فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۲ (بهار ۱۳۸۸) صص. ۱ تا ۳۸

کسرهای مصری*

مهدی رجبعلی‌پور

با گرامیداشت مقام علمی همکار ارجمند استاد نصرالله سفید بخت

چکیده گفتار

بشر، هم ذهنیت ساده‌ای از کسر ۱/۲ دارد و هم به آسانی می‌تواند کمیت‌های گوناگون فیزیکی را نصف کند. تا آنجا که ما می‌دانیم، مصریان ابداع اولین نماد کسر ۱/۲ را در فهرست افتخارات فرهنگی خود دارند و شاید قرن‌ها طول کشید تا مفهوم این نماد از فرمان «نصف کن» به حالت «نصف» ، تبدیل گشت و در کنار عددهای مصری وارد محاسبات شد. نماد ۱/۲ مصری به شکل طناب یا نانی در حال تا شدن بود. کسر ۱/۴ هم که تکراری از عمل نصف کردن است با نمادی به شکل × نمایش داده می‌شد؛ آن هم احتمالاً نمایش یک قرص نان در حال بریده شدن به چهار قسمت مساوی بود. هیچ یک از این دو نماد، نمایش کسر مربوطه‌شان نیستند بلکه نمایشگر عمل‌هائی هستند که به آن کسرها منجر می‌شود. لذا باور توماس اریک پیت، مصرشناس و مترجم پاپیروس ریند، تأیید می‌شود که مضرب‌های ۱/۲ و ۱/۴ پیش از آن که یک کمیت باشند، یک «فرمان» هستند. ظاهراً چیزی از عمر نماد ۱/۴ نگذشته بود که کسرهای ۱/۲ و ۱/۴ و به دنبال آنها، کسرهای ۱/۸ و ۱/۱۶ تا ۱/٦۴ به جرگهٔ ریاضیات پیوستند و به جز نماد ۱/۲ که عمیقاً در فرهنگ مصری ریشه دوانیده بود، بقیهٔ این کسرها، نمادی یکنواخت و ریاضی‌گونه پیدا کردند. این نمادگذاری می‌توانست به اختراع بسط دودوئی کسرها (در چارچوب عددنویسی دهدهی) بیانجامد ولی تقدس کسرهای مشهور به اجزاء چشم «هور» (خورشید خدا)، سد راه شد و تا مدت‌ها مانع توزین کمیت‌های کمتر از ۱/٦۴ واحد رایج «هکات» بود. نیاز داروسازان، مصریان را به حیله‌های جدیدی متوسل ساخت که اوزان را تا ۱/٦۴ هکات می‌پیمودند و سپس باقی‌مانده را با واحد جدیدی معادل ۱/۳۲۰ هکات و هر کسر دلخواهی از این واحد جدید وزن می‌کردند. در طول تاریخ مصر باستان، هیچگاه مفهوم کسر از دایرهٔ کسرهای یکین (صورت ۱، مخرج دلخواه) و کسرهای ۲/۳ و ۳/۴ فراتر نرفت و این به خاطر نمادگذاری اولیه‌ای بود که توانائی تعمیم به کسرهای متعارفی دلخواه را نداشت. هیجان کسرهای مصری از همین جا شروع می‌شود: یک کسر متعارفی دلخواه را

*) این پژوهش با حمایت کرسی پژوهشی صندوق حمایت از پژوهشگران کشور انجام شده است.
مهدی رجبعلی پور، دانشگاه شهید باهنر کرمان، بخش ریاضی، m_radjab@yahoo.com

چگونه باید نمایش داد تا بتواند در محاسبات رو به رشد فنی و اقتصادی وارد شود؟ در دوران کلاسیک مصر، به ویژه پادشاهی اَمِنِمهِت سوم[1] که پاپیروس‌های مشهور ریاضی در زمان او و دودمان او نوشته شد، اجزای چشم هور از اهمیت افتاده بودند و تکلیف ریاضی‌دانان مصری در مورد کسرها این بود که راه‌های ساده‌ای برای تبدیل کسرهای متعارفی به مجموعی از کسرهای یکین پیدا کنند. کسر ۲/۳ که در اکثر سندهای ریاضی مصری با نمادی مخصوص به خود ظاهر شده است، با توجه به چیستاهای عامیانهٔ مصری، باید دو فصل از سال سه فصلی مصر باشد. رود نیل به مدت ۱/۳ از سال در طغیان بود و تمام مزارع اطراف خود را با گل و لای می‌پوشاند. در ۲/۳ بقیهٔ سال، مصری‌ها به بازسازی زمین‌های کشاورزی و کاشت و برداشت محصولات، مشغول بوداند. کسر ۲/۳ از قدر و عزت خاصی بین مصریان برخوردار بود. نکتهٔ جالب این است که در محاسبه ۱/۳ از یک کمیت، نخست ۲/۳ آن را به دست می‌آوردند و سپس حاصل را نصف می‌کردند! اگر ۴ ماه در گل و لای نیل دست بسته بمانید، اکراه مصریان را از ۱/۳ و علاقهٔ آنها را به کسر ۲/۳ درک خواهید کرد! ریاضی‌دانان یونانی ماب اسکندریه در چنین شرایطی کسرهای مصری را تحویل گرفتند و آنها را بدون تغییرات چندانی، همراه با کسرهای شصت شصتی بابلی، به اروپائیان قرون وسطی انتقال دادند. مسلمانان، به پیروی از امثال خوارزمی، حساب یونانی و از آن جمله کسرهای مصری را به کلی کنار گذاشتند، و برخی هم مانند ماهانی و خیام مدتی را به همگانی‌کردن نافرجام تعریف اودوکسوسی مفهوم نسبت گذراندند. ولی رواج حساب هندی و روش‌های خوارزمی، نه تنها دانشمندان اسلامی، بلکه اروپائیان را نیز به تدریج به خود جلب کرد و چنان شد که در قرن شانزدهم میلادی کسرهای متعارفی و عملیات امروزی کسرها جهان‌گیر شدند؛ کسرهای مصری به تجملات پژوهشی ریاضی پیوستند و کسرهای دهدهی نیز که در سادگی بر کسرهای شصت شصتی و در دقت بر کسرهای دودویی برتری داشتند، جای طبیعی خود را در دستگاه عددنویسی رایج دهدهی باز کردند.

هدف این مقاله تدریس قضیه‌های کهنه یا کشف قضیه‌های نو نیست؛ پژوهشی است در بررسی دگردیسی کسرهای مصری و گمانه‌هایی است در انگیزه‌های یکی از دیرینه‌ترین فرهنگ‌های دنیا برای آفرینش آن کسرها.

۱. پیشگفتار

ارقامی که مصریان برای نوشتن اعداد به کار می‌بردند مانند سکه‌های پول بودند، هر کجا قرار می‌گرفتند تغییری در ارزششان داده نمی‌شد. در عدد ۲۳۲ امروز، دو رقم ۲ ارزش‌های مختلف دارند؛ آن که سمت راست است ۲ واحد است و آن که سمت چپ است ۲۰۰ واحد است. ضمناً رقم ۳ هم گویای ۳۰ می‌باشد. ولی مصریان رقم یک را با یک خط قائم(|) ، عدد ۱۰ را با یک نعل

1) Amenemhet III

∩ ، و عدد ۱۰۰ را با یک پیچک نمایش می‌دادند و نشانک‌های دیگری هم برای ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰ داشتند. برای نوشتن رقم‌های یکان و دهگان و صدگان، ... نشانک‌های مربوطه را تکرار می‌کردند. مثلاً عدد ۲۳۲ را طبق شکل ۱ می‌نوشتند.

شکل ۱: هیروگلیف عدد ۲۳۲

دبیران مصری، ترتیب را در نوشتن اعداد (طبیعی) مراعات می‌کردند؛ چنانچه مراعات هم نمی‌کردند، اشتباهی رخ نمی‌داد. زیرا دو پیچک را در هر کجای عدد قرار دهند، ارزش مجموعشان (عین دو سکه ۱۰۰ ریالی) تغییری نخواهد کرد؛ همان طور سه نعل هر کجا باشند ارزش مجموعشان (عین ۳ سکه ۱۰ ریالی) ثابت خواهد ماند و غیره.

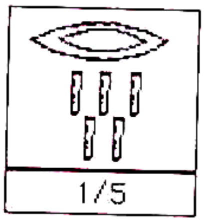
اعداد کسری به مرور در حساب مصر ظاهر شدند. احتمالاً کسر ۱/۲ اولین کسری بود که با نمادی به شکل یک چوب دولا شده یا به احتمال زیاد یک قرص نان تا شده، در حساب مصری پدیدار شد (شکل ۲).

هشدار: ما در این مقاله نماد کسری / را فقط برای علامت کسر متعارفی به کار می‌بریم و از نوشتن عدد ده‌دهی ممیزدار پرهیز می‌کنیم.

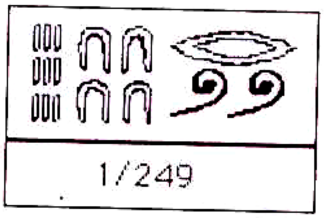
شکل ۲: کسر $\frac{۱}{۲}$

کسر ۱/۴ هم با نماد × (احتمالاً نمایش بریدن یک قرص نان به چهار قسمت مساوی) ظاهر شد. اگر کار به همین منوال پیش می‌رفت هر کسر، شکل خاص خود را پیدا می‌کرد و انگیزه‌ای برای تعمیم نمی‌داد؛ خوشبختانه مصریان تصمیم گرفتند این نمادگذاری را متوقف کنند و نمادهای یکنواختی برای کسرهای با صورت ۱ و مخرج دلخواه به کار گیرند. در این نمادگذاری، یک بیضی (یک جداره یا دو جداره) رسم می‌کردند و زیر آن، مخرج را که عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ بود می‌نوشتند. (مصریان نمادگذاری جدید را برای ۱/۲ نپذیرفتند و همان نماد مأنوس قدیم را به کار می‌گرفتند؛ ولی ۱/۴ را تغییر دادند، شاید نماد × هنوز فراگیر نشده بود. به نظر من مصریان تنها ملتی بودند که با ریاضیات، رابطه‌ای عاطفی داشتند و ما در بخش کسرهای نیل به این موضوع باز خواهیم گشت.)

شکل ۳: کسر ۱/۴



شکل ۴: کسر ۱/۵



شکل ۵: کسر ۱/۲۴۹

(در شکل ۳، بیضی نماد کسر، یک منحنی بسته یک جداره است در حالی که شکل‌های ۴ و ۵، آن را دو جداره نمایش می‌دهند؛ ضمناً در مورد کسر ۱/۲۴۹، به علت بزرگ بودن مخرج کسر، نماد مربوطه فقط روی ۲۰۰ را پوشانده است.)

پیش از آن که پیشگفتار را ادامه دهیم، چند اصطلاح مربوط به کسرها را برای استفاده‌های بعدی این مقاله تثبیت می‌کنیم.

آ) **تعریف.** کسری را که صورتش عدد ۱ و مخرجش هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد یک **کسر یکین** و مجموعهٔ متشکل از کسرهای یکین و کسر ۲/۳ را مجموعه **کسرهای پایه** می‌نامیم. در این مقاله کسری را که کوچک‌تر از ۱ باشد یک **کسر متعارفی** و هر دنبالهٔ متناهی اکیداً نزولی از کسرهای پایه را که مجموعش یک کسر متعارفی شود یک **کسر مصری** خواهیم نامید. همچنین مجموع یک کسر مصری و یک عدد صحیح نامنفی را یک **عدد مصری** می‌نامیم.

کسرهای پایه، نقش بلوک‌هائی را بازی می‌کردند که مصریان همهٔ کسرهای مورد نیاز خود را با آنها می‌ساختند. البته کسرهای یکین برای این امر کافی بودند ولی بنا به شواهدی احتمالی که ذکر آن خواهد آمد، مصریان کسر ۲/۳ را هم به این مجموعه اضافه کردند. برای توضیح بیشتر مثالی می‌زنیم. امروزه، یک کسر متعارفی مانند ۵/۹ را به مفهوم تقسیم یک واحد به ۹ قسمت مساوی و اختیار ۵ قسمت از آن، تعریف می‌کنیم. این تعریف برای مصریان ۵۰۰۰ سال پیش قابل هضم نبود و اصولاً مسأله‌ای به نام تعیین ۵/۹ نداشتند؛ آنان از کسر ۱/۹ شروع نکردند که بخواهند ۵ برابر آن

را محاسبه کنند، بلکه از طریق تقسیم ۵ نان بین ۹ کارگر به کسرهای یکین رسیدند و کم‌کم آنها را لمس کردند. آنها برای رسیدن به این سطح از حساب، سه مرحله تاریخی زیر را پشت سر گذاشتند که در این مقاله به تفصیل از آنها صحبت خواهیم داشت.

مرحلهٔ اول (تا ۳۰۰۰ ق.م.): بسط دودوئی کسرها تا جمله ۱/٦۴؛

مرحلهٔ دوم (تا ۲۱۰۰ ق.م.): بسط دودوئی تا ۱/٦۴ و بسط باقیماندهٔ آن با کسرهای پایهٔ متمایز؛

مرحلهٔ سوم (از ۲۱۰۰ ق.م): بسط بر حسب کسرهای پایهٔ متمایز.

این مقاله در ۱۰ بخش تنظیم شده است که بخش اول آن به پیشگفتار گذشت. برای درک بهتر حساب مصری، بخش دوم را به «چهار عمل اصلی» مصریان اختصاص داده‌ایم. بخش ۳، به مرحلهٔ ابتدائی کسرهای مصری، یعنی کسرهای دودوئی، و ارتباط آن با افسانه چشم هور (خورشید خدا) می‌پردازد.

در بخش ۴ کسر ۲/۳ و رابطهٔ احتمالی آن با آرامش سالانهٔ نیل بررسی شده است. بخش ۵ به لوح چوبی اخمیم می‌پردازد که مدرکی بر تجزیهٔ یک کسر به مجموعی از کسرهای دودوئی و مجموعی از کسرهای پایهٔ دیگر است (مرحلهٔ بینابینی کسرهای مصری). بخش ٦، تومار چرمی ریاضیات مصر را بررسی می‌کند که در آن روش‌هایی برای تجزیهٔ یک کسر به کسرهای پایه داده شده است و باور بر این است که این روش‌ها بین ریاضیدانان مصری عمومیت داشته‌اند. پس از مروری بر سرگذشت پاپیروس‌های مسکو و ریند در بخش ۷، عملیات حسابی مصریان را روی کسرها در بخش ۸ مطالعه خواهیم کرد (مرحله نهایی کسرهای مصری). بخش ۹ به سرگذشت کسرهای مصری در یونان، اسکندریه و سرانجام اروپای قرون وسطی می‌پردازد. بخش ۱۰ نیز حاوی یادداشت‌های پراکنده‌ای در جهت تکمیل مقاله و توجیه برخی از نظریات مطرح شده است.

انگیزه. مدت‌ها شیفتهٔ پدیدهٔ کسرهای مصری و تاریخچهٔ آن بودم و مطالبی از این طرف و آن طرف جمع‌آوری می‌کردم. برای هر مطلبی توجیهاتی به نظرم می‌رسید و فرصتی برای تنظیم آنها میسر نمی‌شد تا این که همکاران در فرهنگستان علوم تصمیم گرفتند مقاله‌هایی برای بزرگداشت مقام علمی و خدمات فرهنگی دانشمند محترم جناب آقای دکتر نصرالّله سفیدبخت بنویسند. بهترین بهانه بود که ضمن تقدیم مقاله‌ای در این رابطه، آرزوی دیرین خود را که شناساندن گوشه‌های ناشناخته‌ای از تاریخ، فرهنگ و تمدن مصر باستان بود عملی سازم.

۲. چهار عمل اصلی مصریان

اینک چهار عمل اصلی مصریان را بررسی می‌کنیم.

آ) **جمع و تفریق مصری.** اگر بخواهید دو عدد را با هم جمع کنید، کافی است نشانک‌های هم ارزش را کنار هم بگذارید. مثلاً از جمع ۲۴۹ با ۷۸، تعداد ۱۷ خط، ۱۱ نعل و ۲ پیچک به‌دست می‌آید. ولی حکمت عددنویسی ایجاب می‌کند که هر ۱۰ خط را با یک نعل عوض کنید که تعداد

نعل‌ها ۱۲ می‌شود. همین طور باید هر ۱۰ نعل را با ۱ پیچک عوض کند که حاصل جمع می‌شود ۷ خط و ۲ نعل و ۳ پیچک؛ یعنی ۳۲۷. در تفریق نیز شکل‌های متناظر را از هم کم می‌کنند؛ مثلاً در تفریق ۷۸ از ۲۵۹ اول ۸ خط را از ۹ خط کم می‌کنیم، می‌ماند یک خط؛ بعد باید ۷ نعل از ۵ نعل برداریم که امکان ندارد؛ لذا یک پیچک از مفروق را با ده نعل عوض می‌کنیم تا مفروق صاحب ۱۵ نعل شود و ۷ نعل را از ۱۵ نعل کم می‌کنیم، می‌ماند ۸ نعل. پس یک خط و ۸ نعل و یک پیچک باقی می‌ماند؛ یعنی ۱۸۱.

ب) **ضرب مصری.** ضرب مصری‌ها کاری بس ابتکاری بود؛ آنان، برخلاف سومری‌ها و ایلامی‌ها، جدول ضرب نداشتند و با دو برابر کردن‌های متوالی به جواب می‌رسیدند. مصریان بی آن که از دستگاه دودوئی اطلاع داشته باشند، می‌دانستند که هر عدد طبیعی از مجموع چند تا از عددهای $۲^۰$، $۲^۱$، $۲^۲$، $۲^۳$، ... به دست می‌آید (یعنی بسط دودوئی). مثلاً بسط دودوئی ۳۵ می‌شود:

$$۳۵ = ۲^۵ + ۲^۱ + ۲^۰ = ۳۲ + ۲ + ۱$$

حال اگر شما بخواهید ۳۵ را در ۹۲٦ ضرب کنید، کافیست عددهای ۱ و ۲ و ۳۲ را در ۹۲٦ ضرب کنید و حاصل‌ها را با هم جمع کنید. مصریان، با جدولی که برای عملیاتشان ترتیب می‌دادند، با یک تیر دو نشان می‌زدند: هم بسط دودوئی ۳۵ را می‌یافتند، هم حاصل ضرب مطلوب را. جدول عملیاتشان مرکب از دو ستون و چند سطر بود که در سطر اول به ترتیب عددهای ۱ و ۹۲٦ را می‌نوشتند (یعنی در حقیقت عددهای $۲^۰$ و ۹۲۶×۲^۰). هر سطر بعدی جدول را از دو برابر کردن سطر بالاترش به دست می‌آوردند. (البته، دو برابر کردن یک عدد یعنی جمع آن عدد با خودش، کار آسانی بود.) بدین ترتیب جدول زیر به دست می‌آمد:

۱'	۹۲٦'
۲'	۱۸۵۲'
۴	۳۷۰۴
۸	۷۴۰۸
۱٦	۱۴۸۱٦
۳۲'	۲۹٦۳۲'
٦۴	–

در ستون اول توان‌های ۲ را می‌نوشتند تا به ۳۵ برسند. در ستون چپ، درآیه ٦۴ زائد است و لذا سطر هفتم زائد است. پس بزرگترین توان موجود ۲ در ۳۵ عدد $۳۲ = ۲^۵$ است و بنابر این، آن را «اختیار» کرده‌اند. در ذهن خود عدد ۳۲ را با ۱٦ جمع کرده‌اند که ۴۸ شده و نتیجه گرفته‌اند ۱٦ در بسط ۳۵ نیست و لذا آن را «اختیار» نکرده‌اند. (خط موربی که سمت چپ بالای ۳۲ و چند عدد

دیگر جدول ظاهر شده به معنای «اختیار» آن عدد است و دقیقاً همان نمادی است که مصری‌ها به کار می‌بردند.) به همین دلیل اعداد ۸ و ۴ را هم «اختیار» نکرده‌اند. اما ۳۲ و ۲ می‌شود ۳۴ که پذیرفتنی است و لذا ۲ را اختیار کرده‌اند و بالاخره حاصل را با ۱ جمع کرده‌اند و ۳۵ را به دست آورده‌اند، پس ۱ نیز «اختیار» شده است و در نتیجه عددهای ۱ و ۲ و ۳۲ در بسط دودوئی ۳۵ ظاهر می‌شود. در ستون دوم نیز، ۹۲۶ متوالیاً دو برابر شده است تا مقابل ۳۲ رسیده‌اند؛ هر عددی را که از ستون چپ اختیار کرده‌اند، عدد نظیرش در ستون راست نیز اختیار شده است. پس

$$۳۵ \times ۹۲۶ = ۲۹۶۳۲ + ۱۸۵۲ + ۹۲۶ = ۳۲۴۱۰,$$

ابتکار مصریان وقتی درک می‌شود که بدانیم بابلی‌ها و ایلامی‌ها چه جدول‌های ضرب مفصلی در غیاب خوارزمیک‌های کارآمد امروزی به کار می‌گرفتند.

پ) تقسیم مصری با باقیمانده. تقسیم مصریان، کاری تقریباً بر عکس ضربشان بود. مثلاً در تقسیم ۳۲۴۳۱ بر ۹۲۶ جدولی دوستونی با سرستون‌های ۱ و ۹۲۶ تشکیل می‌دادند و هر سطر بعدی را از دو برابر کردن سطر بالاتر به دست می‌آوردند. همان طور که در ضرب، ستون چپ را زیر نظر داشتند تا به مضروب فیه می‌رسیدند، در تقسیم، ستون راست را زیر نظر می‌گرفتند تا به مقسوم برسند. در اینجا مقسوم بین ۲۹۶۳۲ و ۵۹۲۶۴ قرار دارد و لذا در ۲۹۶۳۲ متوقف شده‌اند. (سطر هفتم زائد است.)

۹۲۶\`	۱\`
۱۸۵۲\`	۲\`
۳۷۰۴	۴
۷۴۰۸	۸
۱۴۸۱۶	۱۶
۲۹۶۳۲\`	۳۲\`
۵۹۲۶۴	–

حال عدد ۲۹۶۳۲ (از سطر ششم) اختیار می‌شود. آن را با عدد بالای سرش (در سطر پنجم) جمع می‌کنند از ۳۲۴۳۱ بزرگ‌تر می‌شود و لذا از سطر پنجم چشم می‌پوشند و عدد سطر بالاتر را امتحان می‌کنند که باز هم از ۳۲۴۳۱ بیشتر می‌شود و این امتحان را تکرار می‌کنند.

در سطر دوم به حاصل جمع

$$۲۹۶۳۲ + ۱۸۵۲ = ۳۱۴۸۴$$

می‌رسند که کوچک‌تر از ۳۲۴۳۱ می‌باشد. لذا سطر دوم را اختیار می‌کنند. بالاخره، عدد ۳۱۴۸۴

را با سطر اول جمع می‌کنند که می‌شود:

$$۳۱۴۸۴ + ۹۲۶ = ۳۲۴۱۰$$

و هنوز به عدد ۳۲۴۳۱ نمی‌رسند؛ پس سطر اول نیز اختیار می‌شود. مجموع حاصل، ۲۱ واحد از مقسوم کمتر است. نتیجه می‌گیرند که تقسیم عدد ۳۲۴۳۱ بر ۹۲۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۲۱ دارد. برای یافتن خارج قسمت، عددهای اختیار شده از ستون اول را با هم جمع می‌کنند که می‌شود:

$$۳۲ + ۲ + ۱ = ۳۵$$

بنا بر این

$$۳۲۴۳۱ = ۳۵ \times ۹۲۶ + ۲۱$$

و کار تقسیم (با باقیمانده) به همین جا پایان می‌پذیرد.

ت) **تقسیم مصری بی باقیمانده.** در مثال بالا اگر منظور تقسیم ۳۲۴۳۱ کیسه گندم بین ۹۲۶ کارگر می‌بود، می‌بایست تکلیف ۲۱ کیسه باقیمانده نیز روشن شود؛ در حقیقت به هر کارگر ۳۵ کیسه و ۲۱/۹۲۶ کیسه می‌رسد. یعنی

$$۳۲۴۳۱/۹۲۶ = ۳۵ + (۲۱/۹۲۶)$$

هدف این مقاله، مطالعهٔ نحوهٔ برخورد مصریان با کسری مانند ۲۱/۹۲۶ می‌باشد. امروزه اگر از ما بخواهند حاصل $\frac{۳۲۴۳۱}{۹۲۶}$ را تا یک رقم اعشار حساب کنیم، مقسوم را در ۱۰ ضرب و بر مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۳۵۰ و باقیمانده ۲۱۰ برسیم. سپس برای یافتن جواب واقعی باید این دو عدد را بر ۱۰ تقسیم کنیم تا خارج قسمت واقعی ۳۵ و باقیماندهٔ واقعی ۲۱ به دست آید. اگر جواب را تا یکصدم تقریب می‌خواستند، مقسوم را در ۱۰۰ ضرب می‌کردیم و به خارج قسمت ۳۵۰۲ و باقیمانده ۲۴۸ می‌رسیدیم که خارج قسمت واقعی، سی و پنج و دو صدم، و باقیمانده واقعی، دو و چهل و هشت صدم می‌شد. مصری‌ها هم تا زمانی که کسرهای خود را با نصف کردن‌های متوالی به دست می‌آوردند، کاری شبیه ما انجام می‌دادند. مثلاً برای یافتن بسط ۳۲۴۳۱/۹۲۶، مقسوم (یعنی ۳۲۴۳۱) را در ۶۴ ضرب می‌کردند و عدد حاصل (یعنی ۲۰۷۵۵۸۴) را بر مقسوم علیه سابق (یعنی ۹۲۶) تقسیم می‌کردند و خارج قسمت را بر حسب توانهای ۲ می‌نوشتند و باقیمانده را نیز تعیین می‌کردند. آخر سر، این دو عدد را بر ۶۴ تقسیم می‌کردند.

`۹۲۶	`۱
`۱۸۵۲	`۲
۳۷۰۴	۴
۷۴۰۸	۸
۱۴۸۱۶	۱۶
۲۹۶۳۲	۳۲
`۵۹۲۶۴	`۶۴
`۱۱۸۵۲۸	`۱۲۸
۲۳۷۰۵۶	۲۵۶
۴۷۴۱۱۲	۵۱۲
۹۴۸۲۲۴	۱۰۲۴
`۱۸۹۶۴۴۸	`۲۰۴۸
۳۷۹۲۸۹۶	–

در نتیجه

$$
\begin{aligned}
۳۲۴۳۱/۹۲۶ &\approx ۲۰۴۸/۶۴ + ۱۲۸/۶۴ + ۶۴/۶۴ + ۱/۶۴ \\
&= ۳۲ + ۲ + ۱ + ۱/۶۴
\end{aligned}
$$

که خطای محاسبه دقیقاً ۲۰۹/۲۹۶۳۲ می‌باشد. در لوح چوبی اخمیم (بخش ۴) این خطا [باقی‌مانده] برحسب کسرهای پایه محاسبه شده است. (مصریان علامتی برای جمع نداشتند و عددها و کسرها را پشت سر هم می‌نوشتند.)

۳. اجزای چشم هور

همان گونه که دو برابر کردن ساده‌ترین مثال ضرب است، نصف کردن نیز ساده‌ترین مثال تقسیم است و نبوغ مصریان در این بود که با استفاده از این دو عمل هر نوع ضرب و هر نوع تقسیم با باقیمانده یا با تقریب را انجام می‌دادند. نصف کردن نان و پارچه و نخ و هر چیز متقارن دیگر، به سادگی و بدون ابزار مدرج، فقط با عمل تا کردن، انجام می‌شود؛ هر مقدار از یک مایع یا غله یا سیال و شبه سیال دیگر نیز وقتی در دو کفه ترازو ریخته شود با چند قاشق این ور و آن ور کردن به تعادل می‌رسد و سنگ و پیمانه‌ای لازم نمی‌شود. شما اگر به نماد ۱/۲ مصری در شکل ۱ نگاه کنید به یاد طنابی می‌افتید که دو سرش در حال روی هم قرار گرفتن است تا وسطش مشخص شود.

در اینجا اجازه می‌خواهم خاطره‌ای را که به پنجاه ـ شصت سال پیش (دوران کودکیم) مربوط می‌شود بیان کنم. آن زمان‌ها که در کرمان کیلو و گرم مرسوم نبود و مردم هنوز به مصوبات مورخ ۱۳۰۴/۳/۱۰ مجلس شورای ملی تن در نداده بودند، اجزای «من» به شرح زیر بود: نیم من،

چارک، سی سنگ، پانزده سنگ، هفت درم، و نصف هفت درم. هر یک از این اجزاء نصف جزء قبلی بود و هیچ وزنه‌ای برای یک درم و پنج درم و... و یک سنگ و ده سنگ و غیره در کرمان (زمان کودکی من) وجود نداشت مگر همین وزنه‌های سی سنگ و پانزده سنگ و هفت درم و نصف هفت درم. البته قدیم‌ترها چیزهایی بوده است که مجلس در سال ۱۳۰۴ تعاریف آنها را عوض می‌کند و این تعاریف جدید درم و سنگ نیز همراه با تعاریف قدیم، زیر فشار جهانی شدن کیلوگرم و متر و غیره، به کلی محو می‌شوند (مطمئناً مجلس شورای ملی نیز تعاریف جدید سنگ و درم را فقط برای خالی نبودن عریضه داده بود و نگران محو شدن آنها نبود). غرض از نقل این داستان این بود که مردم کرمان برای راحتی خود چندین دستگاه اندازه‌گیری را مخلوط کرده و وزنه‌هایی ردیف کرده بودند تا هر جزئش نصف جزء دیگر باشد و بقیهٔ وزنه‌ها را از ذهنشان بیرون ریخته بودند. همانطور که گفتیم این نصف کردن‌ها نه تنها از نظر ذهنی کار راحتی بود بلکه از نظر فیزیکی هم بسیار ساده بود.

مصریان برای تقسیم ۵ نان بین ۹ کارگر، از ساده‌ترین کار یعنی نصف کردن نان شروع می‌کردند زیرا همان طور که گفتیم، نصف کردن طناب یا نان یا مایع بدون داشتن ابزار مدرج کار ساده‌ای بود. وقتی که هر یک از ۵ نان نصف می‌شد، ۱۰ نیمه به دست می‌آمد که به هر نفر یک نیمه می‌رسید و یک نیمه هم باقی می‌ماند که دوباره می‌بایست تقسیم شود. نصف نان باقیمانده را متوالیاً نصف می‌کردند تا پس از چهار بار، ۱٦ قطعه نان (هر قطعه معادل ۱/۳۲ نان) به دست می‌آمد و به هر کارگر ۱ قطعه می‌دادند و ۷ قطعه باقی می‌ماند. بالاخره هر یک از هفت قسمت باقیمانده را نیز نصف می‌کردند که ۱۴ قطعه (هر قطعه معادل ۱/٦۴ نان) به دست می‌داد و به هر کارگر یک قطعه می‌دادند. بدین ترتیب، هر کارگر سه قطعه نان به اندازه‌های ۱/۲ و ۱/۳۲ و ۱/٦۴ دریافت می‌کرد (و مقدار کمی هم برجای می‌ماند که سهم مرغان هوا بود!)؛ یعنی

$$5/9 \approx 1/2 + 1/32 + 1/64$$

همانطور که در تقسیم بی‌باقیماندهٔ بخش ۱ دیدیم، مصریان ۵۰۰۰ سال پیش هر تقسیمی را تا سقف خطای ۱/٦۴ تقریب می‌زدند. البته ممکن بود تقسیم، قبل از رسیدن به ۱/٦۴، بدون هیچ خطائی پایان پذیرد؛ مثلاً

$$5/8 = 1/2 + 1/8$$

و یا بعد از ۱/٦۴ ادامه یابد ولی متناهی باشد مانند:

$$37/128 = 1/4 + 1/32 + 1/128$$

که البته مصریان ۵۰۰۰ سال پیش، فراتر از ۱/٦۴ نمی‌رفتند و با صرف نظر از لقمه‌های کوچک‌تر از ۱/٦۴ نان، به تقریب زیر قناعت می‌کردند:

$$37/128 \approx 1/4 + 1/32$$

ما نمی‌دانیم که آیا مصریان به پایان ناپذیری بسط‌های دودوئی بعضی از کسرها آگاه بودند یا نبودند؛ ولی می‌دانیم بابلیان که جانشین سومری‌ها شدند از این امر در مورد بسط‌های شصت شصتی آگاه بودند. قوم اخیر برای تقسیم مثلاً ۳۱ بر ۱۰، نخست وارون ۱۰ (یعنی کسر یکین ۱/۱۰) را در مبنای شصت شصتی به صورت ٦ دقیقه (یعنی ٦۰/ ٦) می‌نوشتند و آنگاه ۳۱ را در آن ضرب می‌کردند که می‌شد ۱۸٦ دقیقه، یعنی ۳ درجه و ٦ دقیقه (٦/٦۰+۳). اما اگر به جای ۱۰ عدد ۱۱ بود می‌گفتند ۱۱ وارون ندارد (به زبان ریاضیات امروزی یعنی بسط پایان پذیر ندارد). ولی به هر حال ۱/۱۱ درجه را با تقریب مثلاً ۵ دقیقه و ۲۷ ثانیه و ۱٦ ثالثه محاسبه و حاصل را در ۳۱ ضرب می‌کردند که می‌شد ۲ درجه و ۴۹ دقیقه و ۵ ثانیه و ۱٦ ثالثه. همین دو تقسیم را مصریان اولیه، بدون نگرانی از طول بسط دودوئی، به روش خود پیش می‌رفتند تا به جمله ۱/٦۴ برسند:

$$۳۱/۱۰ \approx ۳ + ۱/۱٦ + ۱/۳۲$$

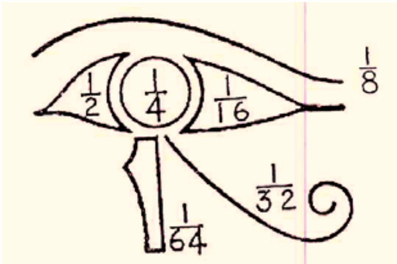
$$۳۱/۱۱ \approx ۲ + ۱/۲ + ۱/۴ + ۱/۱٦$$

این چشم پوشی آنچنان رایج شد که عوام فرض می‌کردند (و به مرور باورشان شد) که مجموع پیمانه‌های ۱/۲ و ۱/۴ و ... و ۱/٦۴ مساوی واحد می‌شود؛ یعنی:

$$۱ = ۱/۲ + ۱/۴ + ۱/۸ + ۱/۱٦ + ۱/۳۲ + ۱/٦۴$$

کاهنان مصری هم که می‌بایست به زبان عوام صحبت کنند، گاهی برای چاشنی کلام خود از این باورها استفاده می‌کردند. به ویژه در یکی از افسانه‌های تعبیه شده برای حفظ اتحاد دو مصر بالا و پائین، از این مطلب هم استفاده شده است. یکی از مشکلات اتحاد دو مصر، تنوع خدایانشان بود که برای حفظ اتحاد، مجبور شدند به بندگی حداقل ۲۰۰۰ خدا تن دردهند. به ویژه اعلام کردند که «ست» خدای اصلی مصر بالا عمو (و همزمان دائی) «خورشید خدا» یا هور [هوروس] خدای اصلی مصر پائین بوده است. (لابد شاعران ایرانی هم که دارا و اسکندر را برادر یکدیگر می‌دانستند، از این ترفندها با اطلاع بودند.) ضمناً واژهٔ «هوروس»، یونانی شده واژهٔ «هور» به‌معنای «خورشید» است که احتمال می‌رود این واژه همراه با پرستش مهر توسط بازرگانان سومری یا جنگجویان میاندورود به مصر رفته باشد. از آنجا که شاهین از همهٔ پرندگان بلند پروازتر بود، مظهر و رابط خورشید خدا محسوب می‌شد و گهگاه جای او را می‌گرفت؛ به ویژه، چشم هور (که چشم یک شاهین است) در داستان کسرهای مصری نقش جالبی بازی می‌کند. کاهنان مصری برای تسکین کینه‌های گذشته، منکر هر گونه جنگی بین مصریان بالا و پائین شدند و همهٔ اختلافات را به گردن خدایان انداختند: در جنگ بین خدایان، «ست» چشم راست «هور» را از حدقه درآورد و به شش قطعه کرد و برای این که کسی نتواند علاجی برای خدای یک چشم پیدا کند، تکه‌های چشم هور را در نیزارهای سراسر نیل پراکنده ساخت. خوشبختانه مصری‌ها هم، مانند اقوام دیگر، یک خدای مقتدر داشتند که هر وقت صلاح می‌دانست در امور خرده ــ خدایان دخالت می‌کرد؛ در اینجا هم به نفع خدای «خوب» وارد ماجرا شد و با پیدا کردن تکه‌های گمشده چشم هور، تندرستی او را به حالت اول برگرداند و وی را پادشاه دو مصر بالا و پائین کرد. اصولاً خورشید خدا یک امر وارداتی بود و برای کسانی که به خط

استوا نزدیک بودند، خدائی بهتر از ماه و ستارگان پیدا نمی‌شد؛ سراسر تاریخ مستند مصر، در نزاع بین ماه (آمون) و خورشید (آتون) می‌گذرد. حتی سومری‌های ساکن «اور» هم که احتمالاً خورشید خدا را در شمال مصر رواج دادند با توجه به زیستگاه داغشان لذتی از خورشید نمی‌بردند مگر این که این نظریه را بپذیریم که آنان آخرین موج انسان‌های آفریقایی بودند که در ۱۳۰ هزار سال گذشته به دنبال مهاجران قبلی به آسیای مرکزی رفتند و اولین قومی بودند که مشکلات یخبندان و فشار جمعیت آنها را وادار به بازگشت کرد و از این رهگذر عشق به مهر (یا خور یا هور) را در ضمیر ناخودآگاهشان به سرزمین‌های جنوب شرقی آسیا و شمال مصر انتقال دادند. کاهنان مصری در کنار داستان «ست» و «هور»، علاوه بر توجیه خدایی فرعون‌ها، دکانی هم برای خودشان باز کردند و قطعات چشم هور (شاهین) را بر یک کاغذ دعا ترسیم می‌کردند تا مردم به بازوی خود ببندند و از چشم زخم و بیماری در امان باشند. یعنی همان طور که خدای خدایان، چشم هور را کامل کرد، تن دارنده این دعا را نیز در کمال تندرستی نگه‌داری کند. ظاهراً این دعا یک چیز کم داشت و آن ریاضیات بود؛ برای جاذبهٔ بیشتر دعا، در کنار هر قطعه از چشم هور، یکی از کسرهای ۱/۲ و ۱/۴ و۱/۸ و ۱/۱٦ و ۱/۳۲ و ۱/٦۴ را هم نوشتند تا ایمان به کمال این شش کسر که مظهر قطعات چشم هور هستند، هر نوع نقص جسمی و روحی را از وجود مؤمنان مجهز به این دعا دور کند (شکل ٦). این داستان به روایت‌های مختلف در پاپیروس‌های مصری ظاهر شده که طی دو هزار سال یا بیشتر مرتباً عوض شده است. این روایت را که چاشنی ریاضی دارد از کتاب ایفراه [۳] برداشته‌ایم.



شکل ٦: چشم هور

ظاهراً کاهن جوانی (چند سال یا چند قرن بعد) به کمال این شش کسر شک می‌کند و با ضرب ٦۴ (مخرج مشترک شش کسر) در دو طرف تساوی عوامانه

$$۱ = ۱/۲ + ۱/۴ + ۱/۸ + ۱/۱٦ + ۱/۳۲ + ۱/٦۴$$

به غلط واضح ٦۳ = ٦۴ می‌رسد. او پی می‌برد که دو طرف تساوی اولیه به اندازهٔ ۱/٦۴ با هم اختلاف داشته‌اند و مورد را به کاهن اعظم گزارش می‌کند. البته کاهن اعظم هم برای رفع نگرانی طلبهٔ جوان، جواب می‌دهد رحمت وسیع خدا ۱/٦۴ کمبود را جبران می‌کند.

پیشرفت‌های سریع فنی و اقتصادی مصر، ریاضی‌دانان را وادار می‌کرد که اولاً خطای محاسبات خود را کمتر کنند و ثانیاً چهار عمل اصلی را به کسرها گسترش دهند. کاهنان هم که خود را با پیشرفت علوم تطبیق می‌دادند، خطای ۱/٦۴ را به انحاء مختلف توجیه کردند؛ مثلاً گفتند ما خودمان از خطای ۱/٦۴ آگاه بودیم و به همین دلیل، مردمک چشم هور را سفید گذاشته بودیم، و یا می‌گفتند در این دنیا هیچ چیزی قرار نیست کامل باشد و ...

برای مطالعهٔ تحولات بعدی کسرهای مصری، لوح‌ها، طومارها و پاپیروس‌های مربوطه را به ترتیب زمانی بررسی می‌کنیم. همهٔ این اسناد متعلق به سال‌های ۲۰۰۰ ق.م. به این طرف هستند که بیش از ده قرن از اتحاد مصر گذشته بود. (اولین بار که مصرهای بالا و پائین متحد شدند حدود ۳۱۰۰ ق.م. بود.)

۴. نیل آرام

گرچه مصریان از همان آغازِ تمدن خود، پایهٔ دهدهی را برای عددنویسی برگزیده بودند، اما تفکر دودوئی بر ضرب و تقسیم عددها و همچنین اجزاء و اضعاف واحدهای اندازه‌گیری آنان غالب بود. با این که مصر پائین (شمالی)، به باور برخی از باستان شناسان، از نظر مذهبی و مهندسی، تأثیر فراوانی از بازرگانان یا مهاجمان میاندورود گرفته بود ولی در ریاضیات از دستگاه شصت شصتی آنان پیروی نکرد. البته ایلام، همسایهٔ دیوار به دیوار سومر نیز که شدیداً تحت تأثیر هنر، ادب و فناوری آنان قرار داشت، هرگز حاضر نشد دستگاه دهدهی خود را رها کند. سومری‌ها به هر دلیلی تجربه‌ای از سال‌های چهار فصل با اختلافات زیاد شب و روز در طول سال داشته‌اند که احتمال می‌رود به سابقهٔ زندگی نیاکانشان در سرزمین‌های سرد و کوهستانی مربوط باشد. (در داستان پر رمز و راز گیل گمِش از سرزمین رویایی سبز و خرمی به نام دیلمان گفتگو می‌شود که برخی آن را نشانی از خاطرات دیرینهٔ سومری‌ها از زندگی در کوه‌های گیلان دانسته و زیگورات‌های کوه مانند سومری را نیز تأییدی بر آن می‌گیرند؛ برخی دیگر دیلمان را جزیره بحرین می‌دانند که کشتی‌های سومری در تاریخی متأخرتر از آن جزیره گذشتند و پس از عبور از دریای سرخ خود را به مصر پائین رساندند تا اولین دودمان خورشید پرست را در آنجا بنیان‌گذاری کنند.) در هر حال، نیاز آنان به تقسیم دایره‌های فلکی به درجه و دقیقه و غیره برای تعیین محل طلوع روزانهٔ خورشید و در نتیجه تعیین روزها و ماه‌ها و فصل‌ها، بسیار بیشتر از مصریانی بوده است که هر روز، خدای مخلوع و تبعیدی مصر بالا، قایق خدای پیروزمند مصر پائین را از کرانهٔ شرقی آسمان به حرکت درمی‌آورد و پس از ۱۲ ساعت پارو زنی بی وقفه، به کرانه‌های غربی آن می‌رساند. لذا تقسیم درجه به ٦۰ دقیقه، و دقیقه به ٦۰ ثانیه و غیره یک نیاز مهم سومری‌ها بود که در ضمن به درک و توانائی آنها در مورد کسرها و نمایش آنها کمک می‌کرد. دستگاه شصت شصتی گرچه دست و پاگیر و پر دردسر بود ولی علاوه بر رفع نیازهای نجومی سومریان، به آنها کمک می‌کرد همه کسرهای متعارفی با مخرج‌های ٦۰ و ۳٦۰۰ و ۲۱٦۰۰۰ و در نتیجه منبع کثیری از کسرهای متعارفی را نمایش دهند. مثلاً کسر ۱/۵ (معادل

کسر ۱۲/۶۰) را با ۱۲ دقیقه، کسر ۳/۵ (معادل ۳۶/۶۰) را با ۳۶ دقیقه، کسر ۱/۸ (معادل ۴۵۰/۳۶۰۰) را با ۷ دقیقه و ۳۰ ثانیه نمایش می‌دادند. در مورد کسری مانند ۱/۷ نیز تا تقریب ۸ دقیقه و ۳۴ ثانیه و ۱۷ ثالثه پیش می‌رفتند و از ۱ ثالثه باقیمانده چشم می‌پوشیدند. بنابراین سومری‌ها با کسر متعارفی مشکلی نداشتند و مسائل را با تقریب حل می‌کردند. اما مصری‌ها و خیلی بیشتر ایلامی‌ها با کسرهای متعارفی مشکل داشتند. در الواح ایلامی به ندرت با کسرها رو به رو می‌شویم و نمادهای وضع شدهٔ آنها برای کسرهای متعارفی ۱/۵ و ۱/۱۰ رهنمودی برای وضع یک نظام کارآمد برای نوشتن همهٔ کسرها نمی‌دهد.

اما مصریان که نیاز چندانی به تقسیمات ریز فلکی نداشتند از طریق دیگری به همین مطلب رسیدند و در واقع وضعی بهتر از سومری‌ها و ایلامی‌ها پیدا کردند. مصری‌ها همان طور که گفتیم قاعدهٔ مشخصی برای نمایش کسرهای پایه ۱/۴ و ۱/۸ و ... و ۱/۶۴ تعیین کردند که همزمان یا (به نظر ما) بعدها همان نماد را به همهٔ کسرهای یکین سرایت دادند. می‌گویند علامت بیضی شکل کسر، در خط هیروگلیف به معنای «[یک] از چند» و با احتمال کمتری به معنای «دهان» است. رابطهٔ بین دهان و کسر را این گونه می‌شود توجیه کرد که مصریان به باور تیت (مصرشناس و مترجم پاپیروس ریند) [۹،۸] به مضرب‌های ۲ و ۱/۲ و ۲/۳ به دید یک «فرمان» نگاه می‌کردند تا یک «کمیت». لذا پس از آن که تصمیم گرفتند نمادگذاری‌های بی قاعده‌ای مانند آنچه برای ۱/۲ و ۱/۴ انجام دادند رها کنند، فرمان کلی تقسیم را به شکل یک دهان نمایش دادند و تعداد تقسیمات را هم زیر «دهان» نوشتند. تصادفاً نماد کسر، به چشم نیز شبیه است و لذا می‌شود فرض کرد که بیضی بالای کسر را از حدقهٔ چشم هور گرفته باشند. حالا معلوم نیست که نماد شکل ۷ برای کسر ۲/۳ چگونه ابداع شده است. اگر در شکل ۷، دو خط قائم را کمی پائین‌تر رسم کنیم نمادی می‌دهد که قاعدتاً باید ۱/۲ خوانده شود، چون ۱/۲ را با همان نماد قدیمی «تاکردن» نمایش می‌دادند، می‌شود احتمال داد که با کمی تغییر در نماد غیر لازم ۱/۲، نمادی برای کسر ۲/۳ که اولین کسر متعارفی دوین (کسر با صورت ۲ و مخرج طبیعی) بود ابداع کردند. اجازه می‌خواهیم یک حدس هم ما بزنیم. در کتاب ایفراه [۳] چیستاهایی از دوره‌های جدیدتر تاریخ مصر وجود دارد که در آنها جواب معما از معادل بودن کسرهای ۱/۳ یا ۲/۳ با ۱ یا ۲ فصل از سال (سه فصلی) مصر به دست می‌آمده است. حدس ما این است که احتمالاً مصریان همزمان با ابداع نماد تاشدن برای عمل نصف کردن یا ابداع × برای عمل چهار قسمت کردن، نمادی هم جهت تقسیم سال به دو دورهٔ آرام و ناآرام نیل ابداع کرده‌اند: یک بیضی کنایه از «گردش سال» و دو زخمک روی بیضی کنایه از «آغاز و پایان دورهٔ آرامش نیل». همان طور که نماد ۱/۲ به معنای عمل نصف کردن است نه مفهوم نصف، یا × به معنای چهار قسمت کردن است نه ربع، نماد شکل ۷ نیز به معنای تقسیم سال به دو دورهٔ چهار ماهه و هشت ماهه باید باشد؛ و چرا این نماد برای ۲/۳ به کار رفته نه ۱/۳، علاقهٔ شدید مصریان به تکهٔ لذیذتر کیک بوده است.

شکل ۷: کسر ۲/۳

هنگام طغیان چهار ماهه نیل، تمام کشتزارها به زیر گل و لای فرو می‌رفت. در آرامش هشت ماهه نیل، مصر را شور کار و تلاش و زندگی فرا می‌گرفت. این دورهٔ هشت ماهه شامل چهار ماه کاشت و چهار ماه برداشت بود. مدارک به دست آمده همگی حاکی از آنند که اهمیت کسر ۲/۳ به مراتب بیشتر از کسر ۱/۳ بوده است و البته باید به مصریانی که چهار ماه از سال را در گل و لای سرد نیل سپری می‌کردند حق داد. برای درک علاقه مصریان به کسر ۲/۳ توجه‌تان را به لوح چوبی اخمیم جلب می‌کنیم که در آن کسر ۱/۳ بر حسب کسر ۲/۳ چنین بیان شده است:

$$۱/۳ = ۱/۴ + ۱/۱۶ + ۱/۶۴ + (۱ + ۲/۳)(۱/۳۲۰)$$

همچنان که در بخش‌های بعد خواهیم دید، در پاپیروس رایند هم هیچ جا ۲/۳ به صورت ۱/۶ + ۱/۲ نوشته نشده است و چنین به نظر می‌رسد که مصریان با «دو سوم از یک کمیت» بیشتر مأنوس بودند تا با یک سوم آن. همانطور که گفتیم اساس ضرب مصریان (با اعداد طبیعی) بر مضرب‌های ۱ و ۲ و ۴ و ... و ۲^n و در مورد کسرها بر اجزای چشم هور یعنی ۱/۲ و ۱/۴ و ۱/۸ و ۱/۱۶ و ۱/۳۲ و ۱/۶۴ استوار بود. آنطور که از عقیدهٔ پیت [۹:۸] بر می‌آید، مضرب ۲/۳ هم به اندازهٔ مضرب ۱/۲ به کار گرفته می‌شده است. همچنان که خواهیم دید، گرچه محاسبهٔ مستقیم یک سوم از یک کمیت (طبیعی یا کسری) کاری ساده‌تر از محاسبهٔ ۲/۳ آن بوده است ولی مصریان بنا به عادت مألوف، نخست ۲/۳ آن عدد را حساب و سپس حاصل را نصف می‌کردند. (این نکته تأکیدی است بر باور پیت به انس ویژهٔ مصریان با فرمان‌های ۲ و ۱/۲ و ۲/۳.) مثلاً نویسندهٔ پاپیروس رایند که در تقسیم ۲ بر ۵ احتیاج به محاسبهٔ ۱/۳ عدد ۵ داشته است، نخست ۲/۳ عدد ۵ را به صورت ۱/۳ + ۳ به دست آورده است. حدس ما این است که ۵ سال را معادل ۱۵ فصل (چهار ماهه) گرفته که دوسومش ۱۰ فصل (معادل سه سال و ۱ فصل) شده است. سپس با نصف کردن جواب اخیر به جواب نهائی ۲/۳ + ۱ یعنی ۱ سال و ۲ فصل رسیده است. (راه ساده و مستقیمی که مصریان به سراغش نرفتند این بود که ۵ سال را ۱۵ فصل و در نتیجه ۱/۳ آن را ۵ فصل بگیرند تا به جواب ۱ سال و ۲ فصل برسند.) در قسمت آخر از مسأله ٦۱ پاپیروس رایند، محاسبهٔ ۲/۳ از هر کسر یکین $۱/n$ (در حالتی که n فرد باشد) با دستور زیر داده شده است:

$$(۲/۳)(۱/n) = ۱/(۲n) + ۱/(۶n)$$

همه این‌ها نشان می‌دهند که کسر ۲/۳ در عمق فرهنگ مصری‌ها نفوذ داشته و در آنان چنان الفتی مستقل از منطق ریاضی برقرار کرده بود که کسر ساده‌ای مثل ۱/۳ را تحت‌الشعاع خود قرار می‌داد.

در قسمت نخست مسألهٔ ٦١ بالا، اثر کسرهای ۲/۳ و ۱/۲ روی چند کسر دیگر به دست آمده است؛ یک جا گفته شده است ۱/۹ از ۲/۳ می‌شود ۱/۵۴ + ۱/۱۸ و بلافاصله ترتیب گفتن را عوض کرده می‌گوید ۱/۹، ۲/۳ آن می‌شود ۱/۵۴ + ۱/۱۸. یک تعبیر این است که مصریان خواسته‌اند تأکید خود را برجابجائی عمل ضرب نمایان سازند. اما باور پیت بر این است که مصریان فقط ۲/۳ و ۱/۲ را به عنوان مضرب می‌پذیرفتند و لذا در ترتیب دوم بیان مسأله، خواسته‌اند اشتباه خود را اصلاح کرده باشند. (یعنی می‌خواهند به دانش‌آموز هشدار دهند که این فرمان‌های ۲/۳ یا ۱/۲ هستند که بر کمیتی مانند ۱/۹ اثر می‌کنند نه بر عکس.) در هر حال همه این نکات، اهمیت ۲/۳ را تأیید می‌کنند و آن را در ردیف ۱/۲ قرار می‌دهند.

در بخش‌های بعدی نمونه‌های دیگری از محاسبه با کسر ۲/۳ را خواهیم دید.

۵. لوح چوبی اخمیم

در این بخش مرحله بینابینی کسرهای مصری را مطالعه می‌کنیم؛ مصریان کسرهای خود را در پایه دودوئی تا ۱/٦۴ بسط می‌دهند ولی متوقف نشده، باقیمانده را بر حسب مجموع کسرهای یکینی از یک واحد جدید نمایش می‌دهند. لوح چوبی اخمیم بین سال‌های ۲۰۰۰ تا ۱۹۵۰ ق.م. نوشته شده و در حفاری‌های شهر اخمیم پیدا شده است. این لوح در موزهٔ قاهره جای دارد و به لوح قاهره نیز معروف است. چوبی بودن لوح شاید به خاطر گران بودن یا رایج نبودن کاغذ در آن سال‌ها باشد. (پاپیروس حدود ۳۰۰۰ ق.م. اختراع شد ولی مسلماً تهیهٔ آن با رنج فراوان همراه بوده است.) در این لوح چوبی، چند کسر متعارفی را با کسرهای چشم هور بسط داده‌اند ولی از آنجا که این لوح برای داروسازان نوشته شده، نتوانسته‌اند از خطای ۱/٦۴ چشم‌پوشی کنند. در این لوح، دو مقیاس مختلف وزن به کار رفته است. یکی هکات واحد رایج وزن و دیگری «رو» که مقدارش برابر با ۱/۳۲۰ هکات بود. (واحد جدید را با ρ نمایش می‌دهیم.) در این لوح دو چیز جالب رو به روی هم قرار گرفته‌اند: یکی کسرهای چشم هور یعنی ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ... تا ۱/٦۴ هکات؛ و دیگری کسرهای پایهٔ دلخواه که فقط در مضرب ρ قرار گرفته‌اند. مثلاً کسر ۱/۳ هکات، با این که یک کسر پایه است، هنوز قابل قبول نیست مگر این که نخست، کسرهای چشم هور آن استخراج شود؛ یعنی می‌بایست بنویسند:

$$۱/۳ = ۱/۴ + ۱/۱٦ + ۱/٦۴ + ۱/۱۹۲$$

که البته کسر پایه ۱/۱۹۲ هکات در سال ۲۰۰۰ ق. م. قابل قبول نبود مگر این که به صورت کسری از ρ نوشته می‌شد؛ یعنی

$$۱/۱۹۲ = (۱ + ۲/۳)\rho$$

در این لوح علاوه بر ۱/۳، کسرهای پایه ۱/۷، ۱/۱۰، ۱/۱۱ و ۱/۱۳ نیز به همین صورت بسط داده شده‌اند. (معلوم نیست چرا از کسرهای ۱/۵ ، ۱/۹ ، ۱/۱۲ و غیره چشم‌پوشی شده است؛

شاید هدف فقط تمرین بوده نه تهیهٔ یک جدول کامل.)

همانطور که می‌بینیم، داروسازان برای کارهای حرفه‌ای خود از وزن بسیار سبک ρ استفاده می‌کردند و به خودشان اجازه می‌دادند که نه تنها از هر کسر پایه دلخواه آن واحد، بلکه از کسر ۲/۳ آن نیز استفاده کنند. (در کرمان ۵۰ سال پیش هم وقتی کار به وزن‌های کمتر از نصف هفت درم می‌کشید، تخصصی می‌شد و به عوام مربوط نمی‌شد؛ از این به بعد پای انواع و اقسام وزنه‌ها مانند مثقال، نخود، گندم، قیراط و غیره به میان می‌آمد که مصرف روزمرگی نداشتند.) مشاهدهٔ دیگر ما این است که مصری ها نه تنها مانند سومری‌ها از طریق اجزاء وزن جدید به انبوه کثیری از کسرها دست یافتند بلکه پا را فراتر گذاشتند؛ کسر سومری معمولاً از ثالثه فراتر نمی‌رفت و به تقریب رضایت می‌داد؛ ولی کسر مصری، در مرحلهٔ دوم از تحول خود، همین که شش بخش هکات را به پایان می‌رساند، آنقدر در اجزاء ρ پیش می‌رفت تا باقیمانده صفر می‌شد. به عنوان مثال کسر ۱۵/۳۱ چنین تفسیر می‌شد:

$$۱۵/۳۱ = ۱/۴ + ۱/۸ + ۱/۱۶ + ۱/۳۲ + [۴ + ۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۱۸۶]\rho$$

در این مرحله از دگرگونی کسرهای مصری، قداست کسرهای چشم هور متزلزل شد و بعدها در اوج دورهٔ کلاسیک مصر (دودمان دوازدهم) و شکوفائی کشاورزی و اقتصاد و مهندسی و هنر و رفاه و روابط بین‌الملل، اجزای چشم خورشید، خود به خود به افسانه‌ها پیوستند و کسرهای پایه، جایگزین آنها شدند.

متأسفانه نمادی که برای ۲/۳ انتخاب کرده بودند به خوبی نماد کسرهای یکین نبود و به زور به کسر دیگری مانند ۳/۴ (شکل ۸) تعمیم داده شد. از دو نماد اخیر به هیچ وجه نمی‌توان نمادی برای کسری مانند ۸/۱۵ استنباط کرد. به نظر ما این نمادگذاری نامناسب، سدی در مقابل رشد مفهوم کسر در مصر باستان شد.

شکل ۸: کسر ۳/۴

۶. تومار چرمین ریاضیات مصری

از این بخش به بعد سندهائی را بررسی می‌کنیم که کسرهای مصری را بدون توجه به کسرهای چشم هور به کسرهای پایه تجزیه می‌کنند. تومار چرمی ریاضیات مصری بین سال‌های ۲۰۰۰ تا ۱۸۵۰ ق.م. نوشته شده و احتمالاً چرمی بودن این سند هم به دلیل رایج نبودن کاغذ بوده است. در این تومار کسرهای پایه بدون مراجعه به واحد اندازه‌گیری ρ قابل قبول شده‌اند و بنابراین یک گام اساسی جدید در درک ریاضیدانان مصری از مفهوم کسر برداشته شده است. هدف نویسنده تومار،

تجزیه یک کسر پایه به مجموع چند کسر پایه متمایز می‌باشد. روش‌های زیر را در این تومار مشاهده می‌کنیم که البته ما صورت کلی‌تری از آنچه در تومار است در اینجا آورده‌ایم و معتقدیم که مؤلف تومار چرمی به این کلیت آگاه بوده است. (در این تومار مقدار m معمولاً ۱ گرفته شده است.)

آ) اگر p و q دو عدد طبیعی باشند، آنگاه کسر متعارفی $m/(qp)$ به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$m/(pq) = m/[q(p+۱)] + m/[pq(p+۱)]$$

حال اگر m یکی از دو عدد ۱ یا ۲ و p عدد فردی بزرگ‌تر از ۱ باشد، دو کسر طرف راست متمایزند و (پس از ساده‌شدن‌های لازم) کسر $m/(pq)$ را به دو کسر پایه متمایز تجزیه می‌کنند. (توجه کنید که $p+۱$ زوج است و با ۲ ساده می‌شود.)

آآ) عدد ۱ را به صورت

$$۱ = ۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۶$$

تجزیه و کسر m/n را در دو طرف تساوی ضرب کنید؛ آنگاه

$$m/n = (m-۱)/n + ۱/(۲n) + ۱/(۳n) + ۱/(۶n).$$

به ویژه اگر m مساوی ۱ یا ۲ گرفته شود، آن‌گاه کسرهای $۱/m$ و $۲/n$ به سه کسر پایه متمایز تجزیه می‌شود. این روش ضمناً نشان می‌دهد که هر کسر پایه را به بینهایت جور می‌توان به صورت کسرهای مصری نمایش داد.

آآآ) روش سوم این که صورت و مخرج کسر متعارفی را در عدد سومی ضرب کنند و از میان مقسوم‌علیه‌های مخرج جدید تعداد متمایزی چنان انتخاب کنند که مجموعشان مساوی صورت جدید شود (البته انتخاب مناسب عدد سوم نقش مهمی بازی می‌کند). آنگاه مجموع چند کسر به دست می‌آید که پس از ساده شدن به کسرهائی پایه تبدیل می‌شوند. مثلاً

$$۵/۷ = ۱۰/۱۴ = (۷+۲+۱)/۱۴ = ۱/۲ + ۱/۷ + ۱/۱۴$$

کاربرد این تجزیه‌ها را در بخش‌های بعدی خواهم دید.

۷. پاپیروس های مسکو و ریند

همانطور که گفتیم، اوج شکوفائی کشاورزی، فناوری، اقتصادی ، هنری و رفاهی مصر باستان در دورهٔ کلاسیک دودمان‌های یازدهم و دوازدهم بود. دودمان یازدهم که حدود ۲۱۳۴ ق. م. رونق گرفته بود، همت خود را به کار بست تا اتحاد از دست رفتهٔ مصر را بر قرار سازد و با اقداماتی مردمی و بین‌المللی نظر دوستی مردمان داخل و خارج کشور را به خود جلب کند. این دودمان در سال ۱۹۹۰ ق. م. با کودتائی صلح آمیز توسط وزیر آن پایان پذیرفت و دودمان دوازدهم آغاز گشت. امنمهت

اول، وزیر دودمان یازدهم و بنیانگذار دودمان دوازدهم با تکیه بر تجربیات قبلی خود، آن روحیه صلح آمیز را ادامه داد و جانشینانش نیز تا سال ۱۸۰۲ ق. م. که دودمان مزبور پایان پذیرفت در این امر به او تأسی جستند. اگر وزارت امنمهت اول را در حدود سال ۲۰۰۰ ق. م. حساب کنیم باید اذعان داشت که مهمترین سندهای ریاضی مصر شامل لوح و تومار یاد شده در بالا و پاپیروس‌هائی که شرح خواهیم داد، همگی در زمان مدیریت افرادی از دودمان دوازدهم تهیه شده‌اند. مدارک به دست آمده از این دوره نشان می‌دهند که برای مدیریت مملکت از روش‌های علمی استفاده می‌شده و به ویژه سرشماری عمومی و ایجاد اداراتی جهت رسیدگی به امور کارگران از ابتکارات خاص این دوره بوده است که نه سابقهٔ قبلی داشت و نه دیگر تکرار شد. در دودمان دوازدهم، امنمهت سوم (۱۸۶۰ تا ۱۸۱۴ ق.م.) پادشاهی به ویژه مردم‌دوست و صلح طلب بود که در زمان خود مالکیت اشراف را محدود و تصدی موروثی مشاغل آنان را منسوخ کرد. تنها دریاچه (شیرین) مصر را با سدسازی و لایروبی کانال‌های فرعی نیل وسعت بخشید و آنقدر زمین کشاورزی به وجود آورد که کوچگران نوبیائی (همسایهٔ جنوبی) و سوریائی (همسایهٔ آسیایی) برای کار و کشاورزی بدان منطقه روی آوردند. به منظور شکرگزاری و همچنین نمود قدرت مصر، دستور داد مجسمه‌های عظیمی از او بسازند که گرچه هزینهٔ زیادی برداشت ولی امروزه، فرزندان او از جیب جهانگردان خارجی بیرون کشیده به خزانه برمی‌گردانند. نکتهٔ مهم این است که امنمهت سوم مدتی را با پدرش به طور شراکتی پادشاهی کرد و مدتی نیز پسرش را در امور پادشاهی شریک خود ساخت. چنین به نظر می‌رسد که پادشاهان دودمان دوازدهم، همهٔ جوانب را مد نظر داشتند تا بتوانند بهترین خدمت را به ملت خود بکنند.

در زمان امنمهت سوم، دو رسالهٔ مهم ریاضی نوشته شد که در یکی از آنها به صراحت نام او آمده است. این پاپیروس که هنوز پیدا نشده، توسط شخصی به نام احمس در سال ۱۶۵۰ ق.م. بازنویسی شد و هم اکنون موجود است و به نام خریدارش پاپیروس ریند نامیده می‌شود. پاپیروس ریند توماری است که ۳۳ سانتی‌متر پهنا و ۳ متر و ۱۹ سانتی‌متر درازا دارد. محتوای آن مشتمل بر ۲ جدول و ۳ کتاب است. در جدول نخست، حاصل تقسیم ۲ بر کلیهٔ عددهای فرد ۳، ۵، ۷، ۹، ... تا ۱۰۱ به صورت کسرهای مصری محاسبه شده‌اند و جدول دوم حاوی تقسیم اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و ۹ بر ۱۰ می‌باشد. کتاب اول دربارهٔ حساب است. کتاب دوم بر سه پاره است که به ترتیب به محاسبهٔ حجم‌ها، مساحت‌ها و شیب‌ها می‌پردازد. کتاب سوم حاوی تعدادی مسألهٔ متفرقه در حساب است. در پایان رساله هم سه پیوست دربارهٔ نمادها و امور دیوانی و گاهشماری آمده است. برای راحتی ارجاع، پاپیروس گمشده زمان امنمهت سوم را با نام پاپیروس امنمهت سوم یاد می‌کنیم به امید آن که روزی پیدا شود. پاپیروس دیگری که به این دوره مربوط می‌شود پاپیروس مسکو نام دارد که تاریخ تقریبی آن سال ۱۸۵۰ ق.م. است و لذا این هم باید به زمان امنمهت سوم مربوط باشد. بهتر است احمس را دقیق‌تر بشناسیم و روشن کنیم چرا گاهی پاپیروس احمس می‌گوییم و گاهی پاپیروس ریند. احمس (به معنای ماه خدا زاده شد) دبیری بود که در حوالی سال ۱۶۵۰ ق.م. می‌زیست و در دربار فرعونی با کنیه آ ــ ئوسر ــ ر (به معنای بسیار تواناست خورشید) کار

می‌کرد. شغل موروثی دبیری، زیر نظر خدای ویژه‌ای به نام «توت» انجام می‌گرفت و دبیران پس از دیدن دوره‌های لازم، حرفهٔ خود را با سوگند نامه آغاز می‌کردند. آنان مقبرهٔ خانوادگی داشتند و تصویرهای نمادین درون مقبره‌شان آنها را به حالت نشسته در مقابل توت نشان می‌دهد که تمام حواسشان متوجه اوست. این توت است که کلمه به کلمه از متن اصلی قرائت می‌کند و دبیر هم بدون هیچ دخل و تصرفی در نسخهٔ جدید وارد می‌کند (شکل ۹). دبیر لازم نبود تخصصی در ریاضی یا پزشکی یا چیز دیگر داشته باشد؛ همین که می‌توانست یکی از خط‌های قدیم مصر را بنویسد و بخواند، بزرگترین هنر را داشته است. هیچ ریاضیدانی از مصر باستان شناخته شده نیست و نوشتن نام دبیر متضمن اعتبار نوشتار بود. هیچ اطلاعی در مورد زندگی و مقبرهٔ احمس در دست نیست مگر این که خودش در مقدمهٔ پاپیروس نوشته است که در سی و سومین سال از سلطنت پادشاه مصرهای بالا و پائین، آ ــ ئوسر ــ ر، به بازنویسی پاپیروسی متعلق به دوران پادشاه مصرهای بالا و پائین، [امنمهت سوم با کنیه] نه ــ مائت ــ ر [به معنای «آن که به حقیقت خورشید متعلق است»] مشغول است. در شکل ۹، آن که در سمت چپ عکس نشسته است احمس نیست ولی دبیری است مثل او که برای افتخار دنیوی و آمرزش اخروی، مقبره‌اش را به مجسمه‌ای از خود در محضر ولی‌نعمتش توت مزین کرده است.

احمس به عنوان یک دبیر سوگند خورده، پاپیروسی را بازنویسی کرد که ۲۰۰ سال از عمرش می‌گذشت و ما با آرزوی پیدا شدنش به پاپیروس امنمهت سوم نامگذاریش کردیم. لذا صرفنظر از هنر نویسندگی و کاغذسازی، امتیازات علمی هر دو پاپیروس (یافت شده و یافت نشده) به ریاضیدان گمنام دربار امنمهت سوم می‌رسد. پاپیروس احمس در حفاری‌های شهر باستانی تبس پیدا و در سال ۱۸۵۸ به هنری ریند باستانشناس انگلیسی فروخته شد. به همین دلیل آن را پاپیروس ریند یا پاپیروس احمس می‌نامند. وراث ریند هم پاپیروس را در سال ۱۸۶۴ به موزهٔ بریتانیا فروختند که البته قسمتی از آن گم بود و بعدها سر از موزهٔ نیویورک درآورد.

۸. حساب کسرهای مصری

پاپیروس مسکو و بیش از آن پاپیروس امنمهت سوم پر از مسائل مربوط به جمع و تفریق و ضرب و تقسیم روی کسرهای مصری هستند. در جمع یا تفریق دو کسر مصری، گرچه خوارزمیک خاصی رعایت نمی‌شد و هیچ صحبت رسمی از مخرج مشترک در میان نبود، اما روح مطلب، ضرب جملات در یک مخرج مشترک و تقسیم مجموع آنها بر مخرج مشترک بود. مثلاً برای یافتن حاصل‌جمع

$$(۳ + ۱/۲ + ۱/۵) + (۲ + ۱/۲ + ۱/۷)$$

همهٔ کسرها را در ۷۰ ضرب می‌کنیم تا مجموع

$$۲۱۰ + ۳۵ + ۱۴ + ۱۴۰ + ۳۵ + ۱۰ = ۴۴۴$$

شکل ۹: توت و دبیر

به دست آید؛ حال کسر ۴۴۴/۷۰ را ساده می‌کنیم تا عدد کسری

$$۴۴۴/۷۰ = ۶۰ + ۲۴/۷۰ = ۶ + ۱۲/۳۵$$

نتیجه شود که البته تقسیم ۱۲ بر ۳۵ با روش آآآ) از بخش ۶ نتیجه زیر را می‌دهد:

$$۱۲/۳۵ = ۳۶/۱۰۵ = (۳۵ + ۱)/۱۰۵ = ۱/۳ + ۱/۱۰۵$$

در مورد ضرب و تقسیم بهتر است اندکی از کارهای انجام شده در پاپیروس‌های مسکو و امنمهت سوم را مطالعه کنیم. پاپیروس مسکو به حل چند مسألهٔ هندسی می‌پردازد که مسألهٔ چهاردهم آن یافتن حجم هرم ناقص است و به اندازهٔ اهرام ثلاثه مصر برای تأمین غرور ملی و فرهنگی مصر ارزشمند است. ما در اینجا به این مسأله کاری نداریم ولی مسائل دیگری از آن دو پاپیروس را بررسی می‌کنیم که با نسبت‌ها سر و کار دارند و به پژوهش ما مربوط می‌شوند.

(آ) **مسألهٔ ششم (پاپیروس مسکو).** ضلع مستطیلی، به مساحت ۱۲ واحد مربع، ۳/۴ ضلع دیگر است، ابعاد مستطیل چیست.

نحوهٔ حل. در این زمان، کسر ۳/۴ هنوز رسمیت نداشت و به صورت ۱/۴ + ۱/۲ نوشته می‌شد. نویسندهٔ پاپیروس تناسب را به خوبی می‌فهمید و می‌دانست که اگر یک ضلع مستطیل را ثابت نگهدارد و ضلع دیگرش را تغییر دهد مساحت مستطیل نیز به همان نسبت تغییر می‌کند. پس

ضلع بزرگ‌تر را ثابت نگه می‌دارد و روی آن یک مربع می‌سازد و می‌داند که مساحت مستطیل ۳/۴ مساحت مربع است. مفهوم وارون یک کسر را هم می‌داند و لذا ۳/۴ را در ذهنش وارون می‌کند که می‌شود ۴/۳ (یعنی عدد مصری ۱/۳ + ۱). حالا می‌داند که مساحت مربع ۴/۳ مساحت مستطیل است و لذا ۱۲ را در کسر ۴/۳ ضرب می‌کند که می‌شود ۱۶. مساحت مربع را جذر می‌گیرد و ضلع به طول ۴ به دست می‌آید. این ضلع را هم در ۳/۴ ضرب می‌کند تا ضلع به طول ۳ به دست آید. در پایان، جهت امتحان جوابها، دو ضلع را در هم ضرب می‌کند و مساحت فرض شده را به دست می‌آورد. عملیات کسری مورد نیاز پاپیروس مسکو در پاپیروس ریند موجود است.

همانطور که گفتیم پاپیروس امنمهت سوم با دو جدول آغاز می‌شود. شیوهٔ نگارش هر فقره از جدول اول این است که نخست صورت مسأله را به صورت تقسیم ۲ بر n اعلام می‌کند؛ نحوهٔ یافتن خارج قسمت را نمی‌گوید ولی معلوم است که آن را به روشی شبیه یکی از روش‌های تومار چرمی ریاضیات مصری به دست آورده است و فقط نتیجه را به اطلاع می‌رساند. (نحوهٔ بیان، بسیار غیر آموزنده است.) آخر سر هم با ضرب خارج قسمت در مخرج، ادعای خود را به اثبات می‌رساند. در این جدول، ۵۰ کسر دوین (کسرهای با صورت ۲ و مخرج فرد) را بر حسب کسرهای پایه تجزیه کرده‌اند که ما فقط سه مثال ۳ ÷ ۲ و ۵ ÷ ۲ و ۷ ÷ ۲ را تشریح خواهیم کرد. در مسألهٔ (ب) اثبات می‌شود که حاصل تقسیم ۲ چیز بین ۳ نفر مساوی ۲/۳ آن چیز است. نحوهٔ اثبات این است که ۲/۳ را در ۳ ضرب می‌کند تا ۲ به دست آید؛ یعنی خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کند تا مقسوم به دست آید.

(ب) تقسیم ۲ بر ۳.

اثبات. [عدد] ۲ را با عملیات روی [عدد] ۳ به‌دست می‌آوریم: ۲/۳ [عدد] ۳ می‌شود [عدد] ۲. ■

توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که کسر ۲/۳ به کسرهای یکین تجزیه نشده و با نماد مخصوص به خودش نوشته شده است (شکل ۷).

(پ) تقسیم ۲ بر ۵.

اثبات. [اولاً] ۱/۳ [عدد] ۵ می‌شود ۲/۳+۱، [ثانیاً] ۱/۱۵ [عدد] ۵ می‌شود ۱/۳. عملیات:

۵	۱
۳ + ۱/۳	۲/۳
۱ + ۲/۳	۱/۳
۱/۳	۱/۱۵

■

در اینجا مصریان می‌دانند که خارج قسمت ۲ بر ۵ مساوی کسر مصری ۱/۵ + ۱/۳ می‌شود و

برای اثبات آن باید عبارت اخیر را در مقسوم‌علیه یعنی ۵ ضرب کنند تا مقسوم یعنی ۲ حاصل شود. ضرب را طبق ضرب عددهای طبیعی در دو ستون انجام می‌دهند. سرستون اول ۱ و سرستون دوم ۵ است. این را هم می‌دانند که در اینجا کاری از دست توان‌های مثبت و منفی ۲ برنمی‌آید، لذا مستقیماً عامل‌های ۱/۱۵ و ۱/۳ را به کار می‌گیرند. اما همان طور که قبلاً گفتیم، مصریان به جای ۱/۳، نخست ۲/۳ را در ۵ ضرب می‌کنند و حاصل را نصف می‌کنند (یعنی سه فرمان «دوبرابر کردن»، «نصف کردن» و « دوسوم کردن» در ضمیر ناخودآگاه مصریان قرار داشتند). شاید هم مصریان جدول‌هایی داشتند که ۲/۳ و ۱/۲ اعداد طبیعی یا کسری را در خود آماده داشتند. معلوم نیست که ۱/۱۵ عدد ۵ را چگونه حساب کرده‌اند. یک احتمال این است که ۵ سال را ۱۵ فصل (چهار ماهه) گرفته‌اند و ۱/۱۵ آن ۱ فصل یعنی ۱/۳ سال شده است. احتمال دیگر این است که همانند مسألهٔ زیر وارون ۵/۱۵ را حساب کرده و عدد حاصل یعنی ۳ را دوباره وارون کرده‌اند.

(ت) تقسیم ۲ بر ۷.

اثبات. [اولاً] ۱/۴ [عدد] ۷ می‌شود ۱/۴ + ۱/۲ + ۱، ثانیاً ۱/۲۸ [عدد] ۷ می‌شود ۱/۴. [عملیات]

۱	۷			
۱/۲	۳ + ۱/۲		۱	۷
۱/۴	۱ + ۱/۲ + ۱/۴		۲	۱۴
۴	۲۸	۱/۴	۴	۲۸

■

توضیح: دو ستون سمت چپ با دو ستون سمت راست هیچ رابطه‌ای ندارند و این‌ها دو جدول جداگانه هستند که ما آنها را جدول‌های چپ و راست می‌نامیم. برای توضیح، نخست روی جدول چپ تمرکز می‌کنیم. حل کنندهٔ مسأله می‌داند که حاصل تقسیم ۲ بر ۷ مساوی کسر مصری ۱/۲۸ + ۱/۴ می‌شود و برای اثبات این مطلب، می‌خواهد خارج قسمت اخیر را در ۷ ضرب کند تا ۲ به دست آید. لذا عددهای ۱ و ۷ را به ترتیب در سر ستون‌های دو ستون جدول چپ می‌نویسد. نصف‌های سطر اول را در سطر دوم می‌نویسد و نصف‌های سطر دوم را در سطر سوم می‌نویسد. تا اینجا حاصل ضرب ۱/۴ در ۷ به دست می‌آید. برای ضرب ۱/۲۸ در ۷ شیوه را تغییر می‌دهد. ظاهراً هیچ تجربهٔ همه‌پسندی در مورد ۲۸ ÷ ۷ ندارد. مثلاً اگر تجربه سال ۴ فصلی را داشت، فوراً می‌گفت ۷ سال ۲۸ فصل می‌شود و لذا ۱/۲۸ عدد ۷ می‌شود یک فصل یعنی ۱/۴ سال. اما نویسندهٔ مصری نه چنین تجربه‌ای دارد و نه نمادی برای کسرهای متعارفی عام دارد که با استفاده از آن، صورت و مخرج کسر را ساده کند. لذا به جای ۲۸ ÷ ۷، وارون آن یعنی ۷ ÷ ۲۸، را حساب می‌کند که ۴ می‌شود. جدول سمت راست عملیات تقسیم ۲۸ بر ۷ را نمایش می‌دهند. احمس برای صرفه‌جویی در کاغذ، دو جدول را کنار هم نوشته است. وی، وارون ۴ را که ۱/۴ می‌شود بین دو

جدول چپ و راست یادداشت می‌کند. (ضمناً به مسامحه احمس در نگذاشتن علامت اختیار در ستون‌های دوم و پنجم توجه کنید.) حق این بود که این ۱/۴ را زیر ستون اول و وارون ۲۸ یعنی ۱/۲۸ را هم زیر ستون دوم در سطر چهارم جدول چپ می‌نوشت. ولی احمس سطر آخر جدول راست را عیناً به سطر آخر جدول چپ منتقل کرده است. اگر من به جای احمس بودم دو جدول چپ و راست را به شکل زیر اصلاح می‌کردم و از ۱/۴ بین دو جدول چشم می‌پوشیدم:

۷	۱		
۷	۱	۳ + ۱/۲	۱/۲
۱۴	۲	۱ + ۱/۲ + ۱/۴	۱/۴
۲۸	۴	۱/۴	۱/۲۸

با این اصلاحات، مجموع ردیف‌های سوم و چهارم اختیار شده از ستون دوم می‌شود ۲، و مجموع عددهای متناظر از ستون اول می‌شود ۱/۲۸ + ۱/۴. در سایر کسرهای دوین، همین استدلال‌ها و عملیات تکرار می‌شود که از آنها صرفنظر می‌کنیم و به بررسی چند مسأله دیگر از پاپیروس امنمهت سوم می‌پردازیم.

(ث) **تقسیم ۱ بر ۱۰.** اثبات. جواب ۱/۱۰ است. برای امتحان ۱۰ را در ۱/۱۰ ضرب می‌کنیم.

۱/۱۰	۱
۱/۵	۲
۱/۳ + ۱/۱۵	۴
۲/۳ + ۱/۱۰ + ۱/۳۰	۸

چون مجموع [عددهای اختیار شده از ستون دوم] مساوی ۱ نان می‌شود پس جواب درست است. ■

قبل از هر چیز توجه کنید که در صورت مسأله صحبت از نان نبود ولی در آخر مسئله، نان به عنوان کمیت مورد تقسیم اعلام می‌شود؛ ظاهراً مثال نان بسیار رایج بوده و برخی از مصرشناسان عقیده دارند که معمولاً در مسأله‌ای که کمیت مورد تقسیم ذکر نمی‌گردید فرض می‌کردند نان است. روش حل مسأله (ث) با روش حل مسأله‌های (پ) و (ت) متفاوت است. احتمال دارد تهیه کننده پاپیروس امنمهت سوم حسابگری حرفه‌ای بوده که تمام جدول‌های مورد نیاز خود را از این طرف و آن طرف جمع آوری کرده و بدون برقراری یک ترتیب منطقی یا یک ارتباط استقرائی بین مسأله‌ها و قضیه‌های گردآوری شده، به تدوین آنها پرداخته است. (شاید هم پاپیروس امنمهت سوم توسط چند دبیر نوشته شده که هر کدام سلیقه خاص خود را داشته‌اند و دویست سال بعد که احمس آن را رونویسی کرده به خود اجازه یکنواخت کردن متن را نداده است.) ضمناً توجه کنید که بین دو مفهوم ۱/۱۰ و خارج قسمت ۱ بر ۱۰ تفاوت قائل می‌شدند. این جدول تقسیمات بر ۱۰ نیز باید زمانی

تهیه شده باشد که هنوز فرمان ۱/۱۰ به اندازهٔ فرمان‌های ۲ و ۱/۲ و ۲/۳ رایج نشده بود و لذا مضرب را ۱۰ گرفته و آن را در ۱/۱۰ ضرب کرده‌اند؛ یادآور می‌شویم که ۱۰ (به صورت ۸ + ۲) مجموع فرمان‌های ۲ برابر کردن و ۸ برابر کردن است.

(ج) تقسیم ۷ بر ۱۰.

اثبات. جواب ۱/۳۰ + ۲/۳ است. برای امتحان ۱۰ را در ۱/۳۰ + ۲/۳ ضرب می‌کنیم.

۲/۳ + ۱/۳	۱
۱ + ۱/۳ + ۱/۱۵	۲\`
۲ + ۲/۳ + ۱/۱۰ + ۱/۳۰	۴
۵ + ۱/۲ + ۱/۱۰	۸\`

[چون مجموع سطرهای دوم و چهارم از ستون راست] مساوی ۱۰ می‌شود پس جواب درست است. ■

با بررسی دو مسألهٔ دیگر ارجاعات خود به پاپیروس امنمهت سوم را پایان می‌دهیم.

(چ) مسألهٔ ۲۲ (پاپیروس ریند). کسر ۱/۳۰ + ۲/۳ را به ۱ کامل کنید. [یعنی کسری بیابید که حاصل جمعش با کسر ۱/۳۰ + ۲/۳ برابر با ۱ شود.]

حل. [عدد] ۳۰ را در ۱/۳۰ + ۲/۳ ضرب کنید تا ۲۱ حاصل شود. [عدد] ۳۰ [به اندازه] ۹ [واحد] از ۲۱ بیشتر است. عدد ۳۰ را [در عددی] ضرب کنید تا ۹ به دست آید:

۳۰	۱
۳	۱/۱۰\`
٦	۱/۵\`

مجموع [عددهای ستون راست از سطرهای اختیار شده] برابر ۹ است. بنابراین باید ۱/۱۰ و ۱/۵ [به کسر مفروض] اضافه شود تا کامل شود. برای اثبات آنها را با هم جمع می‌کنیم؛ یعنی باید ۲/۳ و ۱/۵ و ۱/۱۰ و ۱/۳۰ روی هم مساوی ۱ شوند. برای اثبات، کسرها را در ۳۰ ضرب می‌کنیم می‌شود ۲۰ و ٦ و ۳ و ۱ که [جمعشان] ۳۰ می‌شود. ■

قبلاً گفته بودیم مصری‌ها برای جمع و تفریق از مخرج مشترک استفاده می‌کردند؛ بند (چ) این موضوع را به خوبی آشکار می‌سازد.

(ح) مسأله ٦۱ ـ ب (پاپیروس ریند). جدول ضرب کسرها.

۲/۳ از ۲/۳ می‌شود ۱/۹ + ۱/۳.

$\frac{1}{3}$ از ۲/۳ می‌شود ۱/۱۸ + ۱/٦.

۱/۹ از ۲/۳ می‌شود ۱/۵۴ + ۱/۱۸؛

[به عبارت دیگر] ۱/۹، ۲/۳ آن می‌شود ۱/۵۴ + ۱/۱۸،
۱/۵، ۱/۴ آن می‌شود ۱/۲۰. ■

از همهٔ این مسأله‌ها آشکار است که مفهوم خارج قسمت $a:b$ عددی مانند c است که $a = bc$. همچنین از بند (ث) چنین برمی‌آید که تقسیم ۱ بر n و کسر $1/n$ دو مفهوم متفاوت دارند که معادل بودنشان باید اثبات شود. به هر حال مصریان پذیرفته بودند که $1/m$ از $1/n$ با حاصل ضرب $1/m$ در $1/n$ برابر است و هر دو عبارت مقدار مشترک $1/(mn)$ دارند. تقریباً همهٔ عملیاتی که امروزه روی کسرها انجام می‌شود، مصری‌ها هم به نحوی انجام می‌دادند فقط می‌بایست مواظب باشند که چند برابر کسرهای پایه را نهایتاً به صورت مجموعی از چند کسر پایه متمایز بنویسند.

۹. مصر و یونان

یونانیان، رقم‌ها و دستگاه عددنویسی‌شان را از نیاکانشان در آناتولی و کرت به ارث بردند و تا قرن نهم ق.م.، خردمندانشان با مسافرت به سرزمین‌های ایران و بابل و مصر داستان‌های مذهبی لازم را برای خود شبیه‌سازی کرده بودند. (اصولا دیدگاه نسبتاً غالبی وجود دارد که همه دین‌های چند خدائی، پایه‌های دین خود را از سومریان برگرفته‌اند و برخی از صاحب نظران چنان به افراط می‌روند که این دیدگاه را به دین قومی مانند مایا نیز که آن سوی دنیا می‌زیست، تعمیم می‌دهند.) از این رهگذر، ذخیره‌ای از ریاضیات مورد نیاز خود را مانند هندسه، نجوم، حساب و به ویژه کسرها را نیز به سرزمین‌های یونانی‌نشین دو طرف تنگه بسفر منتقل کردند. طبیعی است که آن داستان‌های بچه‌گانه جنگ خدایان، نمی‌توانستند چنگی به دل اقوام آزاداندیشی بزنند که تنوع قدرت‌های مستقل منطقه، پناهگاه‌هائی هر چند گذرا، برای دگراندیشان فراهم ساخته بود. مدتی هم صاحبان مکاتبشان گفته‌های بزرگانی همچون زردشت را پشتوانه ادعاهای خود قرار می‌دادند ولی اگر دلیل کم می‌آوردند، روایاتی از این بزرگان جعل می‌کردند که بویس [٦] فهرستی از این روایات جعلی را تحت عنوان طنزآمیز چنین نگفت زردشت! گردآوری کرده است. بالأخره یک روز هم آمدند و گفتند این چه کاریست؛ بیائید خودمان فکر کنیم! و این گونه بود که فلسفه شروع شد و به دنبال آن، نظام استدلال در همه چیز رخنه کرد. مطالعه رخنه کردن استدلال در علوم مختلف کار ما نیست ولی ما می‌توانیم با اتفاقاتی که در ریاضیات افتاد آن را شبیه‌سازی کنیم.

اولین اثبات ریاضی که در تاریخ ثبت شده است مربوط به قضیهٔ مشهور تالس است. تالس می‌خواست این باور ریاضی‌دانان مصری و بابلی را ثابت کند که اگر از نقطه‌ای واقع بر یک ضلع مثلث، خطی به موازات ضلع دیگر آن مثلث رسم شود، ضلع سوم را نیز به نسبت قطعات متناظر روی ضلع اول قطع می‌کند؛ عکس این قضیه هم درست است و روی هم قضیهٔ مشهور تالس را درست می‌کنند. چون این قضیه و اثباتش به موضوع مقالهٔ ما مربوط می‌شود، به جزئیات آن وارد می‌شویم. حالت ساده‌ای از این قضیه این است که خط موازی، ضلع اول را نصف کند. اولین پرسش ممکن این است که آیا هر پاره‌خط یک وسط دارد؟ ظاهراً یونانیان در این موضوع شکی نداشتند و همان

طور که مصریان و سومریان (و بابلیان) نصف را بدون دلیل پذیرفته بودند، آنها هم پذیرفتند. (چیزی را که اجماع می‌پذیرفت بدیهی تلقی می‌شد و اثبات نمی‌خواست.) اثبات تالس در دست ما نیست؛ سه قرن بعد از او، اثباتی از قضیهٔ تالس در کتاب اقلیدس داده شده است. ظاهراً اقلیدس برای فرار از بحث اعداد گنگ و گویا، به مفهوم مساحت متوسل شده و از این قضیه استفاده کرده است که اگر اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌هایشان مساوی نسبت قاعده‌هایشان است.

مثلث ABC را بگیرید و از نقطهٔ دلخواه D روی AB خطی به موازات BC رسم کنید تا AC را در E قطع کند. (اگر قطع نکند از C دو خط به موازات یک خط رسم شده است که در زمان تالس، بدیهیات را نقض می‌کرد و در زمان اقلیدس، اصول موضوعه هندسه را.) مثلث‌های BDE و CDE مساحت‌های مساوی دارند، بنابراین اگر $area(XYZ)$ مساحت مثلث XYZ باشد، آنگاه

$$AD/DB = area(ADE)/area(DBE) = area(ADE)/area(DCE) = AE/EC$$

و بدین ترتیب یک طرف قضیه به اثبات می‌رسد. استفاده از مساحت یک امر پیشرفته است و همان طور که خواهیم دید یکی دو قرن بعد از تالس برای تعریف ضرب عددهای گنگ وارد جبر شد. در زمان تالس فرض بر این بود که اندازهٔ هر پاره خط گویا است و لذا نسبتی مانند AD/DB، نهایتاً به شکل کسری مانند m/n خلاصه می‌شد و در نتیجه، پاره خط ثالثی یافت می‌شد که درست n بار در DB و m بار در AD می‌گنجید. با این فرض، $m+n$ خط موازی یافت می‌شد که پاره خط AD را به m و پاره خط DB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کرد. می‌مانست نشان دهند که این خط‌ها روی ضلع AC هم همین‌کار را انجام می‌دادند. بدین ترتیب، قضیه به حالت ساده‌اش که نقطهٔ D وسط AB قرار داشت تقلیل می‌یافت و اثباتش به جای استفاده از تشابه مثلث‌ها، با استفاده از انطباق مثلث‌ها به دست می‌آمد و عددهای گنگ و گویا در این قسمت از اثبات نقشی نداشتند. عددهای گویا پایهٔ دین و مکتب فیثاغورس را در قرن‌های ششم و پنجم ق.م. تشکیل می‌دادند و باور آنان بر این بود که همه چیز از عددهای طبیعی به دست آمده است. (هیچ کس نمی‌داند که این مطالب چگونه به فیثاغورس وحی شد و ظاهراً کسی از همعصران وی نیز متعرض اثبات نشد.) یونانیان نسبت m/n را به صورت m^n نمایش می‌دادند ولی معلوم نیست چرا از آن نماد در انجام محاسبات روی کسرها استفاده‌ای نکردند و همچنان به روش‌های سومری یا مصری ادامه دادند.

اگر ما با پیروی از فیثاغورس، اعتقاد داشته باشیم که جذر ۲ عددی گویا است هیچ راهی برای یافتن صورت و مخرج آن نداریم مگر آن که تقریب زدن را آن قدر ادامه دهیم تا شاید به باقی‌مانده صفر برسیم؛ ولی یکی از شاگردان شکاک فیثاغورس مسأله را حل شده فرض کرد و به تناقضی رسید که مکتب فیثاغورس را زیر و زبر کرد. او گفت اگر (خدا ناکرده) جذر ۲ به صورت کسر ساده شده m/n می‌بود، پس عدد ۲ هم به صورت کسر ساده شده $m^۲/n^۲$ درمی‌آمد و در آن صورت m می‌بایست به صورت $۲k$ (زوج) باشد. در نتیجه $۲ = n^۲/k^۲$، یعنی n هم می‌بایست زوج باشد که تناقض بود. چون این تناقض به نتیجه کفرآمیز گنگ بودن جذر ۲ می‌رسید، پس می‌بایست پنهان بماند! ولی نماند.

ریاضیدانان یونانی بعد از فیثاغورس راهی برای توجیه عددهای گنگ ندیدند مگر آن که عددها را، اعم از گنگ یا گویا، به صورت پاره خطهایی در صفحه نمایش دهند. جمع و تفریق عددها را با خطکش و پرگار انجام می‌دادند و ضرب دو عدد را هم مساحت مستطیلی می‌گرفتند که طول و عرضش برابر با آن دو عدد بود. دستگاهی که نتواند حاصل ضرب‌هایش را در درون خود جا دهد عاقبت خوشی ندارد. این مساحت‌ها را نمی‌توانستند با هم جمع کنند، زیرا می‌بایست به ازای هر دو مستطیل مفروض، مستطیلی پیدا کنند که مساحتش به طور طبیعی مجموع مساحت‌های دو مستطیل مفروض را نمایش دهد. اگر بعدهای مستطیل اول a و b و بعدهای مستطیل دوم c و d و یک بعد مستطیل مجهول x باشند، آنگاه برای یافتن بعد دیگر مستطیل مجهول، باید تقسیم مساحت بر طول را تعریف کرد که به نظر می‌رسد هم از خیر جمع دو مساحت گذشتند و هم از خیر تقسیم مساحت بر طول. (البته امروزه ما می‌توانیم با استفاده از قوت نقطهٔ نسبت به دایره، حاصلضرب دو پاره خط را به صورت یک پاره خط تعریف کنیم؛ چنین به نظر می‌رسد که در فاصلهٔ زمانی بین فیثاغورس و افلاطون یا هندسه به پیشرفت کافی نرسیده بود و یا پیچیدگی‌هایی به وجود می‌آمد که به مفهوم ساده‌تر مساحت پناه بردند.) در هر حال، یونانیان نتوانستند از نسبت چشم بپوشند چون تمامی زیبایی‌های هندسه و موسیقی و طبیعت را از دست می‌دادند. در تقسیم، به عنوان عکس عمل ضرب، مقسوم مساحت بود و مقسوم علیه طول؛ خارج قسمت نیز می‌بایست طول باشد تا این که طبق تعریف مصریان، حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه بتواند مساوی مقسوم گردد. اما در نسبت بین دو کمیت، هر دو می‌بایست از یک جنس باشند ولی امکان داشت که نسبت دو طول با نسبت دو مساحت یا نسبت دو وزن برابر باشد. یونانیان متعرض تعریف و ماهیت نسبت نشدند ولی درک کرده بودند که نسبت دو کمیت همجنس، باید ماهیتی مطلق و مستقل از جنسیت آن دو کمیت داشته باشد. مهمترین مشغولیت ذهنی آنان این بود که چگونه برابری دو نسبت را تعریف کنند. اگر چهار کمیت دخیل در تناسب همجنس بودند، می‌توانستند با استفاده از قاعدهٔ طرفین ــ وسطین درستی آن را محقق سازند؛ ولی در حالتی که جنسیت دو کمیت اول با جنسیت دو کمیت دوم متفاوت بود، این کار بی‌معنی بود. آنان، چنان درگیر تعریف تناسب شدند که چهار عمل اصلی روی نسبت‌ها را فراموش کردند؛ شاید هم نسبت‌ها، زیبایی‌های ذاتی طبیعت بودند که فقط برای دیدن آفریده شده بودند نه برای دستکاری! مثل نسبت طلائی، نت موسیقی، شیب تپه، .... یونانیان نسبت را همان طور که بود پذیرفتند: یعنی یک جفت مرتب از دو کمیت همجنس. حال زبانی باید ابداع کرد که با آن برابری نسبت مساحت‌های دو مثلث هم قاعده را با نسبت ارتفاع‌های آن دو مثلث بیان کند؛ اصولاً برابری دو نسبت یعنی چه؟

یک قرن طول کشید تا به همت افلاتون و با نبوغ ائودوکسوس مفهوم برابری دو نسبت راست و ریست شد؛ در حقیقت فلاسفه آن چنان خسته شده بودند که به هر تعریف نیم‌بندی هم قانع می‌شدند! این را هم بگوئیم که اگر فشار فلاسفه نبود، نبوغ ائودوکسوس در جهت‌های مفیدتری به کار می‌افتاد، ارشمیدس‌های بعد از او به قله‌های رفیع‌تری دست می‌یافتند، دانش‌های یونانی مردمی‌تر و کارآتر می‌شدند، و اوباش اسکندریه جرأت جسارت به آخرین بازمانده‌های مکتب یونانی

و سوزاندن کتابخانه آن را پیدا نمی‌کردند.

ائودوکسوس صد سالی جلوتر از اقلیدس می‌زیست و شاید با اثباتی که برای قضیهٔ تالس در کتاب اقلیدس داده شد آشنا نبود. فرض کنید ائودوکسوس با اثبات غیراقلیدسی قضیهٔ تالس آشنا بود. احتمالاً عدد طبیعی n را به دلخواه می‌گرفت و پاره خط DB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کرد. پاره خط DB/n را پیمانهٔ جدیدی می‌گرفت و با این پیمانه و با شروع از نقطهٔ D، پاره خط AD را m بار درمی‌نوردید که m هم عدد طبیعی دلخواهی بود. یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتاد: یا به A نمی‌رسید، یا دقیقاً بر A منطبق می‌شد و یا از آن می‌گذشت؛ یعنی

$$(i)\ \ m(DB/n) < AD$$
$$(ii)\ \ m(DB/n) = AD$$
$$(iii)\ \ m(DB/n) > AD$$

(توجه کنید که ضرب یک عدد طبیعی m در یک کمیت دلخواه a را با جمع m باره $a+a+\ldots+a$ تعبیر می‌کردند و لذا جنس کمیت تغییر نمی‌کرد؛ همین طور تقسیم یک کمیت به n جزء مساوی نیز از بدیهیات بود که از مصریان و سومریان به ارث رسیده بود.) بدین ترتیب بر ضلع AB یا امتداد آن $m+n$ نقطه با فاصله‌های مساوی به دست می‌آمد. اگر از آن نقاط خطوطی به موازات BC رسم می‌شد، بنا به حالت ساده قضیهٔ تالس، $m+n$ نقطه با فاصله‌های مساوی بر ضلع AC یا امتداد آن به‌دست می‌آمد که اولاً EC را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و ثانیاً متناظر به سه حالت بالا، سه حالت زیر اتفاق می‌افتاد:

$$(I)\ \ m(EC/n) < AC$$
$$(II)\ \ m(EC/n) = AC$$
$$(III)\ \ m(EC/n) > AC$$

اصلی به نام ائودوکسوس ـ ارشمیدس وجود دارد که می‌گوید به ازای هر دو کمیت a و b یک عدد m یافت می‌شود که $a < mb$ و برای آن زمان‌ها بدیهی بود که m را می‌شد کمینه گرفت. (امروز ما این کمینگی را از اصل کمال میدان عددهای حقیقی یا از اصل خوش ترتیبی مجموعه عددهای طبیعی نتیجه می‌گیریم.) لذا برای هر عدد طبیعی n، یک عدد طبیعی m وجود داشت که

$$(m-1)(BD/n) \leq AD < m(BD/n) \qquad (1)$$

و در نتیجه

$$(m-1)(EC/n) \leq AE < m(EC/n) \qquad (2)$$

با ضرب جمله‌های نامساوی (۱) در EC و جمله‌های (۲) در BD نتیجه می‌شد که

$$n|AD.EC - AE.BD| < BD.EC \quad \forall n. \qquad (3)$$

چون n عدد طبیعی دلخواهی بود پس بنا به اصل ائودوکسوس ـ ارشمیدس،

$$AD.EC = AC.BD \qquad (۴)$$

و این همان چیزی بود که در حساب فیثاغورسی تناسب $AD/DB = AE/EC$ را برقرار می‌کرد. بدین ترتیب یک طرف قضیهٔ تالس به اثبات می‌رسد. آنچه ما را در اثبات (فرضی) ائودوکسوس، به تساوی دو نسبت رساند قاعدهٔ مشهور طرفین ــ وسطین کردن بود؛ اگر هر چهار کمیت از جنس طول بودند، یونانیان مشکلی با امر تناسب نداشتند و تناسب را با قاعدهٔ طرفین ــ وسطین (۴) تعریف می‌کردند. همانطور که قبلاً هم گفتیم مشکل آنها وقتی بود که می‌خواستند نسبت دو کمیت همجنس (مانند مساحت‌های دو مثلث هم قاعده) را با نسبت دو کمیت همجنس دیگر (مانند ارتفاع‌های آن دو مثلث) بسنجند. (هر چیزی را که نمی‌شد در هر چیزی ضرب کرد؛ به فرض که مساحت را در طول ضرب کردیم و حجم شد، بعد چی؟ ضرب حجم در مساحت چی؟) من مطمئنم که ائودوکسوس هم مانند خلف خود ارشمیدس از عددهای گنگ و تقریب آنها واهمه‌ای نداشت و ضرب و تقسیم کمیت‌ها را به صورت حسابی می‌دید نه هندسی؛ فقط به ملاحظه فلاسفه سعی می‌کرد به زبان مورد قبول آنها صحبت کند. ائودوکسوس، برابری (۴) را برای تعریف تناسب مناسب می‌دید ولی می‌بایست آن را ترجمه کند. نامساوی‌های (۱) و (۲)، همان طور که ما امروز می‌بینیم، از نظر ائودوکسوس منجم با (۴) معادل بودند. ولی ائودوکسوس یونانی ریاضی‌دان در ضمیر ناخودآگاهش از به کار بردن اصل خوش ترتیبی حساس اکراه می‌کند و برای پرهیز از هر گونه مجادله، گامی عقب‌تر نهاده و هم ارزی (۴) را با همزمانی بی درد سر دستگاه (iii)-(i) با دستگاه (III)-(I) مورد استفاده قرار می‌دهد. اکنون کمیت‌ها از هر جنسی باشند، در نوشتن نامساوی‌های مزبور اشکالی پیدا نمی‌شود و لذا ائودوکسوس تعریف زیر را برای تناسب $a/b = c/d$ ارائه می‌کند:
اگر a و b دو کمیت همجنس و c و d نیز دو کمیت همجنس دیگر باشند، نسبت a به b برابر با نسبت c به d است هرگاه گزاره‌های زیر به ازای همهٔ عددهای طبیعی m و n برقرار باشند:

$mb < na$ اگر و تنها اگر $md < nc$
$mb = na$ اگر و تنها اگر $md = nc$
$mb > na$ اگر و تنها اگر $md > nc$

بدین ترتیب، مفهوم نسبت، هویتی پیدا کرد و فلاسفه را از نگرانی بیرون آورد؛ ولی نسبت‌ها و کسرها راه خود را از هم جدا کردند تا هزار سال بعد ریاضی‌دانان اسلامی آنها را آشتی دهند. هم ائودوکسوس، منجم ریاضی‌دان، و هم ارسطو، سیاستمدار منطق‌دان، علی‌رغم خدمات مؤثری که به آکادمی افلاتون کردند، تاب ادامه همکاری با آکادمی را نیاوردند و سرانجام، در خارج از آتن، مکتب‌های فکری جدیدی برای شاگردان خود باز کردند. منجمان و مهندسان (اعم از یونانی و غیر یونانی)، بی‌توجه به جنگ و دعوای خدایان فلسفه، همچنان به استفاده از کسرهای مصری یا سومری (بابلی) ادامه می‌دادند و از گنگ بودن یا گویا بودن اعداد حقیقی هراسی نداشتند. برای

اینان عدد «پی» همان ماهیت را داشت که عدد ۱ داشت با این تفاوت که «پی» رخ نمی‌نمود و هر جا که حضورش لازم می‌شد، بستگی به اهمیت کار، یکی از نزدیکان را به جای خود می‌فرستاد؛ اوائل ۳ را می‌فرستاد، برای بابلی‌ها ۲۵/۸، برای مصری‌های هزارهٔ دوم ق.م. ۲۵۶/۸۱، برای ارشمیدس قرن سوم ق.م. ۲۲/۷. این عدد آخری برای همهٔ نیازهای روزمره کافی بود؛ به قول کاشانی قرن پانزدهم (بعد از میلاد)، اگر ارشمیدس می‌خواست دور زمین را حساب کند ۵ فرسنگ خطا داشت و من (کاشانی) می‌خواهم عدد «پی» را چنان تقریب بزنم که خطایم در محاسبه استوای کره‌ای ششصد هزار برابر زمین از قطر موی اسب کمتر باشد. عدد «پی» را البته یا به صورت کسر مصری می‌نوشتند ویا در دستگاه شصت شصتی. ریاضی‌دانانی هم مانند ارشمیدس، همانند منجمان، کسرهای خود را در دستگاه شصت شصتی می‌نوشتند و تقریب اعدادی مانند پی یا جذر ۲ را وجهه همت خود قرار داده بودند. به هر حال افلاتونیان رغبتی به نوشتن اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک نشان نمی‌دادند و به جنبهٔ نظری ریاضیات بیشتر اهمیت می‌دادند. به همین دلیل هم تلاشی در جهت اعتلای دستگاه عددنویسی خود برای بهتر نوشتن عددهای بزرگ یا کسرها به خرج نمی‌دادند. این روزها تا بیش از یک ترلیون رقم از بسط دهدهی عدد پی را می‌شناسیم ولی به قول کاشانی، فقط خدا است که مقدار واقعی پی را می‌داند، یعنی تا آنجا که به ما بندگان خدا مربوط می‌شود عدد پی گنگ است و هیچ گاه راز خود را به ما نخواهد گفت.

دلیل دیگر بی‌علاقگی افلاتونیان به کسرهای مصری یا شصت شصتی، ناممکن بودن بسط متناهی یک عدد گویای دلخواه در هر یک از دو روش بود. همان طور که گفتیم بابلی‌ها کاملاً آگاه بودند که کسری مانند ۱/۱۳ را نمی‌توان با بسط متناهی شصت شصتی نمایش داد. در مورد نوشتن یک عدد گویای دلخواه به شکل کسرهای مصری نیز، یونانیان می‌بایست حدود ۱۵۰۰ سال صبر کنند تا ریاضی‌دانان اروپائی امکانش را به اثبات برسانند.

همان طور که دیدیم، ائودوکسوس تعریفی برای نسبت‌ها داد که گرچه برای کارهای نظری بسیار مفید و مناسب بود ولی نه به درد عددنویسی می‌خورد و نه به درد محاسبه. در کتاب اقلیدس، روش معروف نردبانی داده شده است که علاوه بر یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی، یک دنبالهٔ متناهی از عددهای طبیعی به دست می‌دهد که فقط به نسبت آن دو عدد بستگی دارد. مثلاً به روش نردبانی یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۳۵ و ۱۰ توجه کرده آن را با روش نظیر برای مقسوم علیه مشترک ۷۰ و ۲۰ مقایسه کنید.

	۳	۲
۳۵	۱۰	۵
۵	۰	

	۳	۲
۷۰	۲۰	۱۰
۱۰	۰	

همان طور که می‌بینید در بالای هر دو جدول یک دنبالهٔ عددی ۳ و ۲ تکرار شده است. این دنباله

۳ و ۲ در بالای جدول روش نردبانی هر دو عدد طبیعی دیگری هم که متناسب با ۳۵ و ۱۰ باشند ظاهر خواهد شد و چنین به نظر می‌رسد که یونانیان خیلی قبل از اقلیدس به درستی این قضیه برای نسبت‌ها واقف بودند. ضمناً ارتباط بین این دنباله و کسرهای مسلسل مربوط به نسبت‌های ۷/۲ و ۲/۷ از رابطه‌های زیر دیده می‌شود:

$$۳۵/۱۰ = ۱۴/۴ = ۷/۲ = ۳ + ۱/۲$$

یا

$$۱۰/۳۵ = ۴/۱۴ = ۲/۷ = ۱ + (۳ + ۱/۲)$$

اقلیدس (قرن سوم ق.م.)، دنباله‌ای را که در بالای جدول روش نردبانی ظاهر می‌شد به عنوان تعریفی از نسبت دو عدد طبیعی گرفت و بعدها، ماهانی (قرن نهم میلادی) با ترکیب این کار اقلیدس با کارهایی از زمان افلاتون، تعریف ملموسی به شرح زیر برای نسبت دو کمیت مفروض ارائه کرد. در تعریف زیر منظور از $[a/b]$ بزرگترین عدد صحیح نامنفی است که در شرط $nb \leq a$ صدق کند؛ در این صورت $a = nb + c$ که $۰ \leq c < b$.

دو کمیت دلخواه a و b را در نظر بگیرید و فرض کنید $a \geq b$. عددهای طبیعی p_n و کمیت‌های q_n را (تا جائی که امکان داشته باشد) به شرح زیر تعریف کنید:

$$q_۰ = a, q_۱ = b, p_{n-۱} = [q_n/q_{n-۱}], q_{n-۱} = p_{n-۱}q_n + q_{n+۱} (n = ۱, ۲, ۳ \cdots).$$

ماهانی (احتمالاً به توصیهٔ ثابت بن قره)، دنباله p_n را نمایشی از نسبت a به b گرفت. امروزه، این دنباله در نمایش کسرهای a/b و b/a به صورت کسرهای مسلسل زیر شرکت می‌کند:

$$a/b = p_۰ + ۱(p_۱ + ۱/(p_۲ + ۱/(p_۳ + \ldots))),$$
$$b/a = ۱/(p_۰ + ۱/(p_۱ + ۱/(p_۲ + ۱/(p_۳ + \cdots))))$$

که معمولاً با نمادهای زیر هم نمایش داده می‌شوند:

$$a/b = [p_۰, p_۱, p_۲, p_۳, \ldots],$$
$$b/a = [۰, (p_۰, p_۱, p_۲, p_۳, \cdots].$$

این دنباله آن طور که ما تعریف کردیم یکتا است و اگر کمیت‌های a و b عددهای طبیعی باشند، دنباله را پایانی است. اگر حاصل a/b گنگ باشد، دنباله را پایانی نخواهد بود. این دنباله‌ها، از هر لحاظ در چارچوب فکری یونانی ماب‌هایی همچون ماهانی و ثابت بن قره قرار داشتند مگر از لحاظ پایان ناپذیری که ماهانی سد روانی آن را شکست. سؤالی که مطرح می‌شود این است که چرا ماهانی کار را یک سره نکرد و به رواج بسط شصت شصتی عددهای گنگ و گویا نپرداخت. جواب این است که یونانیان دلخوری دیگری هم در مورد بسط شصت شصتی از بابلی‌ها به ارث برده بودند و

آن تبعیض بین عددهای گویا بود؛ مثلاً کسر ۱/۱۲ دارای بسط یک جمله‌ای ۵/۶۰ است در حالی که کسر ۱/۱۱ هیچ بسط متناهیی ندارد. (به قول بابلی‌ها، ۱۱ وارون ندارد.) ماهانی نمی‌توانست خود را به سادگی از تفکر یونانی ماب پیش کسوتانی همچون خاندان برمکی، پسران موسی شاکر خوارزمی و دوست حرانی‌اش ثابت بن قره در دارالحکمه بغداد رها سازد. البته ریاضی‌دانی مانند محمدبن موسی خوارزمی هم در همان دارالحکمه خدمت می‌کرد که فکری آزاد داشت و ریاضیات شرق و غرب را چنان در هم می‌آمیخت که بتواند آن را همگانی سازد. خوارزمی، در کارهای نجومی مأمون، شرکت جست ولی از دل آنها یک کتاب جغرافی کاربردی درآورد. زیج‌های هندی و ایرانی و یونانی را مطالعه کرد ولی خود زیجی ترتیب داد که ستون‌ها (یا پارامترهایش) برگرفته از زیج‌های گوناگون بود. نام خوارزمی برای این ماندگار شد که تعصب کلاسیک ریاضیات یونانی را کنار گذاشت و به کاربردهای ملموس توجه کرد. وی از زیجی که هیأت هندی با خود برای منصور عباسی به ارمغان آورده بود، ده رقم هندیان و عددنویسی آنان را فرا گرفت و باب جدیدی در محاسبات به روی همعصران خود و نسلهای بعدی گشود و به حق اصطلاح الگوریتم (خوارزمیک) را برای جاودانگی نام خود ذخیره کرد. کار خوارزمی همراه با شهامت ماهانی، سرانجام راه را برای کسرهای متعارفی و دهدهی به شکلی که امروز با آنها سروکار داریم باز کرد و در سال‌های دههٔ ۱۴۲۰ میلادی که کاشانی مفتاح‌الحسابش را به الغ بیگ تقدیم می‌کرد تمایزی بین برخورد با اعداد گنگ و گویا و نسبت‌ها باقی نمانده بود. دیگر کسی مجبور نبود عدد حقیقی را پاره خط، حاصل ضربشان را مساحت و نسبتشان را عدد مطلق بگیرد. همهٔ این عملیات در یک دستگاه عددهای حقیقی (نامنفی) انجام می‌گرفت. البته اروپائیان تا سال ۱۲۰۰ و چه بسا ۱۵۰۰ میلادی در مقابل حساب هندی مقاومت می‌کردند و تا پذیرش آن، همچنان به استفاده از چرتکه و کسرهای مصری ادامه می‌دادند. ولی کم کم، کسر مصری به تجملات فکری ریاضی‌دانان پیوست و بسط شصت شصتی هم جای خود را به بسط مقتصدانه دهدهی داد.

۱۰. یادداشت‌های پراکنده

بخش ۱ (پیشگفتار)

آ. هیچ کتابی در تاریخ ریاضیات عصر عتیق نوشته نمی‌شود مگر این که در فصل مربوط به تاریخ ریاضیات مصر، اشاره‌ای نیز به کسرهای مصری داشته باشد. با وجود این صفحات ۱۶۸ و ۱۶۹ کتاب ایفراه [۳] را به عنوان یک مرجع جالب برای کسرهای مصری و صفحات ۱۵۱ و ۱۵۳ آن را برای کسرهای سومری ــ بابلی معرفی می‌کنیم. بسیاری از مطالب استفاده شده در این مقاله برگرفته از همین مرجع هستند. نویسندهٔ مقالهٔ حاضر، مطالبی جهت تدریس تاریخ حساب در کارگاه تاریخ ریاضی زیراب مازندران (مهر ۱۳۸۴) از کتاب فوق برداشته است که حاوی شرحی بر دستگاه‌های عددنویسی و کسرهای دوران باستان است [۱۲].

ب. برای کسانی که راحت‌ترند با اینترنت کار کنند، سایت زیر قابل اطمینان است:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

ت. ظاهراً قوم بسیار متمدنی مانند مایا هیچ درکی از کسرها نداشتند و به جز تقویم بسیار جالب و پیچیده‌شان، هیچ پیمانهٔ دیگری را مانند ساعت و متر و لیتر و غیره برای اندازه‌گیری به کار نمی‌گرفتند. بر عکس، تمدن پیشرفته‌ای هم مانند هند (دره سند) بود که ذره‌ای به طول $۷^{-۱۰}$ برابر انگشت داشت و باورشان این بود که این کوچکترین ذره‌ای از یک ماده است که می‌تواند رنگ و طعم و بوی خود را حفظ کند. (ایفراه [۳، صفحات ۲۹۸ و ۴۲۵].)

ث. مقالهٔ جالب زیر می‌تواند بخشی از انگیزه‌های ما را روشن سازد. خواندن آن را توصیه می‌کنیم:

http://historyofegyptianfractions.blogspot.com

بخش ۲ (چهار عمل اصلی مصریان)

آ. برای چهار عمل اصلی جمع و ضرب و تفریق و تقسیم، همان کتاب ایفراه [۳] و مرجع [۱۲] مناسب هستند؛ البته هر کتاب تاریخ ریاضیات دیگری نیز باید اشاره‌ای به این مطلب داشته باشد.

ب. همان‌طور که نصف کردن ساده‌ترین عمل تقسیمی است، دو برابر کردن هم ساده‌ترین عمل ضربی است و مصریان در طول تاریخ خود هیچگاه تفکر دودوئی را در مورد ضرب و تقسیم رها نکردند. ولی در مورد کسرها، علاقه و نیاز به جواب دقیق و پیشرفت دستگاه‌های اندازه‌گیری، آنان را به درک کمیت‌های پیچیده‌تر رهنمون کرد.

بخش ۳ (اجزاء چشم هور)

آ. برای جدول زمانی تاریخ مصر و مقیاس‌های مختلف مصریان به سایت موزه پتری که توسط یونیورسیتی کالج لندن تهیه شده است ارجاع می‌دهیم:

http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk

http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/weights/volume.html

ب. اگر به اطلاعات بیشتری در مورد جنگ خدایان و انعکاس آن در روابط پادشاهی‌های دو مصر بالا و پائین علاقه‌مند هستید، سایت زیر مفید است:

http://www.friesian.com/notes/oldking.htm#archaic

بخش ۴. (نیل آرام)

آ. کسر ۳/۴ هرگز نتوانست به اندازهٔ کسر ۲/۳ رواج پیدا کند؛ نه تنها پاپیروس‌های امنمهت سوم و دودمانش که به قرن بیستم ق.م. مربوط می‌شوند بلکه ارشمیدس نیز که در قرن سوم ق.م. می‌زیست کسر ۳/۴ را به صورت ۱/۴ + ۱/۲ نمایش می‌داد.

ب. برای چیستاهای مصری در مورد رابطهٔ بین کسرها و بخش‌های سال به [۳] ارجاع

می‌دهیم.

بخش ۵. (لوح چوبی اخمیم)

آ. برای مدارک و کارهای ریاضی مصریان و سایر ملت‌های باستان، به کارهای بروئینز [۵،۴] ، گون [۱٦]، گیلینگز [۱۸،۱۷] و ریک [۱۳] ارجاع می‌دهیم.

ب. اتمام این طرح بدون استفاده از دایرةالمعارف ویکیپدیا امکان پذیر نبود و خواننده را ضمن هشدار در مورد طبیعت عدم قطعیت این سایت، به استفاده از آن ترغیب می‌کنیم.

بخش ٦. (تومار چرمی ریاضیات مصری)

آ. مرجع‌های ذکر شده برای لوح چوبی اخمیم (بخش ۵)، برای تومار چرمی ریاضیات مصری هم مفید هستند.

ب. سایت زیر نیز حاوی مقاله‌ای درباره تومار چرمی ریاضیات مصری است و نحوهٔ بسط کسرهای متعارفی را بر حسب کسرهای پایه شرح می‌دهد:

http://planetmath.org/HultschBruinsMethodEgyptianFractions2.html

بخش ۷. (پاپیروس‌های مسکو و ریند)

آ. اخیراً الفبائی در مغرب رود نیل متعلق به سال‌های ۱۸۰۰ تا ۱۹۰۰ ق.م. یعنی عصر دودمان دوازدهم پیدا شده که تاریخ اختراع الفبا را ۳۰۰ سال به عقب می‌برد. از آنجا که تلاش برای جایگزینی خط تصویری با خط ساده الفبایی جهشی مردمی محسوب می‌شود، شاید بتوان این را نیز یکی از اقدامات مردمی دودمان دوازدهم دانست که البته مثل دیگر ابتکارات آن دودمان توسط طبقات بانفوذ کاهنان و اشراف عقیم ماند؛ برای این خبر به سایت زیر ارجاع می‌دهیم:

http://news.bbc.co.uk/1/hi/world/middle_east/521235.stm

ب. محتویات پاپیروس‌های مسکو و ریند توسط دانشمندان مصرشناس، استروو، تورائف [۱] و پیت [۹،۸] معرفی شد ولی ما به گزیدهٔ مطلوبی از آنها در مرجع [۲۰] دسترسی داشتیم.

بخش ۸ (حساب کسرهای مصری)

آ. در این بخش گفتیم که مصریان به مقدار دقیق کسرها روی آورده بودند؛ به هر حال این مسأله استثناهایی هم داشت. مثلاً دبیر پاپیروس رایزنر (مربوط به ۱۸۰۰ ق.م.)، پس از آن که کسر ۳٦/۱۰ را به صورت دقیق ۱/۱۰ + ۱/۲ + ۳ بسط می‌دهد، در مورد کسر ۳۹/۱۰، دقت را فدای جواب تقریبی ولی ساده ۴ می‌کند.

ب. همان طور که ملاحظه کردیم، بسط یک کسر متعارفی به کسرهای پایه مصری یکتا نیست و شاید این عدم یکتائی موجب دلسردی یونانیان از ارائهٔ اثبات وجودی بسط و در نتیجه تعریف عددهای گویا بر حسب آن بوده باشد؛ به هر حال مصریان را باور بر این بوده است که لااقل یک کسر مصری در مقابل خارج قسمت هر دو عدد طبیعی موجود بوده است. مصریان در انتخاب بسط

خود سعی می‌کردند جواب‌هایی را بپذیرند که مخرج‌های زوج و کوچک بیشتری در آنها ظاهر شود.

ت. مقاله [۱۱] در رابطه با این بخش توصیه می‌شود.

بخش ۹ (مصر و یونان)

آ. در صفحهٔ ۵۹۵ کتاب ایفراه [۳] می‌خوانیم که یونانی‌ها تلاش کردند کسرهای متعارفی را بسازند ولی ناکارآمدی دستگاه عددنویسی الفبائی‌شان مانع بود و به استفاده از کسرهای شصت شصتی ادامه دادند. ریاضی‌دانان مسلمان، نماد کسرهای متعارفی هندی را که فقط یک خط کسری کم داشت تا پایان قرن دوازدهم به کار می‌گرفتند تا این که الحصار مراکشی خط کسری را به آن افزود که مورد توجه فیبوناتچی قرار گرفت و با درج در کتابش، کاربرد جهانی یافت. در مورد کارهای مسلمانان روی کسرهای مسلسل به [۲۱] ارجاع می‌دهیم.

ب. ظاهراً منجمان اسکندریه بیشتر به استفاده از بسط‌های شصت شصتی رغبت داشتند تا به کسرهای مصری؛ بطلمیوس از غیر قابل استفاده بودن کسرهای مصری در کارهای خودش گلایه داشته است. ضمناً طول شبانه روز به ۲۴ ساعت تقسیم نمی‌شد بلکه روز هم به ۶۰ قسمت تقسیم می‌شد؛ مثلاً طول سال که امروزه در دستگاه دهدهی به صورت ۳۶۵۲۴۶۶۶×۱۰^{-۵} روز حساب می‌شود توسط منجمان یونانی به صورت

$$۳۶۵ \quad ۱۴ \quad ۴۸$$

روز (یعنی ۳۶۵ روز و ۱۴/۶۰ روز و ۴۸/۳۶۰۰ روز) داده شده است (لوکی [۱۹]).

ت. مدرک صریحی دال بر استفادهٔ مسلمانان یا کشورهای شرقی آسیا از کسرهای مصری وجود ندارد ولی رد پای تفکر دودوئی و کسرهای یکین را می‌توان در آثار آنان یافت. مثلاً عددی که به صورت توانی از ۲ می‌بود نام خاص زوج‌الزوج را به خود می‌گرفت؛ ضرب در ۲ و تقسیم بر ۲ به صورت باب‌های جداگانه‌ای در آثار خوارزمی، گیلانی، ایوب طبری، نسوی، کاشانی و ملا محمد باقر یزدی بررسی شده‌اند [۲؛۷؛۱۰]. همچنین کاشانی کسر یکین را کسر مفرد مجرد و غیر آن را کسر مفرد مکرر می‌نامید [۱۵]. چینی‌ها، کسر ۱/۲ را جزء زوج، کسر ۱/۳ را جزء کوچک تر، کسر ۲/۳ را جزء بزرگتر و کسر ۱/۴ را جزء ضعیف می‌نامیدند (میدونیک [۲۰، صفحه ۲۴۳]).

ث. فیبوناتچی در ۱۲۰۲ میلادی الگوریتم به اصطلاح «آزمندانه» را در کتاب معروف حساب خود برای یافتن کسر مصری متناظر به هر کسر متعارفی ابداع کرد؛ البته همزمان، در همان کتاب به معرفی کارهای حساب مسلمانان پرداخت که به کلی از رونق کسرهای مصری کاست. در حقیقت او برای ترویج الگوریتم خوارزمی به اروپائیان سرسخت و مخالف فرهنگ شرقی، کتاب لیبر آباچی خود را به بهانهٔ آموختن چرتکه و کسرهای مصری طوری تدوین کرد که اروپائیان از طریق آن با کارهای دانشمندان اسلامی آشنا شوند. با وجود این سه قرن دیگر طول کشید تا حساب هندی مسلمانان جای خود را در اروپا باز کرد و کسرهای متعارفی و دهدهی را به جای کسرهای مصری و شصت شصتی رایج ساخت. کتاب فیبوناتچی توسط سیگلر [۱۴] در سال ۲۰۰۲ میلادی به انگلیسی ترجمه شد.

ج. اشغال مصر توسط اسکندر و تأسیس مدرسهٔ اسکندریه، این تصور غلط را به وجود آورد که کسر مصری ساخته و پرداخته یونانیان است تا این که کشف پاپیروس‌ها این تصور را باطل کرد.

ح. رومیان برخی از کسرهای نایکین را با استفاده از مکمل کسرهای یکین نامگذاری می‌کردند؛ مثلاً ۱۰/۱۲ را ۱/۶ مانده [به یک] و یا ۱۱/۱۲ را ۱/۱۲ مانده [به یک] می‌نامیدند.

خ. مسائل بسیار جالبی در مورد کسرهای مصری مطرح بوده که برخی از آنها هنوز هم باز هستند. برای مطالعهٔ بیشتر به سایت زیر ارجاع می‌دهیم:

http://www.mcs.surrey.ac.uk/personal/r.knott/fractions

که عشق آسان نمود اول ولی افتاد مشکل‌ها

مراجع

[1] Struve, V.V. and Turaev, B. Mathematischer Papyrus des Staatichen Museums der Schonen Kunst in Mockau. Quellen und Studien zur Geschichete der Mathematik. Abteilung A: Quellen 1. Berlin: J. Springer 1930.

[۲] اسمیت، دی. ای.
Smith, D. E. History of Mathematics, Vol. I, 1951, Vol. II, 1952, USA.

[3] Ifrah, G. The Universal History of Numbers: From perhistory to the invention of the computer. Translated from the French by David Bellos, E.F. Harding, Sophie Wood and Ian Monk. John Wiley and Sons Inc. 2000.

[4] Bruins, E. M. Egyotian arithmetic, Janus 68(1-3)(1981), 33-52

[5] Bruins, E. M. Reducible and trivial decompositions concerning Egyptian arithmetics, *Janus* 68(4) (1981), 281-297.

[٦] بویس، ام. چکیده تاریخ کیش زردشت. ترجمه همایون صنعتی‌زاده. انتشارات صفیعلیشاه. چاپ اول. ۱۳۷۷

[۷] پوپ، وی. تاریخ ریاضیات. ترجمهٔ مهرداد رهبری. انتشارات دانشگاه هرمزگان. سال ۱۳۸۰.

[۸] پیت، تی .ای.
Peet, T. E. The Rihnd Methematical Papyruse, British Museum, Manuscript 10057 and 10058. London: The University Press of Liverpool Ltd. And Hodder & Stoughton Ltd. 1923.

[۹] پیت، تی. ای.
Peet, T. E. Arithmatic in the Middle Kingdom, J. Egyptian Arch. 9, 91-95, 1923.

[۱۰] دیویس، اچ. تاریخ محاسبه. ترجمه مهران اخباریفر. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی. تهران ۱۳۸۴.

[۱۱] رایزینگ، جی. آر.
Rising G. R. The Egyptian use of uni fractions for equitable distribution, *Historial Math.* 1(1)(1974), 93-94.

[۱۲] رجبعلی‌پور، م. تاریخ حساب، مجموعه مقالات: به مناسبت بزرگداشت استاد مهدی بهادری نژاد، فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران، زمستان ۱۳۸۴، صص ۲۳۷ تا ۲۸۴.

[۱۳] ریک، ا. ای.
Raik, A. E. On the theory of Egyptian fractions (Russian), Istor - Mat. Issled No. 23 (1978), 181-191; 358

[۱۴] سیگلر، ال. ای.
Sigler, L. E. Fibonacci's Liber Abaci, Lonardo Pisano's Book of Calculation, Springer 2002.

[۱۵] قربانی، ا. کاشانی نامه. احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ دوم با تجدید نظر ۱۳٦۸.

[.۱٦] گون، بی. جی.
Gunn, B. G. Review of The Rhind Mathematical Papyrus by T. E. Peet. J. of Egypt. Arch. 12 (1926), 123-137.

[۱۷] گیلینگز، آر. ج.
Gillings, R. J. The Egyptian Mathematical Leather Role - line 8: How did the Scribe do it? *Historia Math.* 8(4) (1981), 456-457.

[۱۸] گیلینگز، آر. ج.
Gillings, R. J. The Mathematics in the Time of Pharaohs (Cambridge, MA., 1982).

[۱۹] لوکی، پی.
Luckey, P. Die Rechenkunst bei Gamsid b. Masud Al-Kasi; mit Ruckbliken auf altere Geschichte des Rechnens, Abhandlungen fur die Kunde des Morgenlandas, XXXI, I, Wiesbaden, 1951.

[۲۰] میدونیک، اچ.
Midonik, H. The treasury of Mathematics, Vol. 1, Penguin Books. Philosophical Library, New York, 1965.

[۲۱] وندرواردن، بی. ال.
Van der Waerden, A History of Algebra: From Al- Khwarizmi to Emmy Noether, Springer, 1985.