فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، صص. ۱ تا ۱۳

چرا فلسفه‌های سه‌گانهٔ مشهور ریاضی مهم هستند؟

مرتضی منیری

چکیده

در این مقاله، به این موضوع می‌پردازیم که چرا فلسفه‌های مشهور ریاضی، یعنی منطق‌گرایی، شهودگرایی و صورتگرایی که هر یک در طول تاریخ با ایرادهای اساسی مواجه شدند، در زمان پیدایش خود موجّه بوده‌اند. نشان می‌دهیم که این فلسفه‌ها بازتاب اندیشه‌های فلسفیِ ریاضی زمانهٔ خود بوده‌اند. این فلسفه‌ها علی‌رغم ایرادهایی که به آنها وارد شده است، تأثیری مهم در شکل‌گیریِ دیدگاه نسل‌های بعدی ریاضیدانان و فیلسوفان ریاضی داشته‌اند. به‌علاوه دستاوردهای جانبی آنها در ریاضیات و علوم رایانه نیز شگرف بوده است.

۱. سرآغاز

سه فلسفهٔ مشهور ریاضی که در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم میلادی پدید آمدند، عبارت‌اند از شهودگرایی، منطق‌گرایی و صورتگرایی. احتمالاً خواننده می‌داند که این فلسفه‌ها، دست‌کم در شکل اولیهٔ خود، با ایرادهایی مواجه شدند و اکنون شکل‌های اولیهٔ آنها طرفداران زیادی ندارد. کتاب‌های درسی کلاسیک در باب فلسفهٔ ریاضی، بخش‌هایی عمده را به توضیح این فلسفه‌ها اختصاص می‌دادند در حالی که کتاب‌های جدیدتر به مرور کوتاه و سریع آنها بسنده می‌کنند و به توضیح فلسفه‌های به‌روزتر مانند ساختارگرایی، نام‌گرایی و طبیعی‌گرایی و تحوّلات جدید و بحث‌انگیز در ریاضیات مشغول می‌شوند. برای نمونه، کتاب‌های [۱] و [۶] را ببینید. اما این به معنای آن نیست که این فلسفه‌ها موجّه نیستند و یا اینکه یافتن ایرادهای آنها کاری ساده بوده است. در واقع طی چندین دهه بسیاری از بزرگترین ریاضیدانان و فیلسوفان جهان، این فلسفه‌ها را بررسی کرده‌اند، رشد داده‌اند و سرانجام انتقاداتی به آنها وارد کرده‌اند.

عبارات و کلمات کلیدی. منطق‌گرایی؛ شهودگرایی؛ صورتگرایی؛ قضیهٔ گودل؛ فلسفهٔ ریاضی.

کافی است نام چندتا از بزرگترینِ آنها را ذکر کنیم: داوید هیلبرت[۱]، جان فون‌نویمان[۲]، هانری پوانکاره[۳]، لویتزن اخبرتوس یان براوئر[۴] و هرمان وایل[۵]. برخی فیلسوفان مطرح در این زمینه عبارت‌اند از: گوتلوب فرگه[۶]، برتراند راسل[۷] و لودویگ ویتگنشتاین[۸]. در مورد فلسفه‌های جدیدترِ ریاضی که برخی از آنها را ذکر کردیم، نام‌هایی در این سطح را دست‌کم در میان ریاضیدانان نمی‌توان دید.

ریاضیات از ابتدا الهام‌بخش و در عین حال، دغدغهٔ بسیاری از فیلسوفان بزرگ بوده است؛ از افلاطون گرفته تا کواین[۹]. معمولاً زمانی که ریاضیدانانِ علاقه‌مند به سؤالات کلی دربارهٔ ریاضیات، به این امور می‌پردازند، گفته می‌شود که به مبانی ریاضیات پرداخته‌اند و هنگامی که فیلسوفان به آنها مشغول می‌شوند، به فلسفهٔ ریاضی پرداخته‌اند. پیامدهای ریاضیِ تلاش‌های ریاضیدانانی که به مبانی ریاضیات پرداخته‌اند، مسلماً بیشتر بوده است. البته فلسفه‌های جدید ریاضی نیز هریک با انتقادهای زیادی روبه‌رو شده‌اند و پیروان آنها تلاش دارند تا به این انتقادها پاسخ دهند. ساختارگرایی یکی از مهم‌ترین فلسفه‌های اخیر ریاضی است که مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است. شکل‌های مختلفی از این رویکرد مطرح شده است. به‌طور کلی در این فلسفه، اصالت به ساختارهای ریاضی داده می‌شود نه به اشیای ریاضی. اشیای ریاضی تنها جایگاه‌هایی در این ساختارها هستند. یکی از انواع ساختارگرایی، برای نظریهٔ رسته به‌عنوان مبانی ریاضیات، جایگاهی مهم قائل است. در مورد اینکه این فلسفه با تجربهٔ واقعی ریاضیات هماهنگ باشد یا نه، انتقادهایی وارد شده است [۲].

هر سه بازیگر اصلی فلسفه‌های سه‌گانهٔ ریاضی، اصالتاً ریاضیدان بوده‌اند. هیلبرت در کنار پوانکاره نامدارترین ریاضیدان عصر خود بود. براوئر یک توپولوژی‌دان پیشرو بود. فرگه تحصیلات خود را در زمینهٔ ریاضیات انجام داده بود و دروس مختلف ریاضی را تدریس می‌کرد.

منطق‌گراییِ فرگه در فلسفهٔ ریاضی با نقش او در بنیانگذاریِ فلسفهٔ تحلیلی که از حوزه‌های مسلط فلسفهٔ معاصر است، پیوندی ژرف دارد. از دیدگاه ریاضیِ صِرف نیز کار او را می‌توان در پیوند با کار ریاضیدانانی همچون کانتور[۱۰]، پئانو[۱۱] و ددکیند[۱۲] دانست. در عین حال، فرگه منطق جدید را به‌عنوان یکی از لوازم فلسفه‌اش بنیان گذاشت. امروزه منطق ریاضی بسیار توسعه یافته و شامل نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ مدل‌ها، نظریهٔ محاسبه‌پذیری و نظریهٔ برهان شده است. شهودگراییِ براوئر ریشه‌ای عمیق در آثار بزرگترین فیلسوفان قبل از او از قبیل کانت[۱۳] دارد. از سوی دیگر، منطق شهودی که بر اساس فلسفهٔ ریاضی براوئر پدید آمد، امروزه کاربردهای فراوانی در علوم نظری رایانه یافته است. سرانجام، صورتگراییِ هیلبرت منجر به قضیه‌های ناتمامیت گودل[۱۴] گردید که از اهمیت بنیادی فلسفی برخوردارند. یکی از دستاوردهای جانبی

---

[۱] David Hilbert [۲] John von Neumann [۳] Henri Poincaré [۴] L. E. J. Brouwer [۵] Hermann Weyl [۶] Gottlob Frege [۷] Bertrand Russell [۸] Ludwig Wittgenstein [۹] Willard Van Orman Quine [۱۰] Georg Cantor [۱۱] Giuseppe Peano [۱۲] Richard Dedekind [۱۳] Immanuel Kant [۱۴] Kurt Gödel

گودل در خلال اثبات قضیه‌هایش، مشارکت او در خلق نظریهٔ محاسبه‌پذیری و علوم رایانه است. از جهت دیگر، صورتگرایی هیلبرت منجر به گسترش به‌کارگیری روش اصل‌موضوعی در ریاضیات شده است.

مارتین دیویس[۱]، منطق‌دان و ریاضیدان بزرگ (و یکی از چهار نفری که تلاش‌هایشان منجر به حل مسئلهٔ دهم هیلبرت شد)، در کتاب خود [۳] داستان پیدایش رایانه‌های امروزی را از دید تاریخی شرح می‌دهد. او با لایب‌نیتس[۲] آغاز می‌کند و ایدهٔ او را برای ساختن ماشینی محاسب که بتواند دربارهٔ عقاید متضاد فیلسوفان داوری کند، توضیح می‌دهد. سپس به جُرج بول[۳] می‌پردازد که منطق را به دستگاهی جبری تبدیل کرد. به‌دنبال آن، فرگه مطرح می‌شود که نخستین بار یک دستگاه منطقی صوری تمام را معرفی کرد. از آنجا که فرگه منطق را به‌عنوان پایه‌ای برای ریاضیات می‌خواست، می‌بایست آن را مستقل از همهٔ شاخه‌های ریاضیات معرفی می‌کرد. این، گامی بزرگ در راستای ایدهٔ لایب‌نیتس بود، زیرا قدم اول در بررسی ماشینیِ آراء، ترجمهٔ آنها به زبان صوری است. بدین‌سان، راه برای معرفی زبان‌های صوریِ رایانه‌ای باز شد. در ادامهٔ کتاب، به کانتور و ظهور رویکرد فرامتناهی به ریاضیات پرداخته می‌شود و نیز به هیلبرت که رویکرد صورتگرایانه را برای نجات ریاضیات از تناقض‌هایی در پیش گرفت که استفادهٔ بی‌محابا از این روش‌های فرامتناهی باعث آنها بود. هیلبرت مسئله‌ای مهم را مطرح کرد که به‌نوعی جلوه‌گر آرزوی لایب‌نیتس بود: مسئلهٔ تصمیم که به زبان امروزی دربارهٔ وجود یا عدم الگوریتمی است که بتواند تعیین کند آیا در دستگاه منطقیِ فرگه، از مجموعه‌ای متناهی از فرض‌های داده‌شده، نتیجه‌ای مورد نظر قابل استنتاج است یا نه. به زبان امروزی، آیا منطق مرتبهٔ اول تصمیم‌پذیر است. اَلَن تورینگ[۴] جوانی از دانشگاه کمبریج در تلاش برای حل این مسئله، به تحلیل مفهوم عملیات الگوریتمی توسط انسان و سپس ماشین پرداخت و سرانجام، موفق شد ضمن معرفی اولین مدل ریاضی‌وارِ الگوریتم (ماشین تورینگ)، به سؤال هیلبرت پاسخ منفی دهد: *چنین الگوریتمی وجود ندارد.* تورینگ با این کار یکی از پیشگامان طراحی ماشین‌های محاسب شد. تلاش‌های او و دیگران، از جمله فون‌نویمان، به ساخت رایانه‌های امروزی منجر شد.

زمانی که به‌سادگی صحبت از کنار گذاشتن این فلسفه‌ها می‌کنیم، باید دستاوردهای فوق را به یاد داشته باشیم. صرف‌نظر از جنبه‌های یاد شده، باید بدانیم که این فلسفه‌ها در واقع به‌طور کامل کنار گذاشته نشده‌اند. منطق‌گرایانِ جدید سر برآورده‌اند. شهودگرایی مدافعان جدیدی از قبیل مایکل دامت[۵] یافته و روش‌هایی جدید برای توجیه آن به‌کار گرفته شده است. به‌علاوه مکتب‌های ساختگرایانهٔ غیربراوئریِ جدیدی به‌وجود آمده‌اند از قبیل مکتب روسیِ نضج‌گرفته در دههٔ چهل میلادی که تأکید زیادی بر بازگشتی (الگوریتمی) بودنِ فرآیند ساخت اشیای ریاضی دارد.

فلسفهٔ صورتگرایی هیلبرت به شکل‌های جدیدی ادامه یافته است. شاخه‌ای جدید از منطق ریاضی به نام *ریاضیات وارونه*[۶] وجود دارد که بر پایهٔ دیدگاه‌های اولیهٔ هیلبرت بنا شده است. ریاضیات وارونه

---

[۱] Martin Davis [۲] Gottfried Wilhelm Leibniz [۳] George Boole [۴] Alan Turing [۵] Sir Michael Dummett
[۶] reverse mathematics

پروژه‌ای در منطق ریاضی است که توسط هارویِ فریدمن[۱] در دههٔ هشتاد میلادی آغاز شد. هدف پروژه این است که مشخص کند برای اثبات یک قضیهٔ معمولی در ریاضیات، به چه اصول حداقلی نیاز است. در ریاضیات وارونه برای اینکه نشان دهیم که یک دستگاه منطقی مانند S ضعیف‌ترین دستگاهی است که می‌تواند یک قضیهٔ ریاضی معمولی T، مانند قضیهٔ هاینه[۲]–بُرل در مورد فشردگیِ بازهٔ [۰, ۱] را ثابت کند، دو کار باید انجام شود. ابتدا باید نشان داد که S، T را ثابت می‌کند. دوم اینکه باید نشان داد خودِ T، در یک دستگاه پایه‌ایِ مناسب مانند B، همهٔ اصول S را ثابت می‌کند. از این، نتیجه می‌شود که هیچ دستگاه اصل‌موضوعی ضعیف‌تر از S مانند S' که شامل B باشد، نمی‌تواند T را ثابت کند. دستگاه پایه‌ایِ B، معمولاً یکی از زیرنظریه‌های حساب مرتبهٔ دوم انتخاب می‌شود به‌طوری که بتوان مبانی ریاضیِ حداقلی لازم را در آن صوری‌سازی کرد.

در ادامه به ایده‌های اولیه، زمینه‌های تاریخی و همچنین کاربردهای فلسفه‌های مذکور اشاره می‌کنیم.

۲. منطق‌گرایی

اندیشهٔ تحویل حساب به منطق، دنبالهٔ طبیعی برنامهٔ حسابی‌سازیِ آنالیز ریاضی است که توسط ریاضیدانان بزرگی همچون ددکیند آغاز شد. البته انگیزهٔ شخصی فرگه بیشتر به چالش کشیدن آرای فلسفی کانت و جان استوارت میل[۳] دربارهٔ مبانی حساب بود. فرگه هفده سال از ددکیند جوان‌تر بود و در زمان آغاز کارش، حسابی‌سازیِ آنالیز به‌تازگی کامل شده بود. در واقع برخی ددکیند و حتی کانتور را در پدید آمدنِ منطق‌گرایی بسیار سهیم می‌دانند [۹، ۱۰]. تعریف کانتور از مفهوم هم‌عددی، نقشی مهم در تعریف عدد طبیعی توسط فرگه داشت. البته این دو، بر سر حق تقدمِ ارائهٔ این مفهوم با هم نزاع داشتند. مهم‌ترین کار فرگه را می‌توان ساخت دستگاه منطقی لازم برای این کار دانست.

هدف ریاضیدانان، دقیق کردن مبانی آنالیز ریاضی بود که به نظر آنها فاقد دقت کافی بود. اعتقاد بر این بود که با استوارکردن دستگاه اعداد حقیقی بر دستگاه اعداد طبیعی که جایگاهی مطمئن در نظر گرفته می‌شد، این کار عملی است. اما این سؤال مطرح شد که خودِ حساب اعداد طبیعی بر چه پایه‌ای استوار است. اصول منطقی از قبیل اصل امتناع نقیضین یا اصل طرد شقّ ثالث، از اصول بنیادی تفکر محسوب می‌شدند. به‌طور طبیعی این، مستحکم‌ترین مبنای ممکن به نظر می‌رسید. فرگه با استفاده از زبان منطقیِ ابداعی خود، این قدم آخر را برداشت. اما با پیدا شدن تناقض در دستگاه منطقیِ اولیهٔ او، راسل با ابداع *نظریهٔ انواع*[۴]، تلاش کرد این برنامه را به سرانجام برساند. خودِ نظریهٔ انواع، بعدها تکامل یافت و امروزه جایگاهی محکم در علوم رایانه یافته است.

[۱] Harvey Friedman [۲] Eduard Heine [۳] John Stuart Mill [۴] type theory

مسیر دیگر برای حل مشکلات منطق‌گرایی، نظریهٔ صوری مجموعه‌ها بود که مبنایی جامع برای ریاضیات فراهم کرد. البته خودِ نظریهٔ صوری مجموعه‌ها را می‌بایست در چارچوب برنامهٔ صورتگرایی در فلسفهٔ ریاضی قرار داد. در بخش‌های بعدی، به این مکتب خواهیم پرداخت. در اینجا ما به تعریف فرگه از عدد، عمدتاً در قالب نظریهٔ امروزیِ مجموعه‌ها می‌پردازیم.

آیا تعریف نظریه‌مجموعه‌ایِ اعداد طبیعی عجیب است؟ ۲ چیست؟ جواب این سؤال آسان نیست. همان‌گونه که جواب سؤال «عدالت چیست؟» آسان نیست. فیلسوفان اخلاق سعی کرده‌اند تا پاسخی برای این سؤال بیابند اما هنوز جواب قانع‌کننده‌ای که عموم فیلسوفان را راضی کند، به‌دست نیامده است. (آیا وضع موجود اخلاقی در جهان، گواه این نیست؟) اما این سؤال، جواب افلاطونیِ ساده‌ای دارد. عدالتِ این‌جهانی، نسخه‌ای از مثالِ افلاطونیِ عدالت در عالم مُثُل است و همهٔ ما از طریق روحمان که مادی نیست، از آن مطلع هستیم. پس از تولد، درد زایمان باعث فراموشی می‌شود. فرآیند یادگیریِ دوبارهٔ این مفهوم در واقع یادآوری است. در مورد چیستیِ عدد ۲ هم جواب افلاطونیِ مشابهی وجود دارد. در واقع افلاطون‌گرایی را می‌توان آن‌قدر وسعت داد تا شامل همهٔ ذوات ریاضی بشود که اکنون یا در آینده معرفی می‌شوند. این پاسخ، قانع‌کننده به نظر می‌آید. البته فراموشیِ برخی بسیار عمیق است و با این جواب، قانع نمی‌شوند.

فرگه تلاش کرد عدد ۲ را تعریف کند. دوتا سیب یا دوتا پرتغال. شاید مجموعهٔ متشکل از دوتا سیب یا دوتا پرتغال، زیاد معقول نباشد. شاید انتخاب درست، مجموعهٔ همهٔ این دوتایی‌ها باشد؟ این انتخاب فرگه بود. به زبان امروزی، به‌زعم فرگه عدد ۲ برابر با مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های دو عضوی است. به این ترتیب، عدد ۲ تعمیمی طبیعی از همهٔ مجموعه‌های دو عضوی می‌شد. البته خودِ فرگه به‌جای مجموعه صحبت از دامنهٔ صدق محمول می‌کرد. راسل نشان داد که روش فرگه برای این نوع تعریف، به تناقض منجر می‌شود. پارادُکس راسل در مورد تعریف فرگه از اعداد، ریشه در اصلی موسوم به قاعدهٔ پایه‌ای V داشت که فرگه آن را پذیرفته بود. یک نتیجهٔ این اصل این است که دامنهٔ صدق هر محمول وجود دارد. اما اگر مانند راسل، محمول '$x \notin x$' را در نظر بگیریم و دامنهٔ صدق آن را A بنامیم، با این مشکل برخورد خواهیم کرد که هر یک از دو حالت $A \in A$ و $A \notin A$ به تناقض منجر می‌شود. بعدها نشان داده شد که اصلی ضعیف‌تر موسوم به اصل هیوم[۱] برای این منظور کفایت می‌کند. در این اصل، با استفاده از مفهوم تناظر یک‌به‌یک، مفهوم *تعداد اعضای دامنهٔ صدق یک محمول* به‌طور سیاقی[۲] تعریف می‌شود. این اصل برای اثبات ویژگی‌های اعداد کفایت می‌کند و دستگاه حاصل، سازگار می‌شود. پس مشکل اصلی روش فرگه برای تحویل حساب به منطق، ناسازگاری نیست. مشکلِ منطق‌گرایی این است که اصولش پا را از حیطهٔ منطق صِرف بیرون می‌گذارند. این در مورد اصولی که فرگه به‌کار برد و همچنین اصولی که دنباله‌روان

[۱] David Hume [۲] contextual

او در تحویل حساب به منطق به‌کار بردند نیز صادق است. بنابراین دربارهٔ سودمندیِ این رهیافت، تردید وجود دارد.

در مورد رویکرد نظریه‌مجموعه‌ای، پیشنهاد فون‌نویمان برای فرار از شکل مجموعه‌ایِ پارادُکس راسل، انتخاب یک مجموعهٔ دو عضوی خاص به‌عنوان عدد ۲ بود. اما کدام مجموعه؟ در نظریهٔ مجموعه‌ها از مجموعهٔ تهی آغاز می‌شود و با عمل‌های مجموعه‌ای، بقیهٔ مجموعه‌ها ساخته می‌شوند. انتخاب‌های متعددی در اینجا وجود دارد. پیشنهاد فون‌نویمان برای تعریف عدد ۲، مجموعهٔ شامل مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ تک‌عضوی شامل تهی، بود. این جوابی مناسب است. بر همین اساس، می‌توان همهٔ اعداد طبیعی و اعمال روی آنها را تعریف و ویژگی‌های آنها را به‌کمک اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت کرد.

اصول نظریهٔ مجموعه‌ها در یک فرآیند تاریخی و با مشارکت بسیاری از ریاضیدانان تدوین شده است. البته در این میان، تسرملو[۱] نقشی مهم داشته و جمع‌بندی نهایی آن، به نام تسرملو و فرانکل[۲] ثبت شده است: دستگاه اصل‌موضوعیِ تسرملو–فرانکل یا ZF. اما مشکل این رویکرد چیست؟ همان‌طور که بعداً خواهیم دید، بنابر قضیه‌های ناتمامیت گودل، ZF تمام نیست و ضمناً نمی‌تواند سازگاری خود را ثابت کند. اما به اعتقاد برخی، این مطلب اثری ویرانگر بر رویکرد فرگه ندارد [۱۳]، زیرا رهیافت فرگه صورتگرایانه نیست. در واقع فرگه، افلاطون‌گرایانه می‌اندیشیده است. از نظر او اعداد واقعاً وجود دارند. تعریف‌های فرگه توصیفی هستند نه سازنده.

از دیدگاه افلاطون‌گرایانهٔ کلی، اصول نظریهٔ مجموعه‌ها اگر صادق باشند، که البته ریاضیدانان تا حدود زیادی در مورد این موضوع توافق دارند، نمی‌توانند ناسازگار باشند، زیرا فقط ویژگی‌های مجموعه‌هایی را که وجود دارند، توصیف می‌کنند. البته استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها برای ساختن اعداد، فراتر از محدودیت‌های ذاتی روش مورد نظرِ فرگه است. برای مثال، یکی از اصول این نظریه، *اصل بی‌نهایت* است. پذیرش این اصل، لازمهٔ پذیرش وجود مجموعهٔ اعداد طبیعی است. آیا منطقِ صرف می‌تواند وجود چیزی ویژه از نوع نامتناهی را نتیجه دهد؟ آیا این اصلی منطقی است؟ بسیاری این را نمی‌پذیرند.

۳. شهودگرایی

براوئر در شهودگرایی، وارث ساختگرایان پیش از خود بود. ساختگرایی تاریخچه‌ای طولانی شامل نام بسیاری از ریاضیدانان بزرگ پیش از براوئر دارد. در میان متأخران، می‌توان پوانکاره، کرونکر[۳] و بُرل[۴] را ذکر کرد. به‌طور کلی تأکید آنها بر شهود ریاضی، در مقابلِ منطق و استدلال گام‌به‌گام، بوده است. به اعتقاد براوئر، ریاضیات به اصول بدیهی منطقی تحویل نمی‌شود. البته ریاضیات، دانشی قراردادی و دربارهٔ بازی

[۱] Ernst Zermelo [۲] Abraham Fraenkel [۳] Leopold Kronecker [۴] Émile Borel

با نمادها هم نیست. ریاضیات، محصول تفکر آدمی و خلاقیت ناب او است. ریاضیات، مستقل از زبان است و نوشتن در ریاضیات صرفاً راهی برای انتقال آن به دیگران است.

از دیدگاه فلسفی، شهودگرایی ریشه در فلسفهٔ کانت دارد. به اعتقاد کانت، ذهن بشر نقشی فعال در شناخت دارد. دو شاخهٔ اصلی ریاضیات، یعنی حساب و هندسه به‌ترتیب، ریشه در نحوهٔ درک ناگزیر ما از زمان و مکان دارند. در مورد آنها، به گونهٔ دیگری نمی‌توانیم بیندیشیم. از این دیدگاه، قضیه‌های ریاضی، علی‌رغم اینکه تحلیلی (همان‌گویی) نیستند، پیشینی (مستقل از تجربهٔ حسی) هستند. ایدهٔ شهودگرایی بسیار جذاب است. البته این ایده علاوه بر امتیازی که ظاهراً به ریاضیات می‌دهد، محدودیت‌هایی نیز بر آن تحمیل می‌کند. برای مثال، آیا ذهن آدمی می‌تواند بی‌نهایتِ بالفعل را درک کند؟ چنین به نظر نمی‌آید. پس باید خود را با بی‌نهایتِ بالقوه راضی سازیم. اما ریاضیات جدید، پُر از بی‌نهایت‌های بالفعل است.

اهمیت و نقش اساسی براوئر در فلسفهٔ ریاضیات این است که او در جایگاه یک ریاضیدان بزرگ به معنای معمول آن، تلاش کرد تا آنجا که می‌تواند ریاضیات را بر اساس ساختمان‌های ذهنی بازسازی کند. برای مثال، او در ارائهٔ تصویری شهودگرایانه از اعداد حقیقی موفق شد؛ هرچند این اعداد، نمایشی متناهی ندارند. البته با این روش، همهٔ ریاضیاتِ استاندارد حال حاضر به‌دست نمی‌آید و ایراد اصلی که به کار او گرفته شده، همین است.

در زمینهٔ حساب، براوئر مانند کانت معتقد بود که حساب ریشه در شهود ذهن انسان از زمان دارد و پیشینی است. اما در مورد هندسه، به‌خلافِ کانت و تحت تأثیر پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی، چنین اعتقادی نداشت. در مورد هندسه می‌بایست با تکیه بر تجربه، به انتخاب نوع آن دست زد [۴]. با توجه به این عدم قطعیت موجود در هندسه، تعبیر هندسی اعداد حقیقی نیز دچار مشکل می‌شود و نیاز است که با استفاده از مصالحی بنیادی‌تر در ریاضی ساخته شوند. البته هیچ‌کدام از روش‌های متداول ساختن اعداد حقیقی در ریاضیات، مانند برش‌های ددکیند یا دنباله‌های کُشی[۱]، از دید براوئر پذیرفتنی نبودند، زیرا یک عدد حقیقی به‌شکل یک مجموعهٔ نامتناهیِ بالفعل در نظر گرفته می‌شد. او برای این کار از اشیایی که آنها را *دنباله‌های انتخاب* نامید، استفاده کرد. دنباله‌های انتخاب متشکل از اعداد گویا هستند و می‌توانند بدون هیچ قاعدهٔ از پیش تعیین‌شده، با ارادهٔ آزاد ذهن ریاضیدان در گذر زمان ساخته شوند. بی‌قاعده بودن این دنباله‌ها باعث می‌شود که بتوان به‌کمک آنها همهٔ اعداد حقیقی را ساخت.

چون در هیچ لحظهٔ مشخصی از زمان، به تمامیِ جمله‌های این دنباله‌ها دسترسی وجود ندارد، عجیب نیست که تساوی آنها اصطلاحاً تصمیم‌ناپذیر است. برای توجیه این موضوع، براوئر دنباله‌ای از اعداد گویا را برحسب یک مسئلهٔ حل‌نشدهٔ ریاضی به‌گونه‌ای تعریف کرد که همگرا باشد و حد آن تنها زمانی صفر باشد که آن مسئله صادق است. برای مثال، فرض کنید $A(n)$ این ویژگی باشد که $2n + 4$ مجموع دو عدد

[۱] Augustin-Louis Cauchy

اول است. حدس گلدباخ[۱] می‌گوید که به‌ازای هر n، $A(n)$ صادق است. حال دنبالهٔ $\{\alpha_n\}$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{۱}{۲^n} & (\forall k \leq n)\ A(k) \\ \frac{۱}{۲^k} & \neg A(k)\ \&\ k \leq n\ \&\ (\forall m < k)\ A(m) \end{cases}$$

این دنباله از اعداد گویا به‌روشنی همگرا است و لذا یک عدد حقیقی مانند a را مشخص می‌کند. داریم $a = ۰$ اگر و تنها اگر $A(n)$ به‌ازای هر n برقرار باشد. یعنی تشخیص صفر بودن یا نبودنِ a بستگی به دانستنِ جواب حدس گلدباخ دارد که دست‌کم در حال حاضر جواب آن را نمی‌دانیم. پس اگر مانند براوئر، صدق ترکیب فصلی دو گزاره را منوط به داشتن برهانی برای یکی از آن گزاره‌ها بدانیم، گزارهٔ

$$a = ۰ \vee \neg(\ a = ۰)$$

صادق نخواهد بود. به شیوه‌ای مشابه می‌توان نشان داد که هیچ ترتیب کاملی روی اعداد حقیقی وجود ندارد. آنالیز شهودگرایانه به نتایجی منجر می‌شود که با ریاضیات کلاسیک ناسازگار هستند؛ و قربانی می‌کنند؛ مانند اینکه هر تابع تام روی بازهٔ یکه (به‌طور شهودی تعریف‌شده)، به‌طور یکنواخت پیوسته است [۱۱، ۱۲].

شهودگرایی یک پروژهٔ تمام‌شده نیست، زیرا کار ساخت ریاضیات پایانی ندارد. در واقع هنوز برخی ریاضیدانان به توسعهٔ هرچه بیشترِ جبر، آنالیز ریاضی و توپولوژی از دیدگاه شهودگرایانه و به‌طور کلی‌تر ساختگرایانه، مشغول هستند. هیچ‌کس نمی‌تواند تضمین کند که ریاضیات معاصر حاوی تناقض نیست و روش‌های آن در بررسی ساختارهای نامتناهی، بی‌عیب‌ونقص هستند اما کاربردهای ریاضیات، زیبایی و هماهنگی آن باعث می‌شود که ریاضیدانان از آن دست برندارند. البته اگر لازم باشد، بعضی قسمت‌ها را قربانی می‌کنند، مانند رها کردنِ تصور شهودی از مجموعه‌ها و جانشین کردنِ شکل محدودی از آن در رهیافت اصل‌موضوعی. این، فرآیندی است که پایانی ندارد.

۴. صورتگرایی

توجه به مبانی ریاضیات در اثر هیلبرت دربارهٔ *مبانی هندسه* آشکار است. هیلبرت در فصل اول این کتاب به صورت‌بندیِ اصول هندسه می‌پردازد و فصل دوم آن به سازگاری و استقلال آنها اختصاص دارد. به‌طور کلی، هیلبرت بسیار تحت تأثیر تحوّلات هندسه در دوران پیش از خود و به‌ویژه ظهور هندسه‌های نااقلیدسی بوده است [۷]. ضمناً هیلبرت از نقص اصلی روش فرگه در تحویل حساب به منطق آگاه بود. از

[۱] Christian Goldbach

سوی دیگر، او با محدودیت‌هایی که شهودگرایی بر ریاضیات تحمیل می‌کرد، موافق نبود. هیلبرت برنامه‌ای دیگر برای مستحکم کردن مبانی ریاضیات در سر داشت.

فلسفهٔ ریاضی هیلبرت را *صورتگرایی* می‌نامند اما باید توجه کنیم که فلسفهٔ او با صورتگراییِ پیش از او متفاوت است. صورتگرایان پیش از هیلبرت، ریاضیات را صرفاً نوعی بازی دقیق اما بی‌معنی چون شطرنج می‌دانستند. اما فلسفهٔ ریاضی هیلبرت دیدگاهی هوشمندانه است که عناصری از فلسفه‌های ریاضی دیگر را در هم تنیده است. از یک نظر، این دیدگاهی بسیار طبیعی و نزدیک به عقل سلیم در ریاضیات است. به باور هیلبرت، ریاضیات بخشی واقعی دارد که همان بخش متشکل از اشیاء و ساختارهای متناهی آن است. ریاضیدانان این اشیاء را مستقیماً درمی‌یابند همان‌طور که کانت و شهودگرایان می‌اندیشیدند. اما ریاضیات فقط همین نیست. بخشی فرامتناهی نیز دارد که هیلبرت آن را بخش ایدآل ریاضیات نامیده است. به‌خلافِ نظر منطق‌گرایان، بخش متناهی ریاضیات که شامل ویژگی‌های مقدماتی اعداد طبیعی است، به‌طور مستقیم توسط ذهن انسان و شهود او قابل درک است و نیازی به تحویل آن به منطق نیست. این را می‌توان مانند نظر کانت متکی بر شهود زمانیِ انسان (یک آن و آنِ بعد) دانست. این موضع به نظر شهودگرایان در این زمینه نیز نزدیک است. البته می‌توان تلقی افلاطونی نیز از آن داشت. اما بخش فرامتناهی، دیگر واقعی نیست. آیا این به اعتقاد عموم ریاضیدانان نزدیک نیست؟ اینکه اشیای ریاضیات مقدماتی به‌نحوی موجود باشند، بسیار به شهود عادی ریاضیدانان نزدیک است اما پذیرفتن این فرض در مورد مثلاً فضاهای برداری نامتناهی–بُعد و یا اشیای عجیب‌تر دیگری که همه روزه در ریاضیات معرفی می‌شوند، چندان آسان نیست.

پس چگونه می‌توان این اشیای فرامتناهی را توجیه کرد؟ در این مورد، هیلبرت مانند صورتگرایان می‌اندیشید و معتقد بود که اشیای نامتناهی را می‌توان نمادهایی صِرف در نظر گرفت. اصول موضوع، ویژگی‌های این نمادها و نحوهٔ کار با آنها را توصیف می‌کنند. البته این را می‌توان تنها ترفندی برای یافتن پایه‌ای مناسب برای بنای ریاضیات تلقی کرد. حتی یک افلاطون‌گرا ممکن است چنین رهیافتی را سودمند بداند. اما این اصول چه ویژگی‌هایی باید داشته باشند؟ در وهلهٔ اول، افزودنِ این اصول باید توسیعی محافظه‌کارانه از ریاضیات متناهی بسازد، یعنی هیچ ویژگی جدیدی از اشیای متناهی و واقعی ریاضیات را نتوان ثابت کرد. همچنین می‌بایست سازگار باشند. توجه کنید که این لازمهٔ صورتگرایی است، زیرا اصول همانند قبل، دیگر بیان‌کنندهٔ ویژگی‌های اشیایی از پیش موجود نیستند. چه‌وقت می‌توانیم وجود شیئی فرامتناهی را بپذیریم؟ این اشیای ریاضی وجود دارند هرگاه مجموعهٔ اصولی که ویژگی‌های آنها را بیان می‌کنند، سازگار باشند. سازگاری، وجود را نتیجه می‌دهد. این مغایر با دیدگاه فرگه است که بنابر آن، سازگاریِ اصول به‌سبب صادق بودنِ آنها است؛ یعنی هماهنگ بودنِ آنها با ویژگی‌های اشیایی که از قبل وجود دارند.

اما سازگاریِ یک دستگاه ریاضی را چگونه می‌توان ثابت کرد؟ یک راه، ارائهٔ مدل است؛ یعنی نمونه‌ای مشخص از ساختاری که اصول در آن برقرارند. برای مثال، اصل تعویض‌پذیری در نظریهٔ گروه‌ها با دیگر اصول سازگار است، زیرا گروهی تعویض‌پذیر مانند گروه اعداد صحیح وجود دارد. البته خودِ فرض وجودِ مجموعهٔ اعداد صحیح باید از پیش به‌نحوی توجیه شده باشد. برهان‌های متداول برای سازگاری در ریاضیات، به‌اصطلاح *نسبی* هستند. اما اگر سازگاریِ کل ریاضیات، شامل بخش ایدآل آن، را بخواهیم ثابت کنیم چه باید بکنیم؟ دیگر چیزی باقی نمی‌ماند که بخواهیم به آن متوسّل شویم. آیا باید فراتر از ریاضیات بیندیشیم و از اصولی کلی در فلسفه استفاده کنیم؟ پاسخ هیلبرت منفی است. او می‌خواست سازگاری ریاضیات را که جزئی از به‌اصطلاح *فراریاضیات* است، در خودِ ریاضیات ثابت کند. اما چگونه و کجا؟ پاسخ هیلبرت این بود که در بخش متناهی و بی‌نیاز به توجیه و با استفاده از اثبات‌های گام‌به‌گام و خالی از شهود منطقی. این کاملاً قابل فهم است و اگر امکان داشت، چقدر خوب بود! اما افسوس! گودل نشان داد که نمی‌شود.

قضیه‌های ناتمامیت گودل در طی حدود هشتاد سال که از عمر آنها می‌گذرد، به‌شدت مورد توجه بوده و بررسی شده‌اند. به‌طور خلاصه، قضیهٔ اول ناتمامیت گودل می‌گوید که هر نظریهٔ مرتبهٔ اول حسابی به‌اندازهٔ کافی قوی (قادر به صوری‌سازیِ مقدمات حسابی لازم) T که سازگار باشد و اصولش بازگشتی باشند، تمام نیست، یعنی جمله‌ای مانند A در آن موجود است که T نه A را ثابت می‌کند و نه $\neg\mathrm{A}$ را. قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل بیان می‌کند که این T نمی‌تواند سازگاری خود را اثبات کند. در اینجا منظور از سازگاریِ T جمله‌ای در زبان مرتبهٔ اول T است که صوری‌شدهٔ مفهوم سازگاری T است. حساب مرتبهٔ اول پئانو یکی از آشناترین دستگاه‌های مرتبهٔ اول حسابی است و قضیه‌های ناتمامیت گودل معمولاً برای آن ذکر می‌شوند. در ادامه، به بیان خلاصهٔ برهان قضیه‌های ناتمامیت گودل می‌پردازیم که البته بدون گسستگی در مطلب، می‌توان از خواندن آن صرف‌نظر کرد.

گودل با دستگاهی مرتبهٔ اول از حساب که همان حساب مرتبهٔ اول پئانو PA است، کار را آغاز کرد. ابتدا قضیه‌ای مشهور به *لم نقطهٔ ثابت* را ثابت کرد. بنابر این قضیه، به‌ازای هر فرمول حسابی مانند $\mathrm{A}(x)$ جمله‌ای مانند σ (نقطهٔ ثابت A) موجود است به‌طوری که $\mathrm{A}(\overline{g(\sigma)})$ و σ در PA هم‌ارز هستند. در اینجا $g(\sigma)$ عبارت است از عدد گودل σ که همان کد این جمله بر اساس کدگذاریِ گودل برای فرمول‌های حسابی است و $\overline{g(\sigma)}$ ترم نظیر $g(\sigma)$ است. با استفاده از همین کدگذاری، گودل فرمولی به‌شکل $\mathrm{prov}(x)$ ساخت که اثبات‌پذیریِ جملهٔ با کد x در PA را بیان می‌کند. سپس نشان داد که با فرضِ سازگاریِ PA، نقطهٔ ثابت نقیض این فرمول، در PA اثبات‌ناپذیر است. این نقطهٔ ثابت بیان می‌کند که «من در PA اثبات‌ناپذیرم» و نقیض آن نیز در PA اثبات‌ناپذیر است. پس جمله‌ای مانند τ در PA وجود دارد که هم خودش و هم نقیضش اثبات‌ناپذیر است. این قضیهٔ اول ناتمامیت گودل است. به‌کمک فرمول اثبات‌پذیریِ فوق، گودل

سازگاریِ PA را به‌شکل یک جملهٔ مرتبهٔ اول بیان کرد: Con(PA) (اثبات‌ناپذیریِ ۰=۱). در ادامه، با صوری کردنِ اثبات قضیهٔ اول در PA، نشان داد که در PA از Con(PA) جملهٔ τ نتیجه می‌شود. از این می‌توان نتیجه گرفت که با فرضِ سازگاری، PA نمی‌تواند Con(PA) را ثابت کند. این، قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل است.

به‌کمک قضیهٔ اول ناتمامیت گودل و قضیهٔ موسوم به MRDP در نظریهٔ منطقی اعداد، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر دستگاه صوری حسابی معقول مانند PA، یک معادلهٔ سیاله وجود دارد که جواب ندارد ولی PA نمی‌تواند نداشتنِ جواب را ثابت کند. این، مسئله‌ای حل‌ناپذیر با ماهیت ریاضی فراهم می‌کند. یادآوری می‌کنیم که قضیهٔ MRDP گام اصلی در حل مسئلهٔ دهم هیلبرت دربارهٔ وجود یا عدم الگوریتمی برای تشخیصِ جواب داشتن یا جواب نداشتنِ هر معادلهٔ سیالهٔ داده‌شده، بوده است: *چنین الگوریتمی وجود ندارد*. برای توضیح این نتیجه، متذکر می‌شویم که بنابر MRDP، هر فرمول مرتبهٔ اول محدود حسابی (یعنی فرمولی حسابی که همهٔ سورهای آن محدود باشند) در PA هم‌ارز با یک فرمول وجودی است و با توجه به ویژگی‌های زبان حسابی، این خود هم‌ارز وجود جواب یک معادلهٔ سیاله است.

اکنون طیف وسیعی از جمله‌های مستقل از PA در دسترس است [۵]. اینها عمدتاً شکل‌های مرتبهٔ اول برخی مسائل ترکیبیاتی از قبیل قضیهٔ رمزی[۱] هستند. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ نتایج ریاضی و فلسفی قضیه‌های گودل، مراجع [۵] و [۱۳] را بخوانید. مرجع [۸] شامل اثباتی کامل از این قضیه‌ها است و به‌علاوه مرجعی برای بخش نظریهٔ برهان در منطق ریاضی هم به‌شمار می‌آید. نظریهٔ برهان یکی از محصولات برنامهٔ هیلبرت است.

اثبات گودل به‌گونه‌ای است که می‌توان آن را برای هر دستگاه حسابی مناسب دیگر یا نظریهٔ مجموعه‌ها نیز تکرار کرد. این محدودیت ذاتی برای اثبات‌های گام‌به‌گام منطقی است. به این ترتیب، برنامهٔ هیلبرت در اثبات سازگاریِ کل ریاضیات در بخش مطمئن و متناهی آن ناکام ماند: اثبات سازگاری خودِ PA در PA هم ممکن نیست چه رسد به اثبات سازگاریِ کل ریاضیات. البته هرچند اثبات‌های سازگاریِ مطلق وجود ندارند اما اثبات‌های نسبی وجود دارند. برای مثال، سازگاری ZF به‌علاوهٔ اصل انتخاب را می‌توان با فرض سازگاریِ خود ZF ثابت کرد. این کاری است که گودل انجام داد. این اثبات با روش‌های متناهیِ مورد نظر هیلبرت قابل انجام است [۸]. نتایجی از این گونه، جایگاهی مهم در نظریهٔ امروزی مجموعه‌ها دارند. از سوی دیگر، اگر پا را کمی فراتر از روش‌های متناهیِ مورد نظر هیلبرت بگذاریم، می‌توان سازگاریِ مطلق حساب را نیز ثابت کرد. این کاری بود که مثلاً گنتسن[۲] انجام داد. در این اثبات، او از استقرای فراتر از استقرای معمولی استفاده کرد: استقرا تا ϵ_0، یعنی اولین اردینال α به‌طوری که $\omega^\alpha = \alpha$. هرچند

[۱] Frank P. Ramsey [۲] Gerhard Gentzen

این اثبات راضی‌کننده نیست، سرآغاز بخشی مهم از نظریهٔ برهان به نام *تحلیل اردینالی*[1] شده است. در این بخش به هر نظریه، اردینالی نسبت داده می‌شود که به‌نوعی قدرت اثباتیِ آن نظریه را نشان می‌دهد.

ناگفته نماند که یکی از دستاوردهای جانبی گودل، معرفی *تابع‌های بازگشتی اولیه* بود و با این کار و همچنین بررسی نمایش‌پذیری آنها در PA، خود را در زمرهٔ پیشگامان نظریهٔ علوم رایانه قرار داد که سرانجام، منجر به ساخت رایانه‌های امروزی گردید. دربارهٔ تاریخچهٔ این موضوع، مرجع [۳] خواندنی است.

وضعیت برنامهٔ هیلبرت و قضیه‌های گودل در مبانی ریاضیات را می‌توان با قضیهٔ گالوا در خودِ ریاضیات مقایسه کرد. قضیهٔ گالوا در زمینهٔ حل‌ناپذیری معادله‌های چندجمله‌ای از درجهٔ حداقل ۵ به‌وسیلهٔ رادیکال‌ها، دلیلی بر بیهوده بودن تلاش‌های قبلی او و دیگران در زمینهٔ حل آنها نیست و به‌نوعی، دنبالهٔ طبیعی آنها است. این روش‌ها بعداً تعمیم داده شد و در دیگر قسمت‌های ریاضیات به‌کار رفت.

مراجع

[1] Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, New York, 2008.

[2] Carter, J., Structuralism as a philosophy of mathematical practice, *Synthese*, **163** (2008), 119–131.

[3] Davis, M., *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*, W. W. Norton & Company, New York, 2000.

[4] Detlefsen, M., Brouwerian intuitionism, *Mind, New Series*, **99** (1990), 501–534.

[5] Feferman, S., The impact of Gödel's incompleteness theorems on mathematics, *Notices of the American Mathematical Society*, **53** (2006), 434–439.

[6] George, A., Velleman, D., *Philosophies of Mathematics*, BlackWell Publishing, Oxford, 2002.

[7] Gillies, D., German philosophy of mathematics from Gauss to Hilbert, *Royal Institute of Philosophy Supplements*, **44** (1999), 167–192.

[8] Girard, J.-Y., *Proof Theory and Logical Complexity*, Bibliopolis, Napoli, 1987.

[9] Reck, E. H., Frege, Dedekind, and the origins of logicism, *History and Philosophy of Logic*, **34** (2013), 242–265.

[10] Tait, W. W., Frege versus Cantor and Dedekind: On the concept of number: `http://home.uchicago.edu/~wwtx/frege.cantor.dedekind.pdf`.

[11] Trolestra, A. S., van Dalen, D., *Constructivism in Mathematics* (vols. 1, 2), Elsevier, Amsterdam, 1988.

[1] ordinal analysis

[12] Moschovakis, J. R., Vafeiadou, G., Intuitionistic mathematics and logic:
http://www.math.ucla.edu/~joan/gvfjrmeng.pdf

[13] Raatikainen, Panu, *Gödel's incompleteness theorems*, in Edward N. Zalta (ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy:
https://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/goedel-incompleteness.

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی
تارنما: http://facultymembers.sbu.ac.ir/mortezamoniri/
رایانامه: m-moniri@sbu.ac.ir