فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، صص. ۱۲۵ تا ۱۴۰

قضیهٔ بزو

داود حسن‌زاده للکامی

چکیده

فرض کنیم P و Q دو خم مسطح باشند که با معادله‌های $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ توصیف می‌شوند و f و g چندجمله‌ای‌هایی ناصفر به‌ترتیب، از درجهٔ m و n باشند. قضیهٔ بزو می‌گوید تحت شرایطی مناسب، P و Q دقیقاً در $m\times n$ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱. سرآغاز

در این مقاله، هیچ ریاضیات جدیدی ارائه نخواهیم کرد، بلکه قصد داریم دربارهٔ یکی از قضیه‌های مهم و جذاب در هندسهٔ جبری سخن بگوییم. مطلب شگفت‌انگیز دربارهٔ قضیهٔ بزو[۱] فقط حکمی نیست که این قضیه بیان می‌کند، بلکه یافتن فرض‌های درست و شرایطی مناسب که با داشتنِ آنها، حکم قضیه برقرار باشد نیز جذابیت‌های خودش را دارد. در این مقاله، قصد ارائهٔ اثباتی برای قضیهٔ بزو را هم نداریم. هدف ما بیان و مطالعهٔ اثر متقابل شهود هندسی و نگاه جبری دقیق در قضیهٔ بزو است.

دلایل نامگذاری این قضیه به نام بزو (۱۷۳۰–۱۷۸۳)، ریاضیدان فرانسوی، مشخص نیست، زیرا اگرچه او برهانی برای این قضیه ارائه داد ولی نه‌تنها این برهان درست نبود، بلکه اولین برهان این قضیه نیز نبود. قضیهٔ بزو اساساً توسط نیوتن در اثبات لم ۲۸ از جلد ۱ کتاب [۶] بیان شده است. در واقع نیوتن ادعا کرد که تعداد نقاط مشترک دو خم با استفاده از حاصل‌ضرب درجه‌های آنها به‌دست می‌آید. این قضیه را بزو در سال ۱۷۷۹ منتشر کرد. برای مطالعهٔ سیر تاریخی قضیهٔ بزو، به [۸] مراجعه کنید.

عبارات و کلمات کلیدی. قضیهٔ بزو؛ خم مسطح؛ فضای تصویری.

[۱] Bézout's theorem

۲. دیدگاه هندسهٔ جبری

دو سؤال زیر را که اولی از دیدگاه جبری و دومی از دیدگاه هندسی است، در نظر بگیرید.
سؤال ۱: دستگاه معادله‌های چندجمله‌ای زیر چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

سؤال ۲: دو خم P و Q در صفحه در چند نقطه اشتراک دارند؟

این دو سؤال را می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد و این موضوع، در قلمرو هندسهٔ جبری، یعنی مطالعهٔ اشیاء هندسی از طریق جبر وابسته به آنها و به‌عکس، است. هندسهٔ جبری دانش مطالعهٔ مجموعهٔ صفرهای چندجمله‌ای‌ها است و همهٔ ما به‌نوعی با این موضوع از زمان دبیرستان آشنا هستیم. برای مثال، سهمی $y=x^2$ در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$، همان مجموعهٔ صفرهای چندجمله‌ای $h(x,y)=y-x^2$ است و معمولاً از نماد زیر برای بیان این مجموعه استفاده می‌شود:

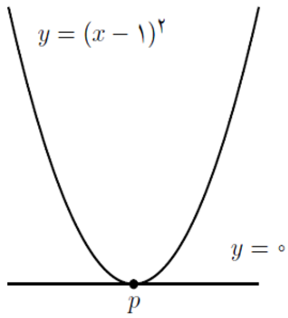
$$V(h)=V(y-x^2):=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid h(x,y)=0\}.$$

قضیهٔ بزو دربارهٔ اشتراک این مجموعه‌های صفرها است. می‌توان مجموعه‌های صفرهای چندجمله‌ای‌ها از ابعاد بزرگتر از دو را نیز مطالعه کرد (کما اینکه نسخه‌هایی از قضیهٔ بزو برای ابعاد بالاتر وجود دارد) اما بحث ما منحصر به خم‌های واقع در صفحه است.

مجموعهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ چندجمله‌ای $f(x)=0$ مجموعهٔ نقاطی از محور xها است که نمودار f در آنجا محور xها را قطع می‌کند. توجه کنید که محور xها همان مجموعهٔ صفرهای چندجمله‌ای y، یعنی $V(y)$ است. به‌کمک مفهوم «مجموعهٔ صفرها» می‌توان توصیفی از مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ ارائه کرد که بر «اشتراک خم‌ها» استوار باشد: ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ متناظر با نقاط اشتراک مجموعهٔ صفرهای چندجمله‌ای $y-f(x)$ و مجموعهٔ صفرهای چندجمله‌ای y است.

روشن است که حکم قضیهٔ بزو در حالت کلی برقرار نیست، زیرا اگر $P=Q$، آن‌گاه این دو خم دارای بی‌نهایت نقطهٔ مشترک هستند و لذا حاصل‌ضرب درجه‌های چندجمله‌ای‌های معرّف آنها، کمتر از تعداد نقاط اشتراک آنها خواهد بود. در حالت کلی، اگر یک خم با یک معادلهٔ چندجمله‌ای تجزیه‌پذیر تعریف شود، آن خم اجتماعی از چندین مؤلفه خواهد بود. برای مثال، فرض کنیم $P=V(xy)$ و $Q=V(y^3-x^3y)$ به‌ترتیب خم‌هایی درجه‌دو و درجه‌سه باشند. به‌آسانی می‌توان نشان داد که $P=V(x)\cup V(y)$ و $Q=V(y)\cup V(y^2-x^3)$، یعنی خم P اجتماع دو خط $x=0$ و $y=0$ و خم Q اجتماع خط $y=0$ و خم درجه‌دوی $y^2=x^3$ است. پس $P\cap Q=V(y)$. از این‌رو دو خم P و Q در همهٔ نقاط

محور xها اشتراک دارند. این، مثالی است از حالتی که دو خمِ متمایز، ممکن است مؤلفه‌های مشترک داشته باشند. لذا حکم قضیهٔ بزو در این حالت نیز برقرار نیست. پس یکی از فرض‌های قضیهٔ بزو باید این باشد که **دو خم دارای هیچ مؤلفهٔ مشترکی نباشند.**



شکل ۱. p نقطهٔ اشتراک با چندگانگی ۲ است.

از طرفی، گاهی برخی از نقاط اشتراک دو خم ظاهراً ناپدید می‌شوند. مثلاً ممکن است برهم منطبق شوند. در شکل ۱، مشاهده می‌کنیم که خم درجه‌دوی $y = (x-۱)^۲$ با خم درجه‌یک $y = ۰$ تنها در یک نقطه اشتراک دارد. لذا تعداد نقاط اشتراک، ظاهراً کمتر از حاصل‌ضرب درجه‌های چندجمله‌ای‌های متناظر است. اما طبق معمول، این نقطه را دو بار می‌شماریم و می‌گوییم *چندگانگی*[1] نقطهٔ اشتراک p برابر با دو است. این مطلب، انگیزهٔ افزودن فرضی جدید به فرض‌های قضیهٔ بزو است: **هنگام شمارش نقاط اشتراک دو خم، چندگانگیِ آنها نیز باید لحاظ شود.**

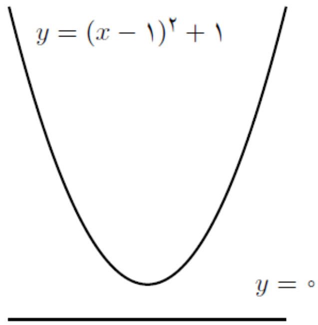
دو خم شکل ۲ را در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ در نظر بگیرید. یکی درجه‌دو و دیگری، درجه‌یک است. ملاحظه کنید که حکم قضیهٔ بزو در این حالت نیز برقرار نیست. اگر ریشه‌های مختلط را نیز در نظر بگیریم، آن‌گاه حکم قضیه برای خم‌های شکل ۲ در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ برقرار خواهد بود، زیرا

$$\begin{cases} y = (x-۱)^۲ + ۱ \\ y = ۰ \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = ۱ \pm i.$$

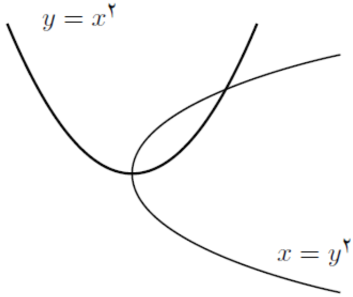
توجه کنید که در اینجا از قضیهٔ اساسی جبر استفاده شده است. بنابراین فرض جدیدی که انتظار می‌رود در قضیهٔ بزو وجود داشته باشد این است که **خم‌ها را در صفحهٔ مختلط در نظر بگیریم.**

برای اینکه تأثیر فرض‌هایی را که تاکنون مطرح کرده‌ایم، بهتر مشاهده کنید، خم‌های درجه‌دوی شکل‌های ۳ و ۴ را که در صفحهٔ حقیقی رسم شده‌اند، در نظر بگیرید. خم‌های درجه‌دو در شکل ۳ تنها در دو نقطه

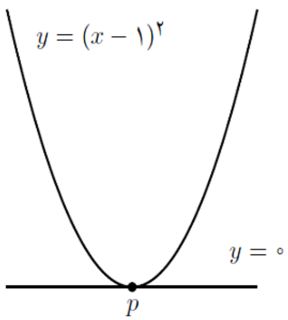
[1] multiplicity



شکل ۲. نقاط اشتراکی که مختصات آنها مختلط است.



شکل ۳. دو نقطهٔ اشتراک در صفحهٔ حقیقی و دو نقطهٔ اشتراک در صفحهٔ مختلط وجود دارد.



شکل ۴. یک نقطهٔ اشتراک با چندگانگی ۲ وجود دارد.

همدیگر را قطع می‌کنند اما با حل دستگاه

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ x = y^۲ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد مختلط، به چهار نقطهٔ اشتراک

$$x_۱ = ۰, x_۲ = ۱, x_{۳,۴} = -\frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲} i$$

می‌رسیم که انتظار ما را برآورده می‌سازد. دو خم درجه‌دو در شکل ۴ تنها در سه نقطه همدیگر را قطع کرده‌اند اما با حل دستگاه

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱ \\ y = x^۲ - ۱ \end{cases}$$

در مجموعهٔ اعداد مختلط و احتساب چندگانگی ریشه‌ها، به چهار نقطهٔ اشتراک می‌رسیم: به‌ازای $y = ۰$، دو نقطهٔ تقاطع $(۰, ۱)$ و $(۰, ۱-)$ حاصل می‌شود و به‌ازای $y = -۱$ معادلهٔ $x^۲ = ۰$ به‌دست می‌آید که نشان می‌دهد چندگانگی نقطهٔ اشتراک $(۰, -۱)$ برابر با دو است. این بار نیز انتظار ما برآورده می‌شود. لذا در این حالت نیز حاصل‌ضرب درجه‌ها برابر با تعداد نقاط اشتراک است به این شرط که چندگانگی نقاط مشترک لحاظ شود.

همان‌طور که مشاهده شد، لزومی ندارد بحث را به میدان اعداد حقیقی و صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ محدود کنیم، بلکه می‌توان این مطالب را به فضاهای کلی‌تر تعمیم داد. فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان مانند $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. صفحهٔ آفین $\mathbb{A}^۲_{\mathbb{K}}$ عبارت است از

$$\mathbb{A}^۲_{\mathbb{K}} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}.$$

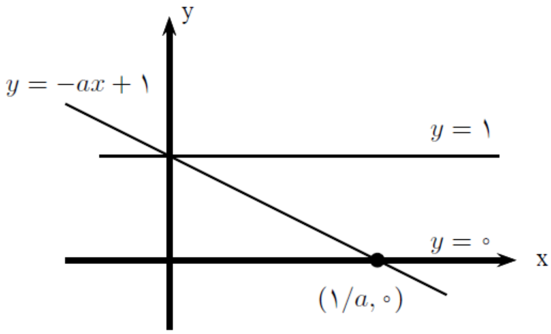
با وجود این تعمیم، می‌توان مفهوم خم مسطح آفین را به‌عنوان تعمیم خم‌های مسطح در صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$ بیان کرد. زیرمجموعهٔ C از $\mathbb{A}^۲_{\mathbb{K}}$ را خم مسطح آفین گوییم اگر برابر با مجموعهٔ صفرهای یک چندجمله‌ای $f(x, y)$ با ضرایب در میدان $\mathbb{K}$ باشد (لذا $C = V(f)$).

۳. فضای تصویری

ظاهراً همه چیز فراهم است تا قضیهٔ بزو را با فرض‌های اضافی که مطرح شد، بیان کنیم و به‌کار ببریم. اما این طور نیست. برای مثال، دو خط موازی (متمایز) را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب درجه‌های آنها برابر با یک است ولی هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. این مثال ساده نشان می‌هد که به فرضی قوی‌تر نیاز

داریم. شرطی که بر اساس آن هر دو خط موازی نیز دقیقاً یک بار همدیگر را قطع کنند و این همان دیدگاه هندسهٔ تصویری است.

می‌دانیم که دو خط در صفحه یا (الف) بر هم منطبق‌اند یا (ب) موازی‌اند و یا (ج) متقاطع‌اند. حالت (الف) را قبلاً از بحث خود کنار گذاشتیم. (ب) را نیز می‌توان حالت خاصی از (ج) دانست. مثلاً دو خط موازی متناظر با معادله‌های $y = 0$ و $y = 1$ را در نظر بگیرید. خط $y = 1$ را می‌توان حد خط $y = -ax + 1$ دانست وقتی که $a \to 0$. در اینجا نقطهٔ تقاطع دو خم $y = 0$ و $y = -ax + 1$، $(1/a, 0)$ است و وقتی $a \to 0$، $(1/a, 0)$ به «بی‌نهایت» میل می‌کند.



شکل ۵. خط $y = 1$ را می‌توان حد خط $y = -ax + 1$ دانست وقتی که $a \to 0$.

اگر این «نقطه در بی‌نهایت» را به طریق مقتضی به دو خط موازی اضافه کنیم، آن‌گاه آن دو نیز یکدیگر را قطع می‌کنند و لذا می‌توان نسبت آنها را نیز حالت خاصی از (ج) دانست. با افزودنِ «نقاط در بی‌نهایت» به صفحهٔ آفین، آن را به فضایی بزرگ‌تر به نام صفحهٔ تصویری گسترش می‌دهیم و ادامهٔ بحث دربارهٔ قضیهٔ بزو را در این صفحه پی می‌گیریم، زیرا اکنون خط‌های متمایز دقیقاً یک بار همدیگر را قطع می‌کنند.

صفحهٔ تصویری که با $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ خط‌های گذرنده از مبدأ در $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$ است. صفحهٔ تصویری را به روش‌های مختلف می‌توان تعبیر کرد. برای مثال، رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی مجموعهٔ $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}} \setminus \{(0,0,0)\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \, : (x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2).$$

مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی، صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ را تشکیل می‌دهد، یعنی

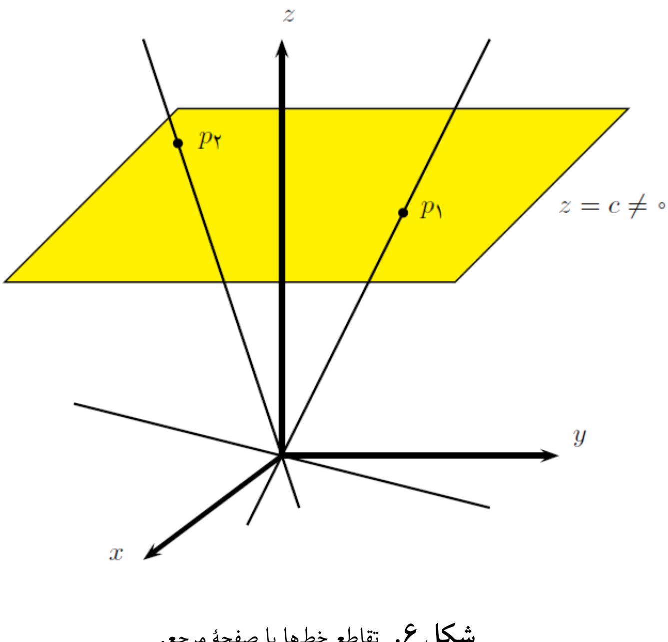
$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} = \frac{\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}} \setminus \{(0,0,0)\}}{\sim}.$$

بنابراین هر نقطه از صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ را می‌توان یک ردهٔ هم‌ارزی

$$[(x,y,z)]_{\sim} = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{۰\}\}$$

تلقی کرد که در این نمادگذاری، باید دست‌کم یکی از مختصات x، y یا z ناصفر باشد. لذا هر نقطه از $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ با یکی از نماینده‌های ردهٔ هم‌ارزی نمایش داده می‌شود. از نماد $[x : y : z]$ برای نمایش این نماینده استفاده می‌کنیم.

اما چگونه می‌توان برای هر نقطه از $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ یک نماینده یافت؟ به‌ویژه نمایندهٔ «نقطه در بی‌نهایت» چیست؟ چه رابطه‌ای بین $\mathbb{A}^{۲}_{\mathbb{K}}$ و $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ وجود دارد؟ یک روش بسیار ساده برای یافتن نمایندهٔ هر نقطهٔ p از $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ این است که یک صفحهٔ دلخواه در $\mathbb{A}^{۳}_{\mathbb{K}}$ که از مبدأ نمی‌گذرد، انتخاب کنیم. این صفحه را صفحهٔ مرجع می‌نامیم. می‌دانیم که نقطهٔ $p \in \mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ معرّف یک خط گذرنده از مبدأ در $\mathbb{A}^{۳}_{\mathbb{K}}$ است. لذا نمایندهٔ p را همان نقطهٔ یکتایی در نظر می‌گیریم که از تقاطع صفحهٔ مرجع با خط معرّف p به‌دست می‌آید. اما در این میان، خط‌هایی که به‌موازات صفحهٔ مرجع در $\mathbb{A}^{۳}_{\mathbb{K}}$ قرار دارند، معرّف همان نقاط در بی‌نهایت هستند (شکل ۶ را ببینید). توجه کنید که خط‌های مذکور روی یک صفحهٔ گذرنده از مبدأ و موازی با صفحهٔ مرجع واقع‌اند.



شکل ۶. تقاطع خط‌ها با صفحهٔ مرجع.

برای مثال، صفحهٔ مرجع را $z = c$ در نظر می‌گیریم که در آن، $c \neq ۰$. بنابر تعریف صفحهٔ تصویری، داریم $[a : b : c] \sim [a/c : b/c : ۱]$. لذا مجموعه‌ای از نقاط $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ که مختص سوم آنها ناصفر است،

تنها با دو پارامتر تعیین می‌شود و در تناظر یک‌به‌یک با $\mathbb{A}^{۲}_{\mathbb{K}}$ است. اما متمم این مجموعه، یعنی مجموعهٔ نقاط $[a:b:۰]$ از $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$، همان مجموعهٔ خط‌های واقع بر صفحهٔ $z=۰$ از $\mathbb{A}^{۳}_{\mathbb{K}}$ و لذا مجموعهٔ نقاط در بی‌نهایت $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ است. مجموعهٔ این خط‌های گذرنده از مبدأ و واقع بر صفحهٔ $z=۰$ را می‌توان یک رونوشت از فضای تصویری $\mathbb{P}^{۱}_{\mathbb{K}}$ دانست. به عبارت دیگر، صفحهٔ $z=۰$ از $\mathbb{A}^{۳}_{\mathbb{K}}$ را با $\mathbb{A}^{۲}_{\mathbb{K}}$ یکی می‌گیریم. بنابراین به یک تجزیه برای $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ می‌رسیم و رابطهٔ بین عضوهای این تجزیه به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}} &= \mathbb{A}^{۲}_{\mathbb{K}} \cup \mathbb{P}^{۱}_{\mathbb{K}}, \\ [x:y:z] &\leftrightarrow \begin{cases} (x/z, y/z) \in \mathbb{A}^{۲}_{\mathbb{K}} & z \neq ۰ \\ [x:y] \in \mathbb{P}^{۱}_{\mathbb{K}} & z = ۰ \end{cases} \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

از این‌رو می‌توان صفحهٔ آفین $\mathbb{A}^{۲}_{\mathbb{K}}$ را توسط نگاشت $(x,y) \mapsto (x,y,۱)$ در صفحهٔ مختلط $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ نشاند. به‌عکس، اگر $z \neq ۰$، آن‌گاه با تقسیم سایر مختصات بر z و سپس حذف این مختص، می‌توان به یک نسخه از صفحهٔ آفین رسید. این بحث را می‌توان برای سایر مختصات y و x با فرض ناصفر بودن، تکرار کرد. برای مثال، اگر $y \neq ۰$، آن‌گاه

$$[x:y:z] \longleftrightarrow (x/y, z/y) \tag{۲.۳}$$

و اگر $x \neq ۰$، می‌نویسیم

$$[x:y:z] \longleftrightarrow (y/x, z/x). \tag{۳.۳}$$

اکنون که با مفهوم صفحهٔ تصویری آشنا شده‌ایم، طبیعی است که بپرسیم چگونه می‌توان مفهوم خم آفین را به صفحهٔ تصویری انتقال داد؟ چگونه می‌توان نشان داد که هر دو خط موازی در صفحهٔ تصویری همدیگر را قطع می‌کنند؟ یک معادلهٔ چندجمله‌ای دلخواه مانند $h(x,y,z)=۰$ در فضای آفین بامعنی است ولی در صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ این چنین نیست. برای مثال، معادلهٔ $y = x^{۲} - z$ را در $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ در نظر بگیرید. می‌دانیم که

$$[۱ : ۳/۲ : ۱/۲] \sim [۲:۳:۱].$$

نقطهٔ $(۲,۳,۱)$ به مجموعهٔ جواب معادلهٔ $h(x,y,z) = y - x^{۲} + z = ۰$ تعلق دارد اما نقطهٔ $(۱, ۳/۲, ۱/۲)$ به مجموعهٔ جواب تعلق ندارد و این بی‌معنی است. به همین دلیل در فضای تصویری، از معادله‌های همگن برای تعریف خم‌ها استفاده می‌شود. چندجمله‌ای $h(x,y,z)$ را همگن[۱] گوییم اگر درجهٔ

[۱] homogeneous

همهٔ جمله‌ها یکسان باشد. لذا عددی مانند t وجود دارد که به‌ازای هر $r \in \mathbb{K}$،

$$h(rx, ry, rz) = r^t h(x, y, z).$$

مثلاً $h(x, y, z) = yz - x^۲$ یک چندجمله‌ای همگن است و معادلهٔ $h(x, y, z) = ۰$ در $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{K}}$ کاملاً بامعنی است، زیرا اگر (a, b, c) یک جواب این معادله باشد (یعنی $h(a, b, c) = ۰$)، آن‌گاه هر مضرب ناصفر آن نیز چنین است، زیرا به‌ازای هر $r \in \mathbb{K}$ داریم

$$h(ra, rb, rc) = (rb)(rc) - (ra)^۲ = r^۲(bc - a^۲) = r^۲ h(a, b, c) = ۰.$$

زیرمجموعهٔ C از $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{K}}$ را خم مسطح تصویری گوییم اگر برابر با مجموعهٔ صفرهای یک چندجمله‌ای همگن $f(x, y, z)$ با ضرایب در میدان $\mathbb{K}$ باشد. روشی استاندارد برای تبدیل یک خم مسطح آفین درجه n مانند $P(x, y)$ از $\mathbb{A}^۲_{\mathbb{K}}$ به یک خم مسطح تصویری $Q(X, Y, Z)$ در $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{K}}$، استفاده از فرمول زیر است:

$$Q(X, Y, Z) = Z^n P(X/Z, Y/Z).$$

این تبدیل را همگن‌سازی[۱] می‌نامند. برای مثال، خم آفین درجه‌دوی $x^۲ = ۱ - y^۲$ را در $\mathbb{A}^۲_{\mathbb{K}}$ در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $P(x, y) = x^۲ + y^۲ - ۱ = ۰$. در این صورت خم P به خم تصویری

$$\begin{aligned} Q(X, Y, Z) &= Z^۲ P(X/Z, Y/Z) = Z^۲\Big(\Big(\frac{X}{Z}\Big)^۲ + \Big(\frac{Y}{Z}\Big)^۲ - ۱\Big) \\ &= X^۲ + Y^۲ - Z^۲ = ۰ \end{aligned}$$

تبدیل می‌شود. همچنین با قرار دادنِ $Z = ۱$ در خم تصویری اخیر، می‌توان به معادلهٔ آفین برگشت.

اکنون که با رفت و برگشت از صفحهٔ آفین به صفحهٔ تصویری آشنا شده‌ایم، با یک مثال نشان می‌دهیم که هر دو خط موازی در صفحهٔ آفین دارای یک نقطهٔ مشترک در بی‌نهایت هستند. دو خط موازی $y = x$ و $y = x + ۱$ را در $\mathbb{A}^۲_{\mathbb{K}}$ در نظر بگیرید. پس از همگن‌سازی، داریم

$$\begin{cases} y = x \\ y = x + ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{همگن‌سازی}} \begin{cases} Y = X \\ Y = X + Z \end{cases} \implies Y = X,\ Z = ۰.$$

جواب دستگاه همگن، دقیقاً یک خط گذرنده از مبدأ و واقع بر صفحهٔ $Z = ۰$ از $\mathbb{A}^۳_{\mathbb{K}}$ است و لذا با توجه به گفته‌های قبلی، نقطهٔ تقاطع این دو خط موازی، یک نقطه در بی‌نهایت از $\mathbb{P}^۲_{\mathbb{K}}$ است. توجه کنید که نقطهٔ $[a : a : ۰]$ به‌ازای هر ثابت ناصفر $a \in \mathbb{K}$، بر خط مذکور واقع است. پس می‌توانیم $[۱ : ۱ : ۰]$ را

[۱] homogenization

همان نقطه در بی‌نهایت بدانیم. مثال اخیر در واقع نتیجه‌ای از گزارهٔ زیر است. یادآوری می‌کنیم که منظور از یک خط در صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$، مجموعهٔ صفرهای یک چندجمله‌ای همگن درجه‌یک است.

گزاره ۱.۳. *هر دو خط متمایز در $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ یکدیگر را قطع می‌کنند.*

برای اثبات این گزاره، فرض کنیم $L_۱$ و $L_۲$ دو خط متمایز در $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ باشند. در این صورت معادله‌های چندجمله‌ای همگن متمایز درجه‌یک مانند $a_۱X + a_۲Y + a_۳Z = ۰$ و $b_۱X + b_۲Y + b_۳Z = ۰$ وجود دارند که معرّف این دو خط هستند. اما این دو معادله در واقع صفحه‌های متمایز گذرنده از مبدأ در $\mathbb{A}^{۳}_{\mathbb{K}}$ هستند. پس فصل مشترک آنها نیز یک خط گذرنده از مبدأ و لذا نقطه‌ای از $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ است. برای مطالعهٔ بیشتر در زمینهٔ صفحهٔ تصویری، خواننده را به [۱] و [۳] ارجاع می‌دهیم.

۴. قضیهٔ بزو

اکنون که صفحهٔ تصویری و فرآیند همگن‌سازی معرفی شده‌اند، می‌توانیم صورت قوی قضیهٔ بزو را بیان کنیم. در ادامه، فرض می‌کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان جبری-بسته[۱] است. مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ مثالی از این دست میدان‌ها است.

قضیه ۱.۴ (قضیهٔ بزو). *گیریم C و D دو خم تصویری از درجه‌های n و m در $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ بدون مؤلفهٔ مشترک باشند. این دو خم با احتساب چندگانگی، دقیقاً nm نقطهٔ مشترک دارند، یعنی*

$$\sum_{p\in C\cap D} I_p(C,D) = nm \tag{۱.۴}$$

که در آن، $I_p(C,D)$ چندگانگیِ اشتراک[۲] C و D در نقطهٔ p است.

تنها مفهومی که در قضیهٔ بزو ظاهر شده است و هنوز تعریفی مناسب برای آن ارائه نداده‌ایم، چندگانگیِ اشتراک است. پیش از تعریف آن، یادآوری می‌کنیم که اگر R یک حلقهٔ جابه‌جایی و $\mathfrak{p}$ یک ایدآل اول از R باشد، آن‌گاه حلقهٔ $R_{\mathfrak{p}}$ حاصل از موضعی‌سازیِ R در $\mathfrak{p}$، حلقه‌ای موضعی با ایدآل ماکسیمال یکتای $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ است. اگر I ایدآلی از R باشد، آن‌گاه توسیع آن را تحت نگاشت کانونی $R \longrightarrow R_{\mathfrak{p}}$ با نماد $I_{\mathfrak{p}}$ نمایش می‌دهیم. عمل موضعی‌سازی روی حلقه‌های خارج‌قسمتی دارای ویژگی زیر است:

$$\left(\frac{R}{I}\right)_{\mathfrak{p}} \cong \frac{R_{\mathfrak{p}}}{I_{\mathfrak{p}}}. \tag{۲.۴}$$

---
[۱] algebraically closed field [۲] intersection multiplicity

اگر $p=(a,b)$ یک نقطه از $\mathbb{A}^{۲}_{\mathbb{K}}$ باشد، آن‌گاه $\mathfrak{p}=(x-a,y-b)$، یعنی ایدآل تولید شده توسط چندجمله‌ای‌های $x-a$ و $y-b$ در $\mathbb{K}[x,y]$، یک ایدآل ماکسیمال (و لذا اول) از حلقه $\mathbb{K}[x,y]$ است، زیرا

$$\frac{\mathbb{K}[x,y]}{\mathfrak{p}}=\frac{\mathbb{K}[x,y]}{(x-a,y-b)}\cong \mathbb{K}.$$

حلقهٔ موضعی $\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{p}}$ از عضوهایی به‌شکل $f(x,y)/g(x,y)$ تشکیل شده است که $f,g\in\mathbb{K}[x,y]$ و $g\notin\mathfrak{p}$.

فرض کنیم C و D دو خم مسطح در $\mathbb{P}^{۲}_{\mathbb{K}}$ باشند که با معادله‌های همگن $F(X,Y,Z)=\circ$ و $G(X,Y,Z)=\circ$ تعریف می‌شوند و $[X:Y:Z]$ یک نقطهٔ اشتراک دو خم C و D باشد به‌طوری که $Z\neq\circ$. همان‌طور که در بخش ۳ ذکر شد، می‌توانیم $[X:Y:Z]$ را نقطهٔ $p=(a,b)$ از صفحهٔ آفین در نظر بگیریم که در آن، $a=X/Z$ و $b=Y/Z$. همچنین خم‌های تصویری C و D دو خم آفین به‌صورت زیر القا می‌کنند:

$$f(x,y):=F(X/Z,Y/Z,۱)=\circ,\ \ g(x,y):=G(X/Z,Y/Z,۱)=\circ.$$

چندگانگیِ اشتراک خم‌های C و D در نقطهٔ $p=(a,b)$ بُعد $\mathbb{K}$-فضای برداری $\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{p}}/(f,g)_{\mathfrak{p}}$ است که در آن، $\mathfrak{p}=(x-a,y-b)$. به‌عبارت دقیق‌تر،

$$I_p(C,D)=\dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{p}}}{(f,g)_{\mathfrak{p}}}. \tag{۳.۴}$$

برای نقاط $[X:Y:Z]$ در اشتراک خم‌های C و D که نقاط در بی‌نهایت هستند (حالت $Z=\circ$)، می‌دانیم که دست‌کم یکی از X یا Y ناصفر است. لذا فرآیند برگشت به صفحهٔ آفین را نسبت به آن متغیر انجام می‌دهیم. در این حالت نیز چندگانگی اشتراک خم‌ها دقیقاً از فرمول (۳.۴) محاسبه می‌شود. این دو حالت را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت زیر بیان کرد:

$$X\neq\circ\Rightarrow\begin{cases}p=(a,b)=(Y/X,Z/X)\\ f(x,y):=F(۱,Y/Z,Z/X)=\circ\\ g(x,y):=G(۱,Y/Z,Z/X)=\circ\end{cases}$$

$$Y\neq\circ\Rightarrow\begin{cases}p=(a,b)=(X/Y,Z/Y)\\ f(x,y):=F(X/Y,۱,Z/Y)=\circ\\ g(x,y):=G(X/Y,۱,Z/Y)=\circ\end{cases}$$

روش معادل دیگری نیز برای تعریف چندگانگیِ اشتراک دو خم وجود دارد [۵] که از ذکر آن خودداری می‌کنیم. قضیهٔ بزو را برای سه مثال متفاوت به‌کار می‌بریم تا بیشتر با مفهوم چندگانی و فرمول (۳.۴) آشنا شوید.

مثال ۲.۴. خم درجه‌سه‌ی $y = x^۳$ و خم درجه‌یک $y = ۰$ را در $\mathbb{A}^۲_{\mathbb{K}}$ در نظر بگیرید. تنها نقطهٔ اشتراک این دو خم پس از همگن‌سازی

$$\begin{cases} y & = ۰ \\ y - x^۳ & = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{همگن‌سازی}} \begin{cases} F(X,Y,Z) = Y & = ۰ \\ G(X,Y,Z) = Z^۲Y - X^۳ & = ۰ \end{cases}$$

عبارت است از $[۰ : ۰ : ۱]$. چون مختص سوم این نقطه در صفحهٔ تصویری صفر نیست، نقطهٔ متناظر با آن در صفحهٔ آفین، بنابر (۱.۳)، نقطهٔ $p = (۰, ۰)$ است. قرار می‌دهیم

$$\mathfrak{p} = (x, y), \quad f(x,y) := y = ۰, \quad g(x,y) := y - x^۳ = ۰.$$

با این فرض‌ها و استفاده از فرمول (۲.۴)، یکریختی‌های زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{p}}}{(f,g)_{\mathfrak{p}}} = \frac{\mathbb{K}[x,y]_{(x,y)}}{(y, y - x^۳)_{(x,y)}} &\cong \left(\frac{\mathbb{K}[x,y]}{(y, y - x^۳)}\right)_{(x,y)} \\ &\cong \left(\frac{\frac{\mathbb{K}[x,y]}{(y)}}{\frac{(y, y-x^۳)}{(y)}}\right)_{(x,y)} \cong \left(\frac{\mathbb{K}[x]}{(x^۳)}\right)_{(x)}. \end{aligned}$$

می‌دانیم که $\left(\mathbb{K}[x]/(x^۳)\right)_{(x)}$ یک $\mathbb{K}$-فضای برداری سه‌بُعدی است و لذا با استفاده از فرمول (۳.۴) می‌توانیم چندگانگیِ اشتراک دو خم در نقطهٔ p را به‌دست آوریم:

$$I_p(C, D) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{p}}}{(f,g)_{\mathfrak{p}}} = ۳.$$

این نتیجه، درستیِ فرمول (۱.۴)، یعنی درستیِ حکم قضیهٔ بزو را نشان می‌دهد.

مثال ۳.۴. در اینجا اشتراک خم‌هایی را در نظر می‌گیریم که دارای نقطهٔ مشترک در بی‌نهایت هستند. خم‌های $y = x^۲$ و $x = ۱$ را در $\mathbb{A}^۲_{\mathbb{K}}$ در نظر بگیرید. توجه کنید که بنابر قضیهٔ بزو انتظار داریم تعداد نقاط اشتراک برابر با دو باشد. دستگاه حاصل از همگن‌سازی خم‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ x = ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{همگن‌سازی}} \begin{cases} F(X,Y,Z) = YZ - X^۲ = ۰ \\ G(X,Y,Z) = X - Z = ۰ \end{cases}$$

با حل دستگاه اخیر، به دو نقطهٔ اشتراک $[1:1:1]$ و $[0:1:0]$ می‌رسیم. اولی را می‌توان بنابر (۱.۳) به‌صورت نقطهٔ $p=(1,1)$ از صفحهٔ آفین در نظر گرفت. اما دومی یک نقطه در بی‌نهایت است. ابتدا چندگانگیِ اشتراک این خم‌ها را در p محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که در این حالت داریم

$$p=(1,1), \mathfrak{p}=(x-1,y-1), f(x,y):=y-x^2=0, g(x,y):=x-1=0.$$

از این‌رو یکریختی‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{p}}}{(f,g)_{\mathfrak{p}}}&=\frac{\mathbb{K}[x,y]_{(x-1,y-1)}}{(y-x^2,x-1)_{(x-1,y-1)}}\cong\left(\frac{\mathbb{K}[x,y]}{(y-x^2,x-1)}\right)_{(x-1,y-1)}\\&\cong\left(\frac{\mathbb{K}[x]}{(y-1)}\right)_{(y-1)}\cong\mathbb{K}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$I_p(C,D)=\dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{p}}}{(f,g)_{\mathfrak{p}}}=\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}=1.$$

برای یافتن چندگانگیِ اشتراک خم‌ها در $[0:1:0]$، با توجه به (۲.۳)، این نقطه را می‌توان با $q:=(0,0)$ در صفحهٔ آفین یکسان گرفت. در این حالت داریم

$$\begin{aligned}&\mathfrak{q}:=(x-0,z-0)=(x,z),\\&F(X/Y,1,Z/Y)=1\times\frac{Z}{Y}-\left(\frac{X}{Y}\right)^2=0,\\&G(X/Y,1,Z/Y)=\frac{X}{Y}-\frac{Z}{Y}=0.\end{aligned}$$

پس $f(x,z)=z-x^2$ و $g(x,z)=x-z$. از این‌رو یکریختی‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{K}[x,z]_{\mathfrak{q}}}{(f,g)_{\mathfrak{q}}}&=\frac{\mathbb{K}[x,z]_{(x,z)}}{(z-x^2,x-z)_{(x,z)}}\cong\left(\frac{\mathbb{K}[x,z]}{(z-x^2,x-z)}\right)_{(x,z)}\\&\cong\left(\frac{\mathbb{K}[x]}{(x(1-x))}\right)_{(x)}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$I_q(C,D)=\dim_{\mathbb{K}}\frac{\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{q}}}{(f,g)_{\mathfrak{q}}}=\dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{\mathbb{K}[x]}{(x(1-x))}\right)_{(x)}=1.$$

اکنون درستیِ قضیهٔ بزو را به‌کمک فرمول (۱.۴) نشان می‌دهیم:

$$\sum_{p'\in C\cap D} I_{p'}(C,D) = I_p(C,D) + I_q(C,D) = ۱ + ۱ = mn = ۲ \times ۱.$$

مثال ۴.۴. در بخش ۳ انگیزهٔ واردکردنِ مفهوم صفحهٔ تصویری را این گونه بیان کردیم که هر دو خط موازی نیز یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند. نه‌تنها این مطلب در مورد هر دو خط از صفحهٔ تصویری صادق است (گزارهٔ ۱.۳)، بلکه قضیهٔ بزو بیان می‌کند هر دو خم دلخواه در صفحهٔ تصویری یکدیگر را قطع می‌کنند. در اینجا مثالی از دو خم در صفحهٔ آفین ارائه می‌کنیم که هیچ نقطهٔ تقاطعی ندارند. هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$ و مجانب آن $x = y$ را در نظر بگیرید. با همگن‌سازی داریم $F = X^۲ - Y^۲ - Z^۲ = ۰$ و $G = Y - X = ۰$. جواب دستگاه اخیر، نقطهٔ $[۱ : ۱ : ۰]$ در صفحهٔ تصویری است که می‌توان با یکی از روش‌های (۲.۳) یا (۳.۳)، آن را به نقطه‌ای در صفحهٔ آفین متناظر کرد. برای مثال، با توجه به (۲.۳)، این نقطه را با $p := (۱, ۰)$ در صفحهٔ آفین یکسان می‌گیریم. در این حالت داریم

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} &:= (x-۱, z-۰) = (x-۱, z),\\
F(X/Y, ۱, Z/Y) &= \left(\frac{X}{Y}\right)^۲ - ۱ - \left(\frac{Z}{Y}\right)^۲ = ۰,\\
G(X/Y, ۱, Z/Y) &= ۱ - \frac{X}{Y} = ۰.
\end{aligned}$$

پس $f(x,z) = x^۲ - z^۲ - ۱$ و $g(x,z) = x - ۱$. از این‌رو یکریختی‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{K}[x,z]_{\mathfrak{p}}}{(f,g)_{\mathfrak{p}}} = \frac{\mathbb{K}[x,z]_{(x-۱,z)}}{(x^۲ - z^۲ - ۱, x-۱)_{(x-۱,z)}} &\cong \left(\frac{\mathbb{K}[x,z]}{(x^۲ - z^۲ - ۱, x-۱)}\right)_{(x-۱,z)}\\
&\cong \left(\frac{\mathbb{K}[z]}{(z^۲)}\right)_{(z)}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$I_p(C,D) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[x,y]_{\mathfrak{p}}}{(f,g)_{\mathfrak{p}}} = \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[z]}{(z^۲)}\right)_{(z)} = ۲.$$

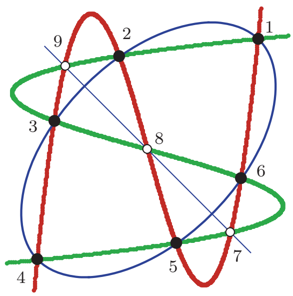
این نتیجه نیز بر قضیهٔ بزو منطبق است.

قضیهٔ بزو با روش‌های گوناگون در مراجع متعدد ثابت شده است که از میان آنها می‌توان [۵]، [۲] و [۴] را نام برد. در [۵] و [۲] از مفهوم *برآیند*[۱] و در [۴] از *چندجمله‌ای هیلبرت* برای این منظور استفاده شده است.

[۱] Resultant

در پایان مقاله، به‌عنوان کاربردی زیبا از قضیهٔ بزو، قضیهٔ کیلی–شال[۱] را ثابت می‌کنیم. این قضیه، تعمیمی از قضیهٔ مشهور *شش‌ضلعی پاپوس*[۲] است. برای مطالعهٔ جزئیات بیشتر در این زمینه، به [۷] مراجعه کنید. در فصل اولِ این مرجع، قضیهٔ پاپوس و تعمیم‌هایی از آن (مانند قضیهٔ پاسکال) با ۹ اثبات گوناگون ارائه شده است. یادآوری می‌کنیم که قضیهٔ شش‌ضلعی پاپوس می‌گوید که اگر A، B و C سه نقطه روی یک خط راست و X، Y و Z سه نقطه روی خط راست دیگری باشند و خطهای $\overline{AY}$، $\overline{BZ}$ و $\overline{CX}$ به‌ترتیب خطهای $\overline{BX}$، $\overline{CY}$ و $\overline{AZ}$ را قطع کنند، آن‌گاه این سه نقطهٔ اشتراک بر یک خط راست واقع‌اند.

قضیه ۵.۴ (کیلی–شال). *فرض کنیم دو خم درجه‌سه یکدیگر را در ۹ نقطهٔ متمایز قطع کنند. اگر شش نقطه از این نقاط مشترک روی یک مقطع مخروطی واقع باشند، آن‌گاه سه نقطهٔ باقیمانده روی یک خط راست قرار دارند.*



شکل ۷. نمایشی از قضیهٔ ۵.۴.

اثبات. فرض کنیم A و B دو خم و $p_A(x,y,z)$ و $p_B(x,y,z)$ چندجمله‌ای‌های همگن درجه‌سه‌ی متناظر با آنها باشند. قضیهٔ بزو بیان می‌کند که این دو خم در ۹ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. آنها را با اعداد ۱ تا ۹ شماره‌گذاری و فرض می‌کنیم که نقاط ۱ تا ۶ روی یک مقطع مخروطی C با چندجمله‌ای p_C واقع هستند (شکل ۷ را ببینید). نشان می‌دهیم که نقاط ۷، ۸ و ۹ بر یک خط راست قرار دارند. ترکیب خطی $p_\mu = p_A + \mu \cdot p_B$ را که در آن، μ یک پارامتر حقیقی است، در نظر بگیرید. چندجمله‌ای p_μ یک چندجمله‌ای درجه‌سه است که از نقاط ۱ تا ۹ می‌گذرد. اکنون یک نقطه مانند $q \in \{۱, \ldots, ۹\}$ روی C و متمایز از نقاط ۱ تا ۶ انتخاب می‌کنیم. عددی مانند $\mu_۰$ وجود دارد که $p_{\mu_۰}$ از نقطهٔ q می‌گذرد. لذا خم (درجه‌سه‌ی) $p_{\mu_۰}$ از هفت نقطهٔ ۱ تا ۶ و q می‌گذرد. این هفت نقطه به مقطع مخروطی (خم درجه‌دوی) C نیز تعلق دارند. از قضیهٔ بزو نتیجه می‌شود که C یک مؤلفه از $p_{\mu_۰}$ است. بنابراین $p_{\mu_۰} = p_C \cdot L$

[۱]Cayley-Chasles theorem [۲]Pappus's hexagon theorem

که در آن، L یک معادلهٔ خطی است (اگرنه $p_{\mu_\circ}$ نمی‌تواند درجه‌سه باشد). از این تساوی نتیجه می‌شود که همهٔ نقاط ۷، ۸ و ۹ بر خط راستی قرار دارند که با معادلهٔ خطی L توصیف می‌شود. □

مراجع

[۱] ترویز، ویلیام؛ اسمیت، کارن ای.؛ کاهانیا، لری؛ ککالاینن، پکا، *مبادی هندسهٔ جبری*، ترجمهٔ رحیم زارع نهندی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۹۵.

[2] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer-Verlag, New York, 3rd edn., 2007.

[3] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[4] Hassett, B., *Introduction to Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[5] Kirwan, F., *Complex Algebraic Curves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[6] Newton, Isaac, *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. A new translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, University of California Press, Berkeley, CA, 1999.

[7] Richter-Gebert, J., *Perspectives on Projective Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.

[8] Stillwell, J., *Mathematics and Its History*, Springer-Verlag, New York, 3rd edn., 2010.

داود حسن‌زاده للکامی: دانشگاه صنعتی اراک، گروه علوم پایه

رایانامه: dhmath@arakut.ac.ir