فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، صص. ۱۴۷ تا ۱۴۹

تابعی که روی هر بازه پوشا است*

دی. جی. رَدکلیف

مترجم: احمد محمدی و اسماعیل نیکوفر

چکیده

در این مقاله، یک تابع حقیقی ارائه می‌کنیم که وقتی به هر بازه باز ناتهی محدود می‌شود، پوشا است.

هر دانشجویی در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال با قضیهٔ مقدار میانی آشنا می‌شود. این قضیه بیان می‌کند که اگر f یک تابع حقیقی‌مقدار پیوسته روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ و c یک عدد حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آن‌گاه عددی حقیقی مانند $x \in [a,b]$ وجود دارد به‌طوری که $f(x) = c$. تابعی که در حکم این قضیه صدق می‌کند، به *تابع داربو*[1] [۴] موسوم است. اگرچه هر تابع پیوسته یک تابع داربو است، هر تابع داربو لزوماً پیوسته نیست.

شاید شگفت‌زده شوید اگر بشنوید که توابعی وجود دارند که روی هر بازهٔ باز ناتهی پوشا هستند. چنین تابع‌هایی شناخته‌شده‌اند و لبگ در [۲] آنها را معرفی کرده است. هر تابع با این ویژگی، لزوماً همه‌جا ناپیوسته است. این گونه تابع‌ها را می‌توانیم با بسط اعشاری (یا بسط در پایهٔ N) تعریف کنیم. یک مثال از این رهیافت، بسط در پایهٔ ۱۳ منتسب به کانوی است [۳]. هالپرین [۱] از وجود پایهٔ هَمِل استفاده کرد تا تابعی بسازد که روی هر مجموعه با اندازهٔ مثبت، اندازه‌ناپذیر است.

عبارات و کلمات کلیدی. تابع پوشا؛ قضیهٔ مقدار میانی؛ تابع ناپیوسته.

* نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:
Radcliffe, D. G., A function that is surjective on every interval, *Amer. Math. Monthly*, **123** (2016), no. 1, 88–89.

[1] Darboux function

© ۱۳۹۷ (انجمن ریاضی ایران)

در این مقاله، مثالی ساده از یک تابع حقیقی ارائه می‌کنیم که وقتی به هر بازهٔ باز ناتهی تحدید می‌شود، پوشا است. تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \tan(n!x)$$

مشروط بر اینکه حد موجود باشد. اگر حد موجود نباشد، قرار می‌دهیم $f(x) = ۰$. نشان می‌دهیم که تابع f دارای ویژگی‌های زیر است:

(۱) اگر $x \in \mathbb{R}$ و $q \in \mathbb{Q}$، آنگاه $f(x+q) = f(x)$؛
(۲) f پوشا است، یعنی به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}$ عدد $x \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $f(x) = y$؛
(۳) f روی تمام بازه‌های باز ناتهی پوشا است، یعنی اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$، آنگاه

$$\{f(x) : a < x < b\} = \mathbb{R}.$$

برهان ویژگی ۱: فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$ و $q \in \mathbb{Q}$ داده شده باشند. در این صورت $r, s \in \mathbb{Z}$ وجود دارند به‌طوری که $s > ۰$ و $q = \frac{r}{s}$. اگر $n \geq s$، آنگاه $n!q$ یک عدد صحیح است و بنابراین تفاضل $n!\pi x$ و $n!\pi(x+q)$ مضربی صحیح از π است. پس به‌ازای هر $n \geq s$ داریم

$$\tan(n!\pi(x+q)) = \tan(n!\pi x).$$

در نتیجه $f(x+q) = f(x)$. (یا حد هر دو طرف برابر است و یا موجود نیست. در حالت دوم خواهیم داشت $f(x+q) = f(x) = ۰$.)

برهان ویژگی ۲: فرض کنیم $y \in \mathbb{R}$ داده شده باشد. $r \in [۰, ۱)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\tan(\pi r) = y$. $x \in \mathbb{R}$ را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{[rn]}{n!}.$$

نشان می‌دهیم که $f(x) = y$. فرض کنیم x_n مجموع جزئی nام و ϵ_n جملهٔ باقیماندهٔ این سری باشد. در این صورت

$$x_n = \sum_{k=۰}^{n} \frac{[rk]}{k!}$$

و

$$\epsilon_n = \sum_{k=n+۱}^{\infty} \frac{[rk]}{k!} = x - x_n.$$

توجه می‌کنیم که به‌ازای هر n، $n!x_n \in \mathbb{Z}$ و لذا $\tan(n!\pi x) = \tan(n!\pi\epsilon_n)$. اما

$$n!\epsilon_n = \frac{[r(n+۱)]}{n+۱} + n!\sum_{k=n+۲}^{\infty} \frac{[rk]}{k!}.$$

می‌توان بررسی کرد که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[r(n+۱)]}{n+۱} = r$$

و

$$\lim_{n\to\infty} n!\sum_{k=n+۲}^{\infty} \frac{[rk]}{k!} = ۰.$$

بنابراین

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi x) = \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi\epsilon_n) = \tan(\pi r) = y.$$

برهان ویژگی ۳: فرض کنیم $a, b, y \in \mathbb{R}$ و $a < b$. بنابر ویژگی ۲، عددی مانند $u \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $f(u) = y$ و بنابر ویژگی ۱، به‌ازای هر $q \in \mathbb{Q}$ داریم $f(u+q) = y$. چون $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است، عددی مانند $q \in \mathbb{Q}$ وجود دارد به‌طوری که $a < u+q < b$. فرض کنیم $x = u+q$. در این صورت $a < x < b$ و $f(x) = y$. چون y یک عدد حقیقی دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که

$$\{f(x) : a < x < b\} = \mathbb{R}.$$

مراجع

[1] Halperin, I., Discontinuous functions with the Darboux property, *Amer. Math. Monthly*, **57** (1950), 539–540.

[2] Lebesgue, H. L., *Leçons sur l'intégration et la Recherche des Fonctions Primitives*, Gauthier-Villars, 1904.

[3] Oman, G., The converse of the intermediate value theorem: from Conway to Cantor to cosets and beyond, *Missouri J. Math. Sci.*, **26** (2014), no. 2, 134–150.

[4] Wikipedia., Darboux's theorem, Wikipedia– the Free Encyclopedia, 2013.

احمد محمدی: دانشگاه پیام نور تهران، گروه آمار

رایانامه: azari1358@yahoo.com

اسماعیل نیکوفر: دانشگاه پیام نور تهران، گروه ریاضی

رایانامه: nikoufar@pnu.ac.ir