فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، صص. ۸۱ تا ۱۰۷

کاشی‌کاری*

فدریکو آردیلا و ریچارد پی. استنلی

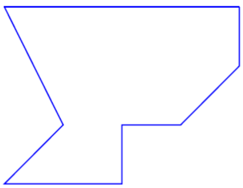
مترجم: حمیدرضا نعمتی و رسول کاظمی

چکیده

در این مقاله، مسئلهٔ کاشی‌کاریِ یک ناحیه از صفحه را مطرح و پیشرفت‌هایی را که در زمینهٔ حل این مسئلهٔ صورت گرفته است، مرور می‌کنیم. از جمله، به این پرسش‌ها پاسخ می‌دهیم که آیا کاشی‌کاریِ یک ناحیه امکان‌پذیر است یا نه و اگر هست، به چند طریق. همچنین برخی نتایج دربارهٔ کاشی‌کاری یک ناحیهٔ کراندار با تعداد بی‌شمار کاشی را نیز بیان می‌کنیم.

۱. سرآغاز

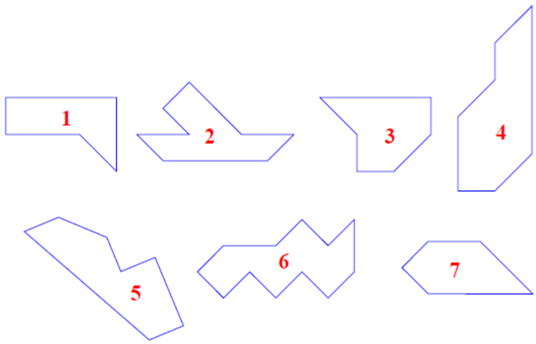
این پازل را در نظر بگیرید: می‌خواهیم ناحیهٔ



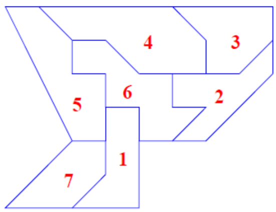
را با استفاده از هفت کاشی زیر بدون اینکه کاشی‌ها همپوشانی داشته باشند، به‌طور کامل بپوشانیم:

عبارات و کلمات کلیدی. سرگرمی‌های ریاضی؛ کاشی‌کاری؛ رنگ‌آمیزی کاشی‌کاری‌ها؛ حل پازل‌ها.

* نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:
Ardila, F., Stanley, Richard P., Tiling, *The Mathematical Intelligencer*, **32** (2010), no. 4, 32–43.



انتقال و چرخاندن این هفت کاشی به هر صورتی مجاز است اما از هر کاشی باید دقیقاً یک بار استفاده شود. در آغاز می‌توان مشاهده کرد که برخی از این قطعات به‌خوبی در بخش‌های معینی از ناحیه جای می‌گیرند اما راه‌حل واقعی را تنها می‌توان از راه آزمون و خطا پیدا کرد. به این دلیل، اگرچه این یک معمای



سرگرم‌کننده است، به‌لحاظ ریاضی چندان جالب نیست. به هر حال این مثالی از یک مسئلهٔ کاشی‌کاری است. در یک مسئلهٔ کاشی‌کاری، باید ناحیهٔ داده‌شده را با استفاده از یک مجموعه از کاشی‌ها به‌طور کامل و بدون روی‌هم‌افتادگی بپوشانیم. چنین پوششی، یک *کاشی‌کاری* نامیده می‌شود. البته توجه خود را روی ناحیه‌ها و کاشی‌های خاصی معطوف می‌کنیم که به مسائل ریاضی جالب منجر می‌شوند.

برای یک ناحیه و یک مجموعهٔ داده‌شده از کاشی‌ها، پرسش‌های گوناگونی را می‌توان مطرح کرد. برخی از پرسش‌هایی که به آنها خواهیم پرداخت، از این قرار هستند:

(۱) آیا اصلاً کاشی‌کاری وجود دارد؟
(۲) دقیقاً چه تعداد کاشی‌کاری وجود دارد؟
(۳) تقریباً چه تعداد کاشی‌کاری وجود دارد؟
(۴) آیا یافتن کاشی‌کاری آسان است؟
(۵) آیا اثبات وجود نداشتنِ کاشی‌کاری آسان است؟
(۶) آیا متقاعد کردن کسی به این که هیچ کاشی‌کاری‌ای موجود نیست، آسان است؟

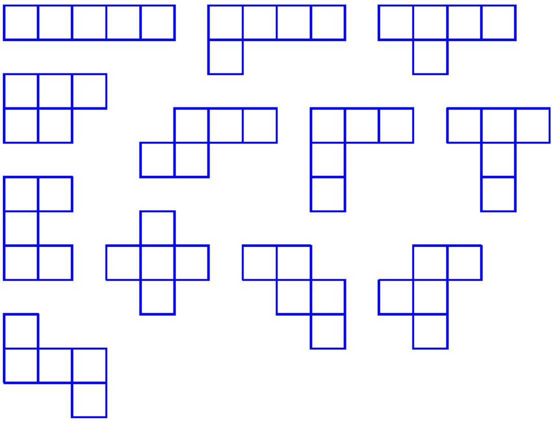
(۷) شکل یک کاشی‌کاریِ نوعی چگونه است؟

(۸) آیا رابطه‌ای بین کاشی‌کاری‌های متفاوت وجود دارد؟

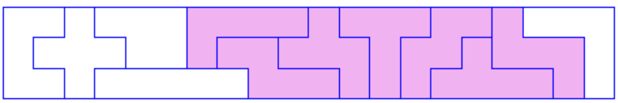
(۹) آیا یافتن یک کاشی‌کاری با ویژگی‌های خاص مانند تقارن امکان دارد؟

۲. آیا اصلاً کاشی‌کاری وجود دارد؟

با نگاه کردن به مجموعهٔ کاشی‌ها و ناحیه‌ای که می‌خواهیم بپوشانیم، چندان روشن نیست که بتوان آن ناحیه را کاشی‌کاری کرد. پازلی که در آغاز مقاله به آن اشاره شد، از این گونه است. اکنون یک پازل مشابه در نظر می‌گیریم که در آن، مجموعهٔ کاشی‌ها، یعنی *پُلیومینوهای* سُلُمون گِلوم[1]، به‌لحاظ ریاضی جالب‌تر هستند.



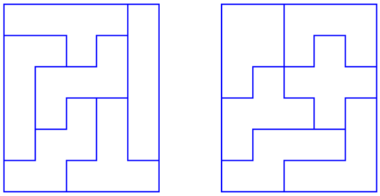
یک پِنتومینو[2]، مجموعه‌ای از پنج مربع واحد است که کنار یکدیگر آرایش یافته‌اند و اتصال آنها ضلع‌به‌ضلع است. پِنتومینوها را می‌توان آزادانه چرخاند یا وارونه کرد. در شکل بالا ۱۲ پِنتومینوی گوناگون نشان داده شده است. از آنجا که مساحت کل آنها ۶۰ است، مثلاً می‌توان پرسید «آیا کاشی‌کاری یک مستطیل 20×3 با دقیقاً یک بار استفاده از هر پِنتومینو، امکان‌پذیر است؟» این پازل را می‌توان دست‌کم به دو روش حل کرد. یک راه‌حل در شکل زیر نشان داده شده است. راه‌حل دیگر از چرخاندن ۱۸۰ درجه‌ایِ



ناحیهٔ سایه‌دار به‌دست می‌آید. در واقع با صرف زمان و تلاش برای یافتن یک کاشی‌کاری، درمی‌یابیم که این دو روش (و دوران‌ها و بازتاب‌های آنها) تنها راه‌حل‌های ممکن هستند.

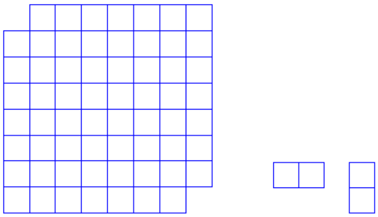
[1] Solomon Golomb’s polyominoes [2] pentomino

همچنین می‌توان پرسید که «آیا می‌توان دو مستطیل ۵ × ۶ را با دقیقاً یک بار استفاده از هر پِنتومینو، کاشی‌کاری کرد؟» یک راه انجام این کار در شکل زیر نشان داده شده است. تنها یک کاشی‌کاری دیگر از این نوع وجود دارد که آن هم با بازآراییِ دوتا از پِنتومینوها به‌دست می‌آید. یافتن آن دو کاشی، معمای جالبی برای خواننده است.



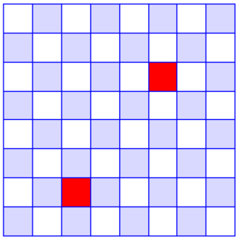
با دانستن این، می‌توان حدس زد که با استفاده از این ۱۲ پِنتومینو، کاشی‌کاری‌های متعددی برای یک مستطیل ۱۰ × ۶ وجود دارد. با این حال ممکن است نتوانیم تعداد کاشی‌کاری‌های موجود را پیش‌بینی کنیم. یک جستجوی رایانه‌ای جامع مشخص کرده است که ۲۳۳۹ تا از این نوع کاشی‌کاری وجود دارد.

این پرسش‌ها منجر به طرح معماهایی جالب می‌شوند اما نه از نوع مسائل جالب ریاضی که به‌دنبال آنها هستیم. برای اینکه منظورمان را روشن کنیم، مسئله‌ای را در نظر می‌گیریم که ظاهراً شباهت‌هایی دارد اما استدلال ریاضی بیشتری در آن به‌کار رفته است. دو گوشهٔ مقابل هم از یک صفحهٔ شطرنج ۸ × ۸ را حذف می‌کنیم و می‌پرسیم «آیا ممکن است شکل حاصل را با ۳۱ دومینو[۱] کاشی‌کاری کرد؟»

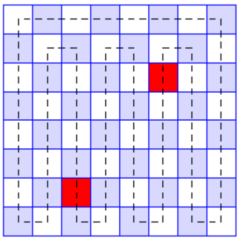


این صفحهٔ ۸ × ۸ در صورتی که خانه‌هایش، یک در میان با سفید و سیاه رنگ نشده باشند، نمی‌تواند یک صفحهٔ شطرج باشد. معلوم خواهد شد که این رنگ‌آمیزی در پاسخگویی به سؤال مورد بحث، بسیار تعیین‌کننده است. توجه کنید که یک دومینو هر جای این صفحهٔ شطرنج که قرار گیرد، یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید از صفحه را خواهد پوشاند. بنابراین ۳۱ دومینو، ۳۱ خانهٔ سیاه و ۳۱ خانهٔ سفید را خواهند پوشاند. اما این صفحه ۳۲ خانهٔ مشکی و ۳۰ خانهٔ سفید دارد و بنابراین چنین کاشی‌کاری‌ای برای آن موجود *نیست*. این نمونه‌ای از یک *استدلال رنگ‌آمیزی*[۲] است. چنین استدلال‌هایی در اثبات ناممکن بودنِ برخی کاشی‌کاری‌های مشخص، بسیار رایج هستند.

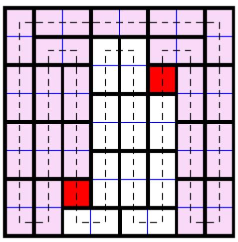
[۱] domino [۲] coloring argument



صورت طبیعی دیگری از این مسئله این است که یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید را مثل دو خانه‌ای که در شکل بالا سایه زده‌ایم، از صفحهٔ شطرنج حذف کنیم. در صفحهٔ به‌دست آمده، تعداد خانه‌های سیاه و سفید برابر است. آیا می‌توان این صفحه را با دومینوها کاشی‌کاری کرد؟ می‌خواهیم نشان دهیم صرف‌نظر از اینکه کدام خانهٔ سیاه و کدام خانهٔ سفید را حذف کرده باشیم، پاسخ این سؤال مثبت است. یک مسیر بسته مانند مسیر نشان داده‌شده در شکل زیر را در نظر می‌گیریم که از همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج گذشته است. پیمودن مسیر را با شروع از خانه‌ای که بلافاصله پس از خانهٔ مشکیِ حذف‌شده از صفحهٔ شطرنج



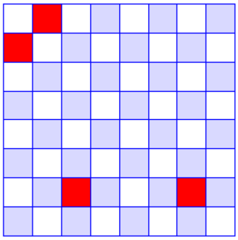
قرار دارد، آغاز می‌کنیم. اولین و دومین خانه از مسیر را با یک دومینو می‌پوشانیم. این دو خانه به‌ترتیب، سفید و سیاه هستند. سپس سومین و چهارمین خانه را با یک دومینو می‌پوشانیم. آنها نیز به‌ترتیب، سفید و سیاه هستند. این کار را تا زمانی که مسیر به حفرهٔ دوم صفحهٔ شطرنج برسد، ادامه می‌دهیم. خوشبختانه



چون حفرهٔ دوم سفید است، پس هیچ فاصله‌ای بین آخرین دومینوی جایگذاری‌شده و این حفره وجود ندارد. بنابراین می‌توانیم این حفره را نادیده بگیریم و پوشاندن مسیر با دومینوهای پی‌درپی را ادامه دهیم. وقتی که

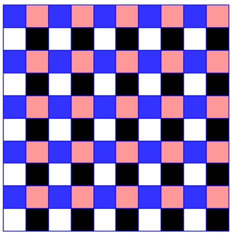
مسیر به حفرهٔ اول باز می‌گردد، دوباره هیچ فاصله‌ای بین آخرین دومینوی جایگذاری‌شده و این حفره وجود ندارد. از این‌رو صفحه کاملاً با دومینوها کاشی‌کاری می‌شود. این فرآیند را در شکل بالا نشان داده‌ایم.

اگر دو خانهٔ سیاه و دو خانهٔ سفید را حذف کنیم، چه می‌شود؟ اگر نزدیکترین چهار خانه به یک گوشهٔ صفحه را حذف کنیم، به‌روشنی یک کاشی‌کاری با دومینوها وجود خواهد داشت. از سوی دیگر، در مثال زیر هیچ کاشی‌کاری‌ای با دومینوها وجود ندارد، زیرا هیچ راهی برای پوشاندن خانهٔ گوشهٔ سمت چپ بالا با یک دومینو وجود ندارد. این پرسش از پرسش قبلی هوشمندانه‌تر است. مسئلهٔ توصیف زیرمجموعه‌هایی



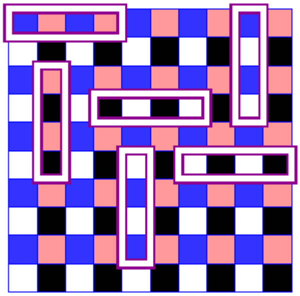
از صفحهٔ شطرنج که می‌توان آنها را با دومینوها کاشی‌کاری کرد، به ریاضیات بسیار زیبایی منجر می‌شود. در بخش ۵، این موضوع را بیشتر تبیین خواهیم کرد.

اکنون مثال دشوارتری از استدلال رنگ‌آمیزی را بررسی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم یک صفحهٔ ۱۰×۱۰ را *نمی‌توان* با مستطیل‌های ۴×۱ کاشی‌کاری کرد. تخصیص یک رنگ‌آمیزیِ شطرنجی به این صفحه،

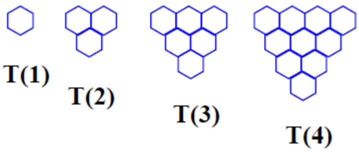


هیچ اطلاعی دربارهٔ وجود کاشی‌کاری به ما نمی‌دهد. پس بیایید همان‌طور که در شکل بالا نشان داده شده است، از چهار رنگ استفاده کنیم. هر کاشی ۴×۱ که در این صفحه قرار می‌دهیم، تعدادی *زوج* (که ممکن است صفر هم باشد) از خانه‌های همرنگ را خواهد پوشاند. بنابراین اگر یک کاشی‌کاری از این صفحه می‌داشتیم، تعداد کل خانه‌ها از هر رنگ بایستی زوج می‌بود. چون ۲۵ خانه از هر رنگ وجود دارد، پس این کاشی‌کاری ناممکن است.

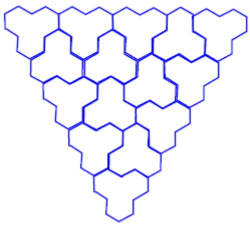
با در نظر داشتن این مثال‌ها، می‌توانیم وضعیت‌های مشابه زیادی بسازیم که در آنها رنگ‌آمیزی خاصی از صفحه، کاشی‌کاری را ناممکن می‌سازد.



اکنون به بحث دربارهٔ یک مسئلهٔ کاشی‌کاری می‌پردازیم که با این گونه استدلال رنگ‌آمیزی حل‌پذیر نیست. ناحیهٔ $T(n)$ را در نظر بگیرید که از یک آرایهٔ مثلثی شامل $n(n+۱)/۲$ شش‌ضلعی منتظم واحد تشکیل شده است. $T(۲)$ را *تریبون*[۱] می‌نامیم. می‌خواهیم nهایی را بیابیم که به‌ازای آنها، $T(n)$



را می‌توان با تریبون‌ها کاشی‌کاری کرد. برای مثال، $T(۹)$ را می‌توان به‌صورت زیر کاشی‌کاری کرد:



چون هر تریبون، سه‌تا شش‌ضلعی را می‌پوشاند، برای اینکه $T(n)$ قابل کاشی‌کاری با تریبون‌ها باشد، باید $n(n+۱)/۲$ مضربی از ۳ باشد. با این حال، این استدلال معلوم نمی‌کند که چرا ناحیه‌هایی مانند $T(۳)$ و $T(۵)$ را نمی‌توان با تریبون‌ها کاشی‌کاری کرد. کانوِی و لاگاریاس نشان دادند [۳] که آرایهٔ مثلثی $T(n)$ را می‌توان با تریبون‌ها کاشی‌کاری کرد اگر و تنها اگر $k \geq ۰$ موجود باشد به‌طوری که $n = ۱۲k$، $n = ۱۲k + ۲$، $n = ۱۲k + ۹$ یا $n = ۱۲k + ۱۱$. کوچکترین مقدارهای n که به‌ازای آنها، $T(n)$ قابل کاشی‌کاری با تریبون‌ها است، اعداد ۰، ۲، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۲۱، ۲۳، ۲۴، ۲۶، ۳۳ و ۳۵ هستند. در اثبات این مطلب، از یک گروه غیرآبلی خاص استفاده می‌شود که اطلاعاتی را دربارهٔ کاشی‌کاری‌ها آشکار می‌کند که هیچ رنگ‌آمیزی، نمی‌تواند مشخص کند؛ در حالی که استدلال‌های رنگ‌آمیزی همواره قابل بیان

---
[۱] tribone

به زبان گروه‌های *آبلی* هستند. در واقع می‌توان نشان داد که با هیچ استدلال رنگ‌آمیزی نمی‌توان نتیجهٔ منسوب به کانوی و لاگاریاس را ثابت کرد [۱۶].

۳. شمارش دقیق کاشی‌کاری‌ها

اگر بدانیم که یک مسئلهٔ کاشی‌کاریِ معین حل‌پذیر است، می‌توانیم فراتر رفته و بپرسیم: چند راه‌حل وجود دارد؟ همان‌طور که قبلاً دیدیم، ۲۳۳۹ روش (در حد تقارن) برای کاشی‌کاری یک مستطیل ۱۰×۶ با دقیقاً یک بار استفاده از هر یک از ۱۲ پِنتومینو، وجود دارد. شاید جالب باشد که این عدد اینقدر بزرگ است اما جواب دقیق مسئله آنقدر هم جالب نیست؛ به‌ویژه که با جستجوی رایانه‌ای پیدا می‌شود.

نخستین نتیجهٔ قابل توجه در مورد شمارش کاشی‌کاری‌ها در سال ۱۹۶۱ به‌طور مستقل توسط فیشِرِ و تمپِرلی [۷] و کاستِلِین [۱۲] به‌دست آمد. آنها دریافتند که تعداد کاشی‌کاری‌های یک مستطیل $۲m \times ۲n$ با $۲mn$ دومینو، برابر است با

$$۴^{mn} \prod_{i=۱}^{m} \prod_{k=۱}^{n} \left(\cos^۲ \frac{i\pi}{۲m+۱} + \cos^۲ \frac{k\pi}{۲n+۱} \right).$$

در اینجا $\prod$ نماد حاصلضرب و π همان ۱۸۰ درجه است. این عدد برابر است با ۴^{mn} ضرب در حاصل‌ضربی از مجموع‌های دو مربع از کسینوس‌ها مانند

$$\cos \frac{۲\pi}{۵} = \cos ۷۲ = ۰/۳۰۹۰۱۶۹۹۳۸.$$

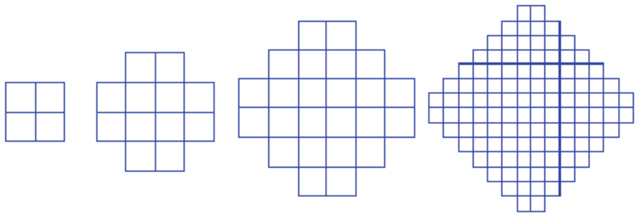
این فرمول، خیلی جالب است! اعدادی که در هم ضرب می‌کنیم، صحیح نیستند. حتی در بیشتر موارد این اعداد، گویا هم نیستند. اما حیرت‌انگیز است که وقتی آنها را در هم ضرب می‌کنیم، یک عدد صحیح به‌دست می‌آوریم و این عدد صحیح دقیقاً تعداد کاشی‌کاری‌های یک مستطیل $۲m \times ۲n$ توسط دومینوها است. برای مثال، به‌ازای $m = ۲$ و $n = ۳$ داریم

$$\begin{aligned}
&۴^۶ \left(\cos^۲ ۳۶^\circ + \cos^۲ ۲۵/۷۱\cdots^\circ\right) \times \left(\cos^۲ ۳۶^\circ + \cos^۲ ۵۱/۴۳\ldots^\circ\right) \\
&\times \left(\cos^۲ ۳۶^\circ + \cos^۲ ۷۷/۱۴\ldots^\circ\right) \times \left(\cos^۲ ۷۲^\circ + \cos^۲ ۲۵/۷۱\ldots^\circ\right) \\
&\times \left(\cos^۲ ۷۲^\circ + \cos^۲ ۵۱/۴۳\ldots^\circ\right) \times \left(\cos^۲ ۷۲^\circ + \cos^۲ ۷۷/۱۴\ldots^\circ\right) \\
&= ۴^۶(۱/۴۶۶۲\ldots)(۱/۰۴۳۲\ldots)(۰/۷۰۴۰\ldots)(۰/۹۰۷۲\ldots) \\
&\times(۰/۴۸۴۲\ldots)(۰/۱۴۵۰\ldots) = ۲۸۱.
\end{aligned}$$

از خواننده‌ای که به این نتیجه مشکوک است و زمان فراغت زیادی هم دارد، می‌خواهیم که همهٔ کاشی‌کاری‌های یک مستطیل ۶×۴ با دومینوها را بیابد و خودش مشاهده کند که واقعاً ۲۸۱ کاشی‌کاری وجود دارد.

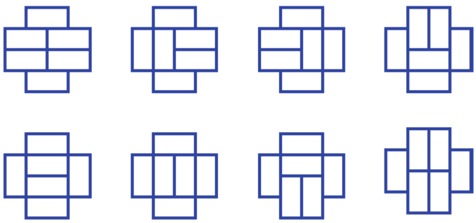
اما چند کلمه‌ای هم بشنوید دربارهٔ اثبات‌های این نتیجه: کاستِلِین پاسخ را برحسب یک پفافی[1] خاص بیان و محاسبات را به محاسبهٔ دترمینان مربوط به آن تبدیل کرد. فیشِر و تمپرلی اثباتی متفاوت با استفاده از روش ماتریس انتقال ارائه کردند؛ رویکردی که اغلب در مکانیک آماری و ترکیبیات به‌کار می‌رود.

خانواده‌ای دیگر از ناحیه‌ها وجود دارد که برای آن، تعداد کاشی‌کاری‌ها با دومینوها به‌طرز حیرت‌انگیزی ساده است. چنان‌که در شکل زیر نشان داده شده است، لوزی اَزتک[2] $AZ(n)$ از روی هم قرار دادنِ پی‌درپیِ ردیف‌های مرکزی به طول ۲، ۴، . . .، $۲n$، $۲n$، . . .، ۴، ۲ به‌دست می‌آید. لوزی اَزتک $AZ(۲)$ از مرتبهٔ



AZ(1) **AZ(2)** **AZ(3)** **AZ(7)**

۲ دارای ۸ کاشی‌کاری زیر با استفاده از دومینوها است:



اِلکیز، کوپربِرگ، لارسِن و پراپ [۶] نشان دادند که تعداد کاشی‌کاری‌های $AZ(n)$ با استفاده از دومینوها برابر است با $۲^{n(n+۱)/۲}$. جدول زیر تعداد کاشی‌کاری‌های $AZ(n)$ را برای چند مقدار آغازی n نشان می‌دهد:

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۸	۶۴	۱۰۲۴	۳۲۷۶۸	۲۰۹۷۱۵۲

از آنجا که $۲^{n+۱} = ۲^{(n+۱)(n+۲)/۲}/۲^{n(n+۱)/۲}$، می‌توان تلاش کرد تا به هر کاشی‌کاریِ لوزی اَزتک با مرتبهٔ n، تعداد $۲^{n+۱}$ کاشی‌کاری از لوزی اَزتک با مرتبهٔ $n+۱$ نسبت داد چنان‌که هر کاشی‌کاری از

[1] Pfaffian [2] Aztec diamond

مرتبهٔ $n+۱$ دقیقاً یک بار انجام شود. این، یکی از چهار اثبات اصیل است که در [۶] یافت می‌شود. در حال حاضر، حدود ۱۲ اثبات برای این نتیجه وجود دارد. هیچ‌کدام از این اثبات‌ها، پاسخی به سادگیِ $۲^{n(n+۱)/۲}$ ارائه نمی‌کند.

۴. شمارش تقریبیِ کاشی‌کاری‌ها

گاهی اوقات مایل به تخمین تعداد کاشی‌کاری‌های یک ناحیهٔ خاص هستیم. دلیل این تمایل در برخی از موارد این است که نمی‌توانیم یک فرمول دقیق برای تعداد کاشی‌کاری‌ها به‌دست آوریم. البته عجیب به نظر می‌رسد که گاهی یک فرمول تقریبی را بر یک فرمول دقیق ترجیح دهیم. تعداد کاشی‌کاری‌های مستطیل با استفاده از دومینوها، مثالی خوب برای این مورد است. اگرچه یک فرمول دقیق برای این تعداد داریم اما این فرمول هیچ شاخصی از بزرگی این عدد به‌دست نمی‌دهد.

برای مثال، از آنجا که لوزی‌های اَزتک، مربع‌های «کج‌شده» هستند، می‌توان پرسید: چگونه می‌شود تعداد کاشی‌کاری‌های یک لوزی اَزتک و یک مربعِ تقریباً هم‌اندازه با آن را با استفاده از دومینوها، با هم مقایسه کرد؟ پس از کمی وارسیِ حالت‌های مختلف با این شکل‌ها، متوجه می‌شویم که قرار دادنِ یک دومینو روی مرز یک لوزی اَزتک، تقریباً همیشه مکان چندین دومینوی دیگر را هم برایمان مشخص می‌کند. ولی این اتفاق هیچ‌وقت در مربع رخ نمی‌دهد. به همین دلیل، ممکن است حدس بزنیم که تعداد کاشی‌کاری‌های مربع نسبت به لوزی اَزتک، بیشتر است.

در راستای تلاش برای دقت بخشیدن به این ایده، یک تعریف ارائه می‌کنیم. اگر یک ناحیه با N مربع دارای T کاشی‌کاری باشد، آن‌گاه می‌گوییم آن ناحیه دارای $\sqrt[N]{T}$ *درجهٔ آزادی بر مربع* است. انگیزهٔ این تعریف به بیان نادقیق این است که اگر هر مربع خودش می‌توانست تصمیم بگیرد که چگونه پوشانده شود و $\sqrt[N]{T}$ امکان برای انتخاب می‌داشت، آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌ها برابر با T می‌بود.

لوزی اَزتک شامل $N=۲n(n+۱)$ مربع و دارای $T=۲^{n(n+۱)/۲}$ کاشی‌کاری است. بنابراین درجهٔ آزادی بر مربع در $AZ(n)$ برابر است با

$$\sqrt[N]{T}=\sqrt[۴]{۲}=۱{,}۱۸۹۲۰۷۱۱۵\cdots .$$

برای مربع $۲n\times ۲n$ فرمول دقیق تعداد کاشی‌کاری‌ها چندان رضایت‌بخش نیست، زیرا ما را متوجه اندازهٔ بزرگی این عدد نمی‌کند. خوشبختانه همان‌طور که کاستِلِین، فیشر و تمپرلی ملاحظه کردند، می‌توان از فرمول آنها استفاده کرد و نشان داد که تعداد کاشی‌کاری‌های مربع $۲n\times ۲n$ با استفاده از دومینوها تقریباً برابر است با $C^{۴n^۲}$ که در آن،

$$C=e^{G/\pi}=۱{,}۳۳۸۵۱۵۱۵۲\cdots .$$

در اینجا G نشان‌دهندهٔ ثابت کاتالان[1] است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

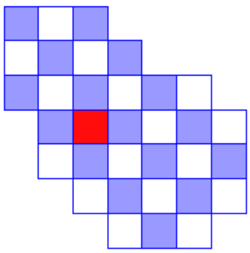
$$G = ۱ - \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۵^۲} - \frac{۱}{۷^۲} + \cdots = ۰/۹۱۵۹۶۵۵۹۴۱\cdots .$$

بنابراین شهودمان درست بود. کاشی‌کاریِ صفحهٔ مربعی آسان‌تر از کاشی‌کاریِ لوزی اَزتک است، زیرا درجهٔ آزادی بر مربع در آن، تقریباً ۱/۳۳۸۵ است در حالی که درجهٔ آزادی بر مربع برای لوزی اَزتک، ۱/۱۸۹۲ است.

۵. اثبات وجود نداشتنِ کاشی‌کاری

همان‌طور که در بخش ۲ دیدیم، مسائل کاشی‌کاری بسیاری وجود دارند که برای آنها یک کاشی‌کاری وجود دارد اما یافتن آن مشکل است. اما هنگامی که آن را می‌یابیم، اثبات وجود آن ساده است، زیرا به‌سادگی می‌توانیم آن کاشی‌کاری را نشان دهیم. آیا در حالتی که کاشی‌کاری‌ای وجود ندارد هم می‌توان چیزی شبیه به این گفت؟ همان‌طور که در بخش ۲ گفته شد، اثبات وجود نداشتنِ کاشی‌کاری ممکن است سخت باشد اما اگر کاشی‌کاری وجود نداشته باشد، آیا راهی ساده برای اثبات وجود نداشتنِ آن هست؟ اگر بخواهیم دقیق صحبت کنیم، پاسخ این سؤال در حالت کلی حتی برای کاشی‌کاری‌های ناحیه‌ها با استفاده از مستطیل‌های ۳×۱ یقیناً منفی است [۱]. اما شگفت‌آور است که در مورد کاشی‌کاری با دومینوها، پاسخ مثبت است!

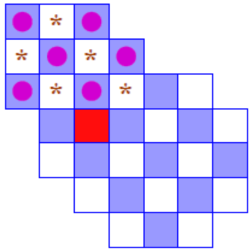
قبل از بیان نتیجه در کلی‌ترین حالت، اجازه دهید آن را با یک مثال روشن کنیم. ناحیهٔ زیر را که شامل ۱۶ خانهٔ سیاه و ۱۶ خانهٔ سفید است، در نظر بگیرید (خانهٔ سایه‌دار، یک حفره در ناحیه است). با استفاده از تحلیل مورد به مورد، می‌توان پذیرفت که این ناحیه را نمی‌شود با دومینوها کاشی‌کاری کرد. با دانستن این مطلب، آیا می‌توان راهی ساده‌تر و سریع‌تر پیدا کرد که نشان دهد چنین است؟



یکی از راه‌ها به این شرح است. ۶ خانهٔ سیاه را که با علامت • مشخص شده‌اند، در نظر بگیرید. آنها در کل با ۵ خانهٔ سفید که با $\star$ مشخص شده‌اند، مجاور هستند. ما به ۶ کاشی متفاوت برای پوشاندنِ

[1] Catalan constant

۶ خانهٔ سیاه مشخص‌شده نیاز داریم و هر یک از این کاشی‌ها یکی از ۵ خانهٔ سفید علامت‌گذاری‌شده را خواهد پوشاند. پس این کاشی‌کاری غیرممکن است.



فیلیپ هال [۱۰] نشان داد که در هر ناحیه‌ای که قابل کاشی‌کاری با دومینوها نباشد، می‌توان چنین اثباتی برای امکان‌ناپذیریِ کاشی‌کاری ارائه کرد. به‌طور دقیق‌تر، می‌توان k خانه از یک رنگ یافت که دارای کمتر از k همسایه باشند. بنابراین برای اینکه نشان دهیم کاشی‌کاریِ این ناحیه امکان‌پذیر نیست، می‌توانیم خیلی ساده آن k خانه و همسایه‌هایش را مشخص کنیم.

ادعای هال کلی‌تر از این است و به *قضیهٔ ازدواج*[۱] معروف است. این نام از تصور هر خانهٔ سیاه به‌عنوان مرد و هر خانهٔ سفید به‌عنوان زن ناشی می‌شود. این مردان و زنان چندان ماجراجو نیستند: فقط می‌خواهند با یکی از همسایگانشان ازدواج کنند. ما همسریاب هستیم و تلاش می‌کنیم تا تدبیری بیندیشیم که هر کسی با خوشحالی متأهل شود. قضیهٔ ازدواج به ما می‌گوید که دقیقاً چه زمانی یک چنین تدبیری وجود دارد.

۶. کاشی‌کاری مستطیل‌ها با استفاده از مستطیل‌ها

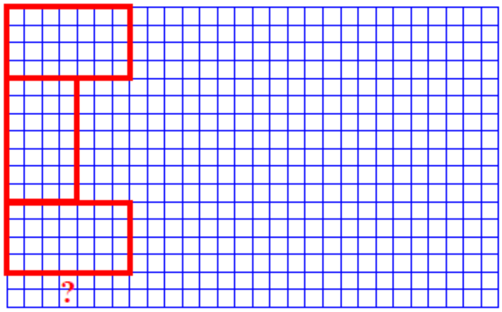
یکی از طبیعی‌ترین موارد کاشی‌کاری، کاشی‌کاری یک مستطیل با استفاده از مستطیل‌های کوچکتر است. اکنون سه نتیجهٔ زیبا از این مورد ارائه می‌کنیم.

نخستین پرسشی که می‌خواهیم به آن بپردازیم، این است که «چه هنگام یک مستطیل $m \times n$ را می‌توان با استفاده از مستطیل‌های $a \times b$ (در هر جهتی) کاشی‌کاری کرد؟» این بحث را با چند مثال انگیزه‌بخش آغاز می‌کنیم.

آیا یک مستطیل ۱۰ × ۷ را می‌توان با استفاده از مستطیل‌های ۳ × ۲ کاشی‌کاری کرد؟ روشن است که نه، زیرا هر مستطیل ۳ × ۲ شامل ۶ خانه است در حالی که تعداد خانه‌ها در یک مستطیل ۱۰ × ۷ برابر با ۷۰ است که مضربی از ۶ نیست. برای اینکه کاشی‌کاری امکان‌پذیر باشد، باید تعداد خانه‌های مستطیلِ بزرگتر بر تعداد خانه‌های مستطیلِ کوچکتر بخش‌پذیر باشد. اما آیا این شرط کافی هم است؟

[۱] marriage theorem

بیایید سعی کنیم تا یک مستطیل ۲۸ × ۱۷ را با مستطیل‌های ۷ × ۴ کاشی‌کاری کنیم. استدلال پاراگراف قبل را نمی‌شود در این مورد به کار برد، زیرا بر پایهٔ این استدلال، تنها می‌توان گفت که تعداد کاشی‌های مورد نیاز برابر با ۱۷ است. ابتدا سعی می‌کنیم اولین ستون سمت چپ را بپوشانیم. این تلاش



شکست می‌خورد، زیرا پس از پوشاندن ۴ خانهٔ نخستِ این ستون توسط اولین کاشی، ۷ خانهٔ بعدی توسط کاشی دوم، و چهارخانهٔ زیر آن توسط کاشی سوم، مجالی برای کاشی چهارم نخواهد بود تا بتواند دو خانهٔ باقیمانده را بپوشاند. در واقع اگر موفق شویم که ۱۷ خانهٔ اولین ستون سمت چپ را با استفاده از کاشی‌های ۷ × ۴ بپوشانیم، گویی ۱۷ را به‌صورت مجموع ۴ها و ۷ها نوشته‌ایم. اما به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که این کار نشدنی است. بنابراین چنین کاشی‌کاری‌ای وجود ندارد. پس دومین دلیل برای وجود نداشتنِ کاشی‌کاری را یافته‌ایم: ممکن است پوشاندنِ ستون یا ردیف اول امکان‌پذیر نباشد، زیرا شاید نتوان m یا n را به‌صورت مجموعی از aها و bها نوشت.

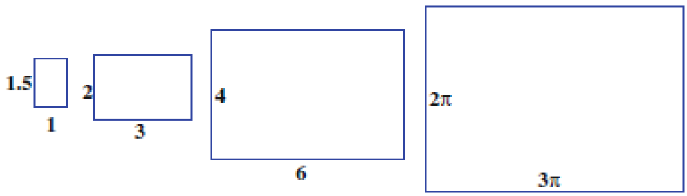
آیا ممکن است یک مستطیل ۱۵ × ۱۰ را با استفاده از مستطیل‌های ۶ × ۱ کاشی‌کاری کرد؟ در این مورد، با اینکه ۱۵۰ مضربی از ۶ است و هر دوی ۱۰ و ۱۵ را می‌توان به‌صورت مجموعی از ۱ها و ۶ها نوشت، این کاشی‌کاری هم ناممکن است! پاسخ کامل به این سؤال را دِبروین و کلارنِر در [۴، ۱۳] داده‌اند. آنها ثابت کردند که یک مستطیل $m \times n$ را می‌توان با مستطیل‌های $a \times b$ کاشی‌کاری کرد اگر و تنها اگر

- mn بر ab بخش‌پذیر باشد؛
- سطر اول و ستون اول را بتوان پوشاند، یعنی هم m و هم n را بتوان به‌صورت مجموعی از aها و bها نوشت؛
- m یا n بر a بخش‌پذیر باشد و m یا n بر b بخش‌پذیر باشد.

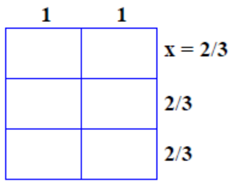
چون نه ۱۰ بر ۶ بخش‌پذیر است و نه ۱۵، مستطیل ۱۵ × ۱۰ را نمی‌توان با مستطیل‌های ۶ × ۱ کاشی‌کاری کرد. در حال حاضر، اثبات‌های زیادی از قضیهٔ دِبروین و کلارنِر موجود است. در این میان، یک اثبات

بسیار هوشمندانه وجود دارد که در آن، از ویژگی‌های ریشه‌های مختلط واحد استفاده می‌شود [۴، ۱۳]. برای مشاهدهٔ چهارده اثبات متفاوت جالب برای این قضیه، به [۲۰] مراجعه کنید.

مسئلهٔ دومی که می‌خواهیم دربارهٔ آن بحث کنیم، این است: فرض کنیم $x > ۰$؛ مثلاً $x = \sqrt{۲}$. آیا می‌توان یک مربع را با استفاده از تعدادی متناهی مستطیل متشابه با مستطیل $۱ \times x$ (در هر جهتی) کاشی‌کاری کرد؟ به عبارت دیگر، آیا می‌توان یک مربع را با استفاده از تعدادی متناهی مستطیل که همگی از نوع $a \times ax$ (a می‌تواند تغییر کند) هستند، کاشی‌کاری کرد؟ برای مثال، به‌ازای $x = \frac{۲}{۳}$ تعدادی از کاشی‌هایی که می‌توانیم استفاده کنیم، به‌صورت زیر هستند:

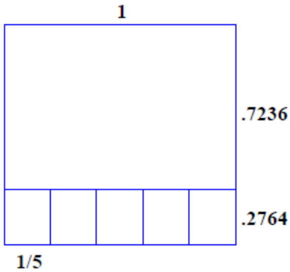


این کاشی‌ها همگی هم‌شکل اما با اندازه‌های متفاوت هستند. در این حالت، تنها به یک اندازه نیاز داریم، زیرا یک مربع ۲×۲ را می‌توان با شش‌تا مستطیل $۱ \times \frac{۲}{۳}$ کاشی‌کاری کرد. به دلایلی که بعداً روشن



خواهد شد، به این نکته اشاره می‌کنیم که $x = \frac{۲}{۳}$ در معادلهٔ $۳x - ۲ = ۰$ صدق می‌کند. همچنین توجه کنید که سازوکاری مشابه برای هر عدد گویای مثبت $x = \frac{p}{q}$ کارساز است.

بیایید سعی کنیم یک کاشی‌کاری برای یک مربع با استفاده از مستطیل‌های متشابه با دست‌کم دو اندازهٔ مختلف بسازیم. یکی از این کاشی‌کاری‌ها به‌صورت تقریبی در شکل زیر نشان داده شده است. مستطیل‌ها متشابه‌اند، زیرا $\frac{۰/۲}{۰/۲۷۶۴...} = \frac{۰/۷۲۳۶...}{۱}$. اما این پیکربندی را چگونه یافته‌ایم؟ فرض کنید همانند شکل زیر، می‌خواهیم با قراردادن پنج نسخه از یک مستطیل در یک سطر و سپس قراردادن یک مستطیل بزرگتر هم‌شکل متشابه روی ضلع بالایی آنها، یک مربع تشکیل دهیم. فرض کنید می‌دانیم که طول ضلع مربع ۱ است اما ابعاد مستطیل‌ها را نمی‌دانیم. فرض کنید ابعاد مستطیل بزرگتر $۱ \times x$ باشد. پس ارتفاع هر یک از مستطیل‌های کوچک برابر با $۱ - x$ است. چون مستطیل‌های کوچک با



مستطیل بزرگ متشابه‌اند، پهنای آنها $x(1-x)$ است. با کنار هم قرار دادنِ این مستطیل‌های کوچک در کاشی‌کاری، پهنای کل آنها برابر با $5x(1-x)$ می‌شود که باید برابر با ۱ باشد. بنابراین تصویر اخیر در صورتی یک جواب برای مسئله است که x در معادلهٔ $5x(1-x)=1$ صدق کند. این معادله را به‌صورت $5x^2-5x+1=0$ بازنویسی می‌کنیم. یکی از xهایی که در معادلهٔ بالا صدق می‌کند، برابر است با

$$x=\frac{5+\sqrt{5}}{10}=0/7236067977\cdots$$

که متناظر با کاشی‌کاری نشان داده‌شده در شکل بالا است. می‌دانید که هر معادلهٔ درجه‌دو دو ریشه دارد. ریشهٔ دیگر معادلهٔ بالا برابر است با

$$x=\frac{5-\sqrt{5}}{10}=0/2763932023\cdots$$

که این متناظر با کاشی‌کاری دیگری می‌شود که آن هم در شرایط مسئله صدق می‌کند.

شاید انتظار نداشتید که جواب‌های این مسئلهٔ کاشی‌کاری به‌ازای این دو مقدار کم و بیش پیچیدهٔ x به‌دست آیند. در واقع وضعیت می‌توانست پیچیده‌تر هم باشد. بیایید یک کاشی‌کاری با استفاده از سه مستطیل متشابه با اندازه‌های متفاوت بیابیم. گیریم مستطیل بزرگتر دارای ابعاد $1\times x$ باشد. با تقلید از استدلال قبلی، درمی‌یابیم که x باید جواب معادلهٔ $x^3-x^2+2x-1=0$ باشد. یکی از xهایی که در این معادله صدق می‌کند، برابر است با $x=0/5698402910\cdots$. برای این x، مسئلهٔ کاشی‌کاری به‌صورت بالا حل‌پذیر است. چون چندجمله‌ای بالا درجه‌سه است، پس دو ریشهٔ دیگر دارد. آن دو ریشه تقریباً برابر با $0/215+1/307\sqrt{-1}$ و $0/215-1/307\sqrt{-1}$ هستند. اما این دو عدد مختلط، پاسخ حقیقی برای این مسئلهٔ کاشی‌کاری به‌دست نمی‌دهند.

در حالت کلی، فرایلینگ و رینه [۸] و همچنین لاتزکُویچ و سِکْرِس [۱۴] مستقل از هم، پاسخ حیرت‌آور زیر را برای این مسئله ارائه کردند. یک مربع را می‌توان با استفاده از تعدادی متناهی مستطیل متشابه با مستطیل $1\times x$ کاشی‌کاری کرد اگر و تنها اگر

- عدد x ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و
- برای چندجمله‌ای مینیمالی که x در آن صدق می‌کند، هر ریشهٔ دیگر به‌شکل $a+b\sqrt{-۱}$، در شرط $a>۰$ صدق کند.

بسیار تعجب‌آور است که این ریشه‌های مختلط که کاملاً نامربوط به مسئلهٔ کاشی‌کاری به نظر می‌رسند، در واقع نقشی اساسی در آن بازی می‌کنند. در مورد مستطیل‌های متشابه با $۰/۵۶۹۸۰۰۰ \times ۱$ در مثال بالا، جواب وجود دارد به این دلیل که $۰/۲۱۵۰۰۰$ یک عدد مثبت است. با چند مثال، این نتیجه را بیشتر توضیح می‌دهیم.

مقدار $x=\sqrt{۲}$ در معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح $x^۲-۲=۰$ صدق می‌کند. با این حال، ریشهٔ دیگر این معادله $-\sqrt{۲}$ است که عددی منفی است. بنابراین یک مربع را *نمی‌توان* با تعدادی متناهی مستطیل‌های متشابه با یک مستطیل $\sqrt{۲}\times ۱$ کاشی‌کاری کرد. از سوی دیگر، $x=\sqrt{۲}+\frac{۱۷}{۱۲}$ در معادلهٔ درجه‌دوی $۱۴۴x^۲-۴۰۸x+۱=۰$ صدق می‌کند که ریشهٔ دیگر آن عبارت است از $-\sqrt{۲}+\frac{۱۷}{۱۲}=۰/۰۰۲۴۵۳۰۰۰>۰$. بنابراین یک مربع را *می‌توان* با تعدادی متناهی مستطیل‌های متشابه با یک مستطیل $(\sqrt{۲}+\frac{۱۷}{۱۲})\times ۱$ کاشی‌کاری کرد. اما در عمل، این کار را چگونه انجام می‌دهیم؟

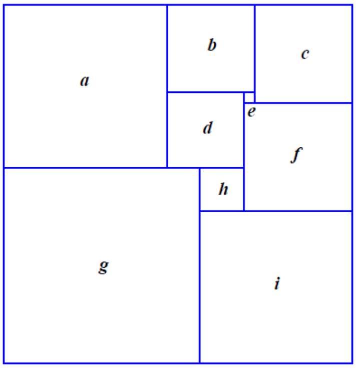
مشابهاً $x=\sqrt[۳]{۲}$ در معادلهٔ $x^۳-۲=۰$ صدق می‌کند. دو ریشهٔ دیگر این معادله،

$$-\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}\pm\frac{\sqrt[۳]{۲}\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{-۱}$$

هستند. چون $\frac{-\sqrt[۳]{۲}}{۲}<۰$، یک مربع را *نمی‌توان* با تعدادی متناهی مستطیل‌های متشابه با یک مستطیل $\sqrt[۳]{۲}\times ۱$ کاشی‌کرد. سرانجام، فرض کنیم $\frac{r}{s}$ یک عددگویا باشد و گیریم $x=\frac{r}{s}+\sqrt[۳]{۲}$. می‌توان بررسی کرد که این هم ریشه‌ای از یک چندجمله‌ای درجه‌سه است که دو ریشهٔ دیگر آن، $\left(\frac{r}{s}-\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}\right)\pm\frac{\sqrt[۳]{۲}\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{-۱}$ هستند. پس نتیجه می‌شود که یک مربع را می‌توان با تعدادی متناهی کاشی‌های متشابه با یک مستطیل $(\frac{r}{s}+\sqrt[۳]{۲})\times ۱$ کاشی‌کاری کرد اگر و تنها اگر $\frac{r}{s}>\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$. به‌عنوان یک سرگرمی جالب، خواننده می‌تواند یک کسر مورد علاقهٔ خود را که از $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$ بزرگتر است، انتخاب کند و یک مربع را با مستطیل‌های متشابه با یک مستطیل $(\frac{r}{s}+\sqrt[۳]{۲})\times ۱$ کاشی‌کاری کند. برای آشنایی با دیگر مسائل کاشی‌کاری شامل استدلال‌های جبری جالب، [۱۸] را بخوانید.

سومین مسئله‌ای که می‌خواهیم دربارهٔ آن بحث کنیم، ناشی از کاشی‌کاری جالب‌توجه یک مستطیل با استفاده از ۹ مربع است که همگی دارای اندازه‌های متفاوت هستند (به‌زودی خواهیم دید که اندازهٔ مستطیل و مربع‌ها چقدر است). این کاشی‌کاری به *کاشی‌کاری کامل*[۱] معروف است. برای یافتن کاشی‌کاری‌های کامل برای مستطیل‌ها، می‌توانیم از رهیافت مسئلهٔ قبل استفاده کنیم. با پیشنهاد یک چینشِ آزمایشیِ اولیه از مربع‌ها، همانند الگوی نشان داده‌شده، بدون دانستن اندازه‌های آنها آغاز می‌کنیم. طول ضلع هر

[۱] perfect tiling

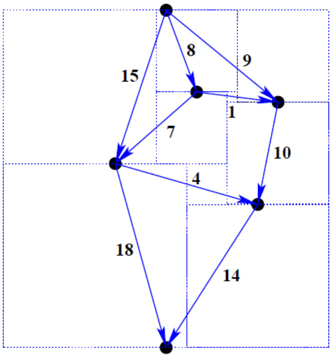


مربع را با یک متغیر نشان می‌دهیم. برای هر خط افقی درون مستطیل، معادلهٔ زیر را می‌نویسیم: مجموع طول مربع‌هایی که روی خط قرار می‌گیرند، برابر است با مجموع طول مربع‌هایی که به همان خط آویزان هستند. برای مثال، «معادلات افقی» $a + d = g + h$ و $b = d + e$ را داریم. مشابهاً برای هر خط عمودی درون مستطیل، یک «معادلهٔ عمودی» به‌دست می‌آوریم؛ مثلاً $a = b + d$ یا $d + h = e + f$. سرانجام، معادله‌هایی را می‌نویسیم که بیانگر این مطلب هستند که طول ضلع‌های بالایی و پایینی مستطیل با هم برابرند و طول ضلع‌های چپ و راست مستطیل نیز با هم برابرند. این معادله‌ها عبارت‌اند از $a + b + c = g + i$ و $a + g = c + f + i$. فقط باید امیدوار باشیم که دستگاه معادله‌های خطی حاصل، جوابی داشته باشد که در آن، مقادیر متغیرها مثبت و متمایز باشند. برای چینشِ اولیه‌ای که در بالا در نظر گرفتیم، دستگاه به‌تقریب مقیاس، دارای جواب یکتای

$$(a, b, c, d, e, f, g, h, i) = (۱۵, ۸, ۹, ۷, ۱, ۱۰, ۱۸, ۴, ۱۴)$$

است. ابعاد مستطیل بزرگ، ۳۳ × ۳۲ است.

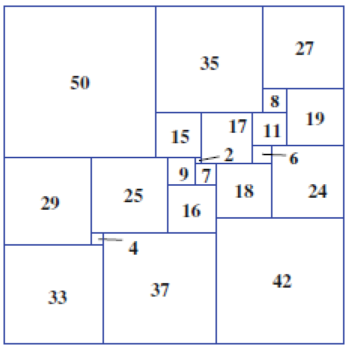
جالب است که به‌ازای هر چینش اولیه از مربع‌ها، دستگاه معادله‌های خطی حاصل همیشه به‌تقریب مقیاس، دارای جواب یکتا است (متأسفانه «طول ضلع‌ها»ی به‌دست آمده معمولاً مثبت و متمایز نیستند). در سال ۱۹۳۶ بروکْس، اِسمیت، اِستون و تات در [۲] تعبیر زیبایی از این نتیجه ارائه دادند. آنها یک گراف جهتدار ساختند که رأس‌های آن، خطوط افقی موجود در مستطیل بود و به‌ازای هر مربع کوچک، یک یال وجود داشت که از خط افقی بالایی آن به خط افقی پایینی آن وصل می‌شد. نمودار زیر، گرافِ نظیر کاشی‌کاری کامل اخیر را برای مستطیل ۳۳ × ۳۲ نشان می‌دهد. این گراف را می‌توانیم یک شبکهٔ الکتریکی با مقاومت‌های واحد تعبیر کنیم که در آن، جریان الکتریکی در هر سیم، برابر با طول ضلع مربع نظیر آن در کاشی‌کاری است. «معادله‌های افقی» برای طول ضلع مربع‌ها، هم‌ارز با معادله‌های پایستگیِ جریان الکتریکی در این شبکه و «معادله‌های عمودی»، هم‌ارز با قانون اُهم هستند. با علم به این موضوع،



ادعای ما اساساً هم‌ارز با قانون کیرشُهف است که می‌گوید وقتی اختلاف پتانسیل بین دو رأس را بدانیم، جریان در هر سیم به‌طور یکتا مشخص می‌شود (به‌تقریب مقیاس).

بروکْس، اِسمیت، اِستون و تات علاقه‌ای ویژه به مطالعهٔ کاشی‌کاری‌های کامل برای مربع‌ها داشتند. این نیز دارای یک تفسیر خوب برحسب شبکه است. برای یافتن کاشی‌کاری مربع‌ها، به یک معادلهٔ خطی دیگر نیاز داریم که می‌گوید طول و عرض مستطیل با هم برابر است. به زبان شبکهٔ الکتریکی، مثل این است که بگوییم مقاومت کل شبکه برابر با ۱ است.

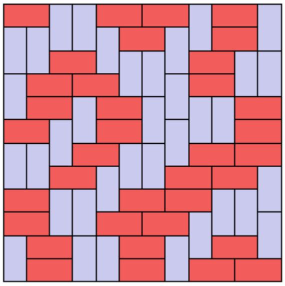
در حالی که این تناظر بین کاشی‌کاری‌ها و شبکه‌ها به‌لحاظ مفهومی، بسیار زیبا است اما لزوماً ساخت کاشی‌کاری‌های کامل برای مربع‌ها و حتی مستطیل‌ها را آسان نمی‌کند. در واقع پس از ارائهٔ این نظریه، اِستون زمان زیادی صرف کرد تا ثابت کند کاشی‌کاریِ کامل یک مربع ناممکن است. سرانجام، رونالد اِسْپِریگ[۱] در سال ۱۹۳۹ یک کاشی‌کاری کامل برای یک مربع با طول ضلع ۴۲۰۵ با استفاده از ۵۵ مربع ارائه کرد. پس از آن، تلاش‌های رایانه‌ای بسیار و ساعت‌های زیادی صرف شد تا مثال بهتری یافت شود. دویوِستین[۲] به‌کمک رایانه نشان داد [۵] که کمترین تعداد ممکن مربع‌ها در یک کاشی‌کاری کامل مربع برابر با ۲۱ است. این کاشی‌کاریِ یگانه، در شکل زیر نشان داده شده است:



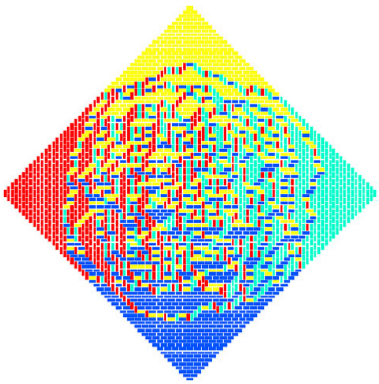
[۱] Roland Sprague [۲] Duijvestijn

۷. شکل یک کاشی‌کاریِ نوعی چگونه است؟

فرض کنید هر یک از پاسخ‌های ممکن یک مسئلهٔ کاشی‌کاری را روی یک ورق کاغذ جدا می‌کشیم و این ورق‌ها را درون یک کیف قرار می‌دهیم. سپس یکی از آنها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. آیا می‌توان حدس زد که چه خواهیم دید؟



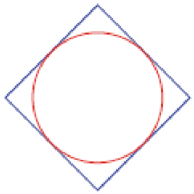
در بالا یک کاشی‌کاری با استفاده از دومینوها برای مربع ۱۲ × ۱۲ نشان داده شده است که در آن، دومینوهای افقی با رنگ تیره و دومینوهای عمودی با رنگ روشن‌تر سایه زده شده‌اند و از هیچ ساختار مشخصی تبعیّت نمی‌کنند. این را با یک کاشی‌کاریِ تصادفی برای لوزی اَزتک از مرتبهٔ ۵۰ مقایسه کنید. در اینجا دو رنگ برای دومینوهای افقی و دو رنگ برای دومینوهای عمودی وجود دارد و دومینوها بر مبنای قاعده‌ای مشخص (که فعلاً با آن کاری نداریم)، رنگ‌آمیزی شده‌اند. این تصاویر توسط *گروه پژوهشی کاشی‌کاری جیم پراپ*[1] ایجاد شده است.



این تصویر بسیار زیبا نشان می‌دهد که در مورد کاشی‌کاریِ تصادفی، می‌توان چیز جالبی بیان کرد: اینکه کاشی‌کاری به‌روشنی در گوشه‌ها بسیار منظم است ولی هرچه از لبه‌ها فاصله می‌گیریم هرج و مرج و آشوب، بیشتر می‌شود. یک *ناحیهٔ نظم* خوش‌تعریف موجود است و ما می‌توانیم شکل آن را پیش‌بینی

[1] Jim Propp’s tiling research group

کنیم. یاکوش، پراپ و شُر [۱۱] نشان دادند که به‌ازای n بسیار بزرگ و برای «بیشترِ» کاشی‌کاری‌های لوزی اَزتک $AZ(n)$ با استفاده از دومینوها، ناحیهٔ نظم به سمت بیرونِ دایره‌ای مماس بر چهار لبهٔ حدیِ لوزی اَزتک «میل می‌کند». برای دقیق کردن دو واژهٔ «بیشتر» و «میل کردن»، نظریهٔ پیشرفتهٔ احتمال مورد نیاز است اما معنای شهودی آن روشن است. این نتیجه به *قضیهٔ مدار قطب شمال*[۱] مشهور است. دایرهٔ

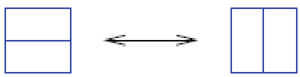


مماس، مدار قطب شمال است و کاشی‌کاری، بیرون آن «منجمد» می‌شود. از آن زمان تاکنون، پدیده‌های مشابه بسیاری مشاهده شده‌اند و (در برخی موارد) برای مسائل کاشی‌کاری دیگر ثابت شده‌اند.

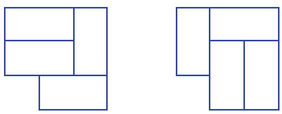
۸. روابط میان کاشی‌کاری‌ها

هنگام مطالعهٔ مجموعهٔ همهٔ کاشی‌کاری‌های یک ناحیه، اغلب سودمند است که بتوانیم این مجموعه را به روشی مناسب، «ردیابی» کنیم. فرض کنیم یک راه‌حل برای یک مسئلهٔ کاشی‌کاری داشته باشیم و بخواهیم راه‌حلی دیگر بیابیم. احتمالاً ساده‌تر است که به‌جای شروع دوباره، راه‌حل دوم را با استفاده از تغییرات اندک در راه‌حل اول بیابیم. سپس می‌توانیم برای یافتن راه‌حل سوم از روی دومی تلاش کنیم و سپس راه‌حل چهارم و به همین روال.

در مورد کاشی‌کاری با استفاده از دومینوها، یک راه بسیار ساده برای انجام این کار وجود دارد. در کاشی‌کاری با استفاده از دومینوها، یک *وارو*[۲] عبارت است از برعکس کردنِ جهت دو دومینویی که یک مربع ۲×۲ تشکیل می‌دهند. این کار ممکن است شبیه تبدیل بدیهی یک کاشی‌کاری به کاشی‌کاری دیگر به

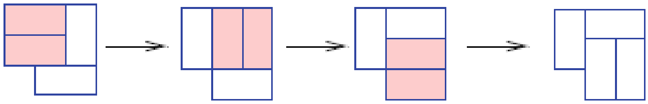


نظر برسد اما ابزاری به‌طور شگفت‌انگیز قدرتمند است. دو کاشی‌کاری زیر از یک ناحیه را در نظر بگیرید:

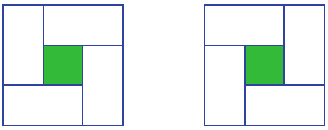


[۱]Arctic circle theorem [۲]flip

اگرچه این دو بسیار متفاوت از یکدیگر به نظر می‌رسند، در واقع می‌توان با واروهای پی‌درپیِ بلوک‌های ۲×۲، از یکی به دیگری رسید:

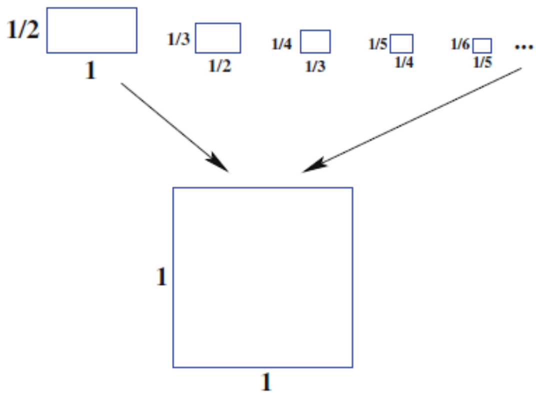


تِرستون [۱۹] نشان داد که این یک پدیدهٔ کلی است. برای هر ناحیهٔ بدون سوراخ R، هرکاشی‌کاریِ R با دومینوها را می‌توان توسط یک دنباله از واروها از هرکاشی‌کاری دیگر به‌دست آورد. این قضیهٔ وارو کردنِ دومینوها، کاربردهای زیادی در مطالعهٔ کاشی‌کاری‌ها با استفاده از دومینوها دارد. با نمایش دو کاشی‌کاری از مربع ۳×۳ که حفره‌ای در میان آن است، به این نکته اشاره می‌کنیم که قضیه ممکن است برای ناحیه‌های حفره‌دار درست نباشد. در این حالت، هیچ بلوک ۲×۲ و بنابراین هیچ وارویی وجود ندارد. پراپ [۱۷] نسخه‌ای از این قضیه را در مورد وارو کردنِ دومینوها برای ناحیه‌های حفره‌دار ارائه کرده است که در اینجا به بحث دربارهٔ آن نمی‌پردازیم.

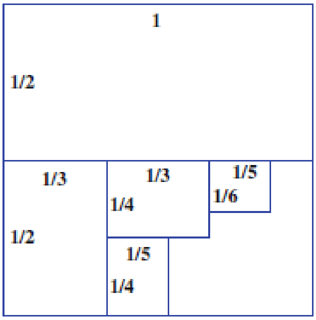


۹. مواجهه با بی‌نهایت

اکنون به بحث دربارهٔ برخی مسائل کاشی‌کاری می‌پردازیم که شامل ناحیه‌های به‌دلخواه بزرگ یا کاشی‌های به‌دلخواه کوچک هستند. انگیزهٔ سؤال اول، اتحاد $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} = ۱$ است. تعداد نامتناهی

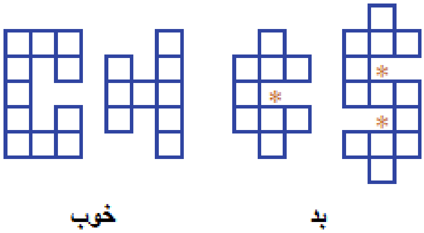


کاشی مستطیلی با ابعاد $\frac{1}{2} \times 1$، $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$، $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ و $\cdots$ در نظر می‌گیریم. این کاشی‌ها کوچک و کوچکتر می‌شوند و معادلهٔ بالا نشان می‌دهد که مجموع مساحت آنها دقیقاً برابر با ۱ است. آیا می‌توان مربع واحد را با دقیقاً یک بار استفاده از هر یک از این کاشی‌ها، کاشی‌کاری کرد؟ این مسئله خیلی دشوار به نظر می‌رسد. با کمی تلاش معلوم می‌شود که پنج قطعهٔ اول، چطور به‌خوبی جفت‌وجور می‌شوند اما تصوّر اینکه چگونه همهٔ قطعات را بدون باقی‌ماندنِ هیچ شکافی، در مربع بگنجانیم، سخت است.



تا امروز هیچ‌کس نتوانسته است یک کاشی‌کاری برای مسئلهٔ مذکور بیابد یا وجود نداشتنِ آن را ثابت کند. پاول‌هاس[۱] خیلی به جواب نزدیک شده است. او راهی برای گنجاندن همهٔ این مستطیل‌ها در مربعی به طول ضلع ۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰۱ یافته است. البته این بسته‌بندیِ پاول‌هاس، آن‌طور که ما تعریف کرده‌ایم یک کاشی‌کاری نیست، زیرا ناحیه‌های جاافتاده‌ای نیز وجود دارند.

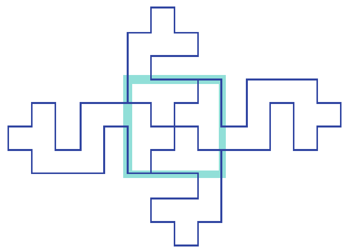
اکنون مسئله‌ای به‌ظاهر ساده را شرح می‌دهیم که مستلزم در نظر گرفتن ناحیه‌های بسیار وسیع است. یادآوری می‌کنیم که یک پلیومینو، مجموعه‌ای از مربع‌های واحد است که با اتصال ضلع‌به‌ضلع، کنار هم چیده شده‌اند. یک گردایه از پلیومینوها را «خوب» می‌نامیم اگر بتوانیم با استفاده از این گردایه، کل صفحه را کاشی‌کاری کنیم وگرنه آن را «بد» می‌نامیم. یک گردایهٔ خوب و یک گردایهٔ بد از پلیومینوها در شکل زیر نشان داده شده است:



به‌سادگی می‌توان دید که چرا کاشی‌کاری کل صفحه با گردایهٔ بد نشان داده شده در شکل بالا، ناممکن است. وقتی یک کاشی را جایگذاری می‌کنیم، مربع‌های مشخص‌شده با ستاره، با هیچ کاشی دیگری

[۱] Paulhus

پوشانده نمی‌شوند. با این حال می‌توانیم بپرسیم «اندازهٔ بزرگترین ناحیهٔ مربعی که قابل پوشاندن با یک کاشی‌کاری است، چقدر است؟» پس از کمی تلاش، درمی‌یابیم که می‌توانیم یک مربع ۴ × ۴ را بپوشانیم. اما پوشاندنِ یک مربع ۵ × ۵ ناممکن است، زیرا هر کوششی برای پوشاندن خانهٔ مرکزی مربع با یک



کاشی، یکی از خانه‌های ستاره‌دار را مجبور می‌کند که درون مربع قرار گیرد.

به‌طور کلی، این سؤال که آیا با یک مجموعه از پلیومینوها می‌توان یک مربع داده‌شده را پوشاند، سؤالی فوق‌العاده دشوار است. نتیجه‌ای مهم در منطق ریاضی بیان می‌کند که الگوریتمی برای تصمیم‌گیری دربارهٔ پاسخ این پرسش وجود ندارد.[۱] یکی از نتایج غیرمنتظرهٔ این حقیقت ژرف این است: همهٔ گردایه‌های بد از پلیومینوهایی را در نظر بگیرید که در مجموع، n خانهٔ واحد دارند. گیریم $L(n)$ طول ضلع بزرگترین مربعی باشد که توسط یکی از آنها پوشیده می‌شود. گردایهٔ بد مثال ما که ۲۲ مربع واحد دارد، نشان می‌دهد که $L(۲۲) \geqslant ۴$. ممکن است انتظار داشته باشیم که $L(۲۲)$ به‌طور معقول کوچک باشد. برای یک گردایهٔ بد از کاشی‌ها با ۲۲ مربع، تصور کنید که شروع به جایگذاری کاشی‌ها می‌کنیم چنان‌که به‌خوبی با هم جفت شوند و بزرگترین مربع ممکن را بپوشانند. چون این گردایه، بد است، ناچار در جایی حفره‌ای ایجاد می‌شود که نمی‌توانیم آن را بپوشانیم. انتظار برای اینکه این اتفاق نسبتاً زود رخ دهد معقول است، زیرا کاشی‌ها خیلی کوچک هستند. با کمال تعجب، عدد $L(n)$ فوق‌العاده بزرگ است! اگر $f(n)$ تابعی باشد که بتوان آن را با رایانه‌ای حتی با حافظهٔ نامتناهی محاسبه کرد، آن‌گاه به‌ازای nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ، $L(n) > f(n)$. توجه کنید که رایانه می‌تواند مقدار تابع‌هایی نظیر $f(n) = n^n$ یا $f(n) = n^{n^n}$ یا $f(n) = n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}$ (یک برج به طول n) را که *خیلی* سریع رشد می‌کنند، محاسبه کند. در واقع همهٔ این تابع‌ها در مقایسه با برخی دیگر از تابع‌های قابل محاسبه، *نحیف* هستند. اصلاً هر تابع قابل محاسبه در مقایسه با $L(n)$ *نحیف* است. می‌توان پیامدی عینی‌تر از این نتیجه را ارائه کرد. مجموعه‌ای از پلیومینوها

---

[۱] یک سؤال مرتبط، به این شرح است: برای پلیومینوی P آیا مستطیلی وجود دارد که با نسخه‌هایی از P قابل کاشی‌کاری باشد؟ معلوم نیست که آیا الگوریتمی برای تصمیم‌گیری در این باره وجود دارد یا نه؛ گرچه ادعاهای خلاف این در نوشتجات، بسیار است.

با تعداد نسبتاً کم از مربع‌های واحد[1]، احتمالاً نابیشتر از ۱۰۰، با ویژگی زیر موجود است: کاشی‌کاری کل صفحه با این مجموعه ناممکن است اما می‌توان کل استرالیا[2] را با یک کاشی‌کاری پوشاند.

یک نوع بسیار مهم از مسائل کاشی‌کاری، مربوط به کاشی‌کاری ناحیه‌های نامتناهی (بی‌کران) به‌ویژه کاشی‌کاری کل صفحه است. این موضوع، گسترده‌تر از آن است که در اینجا قابل بررسی باشد. برای دریافت اطلاعات بیشتر، خواننده را به [۹] ارجاع می‌دهیم که عمدتاً به این موضوع اختصاص دارد.

سپاسگزاری: مترجمان از سردبیر محترم فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، جناب آقای دکتر روح‌الله جهانی‌پور، که بارها مقاله را بازخوانی و نکات ویرایشی ارزنده‌ای را گوشزد کردند که منجر به بهبود ترجمهٔ مقاله شد، تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

[1] Beauquier, D., Nivat, M., Rémila, E., Robson, E., Tiling figures of the plane with two bars, *Comput. Geom.*, **5** (1995), 1–25.

نویسندگان، کاشی‌کاری یک ناحیه توسط مستطیل‌های افقی $1 \times n$ و عمودی $m \times 1$ را بررسی می‌کنند. نتیجهٔ اصلی آنها این است که برای $n \geq 2$ و $m > 2$، این سؤال که آیا چنین کاشی‌کاری‌ای موجود است، یک مسألهٔ NP-کامل است. آنها همچنین چندین حالت خاص از این مسأله را بررسی می‌کنند.

[2] Brooks, R., Smith, C., Stone, A., Tutte, W., The dissection of rectangles into squares, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 312–340.

نویسندگان به هر کاشی‌کاری کامل از یک مستطیل، یک گراف معین و جریان الکتریکی گذرا از آن را نسبت می‌دهند و نشان می‌دهند که چگونه ویژگی‌های کاشی‌کاری در شبکهٔ الکتریکی بازتاب می‌یابد. آنها از این دیدگاه در اثبات چندین نتیجه در مورد کاشی‌کاری کامل استفاده می‌کنند و روش‌هایی جدید برای ساختن آنها نیز ارائه می‌دهند.

[3] Conway, J., Lagarias, J., Tiling with polyominoes and combinatorial group theory, *J. Combin. Theory Ser. A*, **53** (1990), 183–208.

نویسندگان وجود کاشی‌کاری با یک مجموعه‌ای متناهی از کاشی‌ها را برای یک ناحیه در یک مشبکهٔ منظم در $\mathbb{R}^2$ مطالعه می‌کنند. آنها با بررسی راه‌هایی که مرزهای کاشی‌ها چنان با هم جفت شوند که مرز ناحیهٔ مورد بررسی به‌دست آید، یک شرط لازم برای وجود کاشی‌کاری از منظر نظریهٔ ترکیبیاتی گروه‌ها ارائه می‌دهند.

[4] de Bruijn, N., Filling boxes with bricks, *Amer. Math. Monthly*, **76** (1969), 37–40.

نویسنده به مطالعهٔ مسئلهٔ کاشی‌کاری یک جعبهٔ nبُعدی $A_1 \times \cdots \times A_n$ با ابعاد صحیح توسط آجرهای $a_1 \times \cdots \times a_n$ با ابعاد صحیح می‌پردازد و ثابت می‌کند که برای اینکه یک چنین کاشی‌کاری‌ای موجود باشد، هر a_i باید دست‌کم یکی از A_1، A_2، . . . ، A_n را عاد کند. یک جعبه مضربی از یک آجر نامیده می‌شود اگر بتوان آن را به روش بدیهی کاشی‌کاری

[1] فرض می‌کنیم «مربع‌های واحد» دارای طول ضلع ۱ سانتی‌متر هستند.
[2] که بسیار بزرگ و مسطح است.

کرد. ثابت شده که اگر $a_۱|a_۲$، $a_۲|a_۳$، . . . و $a_{n-۱}|a_n$، آن‌گاه با این آجر تنها می‌توان جعبه‌هایی را کاشی‌کاری کرد که مضرب آن هستند. ثابت شده است که عکس این حکم نیز درست است.

[5] Duijvestijn, A., Simple perfect squared square of lowest order, *J. Combin. Theory Ser. B*, **25** (1978), 240–243.

در این مقاله، یک کاشی‌کاری کامل یکتا برای یک مربع با کمترین تعداد ممکن مربع‌ها، ۲۱، ارائه شده است.

[6] Elkies, N., Kuperberg, G., Larsen M., Propp, J., Alternating sign matrices and domino tilings (I and II), *J. Algebraic Combin.*, **1** (1992), 111–132, 219–234.

نشان داده شده است که لوزی اَزتک از مرتبهٔ n دارای $۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$تا کاشی‌کاری با استفاده از دومینوها است. چهار اثبات برای این حکم ارائه شده است؛ از جمله استفاده از رابطهٔ این مسئله با ماتریس‌های علامت-متناوب، مثلث‌های یکنوا و نظریهٔ نمایش $GL(n)$. همچنین ارتباط آن با مدل مربع-یخ لی‌یِب هم توضیح داده شده است.

[7] Fisher, M., Temperley, H., Dimer problem in statistical mechanics—an exact result, *Philosophical Magazine*, **6** (1961), 1061–1063.

در این مقاله، فرمولی برای تعداد کاشی‌کاری‌های یک مستطیل با استفاده از دومینوها از منظر مکانیک آماری ارائه شده است.

[8] Freiling C., Rinne, D., Tiling a square with similar rectangles, *Math. Res. Lett.*, **1** (1994), 547–558.

نویسندگان ثابت می‌کنند که یک مربع را می‌توان با کاشی‌های متشابه با کاشی $u \times ۱$ کاشی‌کاری کرد اگر و تنها اگر u ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد به‌طوری که قسمت حقیقی همهٔ ریشه‌های این چندجمله‌ای، مثبت باشند.

[9] Grünbaum, B., Shephard, G., *Tilings and Patterns,* W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

این کتاب گزارشی مفصل از مفاهیم گوناگون کاشی‌کاری با تکیه بر کاشی‌کاری صفحه توسط مجموعه‌ای متناهی از کاشی‌ها، ارائه می‌دهد. برای مثال، نویسندگان انواع متعدد الگوهای کاشی‌کاری صفحه را دسته‌بندی می‌کنند. سایر موضوع‌های مورد بحث شامل کاشی‌کاری کامل مستطیل‌ها و کاشی‌کاری‌های نامتناوب صفحه است.

[10] Hall, P., On representatives of subsets, *J. London Math. Soc.*, **10** (1935), 26–30.

برای هر mتا زیرمجموعهٔ $T_۱$، . . .، T_m از مجموعهٔ S، هال یک *دستگاه کامل نشانگرهای متمایز* را مجموعه‌ای از m عضو متمایز $a_۱, \ldots, a_m \in S$ تعریف می‌کند به‌طوری که برای هر i، $a_i \in T_i$. او ثابت می‌کند که چنین دستگاهی موجود است اگر و تنها اگر برای هر $k = ۱, ۲, \ldots, m$، اجتماع هر kتا از این مجموعه‌ها شامل دست‌کم k عضو باشد.

[11] Jockusch, W., Propp, J., Shor, P., Random domino tilings and the Arctic Circle theorem, preprint, 1995, arXiv:math. CO/9801068.

در کاشی‌کاری لوزی اَزتک با استفاده از دومینوها، لوزی به پنج ناحیه افراز می‌شود: چهار ناحیهٔ بیرونی نزدیک به گوشه‌ها که کاشی‌ها به‌صورت مرتب کنار هم قرار می‌گیرند و یک ناحیهٔ مرکزی که در آن، کاشی‌ها هیچ الگوی از پیش تعیین‌شده‌ای را دنبال نمی‌کنند. نویسندگان قضیهٔ قطب شمال را ثابت می‌کنند: در یک کاشی‌کاری تصادفی از یک لوزی اَزتک بزرگ، ناحیهٔ مرکزی بسیار شبیه به یک دایرهٔ کامل محاط در لوزی است.

[12] Kasteleyn, P., The statistics of dimers on a lattice I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice, *Physica*, **27** (1961), 1209–1225.

نویسنده فرمول‌های دقیق و مجانبی برای تعداد کاشی‌کاری‌های یک مستطیلِ دارای لبه یا با شرایط مرزی متناوب را توسط دومینوها، ثابت می‌کند. سپس به بحث دربارهٔ پیوند بین این مسأله و مدل آیزینگ برای مکانیک آماری می‌پردازد.

[13] Klarner, D., Packing a rectangle with congruent n-ominoes, *J. Combin. Theory*, **7** (1969), 107–115.

نویسنده به بررسی مسألهٔ کاشی‌کاری یک مستطیل با تعدادی فرد نسخه از یک پلیومینوی خاص می‌پردازد. او همچنین مستطیل‌هایی را که با نسخه‌هایی از یک مستطیل $a \times b$ قابل کاشی‌کاری هستند و نیز مستطیل‌هایی را که با نسخه‌هایی از یک اکتامینو قابل کاشی‌کاری هستند، مشخص می‌کند.

[14] Laczkovich, M., Szekeres, G., Tilings of the square with similar rectangles, *Discrete Comput. Geom.*, **13** (1995), 569–572.

نویسندگان ثابت می‌کنند که یک مربع را می‌توان با مستطیل‌های متشابه با یک مستطیل $u \times ۱$ کاشی‌کاری کرد اگر و تنها اگر u ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و قسمت‌های حقیقی همهٔ ریشه‌های این چندجمله‌ای، مثبت باشند.

[15] Pak, I., Tile invariants: New horizons, *Theoret. Comput. Sci.*, **303** (2003), 303–331.

برای یک مجموعهٔ متناهی از کاشی‌ها نظیر T، گروه ناورداها $G(T)$، از روابط خطی تشکیل شده است که باید بین تعداد هر نوع کاشی در کاشی‌کاری‌های متفاوت از یک ناحیه برقرار باشد. در این مقاله، آنچه دربارهٔ $G(T)$ می‌دانیم، دوره می‌شود. ثابت می‌شود که این ناورداها، از استدلال‌های رنگ‌آمیزی کلاسیک قوی‌تر هستند.

[16] Paulhus, M., An algorithm for packing squares, *J. Combin. Theory Ser. A*, **82** (1998), 147–157.

نویسنده الگوریتمی برای جاسازیِ یک مجموعهٔ نامتناهی از مستطیل‌هایی که پی‌درپی کوچک می‌شوند ولی مجموع مساحت‌های آنها عدد ثابت A است، در یک ناحیهٔ مستطیلی با مساحت کمی بیش از A ارائه می‌کند. او الگوریتم خود را برای سه مسألهٔ مشهور از این نوع به‌کار می‌برد و یک بسته‌بندی بسیار چفت به‌دست می‌آورد.

[17] Propp, J., Lattice structure for orientations of graphs, preprint, 1994, arXiv: math/0209005.

در این مقاله، ثابت می‌شود که می‌توان به مجموعهٔ همهٔ جهت‌های یک گراف که تفاضل شار آنها حول همهٔ مدارها یکسان است، یک ساختار مشبکهٔ توزیع‌پذیر نسبت داد. این موضوع، ساختار مشابه مربوط به ماتریس‌های علامت–متناوب و جورسازی‌ها را تعمیم می‌دهد.

[18] Stein, S., Szabó, S., *Algebra and tiling. Homomorphisms in the service of geometry,* Mathematical Association of America, Washington, DC, 1994.

این کتاب به بحث دربارهٔ حل چند مسألهٔ کاشی‌کاری با استفاده از ابزارهای جبر پیشرفته می‌پردازد. دو نمونه از این مسائل عبارت‌اند از: یک مربع را نمی‌توان با مثلث‌های $۹۰^\circ - ۶۰^\circ - ۳۰^\circ$ کاشی‌کاری کرد. همچنین مربعی را که مساحت آن یک عدد صحیح فرد است، نمی‌توان با مثلث‌هایی با مساحت واحد، کاشی‌کاری کرد.

[19] Thurston, W., Conway's tiling groups, *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 757–773.

نویسنده به معرفی روش کانوی برای مطالعهٔ مسائل کاشی‌کاری می‌پردازد. در برخی موارد می‌توان یال‌های کاشی‌ها را با اعضای یک گروه برچسب‌گذاری کرد به‌طوری که یک ناحیه قابل کاشی‌کاری باشد اگر و تنها اگر حاصل‌ضرب برچسب‌های

ظاهرشده روی مرز ناحیه، برابر با عضو همانی گروه شود. همچنین ایدهٔ *تابع ارتفاع* که کاشی‌کاری را به یک شکل سه‌بُعدی ارتقا می‌دهد، معرفی شده است. این روش‌ها در کاشی‌کاری با دومینوها، لوزی‌ها و تریبون‌ها به‌کار گرفته شده‌اند.

[20] Wagon, S., Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle, *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987), 601–617.

نویسنده ۱۴ اثبات برای این قضیه ارائه می‌کند: *اگر یک مستطیل را بتوان با مستطیل‌هایی که دست‌کم یک ضلع آنها عدد صحیح است، کاشی‌کاری کرد، آن‌گاه مستطیل کاشی‌کاری‌شده نیز دست‌کم یک ضلع صحیح دارد.*

حمیدرضا نعمتی: دانشگاه فسا، گروه ریاضی

رایانامه: hr.nemati@math.iut.ac.ir

رسول کاظمی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

تارنما: rkazemi.kashanu.ac.ir

رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir