون به کار طولانیِ نوشتن نتیجهٔ تحقیقاتمان مشغول هستیم که چند سالی به طول خواهد انجامید. به همین دلیل، این مقاله را نوشتیم تا پیش‌درآمدی بر اثبات حدسیّهٔ رُتا برای علاقه‌مندان و متخصصان باشد.

۲. ماتریس‌وار چیست؟

ماتریس‌وار عبارت است از یک زوج $(E,\mathcal{I})$ که در آن، E مجموعه‌ای متناهی به‌نام مجموعهٔ *زمینه* و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E به‌نام *مجموعه‌های مستقل* است چنان‌که

۱- مجموعهٔ تهی، مستقل است؛

۲- زیرمجموعه‌های مجموعه‌های مستقل، مستقل هستند؛

۳- برای هر $X \subseteq E$ همهٔ زیرمجموعه‌های مستقل بیشین[۱] X هم‌اندازه[۲] هستند.

نمونهٔ طبیعی ماتریس‌وار، گردایه‌ای از بردارها در یک فضای برداری یا معادلاً، ستون‌های یک ماتریس است. فرض کنیم A ماتریسی بر میدان $\mathbb{F}$ و E مجموعهٔ اندیس‌های ستونی A باشد. *ماتریس‌وار ستونی* A که آن را با $M(A)$ نشان می‌دهیم، عبارت است از زوج $(E,\mathcal{I})$ که در آن، $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که مجموعه‌های ستونی مستقل خطی را اندیس‌دار می‌کند. یک ماتریس‌وار، $\mathbb{F}$-*نمایش‌پذیر* نامیده می‌شود اگر ماتریس‌وار ستونیِ یک ماتریس بر میدان $\mathbb{F}$ باشد.

بنابر بنداشت‌های ماتریس‌وار، می‌توانیم مفهوم‌هایی مانند پایه و رتبه از جبرخطی را به ماتریس‌وارها گسترش دهیم. *پایه* یک مجموعهٔ مستقل بیشین است و *رتبهٔ* مجموعهٔ X در ماتریس‌وار $M = (E,\mathcal{I})$ که آن را با $r_M(X)$ نشان می‌دهیم، اندازهٔ (تعداد عضوهای) یک زیرمجموعهٔ مستقل بیشین در X است.

ماتریس‌وارهایی وجود دارند که روی هیچ میدانی نمایش‌پذیر نیستند. در واقع، باور بر این است که نسبت ماتریس‌وارهای nعضوی نمایش‌پذیر، با میل کردن n به سمت ∞ بسیار کوچک (نزدیک صفر)

[۱] maximal [۲] same size

می‌شود ولی این ادعا هنوز ثابت نشده است. موضوع مشخص‌سازی ردهٔ ماتریس‌وارهای نمایش‌پذیر را خودِ ویتنی در مقاله‌ای مقدماتی دربارهٔ نظریهٔ ماتریس‌وارها [۲۶] در سال ۱۹۳۵ مطرح کرد.

از مسئلهٔ ویتنی برداشت‌های گوناگون می‌توان کرد از این لحاظ که مشخص‌سازی‌های گوناگون یا نمایش‌پذیری روی میدان‌های خاص یا نامشخص را می‌توان در نظر گرفت. بجز دو استثنای قابل توجه، بیشترِ تعبیرهای مسئلهٔ ویتنی با پاسخ منفی مواجه شده‌اند؛ [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۲۱] را ببینید. اولین استثنا که یک مسئلهٔ الگوریتمی است، این است که تعیین کنیم چه موقع یک ماتریس‌وار داده شده بر میدان نامشخص نمایش‌پذیر است. وَموس در [۲۸] ثابت کرد این مسئلهٔ تصمیم‌پذیر است. استثنای دوم البته حدسیّهٔ رُتا است.

۱.۲. دوگان ماتریس‌وار. ماتریس‌وارها به‌صورت جفت‌های دوگان ظاهر می‌شوند. *دوگان* M که با M^* نشان داده می‌شود، ماتریس‌واری بر E است که پایه‌هایش مکمل پایه‌های M هستند. M^* خودش یک ماتریس‌وار است؛ گرچه این مطلب نتیجهٔ بلادرنگِ تعریف نیست. شاید شگفت‌انگیزتر این باشد که $\mathbb{F}$–نمایش‌پذیری، نسبت به دوگانی حفظ می‌شود. در واقع اگر $M = M(A)$، آن‌گاه $M(A)^* = M(A')$ که A' ماتریسی است که فضای سطری‌اش، مکمل متعامدِ فضای سطری A است.

۲.۲. کهاد ماتریس‌وارها. گیریم C و D مجموعه‌هایی از عضوهای ماتریس‌وار $M = (E, \mathcal{I})$ باشند. ماتریس‌وار به‌دست آمده از M با *حذف* D به‌صورت

$$(E - D, \{I \subseteq E - D : I \in \mathcal{I}\})$$

تعریف و با $M \backslash D$ نشان داده می‌شود. توجه کنید که $M \backslash D$ آشکارا همیشه ماتریس‌وار است. *انقباض*، دوگانِ عمل حذف است و با رابطهٔ $M/C = (M^* \backslash C)^*$ تعریف می‌شود. این تعریفِ انقباض چندان روشنگر نیست. از نظر هندسی، انقباض با *افکنش* از C متناظر است و به‌کمک نگاشت رتبه آسان‌تر می‌توان آن را فهمید:

$$r_{M/C}(X) = r_M(X \cup C) - r_M(C).$$

کهاد ماتریس‌وار M، ماتریس‌واری به‌صورت $M \backslash D/C$ است که در آن، D و C زیرمجموعه‌های جدا از همِ E هستند. اگر $D \cup C$ ناتهی باشد، کهاد را سره می‌نامیم. توجه کنید که ردهٔ ماتریس‌وارهای F–نمایش‌پذیر نسبت به حذف و دوگانی و بنابراین نسبت به عمل کهاد گرفتن، بسته است. برای هر ردهٔ کهاد–بسته از ماتریس‌وارها، طبیعی است که بررسی مشخص‌سازی آن با توصیف *کهادهای مطرود*[۱] صورت پذیرد. کهاد مطرود، ماتریس‌واری بیرون از رده است که همهٔ کهادهای سره‌اش در آن رده هستند. مطالعهٔ کهادهای مطرود، ما را به حدسیّهٔ رُتا می‌رساند [۱۹].

[۱] excluded minors

حدسیّه ۱ (رُتا). *برای هر میدان متناهی* $\mathbb{F}$، *با تقریب یکریختی*[۱]، *فقط تعدادی متناهی کهاد مطرود برای ردهٔ ماتریس‌وارهای* $\mathbb{F}$*-نمایش‌پذیر وجود دارد.*

چون ردهٔ ماتریس‌وارهای کهاد-بسته با فهرست کهادهای مطرودش مشخص می‌شود، حدسیّهٔ رُتا یک مشخص‌سازی آشکار و کوتاه از ردهٔ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر به‌دست می‌دهد.

۳.۲. هندسهٔ ترکیبیاتی. ماتریس‌وار نمایش‌پذیر $M = M(A)$ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس A' از A با عمل‌های سطری مقدماتی و تغییر مقیاس ستون‌ها به‌دست آید، A' نیز نمایشی برای M است. توجه کنید که در به‌دست آوردنِ A' از A با این روش، فقط یک تبدیل افکنشی را به فضای ستونی A اعمال کرده‌ایم و از این‌رو گوییم A و A' *افکنشی-هم‌ارز* هستند.

اکنون به‌جای اینکه عضوهای یک ماتریس‌وار نمایش‌پذیر را بردارهایی در یک فضای برداری بدانیم، می‌توانیم آنها را نقطه‌های یک هندسهٔ افکنشی در نظر بگیریم. گرچه این، تغییری نسبتاً کوچک در دیدگاه است، به‌لحاظ شهودی بسیار سودمند است و به‌واسطهٔ این دیدگاه است که بسیاری از واژگان نظریهٔ ماتریس‌وارها منشأ هندسی پیدا می‌کنند. برای نمونه، یک *تختِ*[۲] رتبهٔ k یک مجموعهٔ بیشین از رتبهٔ k است. *نقطه* عبارت است از یک تختِ رتبهٔ ۱، *خط* عبارت است از یک تختِ رتبهٔ ۲، *صفحه* یک تختِ رتبهٔ ۳ است و *ابرصفحه* تختی است از رتبهٔ $r_M(E) - 1$.

ویژگی دیگر این رویکرد هندسی این است که روشی روشن و کوتاه برای توصیف ماتریس‌وارهایی به‌دست می‌دهد که رتبهٔ پایین دارند. برای نمونه، در شکل ۱ سه ماتریس‌وار مهم $U_{2,4}$، $U_{2,5}$ و F_7[۳] رسم شده است. خط ۴-نقطه‌ای $U_{2,4}$ تنها کهاد مطرود برای ردهٔ ماتریس‌وارهای دودویی است و کهادهای مطرود برای ردهٔ ماتریس‌وارهای سه‌سه‌یی عبارت‌اند از $U_{2,5}$ و F_7 و دوگان‌های اینها.

---

[۱] دو ماتریس‌وار $(E_1, \mathcal{I}_1)$ و $(E_2, \mathcal{I}_2)$ یکریخت نامیده می‌شوند اگر یک تناظر دوسویی بین E_1 و E_2 (مجموعه‌های زمینه این دو ماتریس‌وار) وجود داشته باشد چنان‌که اگر A مجموعه‌ای مستقل در ماتریس‌وار اول باشد (یعنی $A \in \mathcal{I}_1$) تصویرش توسط آن تناظر، در ماتریس‌وار دوم مستقل (یعنی در $\mathcal{I}_2$) باشد-م.

[۳] ماتریس‌وار یکنواخت $U_{r,n}$ را می‌توان ماتریس‌وار زیرمجموعه‌های مستوی مستقل متشکل از n نقطه در وضعیت عمومی در فضای اقلیدسی r-بُعدی یا به‌عنوان ماتریس‌وار زیرمجموعه‌های مستقل خطی متشکل از n بردار در وضعیت عمومی در یک فضای برداری حقیقی $(r+1)$-بُعدی تلقی کرد-م.

در هندسهٔ متناهی، *صفحهٔ فانو* عبارت است از صفحهٔ افکنشی متناهی از مرتبهٔ ۲ دارای کمترین تعداد نقطه و خط (هر کدام ۷تا) با سه نقطه بر هر خط و سه خط گذرنده بر هر نقطه. *ماتریس‌وار فانو* عبارت است از یک ماتریس‌وار برداری رتبهٔ ۳ که از صفحهٔ فانو به‌دست آمده است. فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای متناهی از یک فضای برداری $\mathbb{V}$ باشد. ماتریس‌وار تعریف‌شده بر E عبارت است از ماتریس‌واری که مجموعه‌های مستقل آن، زیرمجموعه‌هایی از E باشند که در $\mathbb{V}$ وابستهٔ خطی هستند. در این صورت M را *ماتریس‌وار برداری* می‌نامیم-م.

[۲] flat

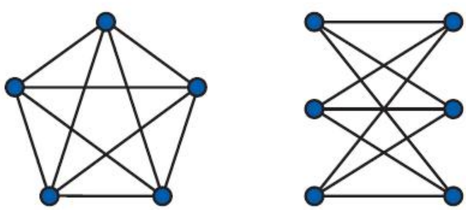
شکل ۱. خط ۴-نقطه $U_{۲,۴}$؛ خط ۵-نقطه $U_{۲,۵}$؛ و صفحهٔ فانو $F_۷$.

۳. پروژهٔ کهادهای گراف

یک *کهادِگراف* G گرافی است که از زیرگرافی از G با *انقباض* برخی یال‌ها به‌دست می‌آید. برای منقبض کردنِ یک یال، دو سر آن یال را به یک رأس تنها تبدیل و آن یال را حذف می‌کنیم. توجه کنید که ردهٔ گراف‌های مسطح نسبت به عمل تشکیل کهاد، بسته است. چنان‌که خواهیم دید، این رده در مطالعهٔ کهادهای گراف اهمیت بنیادی دارد. بنابراین مناسب است بحث را با مشخصهٔ کوراتفسکی برای ردهٔ گراف‌های مسطح آغاز کنیم [۱۰] که یکی از گوهرهای ریاضی است.

قضیه ۲ (کوراتفسکی). *یک گراف مسطح نیست اگر و تنها اگر کهادی یکریخت با $K_{۳,۳}$ یا $K_۵$*[۱] *داشته باشد.*

قضیهٔ کوراتفسکی را می‌توان چنین بیان کرد: کهادهای مطرود ردهٔ گراف‌های مسطح عبارت‌اند از $K_{۳,۳}$ و $K_۵$؛ شکل ۲ را ببینید. رابرتسون و سیمور این نتیجه را از صفحه به رویه‌های دلخواه تعمیم داده‌اند [۱۶].



شکل ۲. گراف‌های کوراتفسکی: $K_۵$ و $K_{۳,۳}$.

[۱] $K_۵$ عبارت است از گراف کامل بر ۵ رأس. $K_{۳,۳}$ عبارت است از گراف دوبخشی بر سه رأس که سه‌تا از رأس‌ها به هر یک از سه رأس دیگر وصل شده است-م.

قضیه ۳ (قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ کوراتفسکی). *ردهٔ گراف‌هایی که در یک رویهٔ مفروض می‌نشینند، فقط تعداد متناهی گراف مطرود دارد.*

رابرتسون و سیمور بعداً این قضیه را به رده‌های دلخواه گراف‌های کهاد–بسته گسترش دادند [۱۸]. دیستل درکتابش دربارهٔ نظریهٔ گراف [۲] می‌گوید این قضیه «هر نتیجهٔ دیگری را در نظریهٔ گراف تحت‌الشعاع قرار می‌دهد و بی‌شک یکی از ژرف‌ترین قضیه‌هایی است که ریاضیدانان تاکنون ثابت کرده‌اند.»

قضیه ۴ (شبه‌خوش‌ترتیبی). *هر ردهٔ کهاد–بسته از گراف‌ها تنها تعدادی متناهی کهاد مطرود دارد.*

دو عبارت زیر، صورت‌بندی دیگری برای قضیهٔ شبه‌خوش‌ترتیبی هستند:

- در هر مجموعهٔ نامتناهی از گراف‌ها، دو گراف وجود دارد که یکی از آنها یکریخت با کهادی از دیگری است؛
- فقط تعدادی شمارا ردهٔ کهاد–بستهٔ متمایز از گراف‌ها وجود دارد.

چگونه می‌توان چنین نتیجه‌ای را ثابت کرد؟ گام اول آشکار است. فرض کنیم نتیجه راست نباشد. بنابراین یک دنبالهٔ نامتناهی مانند $(H_۱, H_۲, \ldots)$ از گراف‌ها وجود دارد که هیچ‌یک با کهادی از دیگری یکریخت نیست. به‌ویژه هیچ‌یک از گراف‌های $(H_۲, H_۳, \ldots)$ کهادی یکریخت با $H_۱$ ندارد. گام دوم این است که بدانیم گرافی که کهادی یکریخت با $H_۱$ ندارد، چه شکلی است. پاسخ این پرسش در قضیهٔ ساختار کهادهای گراف [۱۷] نهفته است که ابزاری قوی در پروژهٔ کهادهای گراف است.

فرض کنیم $EX(H_۱)$ نشانگر مجموعهٔ گراف‌هایی باشد که کهادی یکریخت با $H_۱$ ندارند. اگر S رویه‌ای باشد که $H_۱$ در آن نمی‌نشیند، آنگاه هر گرافی که در S بنشیند، آشکارا در $EX(H_۱)$ است. فرض کنیم $\mathcal{G}$ مجموعهٔ گراف‌هایی باشد که در رویه‌ای می‌نشینند که $H_۱$ در آن رویه نمی‌نشیند. در این صورت $\mathcal{G} \subseteq EX(H_۱)$. ایدهٔ اصلی قضیهٔ ساختار کهادهای گراف این است که هر گرافی در $EX(H_۱)$ را می‌توان از گراف‌های عضو $\mathcal{G}$ به روشی معین ساخت. توجه کنید که اگر $H_۱$ مسطح باشد، آنگاه در هر رویه‌ای می‌نشیند و بنابراین ردهٔ $\mathcal{G}$ تهی است. پس گراف‌های حذف‌کنندهٔ[۱] $H_۱$ ساختاری به‌ویژه ساده دارند؛ [۱۵] را ببینید. تعمیم این نتیجه به ماتریس‌وارها بر میدان‌های متناهی [۵] اولین پیشرفت عمدهٔ ما بود.

قضیهٔ ساختار کهادهای گراف، رابطه‌ای بسیار نزدیک با قضیهٔ شبه‌خوش‌ترتیبی دارد ولی تکمیل اثبات آن هنوز نیازمند بیش از ۱۰۰ صفحه استدلال دقیق است.

---

[۱] گراف $\langle X, G\rangle$ گراف $\langle A, H\rangle$ را حذف می‌کند اگر $\langle A, H\rangle$ با هیچ زیرگرافی از $\langle X, G\rangle$ یکریخت نباشد–م.

۴. از گراف تا ماتریس‌وار

یک *دور*[۱] در گراف $G = (V, E)$ زیرگرافی همبند از G است که درجهٔ همهٔ رأس‌هایش ۲ است و یک *جنگل*[۲] در G زیرگرافی از G است که هیچ دوری ندارد. *ماتریس‌وار دوریِ* G که آن را با $M(G)$ نشان می‌دهیم، عبارت است از $(E, \mathcal{F})$ که در آن، $\mathcal{F}$ گردایهٔ همهٔ مجموعه‌یال‌های جنگل‌های G است. به‌آسانی می‌توان نشان داد که $M(G)$ همیشه ماتریس‌وار است. یک ماتریس‌وار، *گرافی* نامیده می‌شود اگر ماتریس‌وار دوریِ یک گراف باشد.

ردهٔ ماتریس‌وارهای گرافی از اهمیت بنیادی شگفت‌انگیزی برخوردار است؛ درست همان‌طور که گراف‌های مسطح در پروژهٔ کهادهای گراف اهمیت بنیادی دارد. بخش‌های اساسی نظریهٔ ماتریس‌وارها ریشه در نظریهٔ گراف دارند که با توجه به آنچه اکنون می‌دانیم، جای شگفتی ندارد. این ارتباط با نظریهٔ گراف، بر شکل‌دهی به واژگان نظریهٔ ماتریس‌وارها نیز تأثیر داشته است. توجه کنید که هر مجموعهٔ وابستهٔ کمین در $M(G)$ عبارت است از مجموعه‌ای از یال‌های یک دور در G. این واژگان برای ماتریس‌وارهای کلی نیز به‌کار می‌رود: یک مجموعهٔ وابستهٔ کمین در یک ماتریس‌وار، *دور* نامیده می‌شود.

۱.۴. کهادها و دوگانی. ردهٔ ماتریس‌وارهای گرافی، کهاد-بسته است. افزون بر این، اگر D و C دو مجموعهٔ جدا از هم از یال‌ها در گراف G باشد، آنگاه $M(G\backslash D/C) = M(G)\backslash D/C$. با وجود این، ردهٔ ماتریس‌وارهای گرافی نسبت به عمل دوگانی بسته نیست. در واقع گراف G مسطح است اگر و تنها اگر $M(G)^*$ یک ماتریس‌وار گرافی باشد. این مشخصهٔ هندسی زیبا برای مسطح بودن که ویتنی [۲۵] کشف کرده است، نخستین نشانه از پیوند ژرف بین نظریهٔ ماتریس‌وارها و نظریهٔ توپولوژیکی گراف‌ها است.

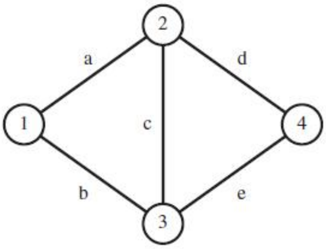
بنابراین هر مشخصه‌ای از ردهٔ ماتریس‌وارهای گرافی، مشخصه‌ای برای ردهٔ گراف‌های مسطح به‌دست می‌دهد. به‌ویژه مشخصهٔ کهاد-مطرود ذیل برای ردهٔ ماتریس‌وارهای گرافی منسوب به تات [۲۳]، قضیهٔ کوراتفسکی را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۵. *کهادهای مطرود ردهٔ ماتریس‌وارهای گرافی عبارت‌اند از*

$$U_{۲,۴}, F_۷, (F_۷)^*, M(K_{۳,۳})^*, M(K_۵)^*.$$

۲.۴. نمایش‌پذیری. ماتریس‌وارهای گرافی بر هر میدانی نمایش‌پذیرند. ماتریس *وقوع علامت‌دار* گراف $G = (V, E)$ ماتریس $A \in \{۰, \pm۱\}^{V\times E}$ است چنان‌که برای هر یال e با دو سر u و v اگر $u = v$، آنگاه ستون اندیس‌دار شده با e متحد با صفر است و اگر $u \neq v$، ستون اندیس‌دار شده با

[۱] circuit [۲] forest



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

شکل ۳. یک گراف و ماتریس وقوع علامت‌دار آن.

e دقیقاً یک ۱ و دقیقاً یک ۱− دارد و اینها (۱$\pm$) در مکان‌های (u,e) و (v,e) بدون ترتیب معینی قرار دارند؛ شکل ۳ را ببینید. به‌عنوان تمرینی ساده می‌توان ثابت کرد که A یک نمایش $M(G)$ روی هر میدان دلخواهی است.

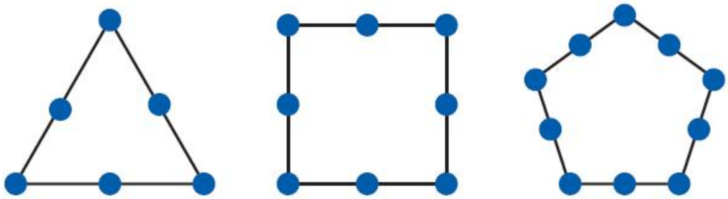
۳.۴. ماتریس‌وارهای کُنجی[1]. ردهٔ ماتریس‌وارهای گرافی در رده‌ای غنی‌تر از ماتریس‌وارها به نام ردهٔ ماتریس‌وارهای کُنجی قرار می‌گیرد. یک *ماتریس کُنجی* بر $\mathbb{F}$ ماتریسی با حداکثر دو درایهٔ ناصفر در هر ستون است و یک *ماتریس‌وار کُنجی* روی $\mathbb{F}$ ماتریس‌واری است که با یک ماتریس کُنجی نمایش داده می‌شود. ردهٔ ماتریس‌وارهای کُنجی مانند ردهٔ ماتریس‌وارهای گرافی، نسبت به عمل تشکیل کهاد، بسته است. افزون بر این، با روشی طبیعی می‌توان به هر ماتریس‌وار کُنجی یک گراف نسبت داد. اگرچه برای توصیف کامل ماتریس‌وار باید یال‌های گراف را جهت‌دار و برچسب‌دار کرد.

۵. پروژهٔ کهادهای ماتریس‌وار

حدسیّهٔ رُتا یادآور قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ کوراتفسکی است. رابرتسون و سیمور توانستند قضیهٔ تعمیم‌یافته کوراتفسکی را تعمیم بیشتری دهند و قضیهٔ شبه‌خوش‌ترتیبی را به‌دست آورند. بنابراین شاید حدسیّهٔ رُتا حالت ویژه‌ای از یک قضیهٔ بسیار کلی‌تر باشد. با وجود این، قضیهٔ شبه‌خوش‌ترتیبی به همهٔ ماتریس‌وارها تعمیم نمی‌یابد. یک *پادزنجیر* از ماتریس‌وارها، مجموعه‌ای از ماتریس‌وارها است که هیچ‌یک از آنها یکریخت با کهادی از دیگری نیست. ساختن پادزنجیرهای نامتناهی بسیار ساده است. برای نمونه، $\{M_۳, M_۴, M_۵, \ldots\}$ در شکل ۴ یک پادزنجیر نامتناهی از ماتریس‌وارهای رتبهٔ ۳ است. با وجود این، توانستیم یک تعمیم مهم از قضیهٔ شبه‌خوش‌ترتیبی را ثابت کنیم:

قضیه ۶ (شبه‌خوش‌ترتیبی برای ماتریس‌وار). *به‌ازای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ و هر ردهٔ کهاد-بسته از ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر، فقط تعدادی متناهی کهاد مطرود $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر وجود دارد.*

[1] frame matroids



شکل ۴. اولین سه ماتریس‌وار M_3 و M_4 و M_5 در یک پادزنجیر نامتناهی.

این نتیجه با حدسیهٔ رُتا قابل مقایسه نیست به این معنی که هیچ‌یک از این دو مستلزم دیگری نیست، زیرا در حدسیهٔ رُتا کهادهای مطرود بنابر تعریف، $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر نیستند.

اثبات ما برای قضیهٔ شبه‌خوش‌ترتیبی برای ماتریس‌وار، همپای اثبات قضیهٔ شبه‌خوش‌ترتیبی برای گراف‌ها پیش می‌رود. بخشی مهم از اثبات، مشابه اثبات قضیهٔ ساختار کهادهای گراف است. به یاد آورید که قضیهٔ ساختار کهادهای گراف اساساً می‌گوید که برای هر ردهٔ کهاد-بسته از گراف‌ها، گراف‌های آن رده را می‌توان صریحاً از گراف‌های نشانده‌شده در رویه‌های با گونای کم ساخت.

در مورد میدان متناهی $\mathbb{F}$، رده‌های بنیادی کهاد-بستهٔ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$- نمایش‌پذیر کدام‌اند؟ ثابت می‌شود که با تقریب دوگانی، تنها دو نوع رده وجود دارد. اول اینکه برای هر زیرمیدان $\mathbb{F}'$ از $\mathbb{F}$، مجموعهٔ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}'$-نمایش‌پذیر، کهاد-بسته است. ردهٔ نوع دوم عبارت است از ردهٔ ماتریس‌وارهای کُنجی بر $\mathbb{F}$.

قضیهٔ ساختار کهادهای ماتریس‌وار برای یک میدان متناهی $\mathbb{F}$ بیان می‌کند که چگونه می‌توان به روشی خاص، عضوهای یک ردهٔ دلخواه کهاد-بسته از ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر را با استفاده از ماتریس‌وارهای نمایش‌پذیر بر زیرمیدان‌های $\mathbb{F}$، ماتریس‌وارهای کُنجی و دوگان‌های ماتریس‌وارهای کُنجی ساخت. این قضیه بیشترین تلاش ما را به خود اختصاص داد و اثبات آن بیش از یک دهه طول کشید.

۶. به‌سوی حل حدسیهٔ رُتا

با وجود اینکه از سال ۱۹۹۹ با هم مشغول کار بودیم، تازه در سال ۲۰۱۲ توانستیم راهبردمان را برای حمله به حدسیهٔ رُتا صورت‌بندی کنیم. پیش از سال ۲۰۱۲، اصولاً درگیر نظریهٔ ساختار کهادهای ماتریس‌وار بودیم. در این بخش، سازوکاری را که به‌طور مشخص برای اثبات حدسیهٔ رُتا به‌وجود آورده‌ایم، کوتاه شرح می‌دهیم. بخش‌های مهمی از این سازوکار با همکاری تُنی هوین[۱] و استفان وَن‌زوَم[۲] که پژوهشگران دورهٔ پسادکتری بِرت جراردز بودند، به‌وجود آمد.

[۱]Tony Huynh [۲]Stefan van Zwam

۱.۶. همبندی. همبندی در نظریهٔ ماتریس‌وار به‌طور کلی و در اثبات حدسیّهٔ رُتا به‌ویژه، نقشی مهم ایفا می‌کند. تعریف زیر از تات است [۲۴]. یک k-*جداسازی* در ماتریس‌وار $M = (E, \mathcal{I})$ افرازی مانند (X, Y) از E است چنان‌که

$$r_M(X) + r_M(Y) - r_M(E) < k \quad \text{و} \quad |X|, |Y| \geq k.$$

یک ماتریس‌وار k-*همبند* است اگر به‌ازای هر $l < k$ هیچ l-جداسازی نداشته باشد.

برای دانستن انگیزهٔ این تعریف، حالتی را در نظر بگیرید که M با ماتریس A نمایش داده شود. فرض کنیم $\mathbb{V}$ فضای ستونی A و $\langle X\rangle$ زیرفضایی از $\mathbb{V}$ باشد که توسط ستون‌های اندیس‌دار شده با X تولید می‌شود. قضیهٔ بُعد زیرفضاها نشان می‌دهد که بُعد $\langle X\rangle \cap \langle Y\rangle$ برابر با $r_M(X)+r_M(Y)-r_M(E)$ است. بنابراین اگر $r_M(X) + r_M(Y) - r_M(E)$ کوچک باشد، X و Y با زیرفضایی از $\mathbb{V}$ با بعد کم، از هم جدا می‌شوند. شرط $|X|, |Y| \geq k$ یک شرط ناتبهگونی ضروری است، زیرا

$$r_M(X) + r_M(Y) - r_M(E) \leq \min(|X|, |Y|).$$

مسئله‌های مرتبط با نمایش ماتریس‌وارها نوعاً به حالت ۳-همبند تبدیل می‌شوند و این مطلب دربارهٔ حدسیّهٔ رُتا نیز راست است.

لم ۷. *به‌ازای هر میدان $\mathbb{F}$ هر کهادِ مطرود برای ردهٔ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر، ۳-همبند است.*

متأسفانه لم ۷ را نمی‌توان به‌آسانی بهبود بخشید. برای هر میدان متناهی از مرتبهٔ دست‌کم ۳، کهاد مطرودی وجود دارد که ۴-همبند نیست. نکته این است که شرط ناتبهگونیِ $|X|, |Y| \geq k$ ضعیف‌تر از آن است که بتوان از آن برای بهبود لم ۷ کمک گرفت. با وجود این، توانستیم ثابت کنیم که

قضیه ۸. *به‌ازای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$ و هر عدد درست k، عدد درست $n = n(\mathbb{F}, k)$ وجود دارد که اگر (A, B) یک k-جداسازی در یک کهاد مطرود برای ردهٔ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$- نمایش‌پذیر باشد، آن‌گاه* $\min(|A|, |B|) \leq n$.

برهانی مقدماتی برای قضیهٔ ۸ سراغ نداریم. اثبات ما مبتنی بر چند نتیجهٔ مشکل از جمله قضیهٔ شبه‌خوش‌ترتیبی برای ماتریس‌وار است. به‌دلیل به‌کار بردنِ روش‌های شبه‌خوش‌ترتیبی در اثبات، هیچ کران محاسبه‌پذیری[۱] برای $n(\mathbb{F}, k)$ نداریم و در نتیجه کرانی محاسبه‌پذیر برای تعداد یا اندازهٔ کهادهای مطرودِ ردهٔ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر، به‌دست نمی‌آید.

قضیهٔ ۸ نشان می‌دهد که کهادهای مطرود به یک معنا بسیار همبند هستند. بنابراین تمرکز ما بر کهادهای مطرودی خواهد بود که به‌تعبیرِ تات، بسیار همبندند. با انجام این کار گرچه بخشی از کلیّت را از دست می‌دهیم، از مقدار زیادی کار فنی که تأثیری در اصل مطلب ندارد، پرهیز می‌کنیم.

---
[۱] computable

۲.۶. نمایش‌های ناهم‌ارز. به یاد آورید که اگر A_1 و A_2 ماتریس‌های افکنشی-هم‌ارز باشند، یک ماتریس‌وار را نمایش می‌دهند. ماتریس‌وارهایی وجود دارند که نمایش‌های افکنشی-ناهم‌ارز بسیاری بر یک میدان متناهی داده‌شده می‌پذیرند. این مطلب یکی از سرچشمه‌های اصلی دشواری‌ها در موضوع نمایش ماتریس‌وارها است و در کانون توجه قرار دارد [۶، ۸، ۹، ۱۴، ۲۷]. این دشواری‌ها را می‌توان با بررسی ماتریس‌وارهایی برطرف کرد که همبندی آنها به‌اندازهٔ کافی زیاد است.

قضیه ۹. *برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$، عددهای درست k_1 و n_1 وجود دارند چنان‌که هر ماتریس‌وار k_1-همبند، حداکثر n_1 نمایش افکنشی-ناهم‌ارز بر $\mathbb{F}$ دارد.*

قضیهٔ ۹ را جیلن، جراردز، هوین و وَن‌زوَم در سال ۲۰۱۲ ثابت کردند [۳]. این مقاله ابزارهای استقرایی توانمندی برای کار کردن با ماتریس‌وارهای بسیار همبند به‌وجود آورد. نکتهٔ کلیدی در اینجا تضعیف مفهوم همبندی به روشی سازگار با قضیهٔ ۸ است. این ابزارهای همبندی می‌تواند کاربردهای گسترده‌تری در ترکیبیات و به‌ویژه در نظریهٔ گراف بیابد.

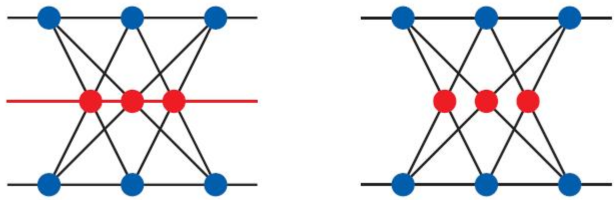
۳.۶. انشعاب نمایش‌ها و عضوهای ثابت. $\mathbb{F}$ را یک میدان متناهی و k_1 و n_1 را عددهای درست داده‌شده در قضیهٔ ۹ می‌گیریم. فرض کنیم e عضوی از یک ماتریس‌وار $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر باشد و M و $M\backslash e$ هر دو k_1-همبند باشند. قضیهٔ ۹ نشان می‌دهد که M و $M\backslash e$ هر دو حداکثر n_1 نمایش ناهم‌ارز دارند ولی توضیحی از چگونگیِ ارتباط این نمایش‌ها به‌دست نمی‌دهد. ممکن است برخی نمایش‌های $M\backslash e$ به نمایش‌هایی از M گسترش نیابد در حالی که دیگر نمایش‌ها به دو یا بیشتر نمایش ناهم‌ارز برای M منشعب شود. این انشعاب، یکی از علل اصلی دشواری درکار ما است. خوشبختانه ما ریشهٔ بروز انشعاب را می‌شناسیم.

گیریم A نمایشی برای $M\backslash e$ باشد که به دو نمایش افکنشی-ناهم‌ارز $[A,u]$ و $[A,v]$ از M گسترش می‌یابد. فرض کنیم $A' = (A \ \overset{e}{u} \ \overset{e'}{v})$ و $M' = M(A')$. توجه کنید که جابه‌جاییِ e و e'، یک خودریختی از M' تعریف می‌کند. گوییم e و e' در M' *بافت‌زاد* هستند. به‌علاوه چون $[A,u]$ و $[A,v]$ افکنشی-ناهم‌ارزند، $\{e,e'\}$ در M' مجموعه‌ای مستقل است. گوییم عضو e در M *ثابت* است اگر نتوان ماتریس‌وار M' را با گسترش M به‌کمک عضوی مانند e' به‌دست آورد چنان‌که $\{e,e'\}$ یک جفت بافت‌زاد مستقل باشد. لم بعدی مستقیماً از بحث بالا به دست می‌آید.

لم ۱۰. *اگر e عضوی ثابت در ماتریس‌وار M باشد، آن‌گاه هیچ نمایشی از $M\backslash e$ به دو نمایش افکنشی-ناهم‌ارز M گسترش نمی‌یابد.*

نتیجهٔ بعدی نشان می‌دهد که ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر، عضوهای ناثابت کمی دارند.

قضیه ۱۱. *برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$، عددهای درست k_2 و n_2 وجود دارند چنان‌که هر ماتریس $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر k_2-همبند، حداکثر n_2 عضو ناثابت دارد.*



شکل ۵. ماتریس‌وار پاپوس (سمت راست) و ماتریس‌وار ناپاپوس (سمت چپ).

قضیهٔ ۱۱ را جیلن و ون‌زوَم ثابت کردند [۷]. اثبات مبتنی است بر نتیجهٔ اصلی [۵] که ساختار یک ماتریس‌وار $\mathbb{F}$–نمایش‌پذیر را توصیف می‌کند به‌شرطی که ماتریس‌وارِ دوریِ یک گراف مسطح را کهاد مطرود بدانیم. قضیه‌های ۹ و ۱۱ آگاهی زیادی دربارهٔ نمایش‌های ناهم‌ارز یک ماتریس‌وار در اختیار ما می‌گذارند. با وجود این، از سال ۱۹۹۹ به این سو، نتیجه‌های بسیار قوی‌تری برای شناخت نمایش‌های ناهم‌ارز ماتریس‌وارهای $GF(5)$–نمایش‌پذیر داشته‌ایم [۱۴، ۲۷] ولی هنوز مجموعهٔ کامل کهادهای مطرود را نمی‌شناسیم.

۴.۶. افزودن یک دور–ابرصفحه. به یاد آورید که یک ابرصفحه در ماتریس‌وار $M = (E, \mathcal{I})$ یک مجموعهٔ بیشین از رتبهٔ $r_M(E) - 1$ است و دور، عبارت است از یک مجموعهٔ وابستهٔ کمین. اگر C هم یک دور باشد هم یک ابرصفحه، آن‌گاه با *افزودن* C می‌توانیم ماتریس‌وار جدید M' را از M بسازیم، یعنی $M' = (E, \mathcal{I} \cup \{C\})$. این ساخت، نمایش‌پذیری را نگه نمی‌دارد. برای نمونه، ماتریس‌وارهای شکل ۵ را مشاهده کنید. ماتریس‌وار پاپوس[۱] بر $\mathbb{R}$ نمایش‌پذیر است که این مطلب از ترسیمش با خطوط راست آشکار است. ماتریس‌وار ناپاپوس[۲] از ماتریس‌وار پاپوس با افزودن دور–ابرصفحهٔ نشان داده‌شده با خط قرمز به‌دست می‌آید. در مجموعه آثار پاپوس (تقریباً ۳۴۰ بعد از میلاد) اثباتی وجود دارد از اینکه ماتریس‌وار ناپاپوس روی $\mathbb{R}$ نمایش‌پذیر نیست. در واقع ماتریس‌وار ناپاپوس روی هیچ میدانی نمایش‌پذیر نیست.

عمل افزودنِ یک دور–ابرصفحه نسبت به نمایش‌پذیری به‌طور کلی خوش‌رفتار نیست؛ به‌ویژه نسبت به نمایش‌پذیری روی میدان‌های متناهی، ضعیف رفتار می‌کند. پس از آشکار کردنِ این مطلب، روشی

[۱] ماتریس‌وار پاپوس، ماتریس‌واری بر $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ است که پایه‌هایش همهٔ سه‌تایی‌ها بجز

$$abc, def, ghi, adh, hdg, aei, ceg, bfi, cfh$$

است–م.

[۲] ماتریس‌وار ناپاپوس، ماتریس‌واری بر $G = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ است که پایه‌هایش همهٔ سه‌تایی‌ها بجز

$$abc, ghi, adh, hdg, aei, ceg, hfi, cfh$$

است. ماتریس‌وار ناپاپوس بر هیچ میدانی نمایش‌پذیر نیست ولی بر *میدان چوله* (skew field) نمایش‌پذیر است–م.

برای تأیید نمایش‌ناپذیری در اثبات حدسیهٔ رُتا به‌دست می‌آوریم. نتیجهٔ بعدی نشان می‌دهد که اگر M ماتریس‌واری به اندازهٔ کافی بزرگ و به اندازهٔ کافی همبند باشد و اگر ماتریس‌وار M' از M با افزودن یک دور-ابرصفحه به‌دست آید، آن‌گاه M و M' هر دو نمی‌توانند بر یک میدان متناهی نمایش‌پذیر باشند.

قضیه ۱۲. *به‌ازای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$، عددهای درست $k_۳$ و $n_۳$ وجود دارند به‌طوری که اگر $M_۱$ و $M_۲$ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر بر یک مجموعهٔ زمینهٔ مشترک E باشند، $M_۲$ از $M_۱$ با افزودن یک دور-ابرصفحه به‌دست آید و $M_۱$، $k_۳$-همبند باشد، آن‌گاه $|E| \leq n_۳$.*

در واقع ما نتیجه‌ای قوی‌تر ثابت کردیم. توجه کنید که اگر $M_۲$ از $M_۱$ با افزودن C به‌دست آید، آن‌گاه $M_۱\backslash e = M_۲\backslash e$ به‌ازای هر $e \in C$.

قضیه ۱۳. *به‌ازای هر میدان متناهی $\mathbb{F}$، عددهای درست $k_۴$ و $n_۴$ وجود دارند به‌طوری که اگر $M_۱$ و $M_۲$ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر بر مجموعهٔ زمینهٔ مشترک E باشند و $M_۱$، $k_۴$-همبند باشد، آن‌گاه مجموعه‌ای مانند $X \subseteq E$ وجود دارد که $|X| \leq n_۴$ و $M_۱\backslash e = M_۲\backslash e$ به‌ازای هر $e \in E - X$.*

این نتیجه دشوارترین گام در حل حدسیهٔ رُتا و مبتنی بر توانایی کامل نظریهٔ ساختار کهادهای ماتریس‌وار است که قبلاً ارائه کرده بودیم. بخش زیادی از اثبات ماهیت گرافی دارد که این مطلب با توجه به صورت قضیه، اندکی تعجب‌برانگیز است.

۷. کهادهای مطرود بسیار همبند

در بخش پایانی، اشاره می‌کنیم که چگونه می‌توان دستگاه ساخته‌شده در بخش پیشین را برای اثبات صورتی ضعیف از حدسیهٔ رُتا به‌کار برد. به‌ویژه ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر میدان متناهی مانند $\mathbb{F}$، تنها تعدادی متناهی کهاد مطرود بسیار همبند برای ردهٔ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر وجود دارد. در این اثبات از همهٔ ابزارهای مورد نیاز برای اثبات حالت کلی حدسیهٔ رُتا استفاده می‌شود بجز روش همبندی که پس از بیان اثبات، آن را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۴. *به‌ازای هر میدان متناهی مانند $\mathbb{F}$، عدد درست k وجود دارد چنان‌که ردهٔ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر، هیچ کهاد مطرود k-همبند با دست‌کم $۲k$ عضو ندارد.*

اثبات. فرض کنیم $k_۱$، $k_۲$، $k_۴$، $n_۱$، $n_۲$ و $n_۴$ عددهای درست داده‌شده در قضیه‌های ۹، ۱۱ و ۱۳ باشند، $t = n_۱(n_۲ + ۱)(n_۴ + ۱)$ و

$$k = \max\{k_۱ + n_۱(n_۴ + ۱), k_۲ + t, k_۴ + ۱\}.$$

فرض کنیم کهاد مطرود k-همبند $M = (E, I)$ وجود دارد که $|E| \geq ۲k$. در سراسر اثبات از این حقیقت بهره می‌بریم که برای هر مجموعه مانند $Z \subseteq E$، $M\backslash Z$، $(k - |Z|)$-همبند است. فرض

کنیم X_1 یک زیرمجموعهٔ tعضوی از E و $\prod$ پارشی از X_1 به $(n_4+1)n_1$ مجموعه از اندازهٔ n_2+1 باشد. بنابر قضیهٔ ۱۱، برای هر $Y\in\prod$ عضوی مانند $e\in Y$ وجود دارد که در $M\backslash(X_1-Y)$ ثابت است. گیریم X_2 یک تراگرد $\prod$ دربرداندهٔ یکی از این گونه عضوها از هر مجموعه در $\prod$ باشد. بنابراین $|X_2|=n_1(n_4+1)$. بنابر قضیهٔ ۹، $M\backslash X_2$ حداکثر n_1 نمایش ناهم‌ارز دارد. چون M یک کهاد مطرود است، $M\backslash e$ برای هر $e\in X_2$ نمایش‌پذیر است. بنابراین نمایش A_0 از $M\backslash X_2$ و زیرمجموعهٔ (n_4+1)عضوی X_3 از X_2 وجود دارد که A_0 به نمایشی از $M\backslash e$ برای هر $e\in X_3$ گسترش می‌یابد. بنابر روش ساخت، هر عضو $e\in X_2$ در $M\backslash(X_2-\{e\})$ ثابت است. پس بنابر لم ۱۰، نمایش A_0 به یکتا نمایشی از $M\backslash(X_2-\{e\})$ گسترش می‌یابد. از این‌رو ماتریس یکتای A به‌دست می‌آید به‌طوری که $A|_{(E-X_2)}=A_0$ و برای هر $e\in X_3$، $M(A)\backslash e=M\backslash e$. چون M، $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر نیست، $M\neq M(A)$. بنابراین مجموعه‌ای مانند $B\subseteq E$ وجود دارد که در دقیقاً یکی از ماتریس‌وارهای M و $M(A)$ پایه است. توجه کنید که $X_3\subseteq B$. اکنون عضو $f\in E-B$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $M\backslash f$ و $M(A)\backslash f$ ماتریس‌وارهای $\mathbb{F}$-نمایش‌پذیر متمایز بر یک مجموعهٔ زمینهٔ مشترک است. افزون بر این، برای هر $e\in X_3$ داریم

$$M\backslash f,e=M(A)\backslash f,e.$$

این نتیجه با قضیهٔ ۱۳ در تناقض است و این تناقض اثبات را کامل می‌کند.

برای اثبات حدسیّهٔ رُتا در حالت کلی مانند اثبات بالا، با یک کهاد مطرود nعضوی مانند M آغاز می‌کنیم. بنابر قضیهٔ ۸، M «به‌طور ضعیف» k-همبند است. سپس با به‌کار بردنِ روش‌های ارائه شده در [۳]، مجموعهٔ tعضوی X_1 به‌دست می‌آید که پس از احتمالاً جایگزینی M با دوگانش، $M\backslash D$ برای هر $D\subseteq X_1$ ضعیف k-همبند باقی می‌ماند. ادامهٔ اثبات همانند بالا است.

سپاسگزاری: از ویرایشگر محترم مقاله برای ویرایش آن صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مراجع

[1] Bixby, R. E., On Reid's characterization of ternary matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **26** (1979), 174–204.

[2] Diestel, R., *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] Geelen, J., Gerards B., Huynh, T., van Zwam, S., Generating k-connected matroids (working title), in preparation.

[4] Geelen, J., Gerards A. M. H., Kapoor, A., The excluded minors for GF(4)-representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **79** (2000), 247–299.

[5] Geelen, J., Gerards B., Whittle, G., Excluding a planar graph from GF(q)-representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **97** (2007), 971–998.

[6] ————, On inequivalent representations of matroids over nonprime fields, *J. Combin. Theory Ser. B*, **100** (2010), 740–743.

[7] Geelen J., van Zwam, S., Fixed elements and matroid tangles (working title), in preparation.

[8] Geelen J., Whittle, G., Inequivalent representations of matroids over prime fields, *Adv. in Appl. Math.*, **51** (2013), 1–175.

[9] Kahn, J., On the uniqueness of matroid representations over GF(4), *Bull. London Math. Soc.*, **20** (1988), 5–10.

[10] Kuratowski, K., Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, **15** (1930), 271–283.

[11] Lazarson, T., The representation problem for independence functions, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 21–25.

[12] Mayhew, D., Newman, M., Whittle, G., On excluded minors for real-representable matroids, *J. London Math. Soc.*, **99** (2009), 685–689.

[13] ————, Is the missing axiom of matroid theory lost forever?, arXiv:1204.3365v1.

[14] Oxley, J., Vertigan D., Whittle, G., On inequivalent representations of matroids over finite fields, *J. Combin. Theory Ser. B*, **67** (1996), 325–343.

[15] Robertson, N., Seymour, P. D., Graph minors (IV): Excluding a graph, *J. Combin. Theory Ser. B*, **48** (1990), 227–254.

[16] ————, Graph minors (VIII): A Kuratowski theorem for general surfaces, *J. Combin. Theory Ser. B*, **48** (1990), 255–288.

[17] ————, Graph minors (XVI): Excluding a nonplanar graph, *J. Combin. Theory Ser. B*, **89** (2003), 43–76.

[18] ————, Graph Minors (XX): Wagner's conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B*, **92** (2004), 325–357.

[19] Rota, G.-C., Combinatorial theory, old and new, *Proc. Internat. Cong. Math.*, (Nice, 1970), 229–233.

[20] Seymour, P. D., Matroid representation over GF(3), *J. Combin. Theory Ser. B*, **26** (1979), 159–173.

[21] ————-, Recognizing graphic matroids, *Combinatorica*, **1** (1981), 387–394.

[22] Tutte, W. T., A homotopy theorem for matroids (I, II), *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88** (1958), 144–174.

[23] ————-, Matroids and graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 527–552.

[24] ————-, Lectures on matroids, *J. Nat. Bur. Standards Sect. B*, **69B** (1965), 1–47.

[25] Whitney, H., Nonseparable and planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932), 339–362.

[26] —————, On the abstract properties of linear independence, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 509–533.

[27] Whittle, G., Stabilizers of classes of representable matroids, *J. Combin. Theory Ser. B*, **77** (1999), 39–72.

[28] Vámos, P., A necessary and sufficient condition for a matroid to be linear, in Möbius algebras (Proc. Conf. Univ. Waterloo, 1971), 162–169. University of Waterloo, Waterloo.

سیّد محمدباقر کاشانی: دانشگاه تربیت مدرس، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

رایانامه: kashanim@modares.ac.ir