فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، صص. ۱۵ تا ۳۳

ریاضیات: علم و هنر*

آرمان بُرل

مترجم: روح‌الله جهانی‌پور و سعید مقصودی

خانم‌ها و آقایان:

برای من، سخنرانی در حضور شما افتخاری بزرگ اما همراه با دشواری‌هایی است. نخست اینکه یک ریاضیدان حرفه‌ای، اکراه دارد از اینکه به‌جای سخنرانیِ کاملاً ریاضی، به فلسفه‌بافی دربارهٔ ریاضیات بپردازد. مثلاً جی. اچ. هاردی، ریاضیدان انگلیسی، نوشتن *دربارهٔ* ریاضیات را به‌جای اثبات قضیه‌ها، «تجربه‌ای مالیخولیایی» می‌دانست! با وجود این، اگر بر این احساس فائق نمی‌آمدم، اینجا نبودم. بنابراین دیگر لازم نیست به این موضوع بپردازیم. اینکه در بین مخاطبین، هم ریاضیدان و هم غیرریاضیدان حضور دارد، مشکلاتی جدی‌تر به بار می‌آورد. پس آیا سخنرانی من برای هیچ مخاطبی سودمند نیست؟ این سؤالی است که یک ساعتِ دیگر، هر کدام از شما جواب آن را خواهید داد و بنابراین نیازی به شرح بیشتر ندارد. دشواریِ ناشی از حضور مخاطبِ ریاضیدان این است که من را (تا اندازه‌ای ناراحت‌کننده) بر این امر آگاه می‌سازد که همه چیز راجع به موضوع سخنرانی من قبلاً گفته شده است، همهٔ استدلال‌ها بیان شده است و موافقان از یک سو و مخالفان از سوی دیگر، استدلال‌هایی از این قبیل آورده‌اند که: ریاضیات فقط یک هنر است، فقط یک علم است، ملکهٔ علوم است، صرفاً خادم علوم است و یا حتی ترکیبی از علم و هنر

عبارات و کلمات کلیدی. زیبایی‌شناسی ریاضی؛ هنر و ریاضی؛ کاربردپذیری ریاضی؛ جهانی‌بودنِ ریاضی.

* این مقاله متن یک سخنرانی به زبان آلمانی بوده که مؤلّف در سال ۱۹۸۱ در مونیخ ایراد کرده است و ترجمهٔ انگلیسی آن در مجلهٔ *متمتیکال اینتلیجنسر* در سال ۱۹۸۳، شمارهٔ ۵، صفحات ۹-۱۷ چاپ شده است. ترجمهٔ ما از چاپ مجدد این مقاله در *خبرنامهٔ انجمن ریاضی اروپا* (شمارهٔ ماه مارس ۲۰۱۷) انجام گرفته است. آرمان بُرل (Armand Borel)، نویسندهٔ مقاله، که هیچ نسبتی با امیل بُرل ریاضیدان معروف فرانسوی ندارد، ریاضیدان سوئیسی متولد سال ۱۹۲۳ و متوفی در سال ۲۰۰۳ است. او در حوزهٔ توپولوژی جبری پژوهش می‌کرد و از بنیانگذاران نظریهٔ گروه‌های جبری خطی است و در سال ۱۹۹۱ به دریافت جایزهٔ استیل نائل آمد-م. نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:

Borel, A., Mathematics: art and science, *European Mathematical Society Newsletter*, no. 103 (March **2017**), 37–45.

است. حتی خود موضوع سخنرانی من[1]، سومین مبحث در دفاعیهٔ یک پایان‌نامه در سال ۱۸۴۵ بوده است و آنجا کسی به مخالفت برخاسته که ریاضیات فقط هنر است و علم نیست [۱]. گاهی هم عقیده بر این بوده است که ریاضیات خیلی بدیهی و تقریباً همانگویی است و به همین سبب، اصلاً ارزش علم یا هنر بودن را ندارد [۲]. با نقل‌قول‌های زیادی از ریاضیدانان برجسته می‌توان بیشترِ این استدلال‌ها را تأیید کرد. گاهی حتی می‌توان با نقل‌قول‌های گزینشی، عقیده‌هایی کاملاً متفاوت را دقیقاً به یک ریاضیدان نسبت داد. لذا از همین آغاز مایلم تأکید کنم که ریاضیدانان حاضر در این جمع احتمالاً چیز جدیدی نخواهند شنید.

اما وقتی رویِ سخن من با غیرریاضیدانان باشد، با مشکلی بزرگتر و تقریباً عکس مشکل اولی مواجه می‌شوم و آن اینکه موظفم مطالبی دربارهٔ اساس و ماهیت ریاضیات بگویم. اما در انجام این کار نمی‌توانم فرض بگیرم که همه از مقصود سخنانم آگاهی دارند. البته می‌توانم فرض را بر این بگذارم که مخاطب قدری با ریاضیات یونانی مثل هندسهٔ اقلیدسی، نظریهٔ مقاطع مخروطی و مقدماتی از جبر یا هندسهٔ تحلیلی آشنایی دارد. هرچند این موضوعات پیوند چندانی با اهداف پژوهش‌های جاری در ریاضیات ندارند. ریاضیدانان با این مباحثِ کم‌وبیش مأنوس آغاز کرده‌اند و سر از ابداع نظریه‌های انتزاعی‌تری درآورده‌اند که حتی وقتی بعدها کاربردهایی مهم در علوم طبیعی یافته‌اند، کمترین نسبت را با تجربهٔ روزمرهٔ ما داشته‌اند. معمولاً گذر از یک سطح تجرید به سطحی دیگر، حتی برای بهترین ریاضیدانان دشوار بوده و در زمان آنها، اقدامی فوق‌العاده جسورانه تلقی می‌شده است. شاید نتوانم فقط در چند دقیقه، این مجردسازی‌های انباشته بَرهم و کاربردهایشان را به‌طور رضایت‌بخشی مرور کنم. همچنین اصلاً خوش ندارم که صرفاً به فلسفه‌بافی دربارهٔ ریاضیات بپردازم و دربارهٔ محتوای ریاضیات چیزی نگوییم. ترجیح می‌دهم چند مثال در دست داشته باشم تا بتوانم مطالب کلی دربارهٔ محتوای ریاضیات یا جایگاه ریاضیات نسبت به هنر و علوم طبیعی را روشن سازم. بنابراین می‌کوشم توصیفی و یا دست‌کم، تصوری از بعضی از آن اقدامات ارائه کنم.

برای انجام این کار، نمی‌توانم همهٔ اصطلاحات را به‌دقت تعریف کنم و انتظار هم ندارم که همهٔ حاضرین موضوع را کاملاً بفهمند؛ اما این چیز مهمی نیست. آنچه می‌خواهم با شما در میان بگذارم، در واقع احساسی نسبت به ماهیت این گذرکردن‌ها و جسورانه بودن و اهمیت آنها در تاریخ تفکر است. قول می‌دهم که بیشتر از ۲۰ دقیقه صرف این کار نکنم.

ریاضیدانان اغلب به‌دنبال جواب‌های کلی هستند. آنها از حل کردن تعداد زیادی مسئلهٔ مشخص با کمک چندتایی فرمول کلی لذت می‌برند. این کار را می‌توان اقتصاد فکری یا تنبلی نامید. یک مثال قدیمی، حل معادلهٔ درجه‌دوی $x^۲ + ۲bx + c = ۰$ است. در اینجا b و c عددهای حقیقی معلوم هستند. می‌خواهیم عدد حقیقی x را پیدا کنیم که در این معادله صدق می‌کند. قرن‌ها بود که می‌دانستند x را می‌توان

[1] Mathesis et Ars et Scientia Dicenda

با فرمول

$$x = -b \pm \sqrt{b^{۲} - c}$$

برحسب b و c بیان کرد. اگر $b^{۲} > c$، می‌توانیم ریشهٔ دوم بگیریم و دو جواب به‌دست آوریم. اگر $b^{۲} = c$، آن‌گاه $x = -b$ را جواب مضاعف می‌نامیم. اما اگر $b^{۲} < c$، نمی‌توانیم ریشهٔ دوم بگیریم و دست‌کم در اوایل دبیرستان می‌گوییم که معادله جوابی ندارد.

در قرن شانزدهم فرمولی مشابه برای معادلات درجه‌سه مثل $x^{۳} + ax + b = ۰$ و حتی معادلات درجه‌چهار، ابداع کرده بودند. نمی‌خواهم در اینجا این فرمول را که در آن، ریشه‌های دوم و سوم –به‌اصطلاح، رادیکال‌ها– وجود دارد، بنویسم. پدیده‌ای فوق‌العاده جالب کشف شد که اسم آن را *حالت تحویل‌ناپذیری*[۱] گذاشتند. اگر معادله سه ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد و فرمول را که اساساً با آن می‌توان ریشه‌ها را محاسبه کرد، به‌کار ببریم، آن‌وقت با ریشه‌های دوم اعداد منفی مواجه می‌شویم که در آغاز معنایی ندارند. اما اگر وجود نداشتنِ آنها را نادیده بگیریم و از محاسبهٔ با آنها نهراسیم، این عبارت‌ها، به‌شرطی که برخی قاعده‌های صوری را دربارهٔ آنها رعایت کنیم، دست آخر حذف می‌شوند و به جواب‌های معادله می‌رسیم. خلاصه اینکه اگر کار را با عددهای حقیقی مفروض a و b شروع کنیم، موفق می‌شویم به‌کمک «اعداد غیرحقیقی»، ریشه‌های مطلوب را پیدا کنیم. ریشه‌های دوم اعداد منفی را به‌منظور تمایز از اعداد حقیقی، «اعداد موهومی» نامیدند و کشمکش دربارهٔ مجاز بودن کاربرد این اعداد غیرحقیقی بالا گرفت. برای مثال، دکارت اصلاً نمی‌خواست کاری به کار آنها داشته باشد. حوالی سال ۱۸۰۰ بود که برای این مشکل راه‌حلی قانع‌کننده –دست‌کم برای بعضی‌ها– پیدا شد. به این صورت که اعداد حقیقی را در دستگاهی بزرگتر مرکب از نقاط صفحه، یعنی زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی نشاندند و بین این نقاط، برخی اعمال را که همان ویژگی‌های چهار عمل اصلی در حساب را دارند، تعریف کردند. پس اعداد حقیقی با نقاط روی محور افقی و ریشه‌های دوم اعداد منفی با نقاط روی محور عمودی یکی گرفته می‌شوند. اکنون می‌شود از اعداد مختلط (یا موهومی) صحبت به میان آورد. به‌شیوهٔ صوری و دقیق، این اشیای ریاضی را تقریباً به همان راحتیِ کار با اعداد حقیقی به‌کار می‌بریم و جواب‌هایی به‌دست می‌آوریم که بعضی وقت‌ها حقیقی‌اند و بعضی وقت‌ها مختلط. اکنون می‌توانیم بگوییم که اگر $b^{۲} < c$، معادلهٔ درجه‌دوی مذکور دو جواب مختلط دارد.

البته تا اندازه‌ای می‌توان گفت که این تعریف، صرفاً یک قرارداد بود اما نه می‌شد به این راحتی به این اعداد مختلط همان حق حیاتی را بخشید که اعداد حقیقی داشتند و نه می‌شد آنها را صرفاً وسیله‌ای برای رسیدن به اعداد حقیقی دانست. در آن روزها هیچ تعریف دقیقی برای اعداد حقیقی وجود نداشت و تنها پیوند نزدیک بین ریاضیات و اندازه‌گیری و محاسبات عملی بود که علی‌رغم مشکلات مربوط به

[۱] casus irreducibilis

اعداد گنگ و منفی، به اعداد حقیقی هستی بخشیده بود. اما در مورد اعداد مختلط این‌طور نیست. مورد اعداد مختلط گامی بود در جهتی کاملاً نو که در آن مخلوقی کاملاً ذهنی پیش روی همه قرار گرفت. همچنان‌که ریاضیدانان به این مرحلهٔ جدید خو می‌گرفتند، متوجه می‌شدند که بیشتر عملیاتی که با توابع، مثل چندجمله‌ای‌ها، تابع‌های مثلثاتی و غیره انجام می‌دادند، حتی اگر متغیرها و مقدارهای تابع‌ها را مختلط بگیرند، باز هم معنی دارند. همین‌جا نقطهٔ آغازِ آنالیز مختلط یا نظریهٔ توابع شد. در سال ۱۸۱۱ گاوس، ریاضیدان مشهور، به ضرورتِ ایجاد چنین نظریه‌ای اشاره کرد:

> «*نکتهٔ اصلی در اینجا فایدهٔ عملی نیست، بلکه از نظر من، آنالیز ریاضی دانشی مستقل است که در صورت تمایز قائل شدن بین کمیت‌های موهومی و حقیقی، مقدار بسیار زیادی از زیبایی و کمال خود را از دست خواهد داد.*» [۳]

ظاهراً حتی خودِ او هم پیش‌بینی نمی‌کرد که بعدها آنالیز مختلط در موضوعاتی مثل نظریه‌های الکتریسیته و آیرودینامیک کاربرد پیدا کند.

اما این پایان ماجرا نیست. اگر مایل باشید، به دو گام دیگر اشاره می‌کنم که در جهت مجردسازیِ بیشتر برداشته شد. برگردیم به معادلهٔ درجه‌دو. اکنون می‌توان گفت که در حالت کلی این معادله دو جواب دارد که می‌توانند مختلط هم باشند. به‌طور مشابه، اگر اعداد مختلط را بپذیریم، معادلهٔ درجه n دارای n جواب است. از قرن شانزدهم به بعد، این سؤال مطرح شد که آیا یک فرمول کلی وجود دارد که جواب‌های معادله‌های از درجهٔ حداقل ۵ را برحسب ضرایب آنها با استفاده از رادیکال‌ها بیان کند. سرانجام، ثابت شد که این کار غیرممکن است. ای. گالوا، ریاضیدان فرانسوی، اثباتی (به‌لحاظ تاریخی سومین اثبات) برای این موضوع در چارچوب یک نظریهٔ کلی ارائه کرد ولی آن موقع از آن سر درنیاوردند و در نتیجه به بوتهٔ فراموشی سپرده شد. حدود ۱۵ سال بعد، پژوهش‌های او را دوباره پیدا کردند. دیدگاه گالوا آنقدر جدید بود که فقط چند نفری با زحمت زیاد از آن سر درآوردند. برای یک معادلهٔ مفروض، گالوا مجموعه‌ای معین از جایگشت‌های ریشه‌ها را در نظر گرفت و نشان داد که بعضی از ویژگی‌های این مجموعه نقشی تعیین‌کننده در مسئلهٔ مورد بحث دارند. اینجا نقطهٔ آغاز مطالعهٔ مستقل چنین مجموعه‌هایی از جایگشت‌ها بود که بعدها به *گروه‌های گالوا* معروف شدند. او نشان داد که فقط وقتی می‌توان یک معادله را با استفاده از رادیکال‌ها حل کرد که گروه گالوای مربوط به آن، به ردهٔ خاصی تعلق داشته باشد که بعدها ردهٔ *گروه‌های حل‌پذیر* نامیده شد. اکنون قضیه‌ای که جلوتر دربارهٔ معادله‌های از درجهٔ حداقل ۵ ذکر کردیم، نتیجه‌ای از این مطلب است که گروه وابسته به یک معادلهٔ کلی درجه n فقط وقتی حل‌پذیر است که $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ [۴]. ویژگی‌های مهم این گروه‌ها، مثلاً حل‌پذیر بودن، در واقع مستقل از ماهیت اشیای تحت جایگشت است و این موضوع به مفهوم «گروه مجرد» و قضیه‌ای بسیار مهم منتهی شد که در بسیاری از حوزه‌های ریاضیات کاربرد دارد. اما سال‌ها تصور می‌شد که اینها صرفاً جزء ریاضیات محض و بسیار مجرد هستند. حوالی

سال ۱۹۱۰ وقتی یک ریاضیدان و یک فیزیکدان دربارهٔ برنامهٔ درسی فیزیک در دانشگاه پرینستون با هم بحث می‌کردند، فیزیکدان می‌گوید که نظریهٔ گروه‌ها را می‌توانند بدون تردید کنار بگذارند، زیرا هیچ‌وقت در فیزیک کاربردی پیدا نخواهد کرد [۵]. کمتر از ۲۰ سال بعد، سه کتاب دربارهٔ نظریهٔ گروه‌ها و مکانیک کوانتومی چاپ شد و از آن به بعد، نظریهٔ گروه‌ها از مباحث بنیادی در فیزیک محسوب می‌شود.

این مثال، آخرین مثال خواهد بود. گفتم که اعداد مختلط را می‌توان به‌صورت نقاط صفحه در نظر گرفت. یک ریاضیدان ایرلندی به نام ویلیام روان هَمیلتُن[۱]، این سؤال را مطرح کرد که آیا می‌توان بین نقاط فضای سه‌بُعدی عمل‌هایی مشابه چهار عمل اصلی تعریف کرد و دستگاه اعداد جامع‌تری تشکیل داد. ده سال وقت صرف کرد تا جواب را پیدا کند: در فضای سه‌بُعدی این کار امکان ندارد اما در فضای چهاربُعدی امکان‌پذیر است. در اینجا لزومی ندارد سعی کنیم ببینیم فضای چهاربُعدی دقیقاً چیست. فضای چهاربُعدی یک نام آب‌وتاب‌دار برای چهارتایی‌های اعداد حقیقی است؛ مشابه سه‌تایی‌ها و دوتایی‌های اعداد حقیقی. همیلتن این اعداد جدید را *چهارگان* نامید. اما او باید از یک ویژگی اعداد حقیقی و مختلط، یعنی تعویض‌پذیریِ ضرب، $a \times b = b \times a$، که تا آن موقع مسلّم گرفته می‌شد، صرف‌نظر می‌کرد. او همچنین نشان داد حساب چهارگان‌ها در بررسی مسئله‌های فیزیک و مکانیک از دید ریاضی کاربردهایی دارد. بعدها چندین دستگاه جبری دیگر با عمل ضرب تعویض‌ناپذیر تعریف شد که از موارد قابل‌توجه، جبرهای ماتریسی بود. تصور می‌شد این موضوع هم نوعی کاملاً مجرد از ریاضیات است و هیچ‌گونه پیوندی با دنیای خارج ندارد. اما در سال ۱۹۲۵ وقتی ماکس بورن[۲] به برخی از نظرات جدید وِرنِر هایزنبرگ[۳] فکر می‌کرد، به این نکته پی برد که مناسب‌ترین دستگاه صوری برای بیان آنها چیزی نیست جز جبرهای ماتریسی و آشکار شد که کمیت‌های فیزیکی را می‌توان با استفاده از اشیایی جبری نمایش داد که لزوماً تعویض‌پذیر نیستند. این امر به اصل عدم قطعیت منتهی شد و نقطهٔ آغاز مکانیک کوانتومیِ ماتریسی و انتساب عملگرها به کمیت‌های فیزیکی، یعنی اساس مکانیک کوانتومی گردید [۶].

با بیان این مثال آخر، به صحبت‌های خودم دربارهٔ توصیف برخی مباحث ریاضیات خاتمه می‌دهم. البته این مثال‌ها خیلی ناقص‌اند و به هیچ‌وجه نمایندهٔ همهٔ حوزه‌های ریاضیات نیستند. با این حال همهٔ آنها در دو ویژگی مشترک‌اند که مایلم بر آن تأکید کنم، چراکه این ویژگی‌ها در بسیاری از موارد دیگر نیز وجود دارند. اول اینکه این ابداعات در جهت مجردسازی بیش از پیش و دوری جستن از طبیعت صورت گرفتند. دوم اینکه این نظریه‌های انتزاعی که ابداع آنها قائم به ذات بوده است، کاربردهای مهمی در علوم طبیعی یافته‌اند. حقیقت این است که تناسب ریاضیات با نیازهای علوم طبیعی به‌طرز شگفت‌آوری چشمگیر است (یک وقتی یکی از فیزیکدانان صحبت از «کارآمدیِ توجیه‌ناپذیر ریاضیات» می‌کرد [۷]) و ارزش بحثی بسیار مفصل‌تر را دارد که من در اینجا نمی‌توانم به آن بپردازم.

[۱] William Rowan Hamilton [۲] Max Born [۳] Werner Heisenberg

گذار به مرحلهٔ مجردسازی بیشتر را نباید، آن‌طور که از نقل‌قول گاوس ممکن است استنباط شود، موضوعی عادی در نظر گرفت. ریاضیات در آغاز برای مقاصد عملی مثل ثبت دفاتر اداری، اندازه‌گیری و مکانیک ابداع شد. حتی کشف‌های بزرگ قرن هفدهم مثل بی‌نهایت‌کوچک‌ها و حساب انتگرال، در ابتدا عمدتاً ابزارهای حل مسئله در مکانیک، ستاره‌شناسی و فیزیک بودند. اویلر، ریاضیدانی که در همهٔ حوزه‌های ریاضیات و کاربردهای آن از جمله کشتی‌سازی فعال بود، مقالاتی هم دربارهٔ نظریهٔ محض اعداد نوشت و بارها احساس می‌کرد لازم است روشن کند که نظریهٔ محض اعداد هم به اندازهٔ پژوهش‌هایی که سمت و سوی کاربردیِ بیشتری دارند، مهم و موجّه است [۸]. البته ریاضیات از همان ابتدا گرایش به ایدآل‌سازی داشت اما مدت‌ها تا اندازه‌ای که در مثال‌های بالا اشاره کردیم، از واقعیات یا به عبارت دقیق‌تر، از ادراک ما از جهان واقع فاصله نگرفته بود. هرچه ریاضیدانان در این مسیر پیشتر رفتند، بر این نکته آگاه‌تر شدند که به محض اینکه تعریفِ یک مفهوم ریاضی، سازگاریِ منطقی داشته باشد، آن مفهوم بی‌آنکه ضرورتاً پیوندی با واقعیات دنیای فیزیکی داشته باشد، حق حیات دارد و ریاضیدانان حق دارند به مطالعهٔ آن بپردازند حتی اگر در حال حاضر ظاهراً هیچ کاربرد عملی برای آن موجود نباشد. خلاصه اینکه این امر، بیش از پیش به شکل گرفتنِ «ریاضیات محض» یا «ریاضیات به‌خاطر ریاضیات» منتهی شد.

اما اگر عملکردِ کنترلیِ کاربردی بودن را کنار بگذاریم، بی‌درنگ موضوع نحوهٔ ارزش‌گذاری مطرح می‌شود. مسلماً همهٔ مفاهیم و قضیه‌ها ارزش یکسانی ندارند؛ مِثل *مزرعهٔ حیوانات* جُرج اُرول، لازم است بعضی‌ها بیشتر از دیگران ارزشمند باشند. پس آیا معیارهایی درونی وجود دارد که بتوان به یک هرم ارزشیِ کم‌وبیش عینی رسید؟ توجه دارید که همین سؤال اساسی را می‌توان دربارهٔ نقاشی، موسیقی یا به‌طور کلی هنر نیز مطرح کرد و لذا پرسشی در حوزهٔ زیبایی‌شناسی است. در واقع یک پاسخ رایج به این سؤال این است که ریاضیات تا اندازهٔ زیادی، هنر است؛ هنری که پیشرفتش از معیارهای زیباشناختی نشأت گرفته، هدایت‌شده و برطبق آنها قضاوت شده است. اشخاص ناآشنا با ریاضیات، اغلب تعجب می‌کنند وقتی می‌فهمند که در رشته‌ای به خشکیِ ریاضیات، می‌توان صحبت از معیارهای زیبایی‌شناختی کرد. اما ریاضیدان یک حس زیبایی‌شناختی قوی نسبت به ریاضیات دارد که توضیح آن دشوار است. خوب! قواعد این حس زیبایی‌شناختی چیست؟ زیباییِ یک قضیه یا یک نظریه درکجاست؟ البته پاسخی واحد که باب‌طبع همهٔ ریاضیدانان باشد وجود ندارد اما اتفاق‌نظر عجیبی دربارهٔ آن هست که به نظرم، تا این اندازه در موسیقی یا نقاشی وجود ندارد.

بی‌آنکه بخواهم ادعا کنم از عهدهٔ تبیین کامل آن برمی‌آیم، مایلم بعداً دربارهٔ آن بیشتر صحبت کنم. فعلاً به این ادعا می‌پردازم که تشابه ریاضیات با هنر را بیشترِ ریاضیدانان قبول دارند. برای مثال، جی. اچ. هاردی بر این عقیده بود که اگر ریاضیات اصلاً حقی برای وجود داشته باشد، آن حق فقط حق وجود به‌مثابهٔ هنر است [۹]. کار ما ریاضیدانان شباهت زیادی با کار هنرمندان دارد: نقاش رنگ‌ها و فرم‌ها را

به هم می‌آمیزد، موسیقی‌دان اصوات را، شاعر واژه‌ها را و ما نوع خاصی از ایده‌ها را. ای. دِگاس[۱] نقاش گهگاهی سونات هم می‌نوشت. یکبار در گفتگویی با اِس. مالارمهٔ[۲] شاعر گلایه کرده بود که با اینکه ایده‌های بسیار زیادی برای نوشتن دارد، نوشتن برایش دشوار است. مالارمه در جواب گفته بود که واژه‌ها، شعر را می‌سازند نه ایده‌ها [۱۰]. اما ما اساساً با ایده‌ها کار می‌کنیم.

وقتی به شیوهٔ کار و پیشرفت پژوهشگر ریاضی فکر می‌کنیم، این احساسِ هنری بودنِ کار در ما قوی‌تر می‌شود. نباید تصور کرد ریاضیدان، سراپا منطقی و منظم عمل می‌کند. او اغلب کورمال کورمال در تاریکی راه می‌رود در حالی که نمی‌داند فلان حکم را باید ثابت کند یا رد. ایده‌های مهم، کاملاً اتفاقی به ذهنش خطور می‌کنند بی‌آنکه او حتی متوجهِ یک مسیر روشن و منطقی مابین اندیشه‌های اولیه و آن ایده‌ها شود. درست مثل مورد آهنگسازان و هنرمندان، اینجا هم باید از الهام صحبت به‌میان آورد [۱۱].

با وجود این، دسته‌ای دیگر از ریاضیدانان با این دیدگاه مخالف‌اند و بر این باور هستند که پرداختن به ریاضیات بی‌آنکه نیازهای علوم طبیعی راهنمای آن باشد، خطرناک است و تقریباً به‌طور قطع حاصلش نظریه‌هایی است که شاید خیلی هوشمندانه باشند و باعث لذت ذهنی خاصی هم بشوند اما نمادی از یک نوع آینهٔ ذهنی‌اند که از نظر علم و دانش کاملاً بی‌ارزش است. برای نمونه، جِی. فون‌نویمانِ[۳] ریاضیدان در سال ۱۹۴۷ نوشت:

> *«زمانی که شاخه‌ای از ریاضیات از سرچشمه‌های تجربی خود بسیار فاصله می‌گیرد، یا بدتر از این، از نسل دوم و سوم است و تنها به‌طور غیرمستقیم از ایده‌هایی که ریشه در «واقعیت» دارند الهام گرفته است، از همه سو با خطرات بسیار جدی احاطه می‌شود. چنین شاخه‌ای بیش از پیش آمیخته به هنرپردازی می‌شود و بیش از پیش تبدیل می‌شود به هنر برای هنر ... . این خطر بزرگ وجود دارد که موضوع آن شاخه در مسیری کم دوام رشد کند ... و بعد به چندین شاخهٔ بی‌اهمیت تقسیم شود ... . به هر تقدیر، ... تنها راه چاره‌ای که به نظرم می‌رسد، بازگشت به سرچشمه به‌منظور احیای مجدد است؛ یعنی دوباره تزریق کم‌وبیش مستقیمِ ایده‌های تجربی.»* [۱۲]

دسته‌ای دیگر از ریاضیدانان موضعی میانه‌تر گرفته‌اند: آنها کاملاً به اهمیت جنبهٔ زیبایی‌شناختیِ ریاضیات آگاه هستند اما تندروی در دیدگاه «ریاضیات صرفاً به‌خاطر ریاضیات» را امری خطرناک می‌دانند. برای مثال، پوانکاره[۴] می‌نویسد:

> *«علاوه بر این، دوستداران ریاضیات چنان از آن لذّت می‌برند که از نقاشی و موسیقی. آنها هماهنگی ظریفی را که اعداد و فرم‌ها دارند می‌ستایند؛ وقتی کشفی جدید چشم‌انداز غیرمنتظره‌ای به روی آنها می‌گشاید، شگفت‌زده می‌شوند. پس آیا با اینکه اصلاً احساس و*

[۱] E. Degas [۲] S. Mallarmé [۳] John von Neumann [۴] Henri Poincaré

> *ادراکی درکار نیست، حظّی که آنها می‌برند ماهیت زیبایی‌شناختی ندارد؟... به همین دلیل، تردید ندارم که ریاضیات شایستگی آن را دارد که به‌خاطر خودش رشد و گسترش یابد و مرادم در اینجا هم نظریه‌هایی است که در فیزیک کاربرد ندارند و هم آنهایی که دارند.»* [۱۳]

اما چند صفحهٔ بعد، او به این مقایسه بازمی‌گردد و می‌افزاید:

> *«اگر بخواهم مقایسه‌ای را که با هنرهای زیبا انجام دادم ادامه دهم، باید بگویم ریاضیدان محض‌گرایی که وجودِ دنیای خارج را فراموش می‌کند، شبیه آن نقاشی است که نحوهٔ ترکیب هماهنگ فرم‌ها و رنگ‌ها را می‌داند اما الگویی ندارد. قدرت خلّاقهٔ چنین ریاضیدانی به‌زودی به اتمام خواهد رسید.»* [۱۴]

به نظر من، این ردِ امکان نقاشی آبستره، موضوعی قابل‌توجه است، زیرا ما در اینجا در مونیخ هستیم؛ جایی که کمی بعدتر یک هنرمند (همان واسیلی کاندینسکی[۱]) به‌طور خیلی عمیقی به این موضوع می‌پردازد. زمانی در دههٔ اول این قرن، او به‌ناگاه بعد از نگاه کردن به یکی از بوم‌های نقاشی خودش، احساس کرد که سوژهٔ نقاشی ممکن است برای نقاشی زیان‌آور باشد؛ یعنی ممکن است خودش مانعی بر سر راه دسترسی مستقیم به فرم‌ها و رنگ‌ها، یعنی همان کیفیات هنری واقعی خودِ اثر باشد. اما همان‌گونه که بعداً می‌نویسد [۱۵]، «با یک خلأ ذهنی ترسناک و انبوهی از سؤالات مواجه شدم که مهم‌ترینِ آنها این بود که چه چیز را باید جایگزین سوژهٔ غایب کرد؟» کاندینسکی از خطر زینت‌کاری و هنرهای صرفاً تزئینی کاملاً آگاه بود و می‌خواست به هر قیمتی شده از آنها اجتناب کند. با وجود این، برخلاف پوانکاره، به این نتیجه نرسید که نقاشی بدون سوژهٔ واقعی لزوماً بی‌فایده است. در واقع او حتی نظریه‌ای دربارهٔ «الزامات درونی» و «محتوای ذهنی» یک نقاش ابداع کرد. همان‌طور که می‌دانید، از حدود سال ۱۹۱۰ به این سو، او و شمار روزافزونی از دیگر نقاشان، خود را وقف نقاشیِ به‌اصطلاح آبستره یا محض کردند که پیوند کمی با طبیعت دارد و یا اصلاً هیچ پیوندی ندارد.

اما اگر نخواهیم امکانی مشابه را برای ریاضیات بپذیریم، آن‌گاه به درکی از ریاضیات خواهیم رسید که می‌خواهم به این صورت خلاصه‌اش کنم: از یک سو، ریاضیات علم است، زیرا هدف اصلی آن خدمت به علوم طبیعی و فناوری است که این هدف، خاستگاه ریاضیات و همواره سرچشمهٔ مسائل ریاضی بوده است و از سوی دیگر، ریاضیات هنر است، زیرا آفریدهٔ ذهن انسان است و بسیاری از پیشرفت‌های آن که به‌کمک ابزارهای فکری صورت می‌گیرند، ریشه در ژرفای اندیشهٔ انسانی دارند و داوریِ پایانی دربارهٔ این پیشرفت‌ها بر پایهٔ ملاک‌های زیبایی‌شناختی شکل می‌گیرد. البته این جولان آزاد فکری در فضای اندیشهٔ محض را باید با پرداختن به برخی کاربردها در علوم طبیعی، تا اندازه‌ای مدیریت کرد. اما این سخن واقعاً خیلی تنگ‌نظرانه است. به‌ویژه فراز پایانیِ آن بسیار محدودکننده است و خیلی از ریاضیدانان بر آزادیِ

[۱] Wassily Kandinsky

کامل در فعالیت‌های فکری اصرار دارند. دلیل‌شان اول این است که همان‌طور که پیش از این اشاره کردیم، بسیاری از حوزه‌های ریاضیات که اهمیت کاربردیِ آنها ثابت شده است، اگر می‌خواستیم از همان آغاز بر کاربردپذیری‌شان تأکید کنیم، اصلاً پیشرفت نمی‌کردند. فون‌نویمان علی‌رغم سخن قبلی خود، در سخنرانی دیگری به این مطلب اشاره می‌کند:

> «*اما پیشرفت در بخش بزرگی از ریاضیات که بعداً درکاربردها سودمند واقع شد، مطلقاً بر تمایل به یافتن کاربرد استوار نبود و هیچ‌کس نمی‌دانست آن بخش در چه حوزه‌ای از دانش ممکن است کاربرد پیدا کند و هیچ نشان کلی از اینکه اصلاً کاربردی وجود خواهد داشت یا نه، در دست نبود... . این وضعیت در مورد همهٔ علوم صادق است. موفقیت زمانی رخ می‌دهد که کلاً فراموش کنیم خواستِ نهایی‌مان چیست یا اینکه سرانجام چه خواهیم خواست؛ از جستجوی چیزهای به‌دردبخور دست بکشیم و صرفاً محک‌های ظرافت فکری را راهنمای خویش قرار دهیم... . البته فکر می‌کنم پایشِ نقش علم در زندگی روزمره و توجه به اینکه چگونه در این حوزه، اصل عدم مداخله منجر به نتایجی شگفت‌انگیز و عجیب شده است، بسیار آموزنده است.*» [۱۶]

دلیل دوم که برای خودم مهم‌تر است، این است که بخش‌هایی از ریاضیات مثل نظریهٔ اعداد جبری، نظریهٔ میدان‌های رده‌ای، توابع خودریخت، اعداد ترامتناهی و غیره، کاربرد کمی در بیرون ریاضیات دارند یا اصلاً کاربردی ندارند اما نمی‌توان آنها را دستاوردهایی بزرگ به‌شمار نیاورد.

اگر بخواهیم دوباره با نقاشی مقایسه کنیم و این بار مسائلی را که از دنیای واقعی سرچشمه می‌گیرند، سوژه قرار دهیم، خواهیم دید که نقاشی‌هایی داریم که در آنها از طبیعت الهام گرفته شده است و در عین حال، محض و آبسترہ هستند. اما این مقایسه چندان رضایت‌بخش نیست، زیرا چنین توصیفی از ریاضیات، همهٔ جنبه‌های اساسی آن و به‌ویژه هماهنگی و یگانگی را در بر نمی‌گیرد. در واقع احساس می‌کنم هماهنگی در ریاضیات، خیلی بیشتر از آن است که در هنر به چشم می‌خورد. گواهی بر این مدعا این است که معمولاً یک قضیه را ریاضیدانان متعدد که در مکان‌هایی بسیار دور از یکدیگر زندگی می‌کنند، مستقلاً ثابت می‌کنند؛ یا اینکه تعدادی قابل‌توجه از مقاله‌ها دو یا چند نویسنده دارند. همچنین ممکن است در اثرِ طرح بینشی جدید، به‌ناگاه آشکار شود که بخش‌هایی از ریاضیات که کاملاً مستقل از هم گسترش یافته‌اند، پیوندی بس ژرف با یکدیگر دارند. ریاضیات تا اندازهٔ زیادی یک تعهّد گروهی است. گرچه ریاضیات آن‌قدر گسترده شده است که کسی به‌تنهایی نمی‌تواند در [همهٔ شاخه‌های] آن مهارت کسب کند، ساده‌سازی‌ها و یکسان‌سازی‌ها همپای گسترش و پیشرفتِ بی‌پایان ریاضیات راه می‌پیمایند و یگانگیِ قابل‌توجه ریاضیات را بارها و بارها به نمایش می‌گذارند.

می‌اندیشم پرداختنِ کامل به این دیدگاه صرفاً با توسّل به ملاک‌هایی که پیشتر اشاره کردم مثل زیبایی و ظرافتِ فکری که از نوع ذهنی هستند، یا ملاحظهٔ نیاز علوم و فناوری به ریاضیات، سخت است و در نتیجه این پرسش پیش می‌آید که آیا بجز اینها، محک‌ها و راهنماهای دیگری هم وجود دارند. به نظرم وجود دارند و اکنون مایلم توصیف قبلی‌ام را از ریاضیات با نگریستن به آن از دیدگاه سوم و افزودن یک عنصر اساسی دیگر به آن، کامل کنم. در تمهید این کار، می‌خواهم (به‌ظاهر) از بحثمان اندکی فاصله بگیرم و پرسشی را مطرح کنم. آیا ریاضیات وجودی قائم به ذات دارد؟ آیا ریاضیات را می‌آفرینیم یا اینکه نظریه‌هایی را که جایی مستقل از ما وجود دارند، به‌تدریج کشف می‌کنیم؟ اگر چنین است، این حقایق ریاضی کجا هستند؟

البته اصلاً روشن نیست که پرسش‌هایی از این دست، واقعاً معنادار باشند. با این حال، این احساس که ریاضیات جوری و در جایی از پیش وجود دارد، خیلی [در میان ریاضیدانان] شایع است. مثلاً جی. اچ. هاردی به‌صراحت این مطلب را بیان می‌کند:

> «*معتقدم حقایق ریاضی جایی بیرون از ما وجود دارند و کار ما این است که آنها را کشف یا مشاهده کنیم. قضیه‌هایی که ثابت می‌کنیم و با آب‌وتاب، آنها را 'آفریده‌ها'ی خودمان جا می‌زنیم، چیزی نیستند جز یادداشت‌های ما بر مشاهداتمان. بسیاری از فیلسوفان مشهور از افلاطون به این سو، هریک به نوعی هوادار این دیدگاه بوده‌اند... .*» [۱۷]

البته افراد مؤمن به خدا، این وجودِ پیشینی را در خداوند متجلّی می‌دانند. مثلاً ارمیت واقعاً چنین اعتقادی داشت، چون یک بار گفته بود:

> «*اگر اشتباه نکنم، درست همان‌طور که دنیای حقایق فیزیکی وجود دارد، دنیایی هم وجود دارد که از کلّیّت حقایق ریاضی تشکیل شده است و ما فقط از طریق ذهنمان به آن دنیا دسترسی داریم. هر دو مستقل از ما و مخلوق خداوند هستند.*» [۱۸]

همین چند وقت پیش بود که یکی از همکارانم در یک سخنرانی مقدماتی شرح می‌داد که این پرسش سال‌ها است ذهن او را به خود مشغول کرده است: «چرا خداوند سری‌های استثنایی را خلق کرده است؟»

اما الهی دانستنِ منشأ ریاضیات به‌سختی مورد پذیرش افراد بی‌ایمان واقع می‌شود. ممکن است خیلی‌ها این احساس مبهم را داشته باشند که ریاضیات در جایی وجود دارد اما وقتی دربارهٔ آن می‌اندیشند، نمی‌توانند از این نتیجه بگریزند که ریاضیات منحصراً آفریدهٔ دست بشر است. چنین پرسش‌هایی دربارهٔ مفاهیمی دیگر مانند مدینهٔ فاضله، ارزش‌های معنوی و دین هم مطرح می‌شود و شاید بهتر باشد هر کدام را در جای خودش مورد بررسی قرار دهیم. اما به‌منظورِ رعایت زمان و تناسبِ بحث، به ارائهٔ پاسخی کوتاه و احتمالاً خیلی ساده‌شده به این پرسشِ به‌ظاهر مشکل، اکتفا می‌کنم. من با این دیدگاه موافقم که آدمی میل دارد به همهٔ آن چیزهایی که به یک تمدن یا فرهنگ تعلق دارند، هستی ببخشد، زیرا در آن چیزها با دیگران

شریک است و دربارهٔ آنها تبادل اندیشه می‌کند. یک چیز زمانی برای ما عینی (در برابرِ «ذهنی») می‌شود که متقاعد شویم در ذهن دیگران هم به همان شکلی وجود دارد که در ذهن ما و می‌توانیم دربارهٔ آن فکر و با هم بحث کنیم [۱۹]. چون زبان ریاضیات بسیار دقیق است، کاملاً مناسبِ تعریف مفاهیمی است که چنین اجماعی دربارهٔ آنها وجود دارد. به نظر من، این زبان برای ایجاد *احساس* وجود عینیِ حقایق ریاضی مشابه احساسی که از هاردی و ارمیت در بالا نقل کردیم، کفایت می‌کند؛ صرف‌نظر از اینکه این حقایق از نگاه آنها منشأ دیگری داشته باشند. البته می‌توان تا ابد در این نکتهٔ اخیر غور کرد اما این مطلب واقعاً ربطی به ادامهٔ بحث ما ندارد.

پیش از بیان شرح مبسوط این دیدگاه، می‌خواهم خاطرنشان کنم که نظراتی مشابه هم دربارهٔ درک ما از واقعیت‌های فیزیکی بیان شده است. برای مثال، پوانکاره می‌نویسد:

> «*اطمینان ما به عینیت دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم مبتنی بر شراکت ما با دیگر موجودات ذی‌شعور در این دنیا است. ... بنابراین نخستین لازمهٔ عینیت این است که آنچه عینی است باید برای بیش از یک روح شناخته‌شده باشد و در نتیجه از یکی به دیگری قابل انتقال باشد... .*» [۲۰]

یا اینشتین می‌نویسد:

> «*افراد گوناگون با استفاده از کلام می‌توانند تا اندازه‌ای تجربیات خود را با هم مقایسه کنند. از این طریق معلوم می‌شود که این افراد در برخی از ادراکات حسی اشتراک دارند ولی در مورد برخی دیگر از این ادراکات، چنین ارتباطی وجود ندارد. ما عادت کرده‌ایم ادراکات حسی مشترک در افراد گوناگون را که می‌توان گفت تا اندازه‌ای غیرشخصی هستند، واقعی بپنداریم.*» [۲۱]

اکنون بازمی‌گردیم به ریاضیات. ریاضیدانان در یک دنیایِ فکری، اشتراک ذهنی دارند و آن انبوهی از ایده‌های ریاضی، اشیایی که بخش‌هایی از ویژگی‌های آنها را می‌دانیم و بخش‌هایی را هم نمی‌دانیم، نظریه‌ها، قضیه‌ها، مسائل حل‌شده و حل‌نشده است که همگی با استفاده از ابزارهای ذهنی مطالعه می‌شوند. این نظریه‌ها و مسائل تا اندازه‌ای ملهم از دنیای واقعی هستند اما اساساً از ملاحظات ناب ریاضی نشأت می‌گیرند (اگر بخواهم به مثال‌های قبلی برگردم، می‌توان از گروه‌ها یا چهارگان‌ها به‌عنوان نمونه‌هایی از این نظریه‌ها نام برد). این کلیّت، اگرچه ریشه در ذهن آدمی دارد، همانند فیزیک و زیست‌شناسی، برای ما دانشی طبیعی به معنای متداولِ آن به نظر می‌رسد و به همان اندازه ملموس است. در واقع تأکید می‌کنم که ریاضیات نه‌تنها جنبهٔ نظری که جنبهٔ تجربی نیز دارد. اولی که روشن است: تلاش می‌کنیم قضیه‌های کلی را ثابت و اصول، اثبات‌ها و روش‌ها را بنا کنیم. این همان جنبهٔ نظری است. اما در آغازِ هر نظریه‌ای، هیچ ایده‌ای دربارهٔ اینکه باید منتظر چه پیامدی باشیم و چگونه باید ادامه دهیم وجود ندارد و درک و شهود

از طریق تجربه، یعنی با مطالعهٔ موردهای خاص به‌دست می‌آید. اول امیدواریم که از این طریق بتوانیم به‌سوی حدسی معقول هدایت شویم و سپس، شاید به‌ناگاه ایده‌ای به ذهنمان برسد که ما را به یک اثبات کلی رهنمون شود. البته ممکن است برخی از همان حالت‌های خاص به خودیِ خود، بسیار جالب باشند. این همان جنبهٔ تجربی است. اینکه به‌جای اشیاء واقعی و ابزارهای آزمایشگاهی، با اشیاء ذهنی کار می‌کنیم، واقعاً مهم نیست. این احساس هم که ریاضیات به‌معنایی که گفتیم یک علم تجربی است، چیز جدیدی نیست. مثلاً در حوالی سال ۱۸۸۰، ارمیت به کونیشسبرگر[۱] می‌نویسد:

> «*در جایی از نامه‌تان احساس خود را بیان کردید و به من گفتید: ’هرچه بیشتر به این چیزها می‌اندیشم، بیشتر به این درک می‌رسم که ریاضیات همانند همهٔ علوم دیگر، علمی تجربی است.‘ می‌خواهم بگویم من هم همین احساس را دارم.*» [۲۲]

به‌طور سنتی، این تجربیات در ذهن افراد (یا به‌کمک کاغذ و قلم) صورت می‌گیرد و به همین دلیل از ابزارهای ذهنی صحبت کردم. اما باید اضافه کنم که نزدیک بیست سال است ابزارهای واقعی، یعنی رایانه‌های الکترونیکی، نقشی روزافزون در این تجربیات داشته‌اند و بُعد جدیدی به جنبهٔ تجربیِ ریاضی افزوده‌اند. این بُعد آنقدر گسترش یافته است که می‌توان اندرکنش مهم، متقابل و تعجب‌برانگیز بین علوم رایانه و ریاضیات محض را پیش‌بینی کرد.

اکنون واژهٔ «علم» در عنوان سخنرانی من معنایی گسترده‌تر می‌یابد: منظور نه‌تنها علوم طبیعی است که قبلاً هم چنین بوده، بلکه معنای بسیار ژرف‌ترِ آن، تلقی خودِ ریاضیات به‌عنوان یک علم نظری و تجربی یا به‌جرأت بگویم، یک علم طبیعیِ ذهنی است که اشیاء مورد مطالعه و روش‌های پژوهش در آن، همگی زاییدهٔ ذهن آدمی‌اند. این تلقی از ریاضیات، سخن گفتن از انگیزه‌ها و زیبایی‌شناسی در آن را برایم قدری آسان‌تر می‌کند. اگر نخواهیم کاربرد در علوم طبیعی را به‌عنوان یک محک در نظر بگیریم، باز هم اصل ظرافتِ تمام و کمالِ فکری را از دست نداده‌ایم. هنوز هم محک‌های تقریباً تجربی، یعنی کاربردپذیری در خودِ ریاضیات پابرجا می‌مانند. ملاحظهٔ این حقیقت ریاضی، مسائل حل‌نشده، ساختارها، نیازها و پیوندهای بین حوزه‌های گوناگون، احتمالاً نشانی از جهت‌گیری‌های پُرثمر و ارزشمند در ریاضیات هستند و ریاضیدانان را به سویابی در پژوهش و ارزش‌دهیِ نسبی به مسائل و نظریه‌هایشان رهنمون می‌شوند. معمولاً یکی از آزمون‌های ارزشمندیِ یک نظریهٔ جدید این است که آیا آن نظریه می‌تواند مسائل قدیمی را حل کند یا نه. اما این آزمون، یک محدودیت *بالفعل* برای آزادیِ ریاضیدان است و می‌توان آن را با قید و بندهای یک فیزیکدان مقایسه کرد که به هر تقدیر، پدیده‌هایی را که می‌خواهد برای آنها نظریه بسازد یا آزمایش‌هایی طراحی کند، به‌تصادف برنمی‌گزیند. نمونه‌های زیادی هست که نشان می‌دهد ریاضیدان اغلب می‌تواند پیش‌بینی کند که حوزه‌های معینی از ریاضیات چگونه پیشرفت خواهند کرد و کدام مسائل

[۱] L. Königsberger

را باید مطالعه کند که احتمالاً زودتر حل می‌شوند. اغلبِ اوقات حرف‌هایی که دربارهٔ آیندهٔ ریاضیات زده می‌شود، درست از آب در می‌آیند. البته این پیش‌بینی‌ها تمام و کمال نیستند اما آنقدر پیروزمند هستند که تفاوت ریاضیات را با هنر نشان دهند. مثلاً به‌سختی می‌توان چنین پیش‌بینی‌هایی در مورد آیندهٔ نقاشی پیدا کرد که حتی به‌طور نسبی درست از آب در آمده باشند.

بیش از این نمی‌خواهم در این باره سخن بگویم اما اشاره می‌کنم که ریاضیات را یک علم طبیعی ذهنی به‌عنوان یکی *از سه عنصر* می‌دانم نه به‌طور کلی. از یک سو، نمی‌خواهم از اندرکنش بین ریاضیات و علوم طبیعی چشم‌پوشی کنم به این دلیل که اولاً عقل سلیم حکم می‌کند که مطالب مورد مطالعه در هر حوزه‌ای از علوم طبیعی باید به زبان ریاضیات صورت‌بندی شود و در واقع آن شاکلهٔ اولیه، تنها زمانی در جایگاه یک علم خواهد نشست که این کار انجام شده باشد. پس یقیناً مهم است که ریاضیدانان تلاش کنند در طی این مسیر، یاری‌رسان باشند. ثانیاً بی‌شک، صورت‌بندی و مطالعهٔ ریاضی‌وارِ پدیده‌های پیچیده، دستاوردی بزرگ به‌شمار می‌آید و مسائلی که به‌تبعِ این کار پدید می‌آیند، به ریاضیات غنای بیشتری می‌بخشند. کافی است فقط به نظریهٔ احتمال فکر کنید. ساده بگویم؛ منظورم این است که برای اینکه ریاضیاتِ ارزشمندی تولید کنیم، لازم نیست کاربردپذیریِ آن را پیش‌فرض بگیریم. تاریخ ریاضی نشان می‌دهد که دستاوردهای برجسته از آنِ ریاضیدانانی بوده است که اصلاً به کاربردهای بیرونی فکر نمی‌کرده‌اند و فقط ملاحظات ناب ریاضی راهنمای آنها بوده است و همان‌طور که قبلاً اشاره و تبیین کردیم، این دستاوردها اغلب به شیوه‌هایی کاملاً پیش‌بینی‌نشده، کاربردهایی مهم در علوم طبیعی و مهندسی یافته‌اند.

از سوی دیگر، نمی‌خواهم بگویم که همه چیز را می‌شود به‌طرزی کاملاً معقول پیش‌بینی کرد. در واقع حتی در علوم طبیعی هم این طور نیست، زیرا معمولاً از پیش آشکار نیست که چه آزمایش‌هایی جالب از آب در می‌آیند. ریاضیدانان برجسته هم اشتباهاتی داشته‌اند و گاهی دقیقاً به‌نامِ کاربردپذیری در ریاضیات، ایده‌هایی بی‌ثمر، به‌دردنخور یا حتی خطرناک را مطرح کرده‌اند که البته بعداً معلوم شده است بنیادی بوده‌اند. آزادی از قید و بند کاربردهای عملی که فون‌نویمان آن را برای کل علم ضروری می‌دانست، باید برای ریاضیات هم فراهم باشد.

ممکن است اعتراض شود که در این همانندسازی بین ریاضیات و علوم طبیعی، یک اختلافِ اساسی مغفول مانده است: در علوم طبیعی و فناوری، غالباً به مسائلی برمی‌خوریم که اگر حل نشوند، اصلاً پیشرفتی حاصل نمی‌شود. حال آنکه در دنیای اندیشهٔ ریاضی، این آزادیِ *مشروع* وجود دارد که مسائلی را که آشکارا حل‌ناپذیر یا بسیار سخت هستند، کنار بگذاریم و به مسائلی بپردازیم که خوش‌دست‌تر هستند. گرچه این امکان هم هست که با این کار، در همان مسیرهای کم‌دوامی بیفتیم که فون‌نویمان از آنها هراس داشت. پس آیا ریاضیدانی که ریاضیات را «هنرِ یافتنِ مسائل حل‌پذیر» معرفی می‌کند، خودش را فریب نداده است؟ خیلی جالب است که من این تعریف را از ریاضیدانی شنیده‌ام که کارهای پژوهشی‌اش بسیار

برجسته‌اند، زیرا مسائل زیادی در آنها مطالعه شده است که در زمان خودش کاملاً خاص بوده‌اند اما بعداً آشکار شده است که مسائلی بنیادی بوده‌اند و حل آنها مسیرهای پژوهشی نوینی را گشوده است. منظورم هاینتس هوپف[۱] است.

با وجود این، نمی‌توان انکار کرد که گاهی پیروی از مسیرهای کم‌دوام، منجر به نتایج بدیهی یا بی‌معنی می‌شود. حتی ممکن است یک مکتب ریاضیِ موفق، بعدها دچار یک دورهٔ بی‌ثمری شود و بدتر اینکه در همان دوره خیلی هم اعمال نفوذ کند. با این حال، جای خوشوقتی است که [در ریاضیات] همیشه در پی هر مرضی، نوشدارویی می‌رسد و واکنش آن باعث از میان برداشته شدنِ این مسیرهای اشتباه و جهت‌های بی‌ثمر می‌شود. تاکنون ریاضیات توانسته است بر این گونه بیماری‌های حین رشد فائق آید و من باور دارم که مادام که این همه ریاضیدان بااستعداد وجود دارد، در آینده نیز چنین خواهد شد. شگفت است که بسیاری از ما احساسی از یگانگی در ریاضیات داریم؛ اما ترسیم خطوط فکری کاملاً دقیق زیر لوای درکِ ما از آن یگانگی، کاری خطرناک است. مهم است که آزادیِ فکری [در ریاضیات] برقرار باشد حتی اگر گهگاه از آن سوء استفاده شود. نمی‌شود به‌طور کامل شرح داد که چرا این دیدگاه اینقدر موفقیت‌آمیز است. مثلاً در کارهای هوپف تا اندازه‌ای می‌توان محک‌های معقول را در انتخاب مسائل مشاهده کرد: برای نمونه، آنها غالباً اولین موارد خاص از یک مسئلهٔ کلی بوده‌اند که روش‌های شناخته‌شدهٔ اثبات برای آن قابل استفاده نبوده است. البته او از این موضوع آگاه بود ولی این همهٔ ابهامات را رفع نمی‌کند. احتمالاً او همیشه پیش‌بینی نمی‌کرده است که کارش چقدر تأثیرگذار خواهد شد و به احتمال زیاد، در این باره نگران هم نبوده است. این بخشی از هوشمندیِ یک ریاضیدان است که به سمت مسائل «خوب» کشیده شود؛ یعنی مسائلی که بعداً معلوم شود مهم هستند حتی اگر در زمانی که آنها را دست می‌گرفته است، چنین چیزی برایش روشن نبوده باشد. بخشی از انگیزه‌های یک ریاضیدان برای افتادن در این مسیر، مشاهدات علمی معقول و بخشی دیگر، کنجکاوی محض، غریزه، شهود یا مفروضات کاملاً زیبایی‌شناختی است. اینجاست که به موضوع پایانی سخنرانی‌ام می‌رسم: حس زیبایی‌شناختی در ریاضیات.

پیش از این اشاره کردم که ریاضیات یک هنر و منظومه‌ای از ایده‌ها است. اگر این دیدگاه را فرض بگیریم، آن‌وقت می‌توان نتیجه گرفت که به‌منظور ارج‌گذاری به ریاضیات و لذت بردن از آن، باید احساسی یکتا دربارهٔ ظرافت فکری و زیباییِ ایده‌ها در یک دنیای ذهنی بسیار خاص داشته باشیم. تعجبی ندارد که در این باره به‌سختی بتوان با یک غیرریاضیدانان تبادل اندیشه کرد: اشعار ما به زبانی بسیار تخصصی نوشته می‌شوند که همان زبان ریاضیات است. گرچه این اشعار به بسیاری از زبان‌های آشناتر هم بازگو می‌شوند، اما زبان ریاضیات یگانه است و قابل ترجمه به زبان‌های دیگر نیست و متأسفانه فهم این اشعار

---
[۱] Heinz Hopf

فقط به زبان اصلی میسّر است. در این مورد، شباهت ریاضیات به هنر آشکار است. برای اینکه از موسیقی و نقاشی هم سر در بیاوریم باید آموزش‌هایی ببینیم؛ یعنی باید زبان خاصی را بیاموزیم.

مدت‌ها است که به این نظرها و مشابهت‌ها باور داشته‌ام و اکنون بدون اینکه در اندیشهٔ زیربنایی‌ام دربارهٔ ریاضیات تغییری ایجاد شده باشد، می‌خواهم این دیدگاه‌ها را در راستای سخنان قبلی‌ام، بازگو کنم. معتقدم در چارچوب ریاضیات، اندیشه‌های زیبایی‌شناختی ما همیشه تا این اندازه محض و درونی نبوده و چندتایی محک بیرونی مانند معنا، پیامدها، کاربردپذیری و سودمندی هم در آن جای داشته است. در ریاضیات، داوری دربارهٔ یک قضیه، یک نظریه یا یک اثبات، متأثر از این چیزها بوده است و ما خیلی ساده آن را با زیبایی‌شناسی یکسان گرفته‌ایم. تلاش می‌کنم منظورم را با اشارهٔ مجدد به نظریهٔ گالوا تبیین کنم. این نظریه عموماً به‌عنوان یکی از زیباترین فصل‌های ریاضیات، در خاطرها جای دارد. چرا؟ اول به این دلیل که یکی از قدیمی‌ترین و، در زمان خودش، مهم‌ترین مسائل دربارهٔ معادلات را حل کرده است. دوم به این دلیل که این نظریه بسیار گسترده‌تر از آن است که صرفاً ابزاری برای حل معادلات با رادیکال‌ها باشد. سوم اینکه این نظریه فقط بر پایهٔ چند اصل بسیار هوشمندانه و ساده بنا شده است که چارچوبی جدید متضمن مفاهیم جدیدِ بسیار اصیل را تشکیل می‌دهند. چهارم اینکه این دیدگاه‌ها و مفاهیم جدید، به‌ویژه مفهوم گروه، مسیرهایی جدید را گشودند و تأثیری ماندگار بر کل ریاضیات گذاشتند.

حتماً توجه کرده‌اید که از این چهار دلیل، فقط سومی داوریِ زیبایی‌شناختی است و این دلیلی است که هر کسی تنها پس از درک جزئیات فنی این نظریه، می‌تواند نظرش را دربارهٔ آن بیان کند. دلایل دیگر، ماهیتی متفاوت دارند. دربارهٔ هر نظریه‌ای در علوم طبیعی همین حرف‌ها را می‌توان گفت. البته این نظریه‌ها محتوای عینیِ بیشتری دارند و یک ریاضیدان حتی اگر بر جزئیات فنی آنها اشراف نداشته باشد، می‌تواند دربارهٔ آنها نظر بدهد. من در راستای اهداف سخنرانی‌ام، این چهار دلیل را از هم سوا کردم اما معمولاً این کار را آشکارا انجام نمی‌دهم و می‌اندیشم این چهار دلیل هر یک در زیباییِ نظریهٔ گالوا نقش دارد. از این جهت، فکر می‌کنم این مثال کاملاً نوعی است. آنچه که زیبا توصیفش می‌کنیم در واقع آمیزه‌ای از نگرش‌های گوناگون است. برای مثال، من یک روش اثبات را طبیعتاً زیباتر می‌دانم اگر کاربردهای جدید و غیرمنتظره داشته باشد حتی اگر خودِ روش تغییر نکرده باشد. ممکن است این روش اثبات مهم‌تر بشود اما فی‌نفسه بر زیبایی‌اش افزوده نمی‌شود. چون همهٔ اینها درون خودِ ریاضیات رخ می‌دهد، به‌سختی می‌توان به یک غیرریاضیدان کمک کرد تا وارد دنیای اندیشه‌های زیبایی‌شناختیِ ما بشود. با وجود این، امیدوارم بتوانیم به آنها کمک کنیم تا بپذیرند که اجماع بر سرِ عقاید زیبایی‌شناختیِ ما بیش از آن است که در هنر به چشم می‌خورد؛ اجماعی ورای مرزهای جغرافیایی و توالیِ تاریخی. به هر تقدیر، من این را یک عامل مهم تلقی می‌کنم اما باز هم از پر و بال دادنِ بیش از اندازه به آن می‌پرهیزم، زیرا بحث بر سرِ درجهٔ اختلاف است نه اختلافِ مطلق. قضاوت زیبایی‌شناختی از کار یک آهنگ‌ساز یا نقاش نیز برگرفته

از عوامل بیرونی مانند تأثیر بر مخاطب، آثار پیشین و جایگاه آن اثر در قیاس با آثار دیگر است حتی اگر دامنهٔ نفوذ این عوامل کم باشد. از سوی دیگر، دربارهٔ ارزیابی یک اثر علمی ریاضی هم گاهی اختلاف نظر و تردید وجود دارد اما نه به آن شدت. البته همهٔ این اختلاف‌ها را باید به‌خوبی تبیین کرد اما به‌دلیل ضیق وقت، نمی‌توانم در اینجا وارد این مبحث شوم.

در این بازهٔ زمانی محدودی که در اختیار داشتم، برایم آسان‌تر بود که چند جمله‌ای کوتاه دربارهٔ خودِ ریاضیات بیان کنم و بگذرم. اما متأسفانه یا خوشبختانه، ریاضیات هم همچون دیگر فعالیت‌های بشری که افراد زیادی طی چندین قرن در آن سهیم بوده‌اند، جوری خودش را بروز نمی‌دهد که بتوان با چند فرمول ساده آن را توصیف کرد. تقریباً هر بیان کلی دربارهٔ ریاضیات را باید به گونه‌ای نقد کرد. شاید تنها استثنا در این مورد، خودِ همین جمله باشد. امیدوارم سخنانم دست‌کم گویای این مطلب بوده باشد که ریاضیات پدیده‌ای پیچیده است که آنقدر صفات مشخصهٔ مشترک با هنر، علوم تجربی و علوم نظری دارد که شایسته است آن را همزمان جزء هر سهٔ آنها بدانیم و در عین حال، آن را متفاوت از هر سه تلقی کنیم.

می‌دانم که بیش از آن پرسش‌هایی که پاسخ دادم، پرسش‌های جدید ایجاد کردم، سخنم دربارهٔ موضوعاتی که شرح دادم خیلی مختصر بود و به برخی از موارد مهم مانند ارزش این آفریدهٔ ذهن بشر حتی نزدیک هم نشدم. البته می‌توان به کاربردهای بی‌شمارِ ریاضیات در علوم طبیعی و مهندسی اشاره کرد که بسیاری از آنها تأثیر زیادی بر زندگی روزمرهٔ بشر داشته‌اند و به این طریق، جایگاهی اجتماعی برای ریاضیات دست و پا کرد. اما اعتراف می‌کنم که به‌عنوان یک ریاضیدان محض‌گرا، بیشتر علاقه دارم ریاضیات را در چارچوب خودش ارزیابی کنم. سهم ریاضیدانان گوناگون در هم آمیخته است تا ساختار فکریِ عظیم‌الجثه‌ای تشکیل شود که به نظر من، گواهی تأثیرگذار از توان فکری بشر است. ژاکوبیِ ریاضیدان یک بار نوشته بود: «تنها هدف علم، بزرگداشت ذهن بشر است.» [۲۳] باورم این است که ریاضیات واقعاً افتخاری بزرگ برای ذهن بشر است.

مراجع

[۱] این دفاع از پایان‌نامهٔ لئوپولد کرونکر بوده است. نگاه کنید به

Werke, 5 vol., Teubner, Leipzig, 1895-1930, vol. 1, p.73.

آن فرد مخالف هم جی. آیزنشتاین بوده است. این را از آنجا فهمیدم که نام و نظر آن فرد مخالف در یکی از پاورقی‌هایی آمده است که ای. لَمپ بر سخنرانی پاول دوبوا- ریمون با عنوان «ریاضیات چیست و ریاضیدان کیست؟» نوشته و آن را پس از مرگ دوبوا- ریمون در

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, **19** (1910), 190–198

به چاپ رسانده است.

[۲] برای مشاهدهٔ شرح تعدادی از این نظرات، رجوع کنید به

Pringsheim, A., Ueber den wert und angeblichen unwert der mathematik, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **13** (1904), 357–382.

[۳] نامه به اف. دبلیو. بِسِل به تاریخ ۱۸ نوامبر ۱۸۱۱. مرجع زیر را ببینید:

Auwers Verlag, G. F., *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, Lepzig, 1880, p.156.

[۴] در واقع ردپای آغاز نظریهٔ گروه‌ها را باید در برخی کارهای قبل‌تر به‌ویژه پژوهش‌های لاگرانژ جستجو کرد که گالوا با آنها آشنایی داشت. اما دیدگاه گالوا آنقدر کلی و مجرد بود و بیانی طرح‌وار داشت که خیلی به‌کندی می‌شد آن را هضم کرد. برای دریافت اطلاعات تاریخی دربارهٔ نظریهٔ معادلات و آغاز نظریهٔ گروه‌ها، برای مثال، مقالات سوم و پنجم از کتابِ

Bourbaki, N., *Eléments d'Historie des Mathématiques*, Hermann éd., Paris, 1969.

را بخوانید.

[۵] Dyson, F. J., Mathematics in the physical sciences, *Scientific American*, **211** (1964), 129-146.

[۶] مقدمهٔ تاریخی که وَن در واردِن بر

Sources in quantum mechanics, *Classics of Science*, vol. 5, Dover Pub., New York, 1967

نوشته است به‌ویژه صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸ را مطالعه کنید. همچنین یادداشت دیراک را دربارهٔ آشنایی با تعویض‌ناپذیری در مکانیک کوانتمی در مرجع [۷] مشاهده کنید.

[۷] نگاه کنید به

Wigner, E. P., The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **13** (1960), 1–14.

از میان جنبه‌های بسیارِ این اندرکنش، آن که برای من برجسته‌تر به نظر می‌آید این است که صورتگرایی ریاضی منجر به ایده‌های بنیادی، جدید و کاملاً فیزیکی می‌شود. یکی از مشهورترین مثال‌ها در این زمینه، کشف پوزیترون است. در سال ۱۹۲۸ پل ام. دیراک معادلات حرکت الکترون را در مکانیک کوانتمی نسبیتی نوشت. جواب این معادلات، ذره‌ای را معرفی می‌کرد که هم‌جرمِ الکترون بود ولی بار الکتریکی مخالفِ آن داشت. تمام تلاش‌ها برای توصیف رضایت‌بخش این جواب‌ها یا دستکاری مناسبِ در معادلات که منجر به رد این جواب‌ها شود، شکست خورد. سرانجام دیراک وجود ذره‌ای با این ویژگی‌ها را پیش‌بینی کرد که بعداً توسط اندرسون ثابت شد. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، رجوع کنید به

Dirac, P. A. M., *The Development of Quantum Mechanics*, Gordon and Breach, New York, 1971.

یک نمونهٔ جدیدتر و حتی فراگیرتر، کاربرد نمایش تحویل‌ناپذیر گروه یکانی خاص $SU(۳)$ در نظریهٔ سه متغیر مختلط است که منجر به ابداع نظریهٔ به‌اصطلاح «مسیر هشت‌تایه» شد. یکی از نخستین موفقیت‌های این نظریه که بسیار جلب توجه کرد، کشف ذرهٔ Ω^- بود. نُه‌تا باریون با در نظر گرفتنِ دوتا از اعداد کوانتمیِ مشخصهٔ آنها، به نُه نقطه در یک پیکربندی ریاضی‌وار بسیار خاصِ ده‌نقطه‌ای در صفحه (ده‌تا وزن مربوط به یک نمایش ده‌بُعدی از $SU(۳)$) نسبت داده می‌شود. این طور بود که ام. گِلمان حدس زد که بایستی ذره‌ای با ویژگی‌های خوش‌تعریف معین نظیر آن نقطهٔ دهم وجود داشته باشد. دو سال بعد این ذره را مشاهده کردند. پیشرفت‌های بعدی در این راستا، منجر به نظریهٔ «کوارک‌ها» شد. برای مطالعهٔ مبادی این نظریه، مرجع [۵] و

Gell'man M., Ne'eman, Y., *The Eightfold Way*, W. A. Benjamin, New York, 1964

را ملاحظه کنید.

[۸] برخی از مقالات اویلر در این باره در

Euler, L., *Opera Omnia*, I.2, 62-63, 285, 461, 576; I.3, 5.2

آمده است. از آندره ویل ممنونم که این نکته را به من متذکر شد. در اینجا برای نمونه، بخشی از صفحه‌های ۶۲ و ۶۳ی این اثر را که به سال ۱۷۴۷ منتشر شده و اِی. ویل آن را از لاتین ترجمه کرده است، می‌آوریم:

«نویسنده از قدرت‌نمایی ریاضیدانان بزرگی که گاهی فتوا می‌دهند نظریهٔ اعداد به‌تمامی بی‌فایده است و شایستگیِ پژوهش ندارد، پریشان‌خاطر نمی‌شود. اول به این دلیل که دانش، به خودیِ خود خوب است حتی اگر به‌ظاهر از کاربردهای روزمره فاصلهٔ زیادی گرفته باشد. دوم اینکه جنبه‌های گوناگون واقعیت‌هایی که در دسترسِ ذهن ما هستند، پیوندشان با یکدیگر آنقدر نزدیک است که نمی‌توانیم هیچ‌یک از آنها را به‌بهانهٔ بی‌فایده بودن، نادیده بگیریم. به‌علاوه حتی اگر به نظر برسد که اثبات برخی از گزاره‌ها در حال حاضر هیچ کاربردی ندارد، روش‌های حل این مسائل، مسیرهایی برای کشف نتایج سودمندتر می‌گشایند. از این‌رو نویسنده معتقد است که وقت و تلاش خود را برای اثبات قضیه‌های متعدد دربارهٔ عددهای صحیح و مقسوم‌علیه‌های آنها هدر نداده است. در واقع نظریهٔ اعداد نه‌تنها بی‌فایده نیست، بلکه حتی در آنالیز هم کاربرد دارد. به‌علاوه شک دارم بعدها معلوم شود روش‌هایی که نویسنده در اینجا به‌کار برده است، هیچ ارزشی در دیگر پژوهش‌های مهم ندارند.»

[۹] Hardy, G. H., *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1940, pp. 139–140.

[۱۰] نگاه کنید به

Valery, P., *Degas, Danse, Dessin*, A. Vollard éd., Paris, 1936

و همچنین (به‌ویژه صفحه‌های ۱۲۰۷ تا ۱۲۰۹)

Œuvre II, La Pléiade, Gallimard éd., Paris, 1966, pp. 1163–1240.

[۱۱] متن زیر از نامه‌ای اقتباس شده است که گاوس در سوم سپتامبر ۱۸۰۵ به فاصلهٔ کوتاهی پس از حل مسئله‌ای («علامت مجموع‌های گاوسی») که چندین سال روی آن کار می‌کرد، به اولبرس نوشته است:

«سرانجام همین چند روز پیش موفق شدم؛ البته نه به‌سببِ پژوهش‌های ساعیانهٔ خودم، بلکه می‌گویم این یک توفیق الهی بود. انگار جرقه‌ای در ذهنم زد و معما حل شد وگرنه خودم قادر نبودم رشتهٔ ارتباط بین دانسته‌هایم را با نتایج آخرین تلاشم و آنچه به کامیابی منجر شد، کشف کنم.» (*Gesammelte Werke*, vol. 10, pp. 24–25)

در اینجا بد نیست به توصیفی اشاره کنیم که پوانکاره از برخی کشف‌های بنیادی خودش در زمینهٔ توابع خودریخت ارائه می‌کند:

Poincaré, H., L'invention mathematique, in *Science et Méthode*, E. Flammarion éd., Paris, 1908, Chap. III.

[۱۲] نگاه کنید به

von Neumann, J., The mathematician, in Robert B. Heywood (ed.), *The Works of the Mind*, University of Chicago Press, 1947, pp. 180–187

و

von Neumann, J., *Collected Works*, 6 vols. Pergamon Press, New York, 1961, vol. I, pp. 1–9.

[۱۳] صفحهٔ ۱۳۹ از فصل ۵ کتابِ

Poincaré, H., *La Valeure de la Science*, E. Flammarion éd., Paris, 1905

را مطالعه کنید. در واقع این فصل، صورت چاپیِ سخنرانی پوانکاره است که در اولین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در زوریخ به سال ۱۸۹۷ ایراد شده است.

[۱۴] رجوع کنید به [۱۳] صفحهٔ ۱۴۷.

[۱۵] Kandinski, W., *Rückblick 1901-1913*, H. Walden ed., 1913 & W.Klein-Verlag, 1955, 20–21.

[۱۶] خطابهٔ جان فون نویمان برای دانشجویان فارغ‌التحصیل دانشگاه پرینستون در ژوئن ۱۹۵۴. رجوع کنید به
von Neumann, J., *Collected Works*, 6 vols. Pergamon Press, New York, 1961, vol. VI, pp. 477–490.

[۱۷] رجوع کنید به [۹] صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۴.

[۱۸] Darboux, G., La vie et l'Œuvre de Charles Hermite, *Revue du mois*, 10 January 1906, p.46.

[۱۹] نگاه کنید به
White, L., The locus of mathematical reality: An anthropological footnote, *Philosophy of Science*, **14** (1947), 189–303

و همچنین

Newman, J., R., *The World of Mathematics*, 4 vols., Simon & Schuster, New York, 1956, vol. 4, pp. 2348–2364.

[۲۰] رجوع کنید به [۱۳] صفحهٔ ۲۶۲.

[۲۱] برگرفته از سخنرانی اینشتین که در ماه می سال ۱۹۲۱ در دانشگاه پرینستون ایراد شده است:
Einstein, A., *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie*, Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1922, p.1.

ترجمهٔ انگلیسی این سخنرانی در مجموعهٔ The Meaning of Relativity از انتشارات دانشگاه پرینستون به سال ۱۹۴۵ آمده است.

[۲۲] نگاه کنید به
Königsberger, L., Die mathematik eine geistes-oder naturwissenschaft?, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **23** (1914), 1–12.

[۲۳] ژاکوبی این جمله را در نامه‌ای به تاریخ دوم ژوئیهٔ ۱۸۳۰ به آدرین ماری لژاندر نوشته است. رجوع کنید به
Jacobi, C. G. J., *Gesammelte Werke*, G. Riemer, Berlin, 1881-1891, vol. 1, pp. 453–455.

روح‌الله جهانی‌پور: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: jahanipu@kashanu.ac.ir
سعید مقصودی: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
رایانامه: s_maghsodi@znu.ac.ir