فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۶، شمارهٔ ۶۱ (پاییز و زمستان ۱۳۹۶) صص. ۸۱ تا ۹۸

مباحثی از نظریهٔ هندسی توابع بر قرص واحد (قسمت اول)

علی عبادیان

چکیده

یکی از مباحث بسیار مهم و جالب در آنالیز مختلط، بررسی ویژگی‌های هندسی تابع‌هایی است که بر قرص واحد $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ در صفحهٔ مختلط تعریف شده‌اند. روشن است که نمودار تابع تحلیلی $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n \ (z \in \mathbb{D})$ ترسیم‌پذیر نیست ولی بُرد آن، یعنی مجموعهٔ $f(\mathbb{D})$ توصیف هندسی دارد. از طرف دیگر، کوشش برای پاسخ دادن به این سؤال که چه ارتباطی بین ویژگی‌های هندسی بُرد این گونه تابع‌ها مانند ستاره‌وار بودن، محدب بودن و ... با ضرایب a_n وجود دارد، منجر به پیدایش نظریه‌ای مهم با عنوان *ویژگی‌های هندسی تابع‌های تک‌ارز* شد که منشاء آن، حدس معروف بیبرباخ است. در این مقاله، ضمن بررسی تاریخیِ این موضوع، به برخی از کارهای پژوهشی جدید در این زمینه اشاره می‌کنیم.

۱. حدسیّهٔ بیبرباخ و نقش آن در توسعهٔ نظریهٔ تابع‌های تک‌ارز

فرض کنیم $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < ۱\}$ قرص واحد در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ باشد. تابع $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ را *تک‌ارز* می‌نامیم اگر از $z_۱ \neq z_۲$ نتیجه شود $f(z_۱) \neq f(z_۲)$. به‌عبارت دیگر، f یک‌به‌یک باشد. با استفاده از قضیهٔ معروف هورویتس[۱] در آنالیز مختلط، می‌توان ثابت کرد که خاصیت تک‌ارزی نسبت به همگرایی یکنواخت حفظ می‌شود. بنابراین اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابع‌های تحلیلی تک‌ارز بر $\mathbb{D}$ باشد که روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ $\mathbb{D}$ به‌طوریکنواخت به تابع تحلیلی f همگرا است، آنگاه تابع f یا تک‌ارز

عبارات و کلمات کلیدی. قرص واحد؛ تابع‌های تک‌ارز؛ تابع‌های ستاره‌وار؛ تابع‌های محدب؛ حدسیّهٔ بیبرباخ.

[۱] Adolf Hurwitz

است و یا ثابت [۴۴، ص. ۳۵۷، قضیهٔ ۱۰.۱۱]. با استناد به این حکم، می‌توان قضیه‌های بسیار جالبی دربارهٔ تابع‌های تک‌ارز ثابت کرد.

ردهٔ تابع‌های تک‌ارز مانند $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ را که در شرایط نرمال‌سازی $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کنند، با $\mathcal{S}$ نمایش می‌دهیم. در [۱۰] نامساوی

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \qquad (z \in \mathbb{D}) \tag{1.1}$$

به‌ازای هر $f \in \mathcal{S}$ ثابت شده است. با استفاده از این نامساوی می‌توان ثابت کرد که ردهٔ $\mathcal{S}$ یک خانوادهٔ نرمال‌فشرده در فضای تابع‌های تحلیلی روی $\mathbb{D}$، یعنی $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ است. اگر Σ ردهٔ تابع‌های تحلیلی تک‌ارز به‌شکل

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

روی حوزهٔ $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ باشد (نقطهٔ بینهایت قطب ساده برای g است)، آن‌گاه با استفاده از تبدیل

$$f(z) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

می‌توانیم تناظری یک‌به‌یک بین رده‌های $\mathcal{S}$ و Σ برقرار کنیم [۴۴، ص. ۳۶۶، قضیهٔ ۱.۱۲].

یکی از مسائل مهم در این حوزه، حدسیّهٔ معروف بیبرباخ[1] است که ایدهٔ آن از *قضیهٔ مساحت* گرفته شده است. تک‌ارزیِ تابع تحلیلی مختلط‌مقدار $g(z)$ با بسط سری لوران

$$g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad (|z| > 1)$$

نقشی مهم در تعیین کران برای اندازهٔ ضرایب بسط لوران، یعنی b_nها $(n = 1, 2, \ldots)$ دارد. این مطلب به *قضیهٔ مساحت* معروف است که گرانوال آن را در سال ۱۹۱۴ ثابت کرد و نقشی کلیدی در مطالعهٔ ویژگی‌های مقدماتی ردهٔ تابع‌های تک‌ارز نرمال‌شده ایفا می‌کند. دلیل نامگذاریِ این قضیه به نام گرانوال را می‌توان در برهان آن ([۱۰، ص. ۲۹، قضیهٔ ۲.۱] یا [۴۴، ص. ۳۶۶، قضیهٔ ۲.۱۲]) جستجو کرد.

قضیه ۱.۱ (مساحت). *اگر تابع $g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ روی حوزهٔ Δ تحلیلی و تک‌ارز باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.*

قضیهٔ اخیر به تخمین دقیقِ $|a_2| \leq 2$ در بسط تیلور یک تابع $f \in \mathcal{S}$ به‌شکل

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \qquad (z \in \mathbb{D}) \tag{2.1}$$

[1] Ludwig Bieberbach

منجر می‌شود. تساوی $|a_2| = 2$ نیز تنها وقتی برقرار است که $f(z)$ دَورانی از تابع کوبه[1] باشد. همین موضوع انگیزه‌ای شد تا ایدهٔ یک مسئلهٔ بسیار کلی‌تر، یعنی پیدا کردنِ مقدار

$$A_n = \sup_{f\in\mathcal{S}} |a_n| \qquad n = ۲, ۳, ۴, \ldots$$

شکل بگیرد. چون تابع کوبه نقشی مؤثر در بسیاری از مسائل مربوط به ردهٔ $\mathcal{S}$ ایفا می‌کند، بیبرباخ حدس زد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $A_n = n$. این همان حدسیّهٔ معروف بیبرباخ است که نخستین بار در سال ۱۹۱۶ مطرح شد.

حدسیّه ۲.۱ (بیبرباخ). *ضرایب بسط تیلور هر تابع $f \in \mathcal{S}$ به‌ازای هر $n \geq ۲$ در نامساوی $|a_n| \leq n$ صدق می‌کنند. نامساوی اکید $|a_n| < n$ برقرار است مگر اینکه f تابع کوبه یا یکی از دَوَران‌هایش باشد.*

تاریخچهٔ تلاش‌ها برای اثبات این حدسیّه، پرفراز و نشیب و در عین حال، پیوسته است. در سال ۱۹۲۳ لاونر [۲۸] با استفاده از روش نمایش پارامتری برای نگاشت‌های برش[2] نشان داد که $|a_3| \leq ۳$. تا سال ۱۹۵۵ تلاش‌های زیادی برای تعیین کران $|a_4|$ انجام گرفت که همگی به شکست انجامیدند تا اینکه گارابدیان و شیفر [۱۵] با استفاده از روش تغییراتی[3] ثابت کردند که $|a_4| \leq ۴$. این اثبات بسیار پیچیده بود اما در سال ۱۹۶۰ چارزینسکی و شیفر [۷] دو اثبات نسبتاً ساده برای آن ارائه دادند. یکی از این اثبات‌ها که کاملاً ابتدایی است، بر پایهٔ نامساوی‌های گرانسکی[4] [۱۵] استوار شده است که تعمیمی از قضیهٔ مساحت است. از آن پس بود که نامساوی‌های گرانسکی (که آنها را گرانسکی در سال ۱۹۳۹ معرفی کرده بود) مجدداً مورد توجه واقع شدند. از سال ۱۹۶۰ نامساوی‌های گرانسکی پایه‌ای برای قسمتی از پیشرفت‌های مهم از جمله نظریهٔ میلین [۲۸] و اثبات نامساوی $|a_n| < \sqrt{\frac{۷}{۶}}n$ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ بوده است [۳۰]. در سال ۱۹۶۸ پِدِرسون [۳۴] و اوزاوا [۳۳] با به‌کارگیریِ نامساوی‌های گرانسکی ثابت کردند که $|a_6| \leq ۶$. به‌دست آوردنِ کران برای ضریب پنجم تا حدودی مشکل‌تر می‌نمود تا اینکه در سال ۱۹۷۲ پِدِرسون و شیفر با استفاده از نامساوی‌های گارابدیان–شیفر که تعمیمی از نامساوی‌های گرانسکی هستند، ثابت کردند $|a_5| \leq ۵$. البته مسئلهٔ اثبات نامساوی $|a_n| \leq n$ برای برخی از زیررده‌های $\mathcal{S}$ به‌طور کامل حل شده بود. مثلاً در سال ۱۹۲۰ نوالینا [۳۲] ثابت کرد که برای ردهٔ تابع‌های ستاره‌وار $\mathcal{S}^*$ (که متعاقباً معرفی خواهد شد)، $|a_n| \leq n$. همچنین در سال ۱۹۵۵ رِد [۳۷] نشان داد که برای ردهٔ تابع‌های تقریباً محدب $\mathcal{C}$ (که متعاقباً معرفی خواهد شد)، $|a_n| \leq n$ ولی حالت کلی مسئله تا سال ۱۹۸۵ همچنان حل‌نشده باقی مانده بود تا اینکه سرانجام، توسط دوبرانژ [۸] در همان سال ثابت شد و به این ترتیب، یکی از مسائل جالب و در عین حال پیچیدهٔ ریاضی به نتیجه رسید. برای مطالعهٔ جزئیات و

[1] Paul Koebe [2] slit mapping [3] variational method [4] Grunsky inequalities

کسب اطلاعات بیشتر در مورد حدسیّهٔ بیبرباخ و مطالب مربوط به آن، خوانندە می‌تواند به [۳، ۱۴، ۱۷، ۴۳] مراجعه کند. به‌طور خلاصه می‌توان گفت که حدسیّهٔ بیبرباخ و دو حدسیّهٔ وابسته به آن با نام‌های *حدسیّهٔ روبرتسون*[۱] و *حدسیّهٔ میلین*، توسعهٔ نظریهٔ تابع‌های تک‌ارز را بیش از ۶۰ سال تحت تأثیر خود قرار دادند.

نامساوی بیبرباخ $|a_۲| \leq ۲$ نتایج فراوانی در نظریهٔ هندسی تابع‌های همدیس داشته است. یکی از مهم‌ترین نتایج به‌دست آمده تاکنون عبارت است از قضیهٔ دگرشکلی[۲] منسوب به کوبه که کران‌های بالا و پایین دقیقی را برای $|f'(z)|$ به‌ازای هر $f \in \mathcal{S}$ تعیین می‌کند. عبارت «دگرشکلی» که در این قضیه به‌کار برده شده است، از یکی از دو مورد زیر ناشی می‌شود: یکی تعبیر هندسی $|f'(z)|$ به‌عنوان عامل بزرگ‌نماییِ موضعیِ طول قوس تحت نگاشت f و دیگری، ژاکوبینِ نگاشت f، یعنی $|f'(z)|^۲$ که بزرگ‌نماییِ موضعی مساحت است.

قضیه ۳.۱ (دگرشکلی، [۱۰]). *به‌ازای هر $f \in \mathcal{S}$ و هر $z \in \mathbb{D} \setminus \{۰\}$ داریم*

$$\frac{۱ - r}{(۱ + r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱ + r}{(۱ - r)^۳} \qquad (r = |z| < ۱).$$

در هر یک از نامساوی‌های بالا، تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که f دَوَرانی از تابع کوبه باشد.

نتیجه‌ای مهم که با به‌کارگیری مستقیم قضیهٔ دگرشکلی به‌دست می‌آید، *قضیهٔ رشد* است. قضیهٔ رشد، کران‌های بالا و پایین دقیقی را برای $|f(z)|$ به‌ازای هر $f \in \mathcal{S}$ تعیین می‌کند که در نتیجه ثابت می‌شود خانوادهٔ تابع‌های تحلیلی تک‌ارزِ نرمال‌شده، موضعاً کراندار است. با استفاده از موضعاً کرانداریِ عضوهای $\mathcal{S}$ و به‌کارگیریِ قضیهٔ کلاسیک مونتل [۳۱]، همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، می‌توان نرمال‌فشرده بودنِ خانوادهٔ $\mathcal{S}$ را در $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ نتیجه گرفت.

۲. زیررده‌های خاص ردهٔ تابع‌های تک‌ارز

در این بخش، با زیررده‌های خاصی از $\mathcal{S}$ آشنا می‌شویم که توصیف‌های هندسی جالبی دارند. این زیررده‌ها شامل تابع‌های ستاره‌وار، محدب، تقریباً محدب و α-مارپیچ‌وار و ... هستند. چندین سؤال اساسی در مورد این ساختارها، با روش‌های مقدماتی پاسخ داده شده‌اند ولی هنوز هم سؤال‌های پاسخ داده‌نشدهٔ فراوانی موجودند که پژوهش در مورد آنها ادامه دارد. برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر در مورد زیررده‌های $\mathcal{S}$، خواننده می‌تواند فصل دومِ [۱۰] را مطالعه کند.

در ادامه به دوتا از مهم‌ترین زیررده‌های $\mathcal{S}$، یعنی تابع‌های ستاره‌وار و محدب اشاره می‌کنیم. این دو رده را می‌توان با ابزارهای هندسی توصیف کرد اما هر دو دارای توصیف‌های بسیار مفید تحلیلی نیز

[۱] Robertson conjecture [۲] distortion

هستند. در مورد هر دو رده، کران‌های دقیق ضرایب سری تیلور را می‌توان بسیار آسان‌تر نسبت به خودِ $\mathcal{S}$ تعیین کرد. علاوه بر این، قضیه‌های رشد و دگرشکلی که برای تابع‌های ستاره‌وار ثابت می‌شوند، همان‌هایی هستند که برای خودِ ردهٔ $\mathcal{S}$ بیان می‌شود. اما برای تابع‌های محدب و زیررده‌های متعدد دیگر $\mathcal{S}$ نتایجی قوی‌تر موجود است. همچنین توصیف‌های تحلیلی برای ستاره‌وار بودن و تحدب را می‌توان به ابعاد بالاتر (یعنی چندمتغیره) تعمیم داد که در این صورت، برهان‌ها می‌بایست به‌طور قابل ملاحظه‌ای تغییر کنند.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $۰ < r \leq ۱$، $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ و $\mathcal{H}(\mathbb{D}_r)$ عبارت باشد از خانوادهٔ همهٔ تابع‌های تحلیلی $f : \mathbb{D}_r \to \mathbb{C}$. می‌گوییم $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}_r)$ روی $\mathbb{D}_r$ نسبت به نقطهٔ $z_۰ \in \mathbb{D}_r$ ستاره‌وار است اگر f روی $\mathbb{D}_r$ تک‌ارز باشد و ناحیهٔ $f(\mathbb{D}_r)$ نسبت به نقطهٔ $w_۰ = f(z_۰)$ ستاره‌وار باشد. همچنین می‌گوییم $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}_r)$ روی $\mathbb{D}_r$ محدب است اگر f روی $\mathbb{D}_r$ تک‌ارز باشد و $f(\mathbb{D}_r)$ یک ناحیهٔ محدب در صفحه باشد.

زیرردهٔ تابع‌های ستاره‌وار نسبت به مبدأ و تابع‌های محدب روی $\mathbb{D}$ را به‌ترتیب با $\mathcal{S}^*$ و $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم. واضح است که $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$. یک مثال مهم و جالب در $\mathcal{S}$ تابع کوبه با ضابطهٔ

$$k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲ + ۳z^۳ + \cdots = \sum_{n=۱}^{\infty} nz^n \qquad (z \in \mathbb{D})$$

است. با توجه به تساویِ

$$k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱+z}{۱-z}\right)^۲ - \frac{۱}{۴},$$

می‌بینیم که این تابع قرص واحد $\mathbb{D}$ را به کل صفحهٔ مختلط منهای بازهٔ $(-\infty, -\frac{۱}{۴}]$ تصویر می‌کند. بنابراین بُرد آن محدب نیست ولی نسبت به مبدأ ستاره‌وار است.

چون تعیین ستاره‌وار بودن با استفاده از توصیف هندسی بسیار مشکل است، لازم است شرط دیگری را که اغلب در اثبات‌ها و محاسبات بسیار سودمند و کارآمد است، معرفی کنیم. این مطلب، موضوعِ قضیهٔ زیر است:

قضیه ۲.۲ ([۴۴، ص. ۳۸۱، قضیهٔ ۱۰.۱۲]). *فرض کنیم $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ و $f(۰) = ۰$. در این صورت f ستاره‌وار است اگر و تنها اگر $f'(۰) \neq ۰$ و به‌ازای هر $z \in \mathbb{D}$، $\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > ۰$.*

نکتهٔ اساسی در اثبات قضیهٔ فوق، استفاده از توصیف هندسی است: f (نسبت به مبدأ) ستاره‌وار است اگر و تنها اگر آهنگ تغییرات آنیِ شناسهٔ تابع $f(z)$ نسبت به شناسهٔ z یعنی θ، وقتی z روی دایرهٔ $|z| = r < ۱$ در جهت مثبت حرکت می‌کند، بزرگتر یا مساوی صفر باشد. به عبارت دیگر، f ستاره‌وار

است اگر و تنها اگر $\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg\ f(re^{\mathrm{i}\theta})) \geq 0$. خواننده برای مطالعهٔ جزئیات اثبات می‌تواند فصل دومِ [۱۰] را بخواند. تابع‌های محدب را نیز می‌توان مانند تابع‌های ستاره‌وار به روشی مشابه توصیف کرد. این مطلب در قضیهٔ زیر آمده است:

قضیه ۳.۲ ([۴۴، ص. ۳۸۴، قضیهٔ ۱۲.۱۲]). *فرض کنیم $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد که $f(0) = 0$. در این صورت f محدب است اگر و تنها اگر $f'(0) \neq 0$ و*

$$\Re\Big(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\Big) > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

توصیف هندسی تابع‌های محدب چنین است: تابع تحلیلی $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ محدب است اگر و تنها اگر آهنگ تغییرات آنیِ شناسهٔ بردار مماس بر منحنی C_r ($0 < r < 1$) نسبت به شناسهٔ z، وقتی z دایرهٔ $|z| = r < 1$ را در جهت مثبت می‌پیماید، بزرگتر یا مساوی صفر باشد که در آن، C_r تصویر دایرهٔ $|z| = r$ تحت f است. به عبارت دیگر، f محدب است اگر و تنها اگر $\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg\ (\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{\mathrm{i}\theta}))) \geq 0$.

شرایط لازم و کافی دیگری نیز برای تحدبِ تابع f روی قرص واحد وجود دارند که گاهی سودمند واقع می‌شوند. مثلاً نتیجه‌ای که توسط شیل–اسمال [۳۹] در سال ۱۹۶۹ و سافریج [۴۲] در سال ۱۹۷۰ ثابت شده است.

مطلب دیگر در مورد تابع‌های ستاره‌وار و محدب این است که هر تابع محدب، ستاره‌وار نیز هست ولی با استفاده از شرایط تحلیلی مطرح‌شده در دو قضیهٔ قبل، نتیجهٔ بسیار مفیدی دربارهٔ ارتباط بین این دو رده آشکار می‌شود. این نتیجه را نخستین بار الکساندر[۱] در سال ۱۹۱۵ ثابت کرد.

قضیه ۴.۲ (الکساندر [۲]). *فرض کنیم f یک تابع تحلیلی نرمال‌شده بر قرص واحد باشد. در این صورت f محدب است اگر و تنها اگر تابع $z \mapsto zf'(z)$ ستاره‌وار باشد.*

حال دو زیررهٔ دیگر از خانوادهٔ تابع‌های تک‌ارز را در نظر می‌گیریم. این زیررده‌ها عبارت‌اند از تابع‌های تقریباً محدب[۲] و α–مارپیچ‌وار[۳]. خانوادهٔ تابع‌های تقریباً محدب (یا محدب‌وار) زیررده‌ای جالب از $\mathcal{S}$ را تشکیل می‌دهد که شامل تابع‌های ستاره‌وار است. ایدهٔ این مفهوم، نخستین بار در سال ۱۹۵۲ توسط کاپلان معرفی شده است. تابع تحلیلی f را در قرص واحد *تقریباً محدب* گوییم اگر تابعی محدب مانند g (نه لزوماً نرمال‌شده) وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر z در $\mathbb{D}$، $\Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0$. صورتی معادل برای این تعریف این است که تابعی ستاره‌وار مانند g (نه لزوماً نرمال‌شده) موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر z در $\mathbb{D}$، $\Re\left(\frac{zf'(z)}{g'(z)}\right) > 0$.

[۱] James Waddell Alexander [۲] close to convex [۳] spirallike

تابع‌های تقریباً محدب نیز توصیف‌های هندسی جالبی دارند. یکی از این توصیف‌ها تا حدی مشابه ویژگی‌های تعریف‌شده برای تابع‌های محدب و ستاره‌وار است: فرض کنیم f تابعی تحلیلی بر قرص واحد و C_r تصویر دایرهٔ $|z| = r < ۱$ تحت f باشد. صرف‌نظر از جزئیات، f تقریباً محدب است اگر و تنها اگر هیچ‌کدام از منحنی‌های C_r «چرخش معکوس سنجاق سر»[۱] نسازند. به بیان دقیق‌تر، شرط مورد نیاز این است که وقتی θ افزایش می‌یابد، کاهش مقدار شناسهٔ بردار مماس بر منحنی C_r، $\arg\{\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{\mathrm{i}\theta})\}$، نسبت به مقدار قبل، بیشتر از π نباشد. این توصیف هندسی به نتیجه‌ای اساسی در مورد تابع‌های تقریباً محدب منجر شد که منسوب به کاپلان در سال ۱۹۵۲ است.

قضیه ۵.۲ (کاپلان [۱۸]). *فرض کنیم f تابعی تحلیلی و موضعاً تک‌ارز در $\mathbb{D}$ باشد. در این صورت f تقریباً محدب است اگر و تنها اگر*

$$\int_{\theta_۱}^{\theta_۲} \Re\left(۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) d\theta > -\pi \qquad (z = re^{\mathrm{i}\theta})$$

که در آن، $۰ < r < ۱$ و $\theta_۱$ و $\theta_۲$ اعدادی حقیقی هستند به‌طوری که $\theta_۱ < \theta_۲$.

توصیف جالب دیگری نیز وجود دارد که لواندوفسکی [۲۵] در سال ۱۹۵۸ ارائه کرده است. او مشاهده کرد که خانوادهٔ تابع‌های تقریباً محدب با خانوادهٔ تابع‌های *به‌طور خطی دسترس‌پذیر*[۲] که در سال ۱۹۳۶ توسط بیرناتسکی[۳] معرفی شده بود، یکی است. یک ناحیه در صفحه را به‌طور خطی دسترس‌پذیر گوییم اگر متمم آن اجتماعی از نیم‌خط‌ها باشد که همدیگر را قطع نمی‌کنند. چنین ناحیه‌ای به‌روشنی همبند ساده است. یک تابع تک‌ارز بر قرص واحد را که بُرد آن ناحیه‌ای به‌طور خطی دسترس‌پذیر باشد، تابع به‌طور خطی دسترس‌پذیر می‌نامیم. در سال ۱۹۶۲ بیلتسکی و لواندوفسکی [۴] برهانی کوتاه و جالب برای قضیهٔ لواندوفسکی ارائه دادند که مبتنی بر روش زنجیرهای لاونر بود [۲۸]. برهان مقدماتی دیگری هم برای این قضیه وجود دارد که در سال ۱۹۸۹ توسط کوپف [۲۲] ارائه شده است.

در پایان این بخش، توصیفی مختصر از خانوادهٔ تابع‌های α-مارپیچوار ارائه می‌کنیم. خانوادهٔ تابع‌های α-مارپیچوار در سال ۱۹۳۳ توسط اسپاچک[۴] معرفی شده است. می‌توان گفت که این خانواده تعمیمی طبیعی از ستاره‌وار بودن است که مجدداً به یک محک سودمند برای تک‌ارزی منجر می‌شود. فرض کنیم $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$. یک *$\alpha$-مارپیچوار* عبارت است از یک منحنی در صفحهٔ مختلط با ضابطهٔ

$$w(t) = w_۰ \exp(-e^{-\mathrm{i}\alpha} t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

که در آن، $w_۰$ عددی مختلط و ناصفر است. روشن است که ۰-مارپیچوارها نیم‌خط‌های شعاعی هستند. همچنین به‌ازای هر α (که $|\alpha| < \frac{\pi}{۲}$) α-مارپیچوار یکتایی وجود دارد که نقطهٔ دادهشدهٔ $w_۰ \neq ۰$ را

[۱] reverse hairpin turn [۲] linearly accessible [۳] M. Biernacki [۴] L. Špaček

به مبدأ وصل می‌کند. ناحیهٔ $\mathbb{D}$ شامل مبدأ را یک ناحیهٔ α-مارپیچوار گوییم اگر به‌ازای هر نقطه مانند $w_\circ \neq \circ$ در $\mathbb{D}$، کمان α-مارپیچوار از $w_\circ$ تا مبدأ کاملاً در $\mathbb{D}$ واقع باشد. چنین ناحیه‌ای به‌روشنی همبند ساده است. تابع تحلیلی و تک‌ارز f با $f(\circ) = \circ$ را بر قرص واحد α-مارپیچوار گوییم اگر بُرد آن یک ناحیهٔ α-مارپیچوار باشد. روشن است که تابع‌های $\circ$-مارپیچوار همان تابع‌های ستاره‌وار هستند.

تابع‌های α-مارپیچوار را می‌توان با یک شرط تحلیلی توصیف کرد که تعمیمی جزئی از شرط ستاره‌وار بودن است:

قضیه ۶.۲ (اسپاچک). *گیریم f تابعی تحلیلی بر قرص واحد باشد به‌طوری‌که $f(\circ) = \circ$، $f'(\circ) \neq \circ$ و $-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$. در این صورت f، α-مارپیچوار است اگر و تنها اگر*

$$\Re\left(e^{\mathrm{i}\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \circ \qquad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{۱.۲}$$

شرط (۱.۲) تفسیر هندسی جالبی دارد. زاویهٔ شعاعی[۱] یک منحنی مانند $w = w(t)$ برابر است با $\arg\left(\frac{w'}{w}\right)$، یعنی زاویهٔ بین شعاع $w(t)$ و بردار مماس در نقطهٔ $w(t) \neq \circ$. اگر تصویر دایرهٔ $|z| = r$ تحت f را با C_r نشان دهیم، آنگاه ضابطهٔ تعریف C_r عبارت است از $w = f(re^{\mathrm{i}\theta})$. بنابراین زاویهٔ شعاعی w برابر است با

$$\arg\left(\frac{w'}{w}\right) = \arg\left(\frac{\mathrm{i}zf'(z)}{f(z)}\right).$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که شرط (۱.۲) معادل است با اینکه زاویهٔ شعاعی w، بین دو مقدار α و $\alpha + \pi$ واقع باشد. از سوی دیگر، اگر یک منحنی α-مارپیچوار در جهت افزایش قدرمطلق مقادیر، جهت‌دار شده باشد، آنگاه زاویهٔ شعاعی آن برابر با مقدار ثابت α است. لذا تابع تک‌ارز f در شرط (۱.۲) صدق می‌کند اگر و تنها اگر هر یک از منحنی‌های تراز آن یعنی هر C_r، همهٔ α-مارپیچوارها را با زاویه‌هایی بین $\circ$ و π قطع کند. از این دیدگاه، قضیهٔ اسپاچک به‌لحاظ هندسی روشن است.

۳. خطی-پایایی در قرص واحد

در این بخش قصد داریم توصیفی از خانواده‌های خطی-پایا[۲] ارائه دهیم. در این مفهوم که نخستین بار توسط پومرنکه[۳] در سال ۱۹۶۴ معرفی شده است، مطالعهٔ تخمین ضریب دوم $a_۲$، به خانوادهٔ تابع‌های موضعاً تک‌ارز به‌شکل

$$f(z) = z + a_۲z^۲ + a_۳z^۳ + \cdots \qquad (z \in \mathbb{D})$$

[۱] radial angle [۲] linearly invariant [۳] Pommerenke

(که شرطی قوی‌تر از تک‌ارزی است) توسعه داده شده است [۳۶]. این مطلب همان مفهوم مرتبه است که توصیف هندسی نیز دارد. مفهوم خطی-پایایی نقشی مهم در حل برخی از مسائل نظریهٔ هندسی تابع‌های یک متغیره نیز ایفا می‌کند. تعدادی از این کاربردها را که شامل تعمیمی از چند نتیجهٔ کلاسیک برای خانوادهٔ $\mathcal{S}$ است، ارائه خواهیم داد.

تعریف ۱.۳. خانوادهٔ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{D})$ را *خطی-پایا* می‌نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) هر تابع متعلق به $\mathcal{F}$ موضعاً تک‌ارز نرمال‌شده باشد (موضعاً تک‌ارز بودن f در $z_\circ \in \mathbb{D}$ به این معنی است که f در یک همسایگیِ $z_\circ$ تک‌ارز باشد. برای تابع تحلیلی f موضعاً تک‌ارز بودن در $z_\circ$ معادل با $f'(z_\circ) \neq \circ$ است. نرمال بودن f نیز یعنی $f(\circ) = f'(\circ) - ۱ = \circ$).

(۲) اگر $f \in \mathcal{F}$ و $|\zeta| < ۱$، آن‌گاه

$$F_\zeta(f)(z) = \frac{f(\frac{z+\zeta}{۱+\bar{\zeta}z}) - f(\zeta)}{(۱-|\zeta|^۲)f'(\zeta)} \in \mathcal{F} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

در (۲) عملگر $F_\zeta(f)$ به *تبدیل کوبهٔ* f معروف است. به‌عنوان چند مثال جالب از خانواده‌های خطی-پایا، می‌توانیم گردایهٔ $\mathcal{S}$ متشکل از تابع‌های تک‌ارز، گردایهٔ تابع‌های محدب $\mathcal{C}$ و خانوادهٔ تابع‌های تقریباً محدب $\mathcal{K}$ را نام ببریم. جالب است که خانوادهٔ تابع‌های ستاره‌وار $\mathcal{S}^*$ خطی-پایا نیست.

تعریف ۲.۳. مرتبهٔ خانوادهٔ خطی-پایای $\mathcal{F}$ را با $\mathrm{ord}\mathcal{F}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{ord}\mathcal{F} = \sup\left\{\left|\frac{f''(\circ)}{۲}\right| :\ f \in \mathcal{F}\right\}.$$

مثلاً با استفاده از قضیهٔ بیبرباخ و قضیهٔ الکساندر می‌توان دید که $\mathrm{ord}\ \mathcal{S} = ۲$ و $\mathrm{ord}\ \mathcal{C} = ۱$. افزون بر این، مرتبهٔ خانوادهٔ خطی-پایا می‌تواند نامتناهی باشد، زیرا اگر خانوادهٔ تابع‌های موضعاً تک‌ارز نرمال‌شده روی قرص واحد را با $\mathcal{L}S$ نشان دهیم، آن‌گاه محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که تابع با ضابطهٔ $f(z) = \frac{e^{kz}-۱}{k}$ به‌ازای $z \in \mathbb{D}$ و $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$ به ردهٔ $\mathcal{L}S$ متعلق است و

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f''(\circ)}{۲} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{۲} = +\infty.$$

اکنون ساختار دیگری از خانواده‌های خطی-پایا را ارائه می‌دهیم که با استفاده از آن می‌توان مثال‌هایی جالب به‌دست آورد. فرض کنیم G یک زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathcal{L}S$ باشد و

$$F(G) = \{F_\zeta(f) : f \in G, \zeta \in \mathbb{D}\}.$$

در این صورت $F(G)$ عبارت است از خانوادهٔ خطی-پایای تولیدشده توسط G. به عبارت دیگر، $F(G)$ عبارت است از خانوادهٔ خطی-پایای مینیمال شامل G. واضح است که G خطی-پایا است اگر و تنها اگر $F(G) = G$.

حال می‌خواهیم قضیه‌های رشد و دگرشکلی را که پیش از این برای تابع‌های تحلیلی تک‌ارز ارائه کرده بودیم، برای یک خانوادهٔ خطی-پایای دلخواه از مرتبهٔ α بیان کنیم. این نتیجه را پومرنکه در سال ۱۹۶۴ ارائه داد. بر اساس این قضیه، بسیاری از نتیجه‌های کلاسیک مطرح‌شده دربارهٔ تابع‌های تک‌ارز روی قرص واحد را می‌توان تعمیم داد. البته در اینجا فقط کران بالا را برای نامساوی مربوط به قضیهٔ رشد می‌نویسیم، زیرا یک خانوادهٔ خطی-پایا در حالت کلی می‌تواند شامل تابع‌هایی باشد که صفرهای آنها در ناحیهٔ $۰ < |z| < ۱$ است.

قضیه ۳.۳ (پومرنکه [۳۶]). *گیریم $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ خطی-پایا با مرتبهٔ متناهی α باشد. اگر $f \in \mathcal{F}$، آن‌گاه*

$$\left|\log\Big((۱-|z|^۲)f'(z)\Big)\right| \le \alpha \log\left(\frac{۱+r}{۱-r}\right) \qquad (r=|z|<۱) \tag{۱.۳}$$

و

$$|f(z)| \le \frac{۱}{۲\alpha}\Big(\Big(\frac{۱+r}{۱-r}\Big)^{\alpha}-۱\Big). \tag{۲.۳}$$

تساوی در نامساوی‌های فوق زمانی به‌دست می‌آید که ضابطهٔ تابع f عبارت باشد از

$$f(z) = \frac{۱}{۲\alpha}\Big(\Big(\frac{۱+r}{۱-r}\Big)^{\alpha}-۱\Big) \qquad (r=|z|, z\in\mathbb{D}).$$

با در نظر گرفتنِ قسمت‌های حقیقی عبارت (۱.۳)، قضیهٔ دگرشکلی برای خانوادهٔ خطی-پایای $\mathcal{F}$ با مرتبهٔ متناهی α به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{(۱-r)^{\alpha-۱}}{(۱+r)^{\alpha+۱}} \le |f'(z)| \le \frac{(۱+r)^{\alpha-۱}}{(۱-r)^{\alpha+۱}} \qquad (r=|z|,\ f\in\mathcal{F}). \tag{۳.۳}$$

همچنین با در نظر گرفتنِ قسمت‌های موهومی (۱.۳)، نامساوی جالب

$$|\arg\ f'(z)| \le \alpha\log\Big(\frac{۱+r}{۱-r}\Big) \qquad (r=|z|,\ f\in\mathcal{F})$$

را به‌دست می‌آوریم. کمبل [۵] در سال ۱۹۷۴ نشان داد که در (۳.۳)، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f دَورانی از تابع کوبهٔ تعمیم‌یافته با ضابطهٔ

$$f(z) = \frac{e^{-\mathrm{i}\theta}}{۲\alpha}\Big(\frac{۱+ze^{\mathrm{i}\theta}}{۱+ze^{\mathrm{i}\theta}}^{\alpha}-۱\Big) \qquad (z\in\mathbb{D},\theta\in\mathbb{R})$$

باشد. ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $\alpha = ۲$ در (۳.۳)، قضیهٔ دگرشکلی برای ردهٔ $\mathcal{S}$ به‌دست می‌آید. همچنین $\alpha = ۱$ زیباییِ خاصی دارد، زیرا هر خانوادهٔ خطی-پایا با مرتبهٔ ۱ باید زیرخانواده‌ای از خانوادهٔ تابع‌های محدب نرمال‌شده باشد.

یکی دیگر از توصیف‌های هندسی مرتبه تعیین شعاع‌های تک‌ارزی، تحدب و محدب‌واریِ یک خانوادهٔ خطی-پایای دلخواه است. در اینجا نتایج مربوطه را بدون اثبات ذکر می‌کنیم. خوانندهٔ علاقه‌مند به خواندن اثبات، می‌تواند مراجع پایان مقاله را مطالعه کند. شعاع تک‌ارزی، بزرگترین عدد مثبت r است که هر تابع در مجموعهٔ $\mathcal{F}$ روی $\mathbb{D}_r$ تک‌ارز است. لم زیر ارتباط بین شعاع تک‌ارزیِ خانوادهٔ خطی-پایای $\mathcal{F}$ و شعاع ناصفریِ آن را بیان می‌کند. این لم در سال ۱۹۶۴ توسط پومرنکه مطرح گردیده است.

لم ۴.۳. *اگر $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ خطی-پایا باشد و $\operatorname{ord} \mathcal{F} < \infty$، آن‌گاه شعاع تک‌ارزیِ $\mathcal{F}$ که با $r_{\mathcal{S}}(\mathcal{F})$ نشان داده می‌شود، برابر است با*

$$r_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) = \frac{r_۰}{۱ + \sqrt{۱ - r_۰^۲}}$$

که در آن، $r_۰$ بزرگترین عدد مثبتی است که هر تابع در $\mathcal{F}$ روی $\mathbb{D}_{r_۰} \setminus \{۰\}$ صفر ندارد. به‌علاوه مقدار $r_۰$ از حل معادلهٔ

$$\sup_{f \in \mathcal{F}, |z| = r < ۱} |\arg\ f'(z)| = ۲\pi$$

نسبت به r به‌دست می‌آید.

دربارهٔ شعاع تحدب خانوادهٔ خطی-پایای $\mathcal{F}$، $r_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$، هم نتیجه‌ای قابل ملاحظه وجود دارد که در سال ۱۹۶۴ توسط پومرنکه به‌دست آمد.

قضیه ۵.۳. *فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ خطی-پایا از مرتبهٔ متناهی α باشد. در این صورت*

$$r_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \alpha - \sqrt{\alpha^۲ - ۱}.$$

برای مثال، به‌ازای $\alpha = ۲$ شعاع تحدب آشنای $r_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) = ۲ - \sqrt{۳}$ را برای ردهٔ تابع‌های تک‌ارز $\mathcal{S}$ به‌دست می‌آوریم.

در سال ۱۹۷۴ کمبل و زیگلر [۶] نتیجه‌ای قابل توجه در مورد شعاع تحدب‌واریِ یک خانوادهٔ خطی-پایای دلخواه به‌دست آوردند. شعاع تحدب‌واری، $r_{\mathcal{K}}(\mathcal{F})$، بزرگترین عدد $r > ۰$ است که هر تابع در $\mathcal{F}$ روی $\mathbb{D}_r$ تقریباً محدب باشد.

قضیه ۶.۳. *فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک خانوادهٔ خطی-پایا باشد به‌طوری که*

$$\sup_{f\in\mathcal{F},|z|=r<1} |\arg\ f'(z)| = 2\tau\sin^{-1} r.$$

اگر $1 \leq \tau \leq 2$، آن‌گاه شعاع تحدب‌واریِ $\mathcal{F}$ برابر با یک است و اگر $\tau > 2$، برابر با ریشهٔ یکتای معادلهٔ

$$2\cot^{-1}(w) - 2\tau\cot^{-1}(\tau w) = -\pi$$

است که در آن،

$$w = \frac{1-r^2}{\sqrt{4\tau^2 r^2 - (1+r^2)^2}} \qquad (\tau - \sqrt{\tau^2 - 1} < r < 1).$$

در پایان این بخش، به یک مورد خاص و جالب از خانوادهٔ خطی-پایای مینیمال تولیدشده توسط خانوادهٔ عملگرهای انتگرالی خطی اشاره می‌کنیم. فرض کنیم M خانوادهٔ خطی-پایای دلخواه باشد و به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، $f_i \in M$ و $\frac{f_i(z)}{z} \neq 0$ به‌ازای هر $z \in \mathbb{D}$. عملگر انتگرالی خطی $F_{\alpha,\beta}(z)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F_{\alpha,\beta}(z) = \int_0^z \prod_{i=0}^{n} \Big(f_i'(t)\Big)^{\alpha_i} \Big(\frac{f_i(t)}{t}\Big)^{\beta_i} dt \qquad (z\in\mathbb{D}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}).$$

ویژگی پایایی و تعیین مرتبهٔ این رده توسط مؤلف و همکاران در [۱۲] بررسی شده است.

۴. تبعیّت[1]

مفهوم تبعیّت را نخستین بار لیندلف [۲۶] به سال ۱۹۰۹ معرفی کرد و لیتلوود [۲۷] در سال ۱۹۲۵ آن را برای اثبات نامساوی‌های خاص بین دو تابع تحلیلی به‌کار بست. همچنین روگوسینسکی [۳۸] در سال ۱۹۳۹ برای اثبات نامساوی ضرایب بین دو تابع تحلیلی از مفهوم تبعیّت استفاده کرد. حال به تعریف تبعیّت می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنیم f و g دو تابع تحلیلی و نرمال‌شده باشند. می‌گوییم تابع f از تابع g *تبعیّت* می‌کند و می‌نویسیم $f(z) \prec g(z)$ اگر تابعی مانند $w(z)$ با شرایط $w(0) = 0$ و $|w(z)| < 1$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $z \in \mathbb{D}$ داشته باشیم $f(z) = g(w(z))$. یادآوری می‌کنیم اگر تابع g تک‌ارز باشد، آن‌گاه شرط معادل زیر را داریم:

$$f(z) \prec g(z) \iff f(0) = g(0), f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D}).$$

[1] subordination

با استفاده از مفهوم تبعیّت و اینکه حوزهٔ $\{w \in \mathbb{C} : \Re w > ۰\}$ تصویر قرص واحد $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $w = \frac{۱+z}{۱-z}$ است، تعریف‌هایی معادل برای تابع‌های ستاره‌وار و محدب به‌دست می‌آوریم: تابع نرمال‌شدهٔ f ستاره‌وار است اگر و تنها اگر

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{۱+z}{۱-z} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

همچنین تابع نرمال‌شدهٔ f محدب است اگر و تنها اگر

$$۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{۱+z}{۱-z} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

به‌ازای هر تابع $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ و هر $۰ < p < \infty$ قرار می‌دهیم

$$M_p(r,f) = \left(\frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{۱}{p}}.$$

قضیهٔ زیر منشأ پژوهش‌هایی جالب دربارهٔ ارتباط بین فضاهای هاردی و ردهٔ تابع‌های تک‌ارز شده است.

قضیه ۲.۴ (لیتلوود [۱۱]). *اگر f و g دو تابع تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $g \prec f$، آن‌گاه*

$$M_p(r,g) \le M_p(r,f) \qquad (۰ \le r < ۱).$$

به‌ازای $۰ < r < ۱$ نامساوی اکید است مگر آنکه f ثابت باشد و یا $w(z) = \alpha z$ با شرط $|\alpha| = ۱$.

مسئله‌ای که اخیراً مورد علاقه پژوهشگران قرار گرفته است، کار با تابع‌هایی است که قسمت حقیقی آنها بزرگتر از عددی مانند α $(۰ \le \alpha < ۱)$ است و یا تابع‌هایی که قسمت حقیقی آنها کراندار است. در ادامه به معرفی چند تابع با ویژگی‌های مورد نظر اشاره می‌کنیم. تابع

$$g(z) = \frac{۱ + (۱ - ۲\alpha)z}{۱ - z} \qquad (z \in \mathbb{D}, ۰ \le \alpha < ۱)$$

را در نظر بگیرید. برای این تابع داریم

$$g(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C} : \Re w > \alpha\}.$$

بنابراین اگر

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{۱ + (۱ - ۲\alpha)z}{۱ - z} \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

آن‌گاه تابع‌های ستاره‌وار از مرتبهٔ α معرفی می‌شوند که البته تک‌ارز هستند. یکی دیگر از تابع‌هایی که بسیار از آن استفاده شده است [۲۰، ۲۲، ۲۴، ۳۷]، تابع با ضابطهٔ

$$P_{\alpha,\beta}(z) = ۱ + \frac{\beta - \alpha}{\pi}\mathrm{i}\log\left(\frac{۱ - e^{۲\pi\mathrm{i}\frac{۱-\alpha}{\beta-\alpha}}z}{۱ - z}\right)$$

است که در آن، $۱ > \alpha \geq ۰$ و $\beta > ۱$. ثابت شده است که $P_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}) = \Omega_{\alpha,\beta}$ و

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \{w \in \mathbb{C} : \alpha < \Re w < \beta\}.$$

بنابراین

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec P_{\alpha,\beta}(\mathbb{D})$$

اگر و تنها اگر

$$\alpha < \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \beta.$$

تابع دیگری که مورد مطالعه قرار گرفته است، تابع با ضابطهٔ

$$B_\alpha(z) = \frac{a}{۲\mathrm{i}\sin\alpha}\log\left(\frac{۱ + ze^{\mathrm{i}\alpha}}{۱ + ze^{-\mathrm{i}\alpha}}\right) \qquad (\pi/۲ \leq \alpha < \pi).$$

است. این تابع، محدب و تک‌ارز است [۹] و

$$B_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{w \in \mathbb{C} : \frac{\alpha - \pi}{۲\sin\alpha} < \Re w < \frac{\alpha}{۲\sin\alpha}\right\}.$$

همچنین تصویر $B_\alpha(z)$ روی قرص واحد می‌تواند یک نیم‌نوار، ذوزنقه و یا یک مثلث باشد. از اینکه $B_\alpha(۰) = ۰$ و $\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big|_{z=۰} = ۱$ با توجه به تعریفِ هم‌ارزی برای تبعیّت، ردهٔ $\mathcal{M}(\alpha)$ از تابع‌های f تشکیل شده است که

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱\right) \prec B_\alpha(z).$$

معادلاً $f \in \mathcal{M}(\alpha)$ اگر و تنها اگر

$$\frac{\alpha - \pi}{۲\sin\alpha} < \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱\right) < \frac{\alpha}{۲\sin\alpha}.$$

این رده برای اولین بار در [۲۰] تعریف شد و خواننده می‌تواند برای آشنایی بیشتر به همین مقاله مراجعه کند. در پایان، تابعی را معرفی می‌کنیم که اثر آن روی قرص واحد تعبیر هندسی جالبی دارد. این تابع در

مقاله پیه‌ژکو و سوکول [۳۵] معرفی شد. فرض کنیم $۰ \leq \alpha \leq ۱$. تابع $F_\alpha(z)$ را به‌صورت

$$F_\alpha(z) = \frac{z}{۱ - \alpha z^۲}.$$

تعریف می‌کنیم. این تابع اگر $۰ \leq \alpha \leq ۱$، ستاره‌وارِ تک‌ارز است و اگر $۰ \leq \alpha \leq ۳ - ۲\sqrt{۲}$، محدب است و تصویر آن روی قرص واحد عبارت است از

$$D(\alpha) = \left\{ x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : (x^۲ + y^۲)^۲ - \frac{x^۲}{(۱-\alpha)^۲} - \frac{y^۲}{(۱+\alpha)^۲} < ۰, ۰ \leq \alpha < ۱ \right\}$$

و

$$D(۱) = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : \forall t \in (-\infty, -۱/۲] \cup [۱/۲, \infty) \;\; x + \mathrm{i}y \neq \mathrm{i}t\}.$$

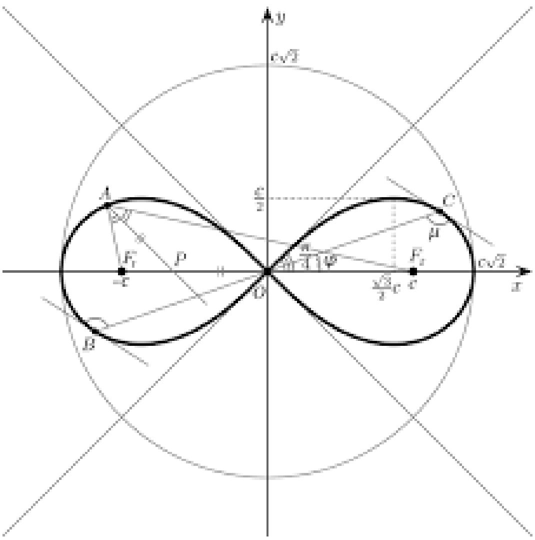
خم

$$(x^۲ + y^۲)^۲ - (x^۴ + ۲m^۲)x^۲ - (n^۴ - ۲m^۲)y^۲ = ۰ \qquad (x, y) \neq (۰, ۰) \qquad (۱.۴)$$

به پروانه‌وار بوث[۱] معروف است. این خم اگر $n^۴ > ۲m^۲$، بیضی و اگر $n^۴ < ۲m^۲$، یک هذلولوی است. بنابراین

$$(x^۲ + y^۲)^۲ - \frac{x^۲}{(۱-\alpha)^۲} - \frac{y^۲}{(۱+\alpha)^۲} = ۰$$

از نوع بیضی است. نشان داده شده است [۲۱] که اگر $۰ \leq \alpha < ۱$، آن‌گاه



شکل ۱. پروانه‌وار بوث

[۱] Booth lemniscate

$$\frac{۱}{\alpha - ۱} < \Re\left\{F_\alpha(z)\right\} < \frac{۱}{۱-\alpha}.$$

با توجه به آنچه در بالا آمد، می‌گوییم تابع f متعلق به ردهٔ $\mathcal{BS}(\alpha)$ است اگر و تنها اگر

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱\right) \prec F_\alpha(z).$$

به عبارت دیگر، $f \in \mathcal{BS}(\alpha)$ اگر و تنها اگر

$$\frac{\alpha}{\alpha - ۱} < \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \frac{۲-\alpha}{۱-\alpha}.$$

همان‌طور که دیدیم، ردهٔ بالا نیز با استفاده از تبعیّت تعریف شد. از خواننده دعوت می‌شود برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر، [۱۹، ۴۱] را بخواند.

در پایان، لازم به ذکر است که مفاهیم مربوط به مطالب معرفی‌شده در این مقاله توسط مؤلف با مفاهیم مهمی در آنالیز تابعی ارتباط داده شده‌اند که برای آشنایی بیشتر می‌توانید [۱، ۱۳] را بخوانید.

مراجع

[1] Aghalary, R., Ebadian A., Wang, Z.-G., Subordination and superordination results involving certain convolution operators, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **36** (2010), no. 1, 137–147.

[2] Alexander, J. W., Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, *Ann. Math.*, **17** (1915-1916), 12–22.

[3] Bieberbach, L., Über die Koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1916, 940–955

[4] Bielecki, A., Lewandowski, Z., Sur une théorème concernant les fonctions univalentes linéairement accessibles de M. Biernacki, *Ann. Polon. Math.*, **12** (1962), 61–63.

[5] Campbell, D., Majorization-subordination theorems for locally univalent functions III, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **198** (1974), 297–306.

[6] Campbell, D. M., Ziegler, M. R., The argument of the derivative of linear invariant families of finite order and the radius of close-to-convexity, *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A*, **28** (1974), 5–22.

[7] Charzynski, Z., Schiffer, M., A new proof of the Bieberbach conjecture for fourth coefficient, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **5** (1960), 187–193.

[8] de Branges, L., A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.*, **154** (1985), 137–152.

[9] Dorff, M., Convolutions of planar harmonic convex mappings, *Complex Var. Theory Appl.*, **45** (2001), no. 3, 263–271.

[10] Duren, P. L., *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] Duren, P. L., *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[12] Ebadian, A., Aghalary R., Arjomandinia, P., Linear invariance order of the minimal invariant families of integral operators, *Math. Rep.*, **16**(2014), no. 2, 175–182.

[13] Ebadian, A., Aghalary R., Shams, S., Application of duality techniques to starlikeness of weighted integral transforms, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **17** (2010), no. 2, 275–285.

[14] Garabedian, P. R., Inequalities for the fifth coefficient, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966), 199–214.

[15] Garabedian, P. R., Schiffer, M., A coefficient inequality for schlicht functions, *Ann. Math.*, **61** (1955), 116–135.

[16] Grunsky, H., Koeffizientenbedingungen fur schlicht abbildende meromorphe funktionen, *Math. Z.*, **45** (1939), 29–61.

[17] Hayman, W. K., Stewart, F. M., Real inequalities with applications to function theory, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **50** (1954), 250–260.

[18] Kaplan, W., Close-to-convex schilcht functions, *Michigan Math. J.*, **1** (1952), 169–185.

[19] Kargar, R., Ebadian, A., Sokol, J., On Booth lemniscate and starlike functions, *Anal. Math. Phys.* DOI 10.1007/s13324-017-0187-3

[20] Kargar, R., Ebadian A., Sokol, J., On subordination of some analytic functions, *Sib. Math. J.*, **57** (2016), no. 4, 599–605.

[21] Kargar, R., Ebadian A., Sokol, J., Radius problems for some subclasses of analytic functions, *Complex Anal. Oper. Theory,* **11** (2017), no. 7, 1639-1649

[22] Koepf, W., Coefficients of symmetric functions of bounded boundary rotation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **105** (1989), no. 2, 324–329.

[23] Kuroki, K., Owa, S., Notes on new class for certain analytic functions, *RIMS Kokyuroku*, **1772** (2011), 21–25.

[24] Kwon, Oh S., Jae Sim, Y., Cho, N. E., Srivastava, H. M., Some radius problems related to a certain subclass of analytic functions, *Acta Math. Sinica, (English Series)*, **30** (2014), no. 7, 1133–1144.

[25] Lewandowski, Z., Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes (I), *Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A*, **12** (1958), 131–145.

[26] Lindlelöf, E., Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35** (1909), no. 7, 1–35.

[27] Littlewood, J. E., On inequlities in the theory of functions, *Proc. London Math. Soc.*, **23** (1925), 481–519.

[28] Loewner, K., Untersuchungen über schlichte konforme abbildungen des einheitskreises, *Math. Annalen.*, **89** (1023), 103–121.

[29] Milin, I. M., *Univalent Functions and Orthonormal Systems*, Translations of Mathematical Monographs (**49**), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

[30] Milin, I. M., The area method in the theory of univalent functions, *Dokl. Acad. Nauk. SSSR.*, **154** (1964), 264–67.

[31] Montel, P., *Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[32] Nevalinna, R., Über die konforme abbildung von sterngeieten, *Ofvers. Finska Vet. Soc. Forh.*, **63**(A) (1920-21), no. 6, 1–21.

[33] Ozawa, M., On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficients, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 97–128.

[34] Pederson, R. N., A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **31** (1968-1969), 331–351.

[35] Piejko, K., Sokol, J., Hadamard product of analytic functions and some special regions and curves, *J. Ineq. Appl.*, (2013), 2013:420.

[36] Pommerenke, Ch., Lacunary power series and univalent functions, *Michigan Math. J.*, **11** (1964), no. 3, 219–223.

[37] Reade, M. O., On close-to-convex univalent functions, *Michigan Math. J.*, **3** (1955), no. 1, 59–62.

[38] Rogosinski, W., On subordinate functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **35** (1939), 1–26.

[39] Sheil-Small, T., On convex univalent functions, *J. London Math. Soc.*, **1** (1969), no. 2, 483–492.

[40] Sim, Y. J., Kwon, Oh S., Notes on analytic functions with a bounded positive real part, *J. Ineq. Appl.*, (2013), 2013:370.

[41] Sokol, J., Kargar R., Ebadian, A., Some properties of Booth lemniscate and starlike functions, Submitted.

[42] Suffridge, T. J., The principle of subordination applied to functions of several variables, *Pacific J. Math.*, **33** (1970), no. 1, 241–248.

[43] Weinstein, L., The Bieberbach conjecture, *Internat. Math. Res. Not.*, **5** (1991), 61–64.

[۴۴] سیلورمن، اچ.، *متغیرهای مختلط*، ترجمهٔ محسن نقشینه ارجمند، انتشارات دانشگاه اصفهان، چاپ دوم، ۱۳۷۴.

علی عبادیان: دانشگاه پیام نور تهران، گروه ریاضی

رایانامه: aebadian@pnu.ac.ir