

امیدعلی شهنی کرمزاده و همگانی سازی از نوع دوم

احسان ممتحن

چکیده

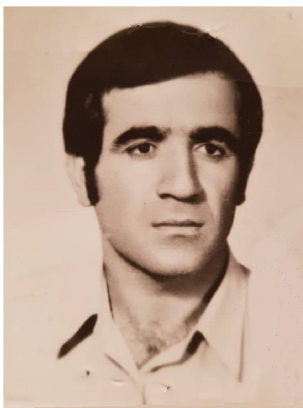
شما را نمی دانم اما عنوان مقاله، مرا به یاد عنوان فیلم «برخورد نزدیک از نوع سوم» اثر اسپیلبرگ می اندازد ولی البته به آن هیچ ربطی ندارد. مقاله را بخوانید وجه تسمیه را خواهید یافت.

۱. سرآغاز

مهرماه سال ۱۳۷۴ بود که به عنوان دانشجوی کارشناسی ارشد وارد گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز شدم. دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده (دوستانش او را امید صدا می کنند) محبوبیت فراوانی میان دانشجویان و همکارانش داشت و به نوعی مرکز همگرایی گروه ریاضی تلقی می شد. سال ها بود که به اصرار همکارانش، مدیر گروه ریاضی باقی مانده بود. چنین اجماعی بر سر یک نفر را پیش از آن نه دیده و نه شنیده بودم. هم اتاقی من در خوابگاه جهان آرا (که استاد من هم بود) دانشجوی دکتری کرمزاده و بسیار شیفته اش بود. مدام از توانایی های علمی و نکته های جالب شخصیتی او برایم می گفت و اشتیاق مرا برای دیدن او بیشتر می کرد تا اینکه سرانجام یک روز دست مرا گرفت و به دفتر کار دکتر کرمزاده بُرد و به او معرفی کرد. شناخت من از دکتر کرمزاده وقتی بیشتر شد که با او درس گذراندم. آن روزها در گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز انصافاً دانش پایه ای مناسبی در جبر عرضه می شد. ما ورودی های سال ۱۳۷۴ کتاب آشنایی با نظریه گروه ها^۱ نوشته جوزف راتمن^۲ را با دکتر گرجی زاده خواندیم و لذت بسیار بردیم.

عبارات و کلمات کلیدی. همگانی سازی ریاضیات؛ امیدعلی شهنی کرمزاده؛ قضیه سه دایره جانسون؛ قضیه مورلی؛ زیبایی در ریاضیات.

^۱An Introduction to the Theory of Groups ^۲Joseph J. Rotman



امیدعلی شهنی کرمزاده، دانشجوی کارشناسی ریاضیات، دانشگاه تهران

از دو درس حلقه‌های توابع پیوسته که آقای دکتر فریبرز آذریناه تدریس می‌کرد، هر چه بگویم کم است. همچنین یک درس واقعاً استثنایی در حلقه‌های تعویض‌ناپذیر را استاد دکت‌ر منصور معتمدی ارائه کرد و من تنبل آنقدر به شوق آمده بودم که یادداشت‌هایی منظم از آن درس بی‌نظیر برداشتم که متأسفانه جایی گم شد و حسرتش تا امروز بر دلم مانده است. با خود دکتر کرمزاده درس جبر تعویض‌پذیر را گذراندیم. کتاب بی‌آزار گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر^۱ نوشته رادنی شارپ^۲ را درس می‌داد. می‌توانست درسی بسیار معمولی باشد اما یک چیز، درس را از حالت معمولی خارج کرده و به سطحی غرورآمیز ارتقا داده بود؛ تقریباً اثبات همه قضیه‌های اصلی درس، اثبات‌هایی بدیع بودند که یا از ذهن خود دکتر سرچشمه می‌گرفتند یا آنکه آنها را ضمن مطالعاتش یافته بود. اثبات‌های قضیه پایه هیلبرت^۳ و قضیه صفرگاه هیلبرت^۴ هر دو از زمین تا آسمان با اثبات‌های شارپ فرق داشتند. مثال‌های شارپ در حلقه توابع پیوسته هم در دانشگاه شهید چمران اهواز که خودش در حلقه‌های توابع پیوسته کیا و بیایی داشت، به کلی‌ترین حالت‌های ممکن تعمیم داده می‌شدند. دکتر کرمزاده فصل دهم کتاب شارپ را که موضوع آن، مدول‌ها روی حوزه ایدال‌های اصلی است، به‌کلی با اسلوب و شیوه‌ای دیگر تدریس کرد و ما را بُرد تا نتایج این موضوع در جبر خطی و بسی حوزه‌های دیگر. متأسفانه یادداشت‌های این درس را در همان دفتری نوشته بودم که یادداشت‌های درس دکتر معتمدی را!

تا آن زمان من به‌اشتباه، تصویر و تصویری ویژه از ریاضیدانان در ذهن داشتم؛ اینکه لاغر (بل نحیف)، کم‌خوراک و کم‌حرف هستند، چندان اهل معاشرت نیستند و چندتایی ویژگی دیگر. روزی که دکتر کرمزاده را دیدم، این تصویر یکباره فرو ریخت. قدی میانه، سینه‌ای ستبر و شانه‌هایی پهن داشت که خبر از نیروی بدنی عظیمی می‌داد. بیشتر به وزنه‌بردار یا کشتی‌گیری کهنه‌کار شبیه بود تا ریاضیدان موهومی من. ورزش مورد علاقه‌اش پینگ‌پنگ بود و در آن متبحر. بذله‌گو و شاد بود و اهل معاشرت. بعدها فهمیدم یکی از علایق

^۱Steps in Commutative Algebra ^۲Rodney Sharp ^۳Hilbert's Basis Theorem ^۴Hilbert's Nullstellensatz



در حال تحقیق و مطالعه در خانه

او تعمیم جوک‌هایی بود که می‌شنید یا می‌ساخت.^۱ با هیچ آدمی غریبه نبود و احساس غریبگی نمی‌کرد، بسیار اجتماعی بود و از بودن با دیگران لذت می‌برد. نقاط افتراقش با ریاضیدان فرضی من تا آنجا ادامه می‌یافت که بحث به ریاضیات کشیده شود. آن وقت بود که می‌دیدم با شور و حرارتی وصف‌ناشدنی درباره موضوع مورد بحث، سخن می‌گوید. آهسته آهسته تعریفم از ریاضیدان تغییر کرد: ریاضیدان کسی است که عاشق ریاضیات است و آن را بر هر چیز دیگری برتری می‌دهد و انجام هیچ‌کاری برای او جذاب‌تر و شیرین‌تر از ریاضی‌ورزی نیست. این تعریف هنوز البته نقض نشده است اگرچه باید حک و اصلاحی در آن صورت بگیرد. بعدها دانستم که بسیاری افراد پیش از آنکه من بدانم، این تعریف را پذیرفته‌اند.^۲

علائق دکتر کرمزاده در ریاضیات، گسترده است: جبر تعویض‌ناپذیر (تخصص نخستین او)، توپولوژی و حلقه‌های توابع پیوسته (که در این یکی در ایران نقشی پیشرو داشته است)، آموزش ریاضیات و عشق روزگار نوجوانی‌اش، حساب و هندسه دبیرستانی. معمولاً ریاضیدانان را به دو گروه مسئله‌حل‌کن و نظریه‌پرداز تقسیم می‌کنند. این دست‌کم یکی از تقسیم‌بندی‌های رایج است. کرمزاده عضو هر دو دسته است؛ هم خوب مسئله حل می‌کند و هم خوب موضوعی کلی را طرح می‌کند و شرح می‌دهد. این ویژگی دوم معمولاً در طراحی پایان‌نامه‌های دکتری بسیار کارساز است. عشق کرمزاده به حل مسئله، او را به آنجا کشاند که بارها برای دو ساعت تدریس در کلاس‌های المپیاد ریاضی (به‌ویژه برای چند نسل اول)،

^۱ حتماً با خود می‌گوید: «تعمیم جوک؟! این هم از آن حرف‌هاست!» ولی واقعاً می‌توان جوک‌ها را تعمیم داد. این هم یکی از تعمیم‌هایی که دکتر کرمزاده عادت داشت به آن فکر کند: «ریاضیدان می‌گوید a اما منظور b است.» تعمیم آن می‌شود: «ریاضیدان می‌گوید a ، می‌نویسد b اما منظور c است.» باز تعمیم دیگری می‌شود: «ریاضیدان می‌گوید a ، می‌نویسد b ، منظور c است اما درستش d است.» فکر کنم تاکنون تعمیم‌های بیشتری پیدا شده باشد اما من همین‌ها را می‌دانم.

^۲ مانند هالموس در کتابش با عنوان می‌خواهم یک ریاضیدان باشم.



ایستاده بر درگاه دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز

راه طولانی اهواز تا تهران را با اتوبوس‌های لکنته آن زمان طی می‌کرد و سختی راه را به جان می‌خرد تا جان‌های مشتاق، مستعد و جوان را در تجربه‌های ریاضی‌اش سهیم کند. گاه می‌گفت اگر مدت زمانی را که بر روی طرح و حل مسئله‌های المپادی صرف کرده بوده است، بر روی پژوهش‌های تخصصی‌اش می‌گذاشت، تعداد مقالاتش خیلی بیش از تعداد کنونی می‌بود. من به این سخن اعتقاد دارم، چراکه می‌دانم طرح یک مسئله بدیع تا چه اندازه انرژی و وقت می‌طلبد. برای طرح و حل چنین مسائلی علاوه بر داشتن توانایی، باید وقت بسیاری صرف کرد. تصویری نادرست است اگر گمان کنیم که یک ریاضیدان به محض آنکه مسئله‌ای را دید، قادر به حل آن است. تفاوت اصلی یک ریاضیدان با یک ریاضی‌کار آماتور در میزان حوصله و یکدندگی توأم با اشتیاقی است که ریاضیدان برای حل مسئله به خرج می‌دهد.^۱ بنابراین در حل مسئله (و فقط اینجا!) باید تا می‌توانیم یکدنده، لجباز و کله‌شق باشیم. یک بار که دکتر کرم‌زاده خاطراتش را مرور می‌کرد، در پاسخ به سؤال من برایم گفت که برای حل مسئله‌ای، ۴۸ ساعت مستمراً اصرار ورزیده بود تا سرانجام مسئله تسلیم شده بود. او عشق به ریاضی را از همان اوان نوجوانی و بلکه خردسالی در خود یافته بود. بنابراین اولین عشقش ریاضیات مقدماتی است. از ریاضیات دبیرستانی و حتی دبستانی تجربه‌های دست اول بسیاری دارد. زیاد هستند مسئله‌هایی که خودش یافته یا حل کرده بوده است و بعدها دانسته که مسائلی شناخته شده بوده‌اند.

^۱ این یکی از سخنان معروف اینشتین است که «خداوند به من کله‌شقی یک قاطر و شامه‌ای نسبتاً تیز عطا کرده است.»



دکتر کرم‌زاده در کنار دکتر سید عبدالله محمودیان (از راست نفر اول) و دکتر مهدی رجبعلی‌پور (نفر دوم)

بسیاری از ما (دانشگاهیان)، حتی (یا بگویم به‌ویژه) آنان که در پژوهش‌هایشان موفق هستند، کمتر ریاضیات می‌خوانیم. منظورم البته خواندن مقالات تخصصی و فنی نیست. هر پژوهشگری تا آن دسته از مقاله‌ها را نخواند، قادر به پژوهش نخواهد بود. منظور من آن بخش از ریاضیات است که به‌شکل فرهنگ عمومی در آمده است یا همچون دفینه‌های باارزش در کتاب‌های ریاضی، مقاله‌های همگانی و گاه حتی در مقاله‌های فنی‌تر خفته است؛ قضیه‌های زیبایی که صرف زیبایی‌شان، اهمیت آنها را توجیه می‌کند. اریک تمپل بل^۱ در کتاب مشهورش با عنوان *ریاضیدانان نامی*^۲ می‌گوید که کُشی مانند عقابی بود که تنها فرصت می‌کرد روی تخم‌های خودش بخوابد و نتوانست اثر گالوا را بخواند و بفهمد. چه بد! یا پال اردوش^۳ که در گفتگویی متذکر می‌شود که وقتی دیده بود کورت گودل با چه علاقه‌ای آثار لایبنیتس را می‌خواند، به او می‌گوید که ما ریاضیدان شده‌ایم تا دیگران آثار ما را بخوانند نه اینکه ما آثار دیگران را بخوانیم. یادم به سخن سیمون وی^۴ می‌افتد که گفت: «نبوغ، فروتنی فوق‌العاده در ساحت اندیشه است.» با این حساب، گودل عمیقاً نابغه بوده است. ما با خواندن آثار دیگران و تنها با پرورش این عادت پسندیده در خود است که می‌توانیم از این دفینه‌های گران‌سنگ ریاضی آگاه شویم. این عادت، پیوندی نزدیک با فروتنی دارد. به اینکه آنچنان غرق در کارهای خود نشویم یا آنقدر آنها را مهم نپنداریم که حتی از خواندن آثار برجسته حوزه تخصصی خودمان غافل شویم.^۵ این گونه است که پژوهشگرانی موفق را می‌توان یافت که اگر از آنها بخواهیم چند کلمه‌ای درباره ریاضیات سخن بگویند، درمی‌مانند!

اما دکتر کرم‌زاده بسیار علاقه‌مند به خواندن آثار دیگران است. برای کسانی که او را می‌شناسند، این تصویری آشنا است: پشت میز روی صندلی گردان می‌نشیند، پاهایش را جایی بلندتر از سطح زمین گیر می‌اندازد (زمانی می‌گفت از بس در دوره دکتری ایستاده و سرپا مقاله‌ها و مجله‌ها را ورق زده و خوانده^۵ در عین حال، اگر کارهای خودمان را مهم نپنداریم چطور می‌توانیم این همه وقت و توان برای انجام آنها صرف کنیم؟

^۱Eric Temple Bell ^۲Men of Mathematics ^۳Paul Erdős ^۴Simone Weil



دکتر کرمزاده در کنار دکتر کامران وفا (چپ) در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، ۱۹۹۸

است، اکنون مجبور است پاهایش را جایی بالاتر از زمین بگذارد و گرنه یکی از زانوهایش خیلی آزارش می‌دهد)، در صندلی فرو می‌رود و از محیط پیرامونش منفک و غرق در خواندن می‌شود. حالا نخوان و کی بخوان! آن وقت‌ها دانشگاه شهید چمران اهواز کتابخانهٔ خوبی داشت؛ حتماً حالا غنی‌تر هم شده است. معمولاً دکتر کرمزاده را می‌شد دید که به جستجو یا خواندن کتاب و مجله مشغول است. من از روی کنجکاوی (شاید هم فضولی!) گاهی به آنچه می‌خواند، سرک می‌کشیدم. هر چیزی می‌توانست باشد. کتاب‌های عمومی و کتاب‌های شرح حال مثل آثار کنستانس رید،^۱ مجله‌هایی همگانی‌تر مانند *آمریکن مَتمَتیکال مانثلی*،^۲ *مجلهٔ دوسال اول ریاضی کالج*،^۳ (بعدها اسمش شد *مجلهٔ ریاضی*)^۴ و آثار کلاسیک ریاضی اعم از مجموعهٔ آثار ریاضیدانان بزرگ یا تک‌نگاشت‌های آنها همه جزئی از فهرست خواندنی‌های دکتر کرمزاده بودند.

سال‌ها مطالعهٔ مشتاقانه از آن گونه که گفتیم، به‌همراه ذوق و استعدادی نامعمول، از او شارح^۵ و همگانی‌کننده‌ای^۶ برجسته ساخته است. همین موضوع باعث شده است که سخنرانی‌های عمومی او گیرایی خاصی داشته باشند و مخاطبان بسیاری را جذب کنند. در مقام سخنران مدعو در کنفرانس‌های ریاضی، از

^۱ کنستانس رید (Constance Reid) خواهر جولیا رابینسون (Julia Robinson) است و در حال و هوای ریاضیات حاکم بر برکلی رشد کرده است. به‌عنوان خانمی خانه‌دار، بی‌هیچ آموزشی در ریاضیات، با زندگی در میان ریاضیدانان برکلی که از دوستان خواهر و شوهر خواهرش بودند، کم‌کم به گروه ریاضیدانان علاقه‌مند شد. او نخست مقاله‌های توصیفی در ریاضیات نگاشت و سپس شرح حال ریاضیدانان را. شرح حال هیلبرت به قلم وی سبب شهرت او گردید.

^۲ American Mathematical Monthly ^۳ Two Years College Mathematics ^۴ Mathematics Magazine

^۵ expositor ^۶ popular-mathematics writer



به‌همراه تیم المپیاد ریاضی. رضا صادقی و مریم میرزاخانی در تصویر دیده می‌شوند. روح هر دو شاد.

اینکه از دستاوردهای فنی و تخصصی خودش بگوید اِبا دارد. در چنین فرصت‌هایی معمولاً دسته‌ای بزرگتر از مخاطبان را در نظر می‌گیرد. همهٔ سخنرانی‌های او که در کنفرانس‌های سالانهٔ ریاضی ایران ایراد شده‌اند، همگانی هستند. شاید دلیل این کار، ارزشی باشد که برای وقت مخاطبان قائل است. خودخواهانه است که در یک سخنرانی که بیش از پانصد نفر شنونده حضور دارند، تنها از کارهای تخصصی خودت سخن بگویی! خوشبختانه مجموعهٔ سخنرانی‌های همگانی دکتر کرمزاده به‌همراه بعضی از میزگردهایی که در آنها حضور داشته و مصاحبه‌هایی که با او انجام شده است، در کتابی با عنوان *نتایج باور نکردنی در ریاضیات و تکملهٔ آن، اثبات‌های فراموش‌نشده در ریاضیات*، از سوی انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز به چاپ رسیده است [۲، ۳]. خوانندهٔ این کتاب، خود را با کسی روبه‌رو می‌بیند که به ریاضیات عشقی سرشار دارد و در عین حال، آماده است تا اشتیاق و لذتش را با دیگران سهیم شود. کتاب به‌لحاظ تنوع و گستردگی مسائلی که در آن به آنها اشاره شده است، حیرت‌آور است. این مسائل پهنه‌ای گسترده شامل هندسه و حساب دیفرانسیلی، نظریهٔ اعداد، توپولوژی عمومی، نظریهٔ مجموعه‌ها، جبر (تعویض‌پذیر و تعویض‌ناپذیر)، آنالیز ریاضی و جبرخطی را در بر می‌گیرد. عادت دکتر کرمزاده این است که در آغاز هر سخنرانی، یک تعریف و یا توضیح دربارهٔ عنوان سخنرانی ارائه می‌دهد. این تعریف‌ها مخصوص خودش هستند و گاه تا اندازه‌ای بدیع یا حتی مناقشه‌برانگیز. من به پیروی از رویهٔ خودش که مطالب را دسته‌بندی می‌کند، از مطالب کتاب «نتایج باور نکردنی در ریاضیات» و تکملهٔ آن، یک دسته‌بندی ارائه خواهم کرد تا علاقه‌مندان شناختی روشن‌تر از محتوای آن به‌دست آورند.

عنوان مقاله حاضر را از یکی از سخنرانی‌های دکتر کرم‌زاده با عنوان روش‌ها و نتایج کلیدی در ریاضیات به عاریت گرفته‌ام، زیرا در پایان این سخنرانی می‌گوید: «...وقتی صحبت از عمومی کردن ریاضیات می‌کنیم باید به سه موضوع توجه داشت: (۱) عمومی کردن ریاضیات برای مردم عادی...؛ (۲) عمومی کردن ریاضیات برای کسانی که آن را مطالعه می‌کنند (دانش‌آموزان و دانشجویان)...؛ (۳) عمومی کردن ریاضیات برای خود ریاضیدان‌ها....» توضیح او از دومین نوع عمومی کردن ریاضیات چنین است: «عمومی کردن فوق [یعنی نوع ۲] وظیفه ریاضیدانانی است که ریاضی هم می‌خوانند و با سعی و کوشش خود باید نتایج مهم ریاضی را که با روش‌های موجود، دور از دسترس معلمان، دانش‌آموزان و دانشجویان قرار دارند، به شیوه‌های ساده‌تر و مقدماتی بیان و ثابت کنند تا افراد زودتر به آنها دسترسی پیدا کنند....» این نوع همگانی‌سازی، به‌گمان من، همان است که دکتر کرم‌زاده عمر خود را وقف آن کرده است.

فکر می‌کنم تلاش‌های دکتر کرم‌زاده در راستای همگانی‌سازی و نیز شرح و شفاف‌سازی ریاضیات را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد. بخش اول، سخنرانی‌های همگانی او است که معمولاً در کنفرانس‌های سالانه ریاضی ایراد شده است و در آنها به مسئله‌های جذاب ریاضیات می‌پردازد. بخش دوم، مقاله‌هایی است که من نام آنها را مقاله‌های آموزشی می‌گذارم، چراکه در آنها توصیفی دقیق و روشن و یا اثباتی کوتاه از یک قضیه یا یک نامساوی به‌دست می‌دهد. دسته آخر، سخنرانی‌هایی است که برای ریاضی‌کاران دبیرستانی ایراد کرده است. به دو دلیل قصد دارم در بقیه این نوشته تا آنجا که امکان دارد به توصیف سخنرانی‌ها و مقاله‌های او در دسته اول بپردازم. دلیل نخست این است که در صورت پرداختن به دو دسته دیگر، حجم مطالب این نوشته به‌شکلی نامعقول زیاد می‌شد. دلیل دوم این است که چون نگارنده از زمان ورود به دانشگاه به ریاضیات علاقه‌مند شده است، نسبت به بخش قابل ملاحظه‌ای از مطالب سخنرانی‌های دکتر کرم‌زاده که درباره ریاضیات دبیرستانی است، اشراف و احساس چندانی ندارد. به همین دلیل، محتوای بخش‌هایی مهم از سخنرانی‌های او که در آنها به هندسه دبیرستانی پرداخته است، از دایره علایق و توانایی‌های نگارنده بیرون است. صداقت اقتضا می‌کرد در آغاز کار، به‌قول علامه دهخدا از این بخیه‌ای که بر روی کارم افتاده است و می‌افتد، از پیش پرده بردارم. البته این، آسیبی جدی برای نوشته حاضر است. من در این مقاله تنها بر مسائلی انگشت نهاده‌ام که یا نسبت به آنها احساس و علاقه‌ای ویژه در خود دیده‌ام و یا از آنها روایت و قصه‌ای در خاطر دارم که اگر چنین نباشد، نوشته‌هایی از این دست بی‌روح و ماشینی از آب در خواهند آمد.

احتمالاً از زمان‌های خیلی دور تاکنون به اینکه زیبایی چیست و ریاضیات حاوی چه نوعی از زیبایی است، اندیشیده‌اند. در تبیین و تحلیل زیبایی، فیلسوفان راه خودشان را یافته‌اند. در میان آنان، سنتی شکوهمند وجود دارد که دست‌کم از زمان افلاطون آغاز می‌شود و در کانت به یکی از رفیع‌ترین قله‌های خود می‌رسد. اما معمولاً ریاضیدانان به آن نوع سنج، قاعده و قانونی که فیلسوفان در زیبایی به دنبال آن

هستند، توجه زیادی نشان نمی‌دهند. اگر از ریاضیدانان بخواهیم که ریاضیات زیبا را به ما نشان دهند، از دل تجربه‌ها و مطالعات خود چندتایی قضیه و مسئله را بیرون می‌کشند و به ما نشان می‌دهند و می‌گویند: «ببین! اینها زیبا هستند.» ریاضیدانان چندان در بند تبیین زیبایی در ریاضیات نبوده‌اند. البته گاهی چیزهایی می‌گویند: بیان ساده، اثبات هوشمندانه، روش‌های تازه، نتایج پربار و اینها هیچ‌کدام تبیین نیست و چرایی زیبایی را توضیح نمی‌دهد. جی. اچ. هاردی^۱ تلاش زیادی کرد تا توضیحاتش چیزی بیش از بیان صرف احساساتش باشد. او اگرچه این احساسات را با روشنی و جذابیتی باورنکردنی بیان کرده است، به روشن شدن چرایی موضوع زیبایی کمکی نکرده است. پال اردوش هم همین‌طور. او می‌گوید: «اعداد برای چه زیبا هستند؟ مانند این است که بپرسیم چرا سمفونی ۹ بتهوون زیبا است. اگر دلیل آن را نمی‌دانید، کسی هم نمی‌تواند آن را به شما بگوید. من می‌دانم که اعداد زیبا هستند. اگر آنها زیبا نباشند، پس هیچ چیز زیبا نیست.» بجز چند استثنا، پاسخ همه ریاضیدانان همین است.^۲ جیان کارلو روتا [۲۰] از معدود ریاضیدانانی است که فیلسوفانه به موضوع زیبایی در ریاضیات پرداخته و مقاله‌ای در پدیدارشناسی زیبایی در ریاضیات نگاشته است، آن هم به دلیل علاقه بسیار به پدیدارشناسی که سرآغاز او یک فیلسوف ساخت.

پیش از این اشاره کردیم که دسته‌ای بزرگ از سخنرانی‌های دکتر کرم‌زاده آنهایی است که به ارائه نتایج زیبای ریاضی اختصاص یافته است. این مسائل، نوع و سرشت علایق او را نشان می‌دهند. دکتر کرم‌زاده نیز مانند ریاضیدانان متقدم، در پاسخ به اینکه چه چیز در ریاضیات زیبا است، به شیوه‌ای استقرایی عمل می‌کند و تعدادی قضیه و مطلب زیبای ریاضی ارائه می‌کند اما گزینه‌ها و گزیده‌هایش بسیار گوناگون و متنوع هستند و خوان مسائل و نتایج انتخابی او بسیار گسترده است. حقیقت این است که هر یک از این سخنرانی‌ها اگر بخواهیم حق مطلب درباره آنها ادا شود، به نوشته‌ای مفصل و مشروح نیاز دارد اما به فراخور توانایی‌های محدودم، به اختصار درباره هر یک از آنها سخن خواهم گفت. حتی در همین خلاصه‌نویسی هم برخی از مقاله‌ها را با تفصیل بیشتر بررسی خواهم کرد.

۲. کدام مسائل انگیزه‌بخش هستند؟

این سخنرانی، سال ۱۳۶۳ در کنفرانس سالانه ریاضی در دانشگاه شیراز ایراد شده است. زنده‌یاد دکتر منصور معتمدی که روانش خوش باد، از آماده‌سازی این سخنرانی قصه‌ها داشت. زمان آماده‌سازی سخنرانی مقارن با مباران اهواز در زمان جنگ بوده است و دکتر کرم‌زاده به همراه دیگر همکاران با خانواده

^۲ اگر سقراط بود و با این ریاضیدانان به گفتگو می‌نشست، به آنها می‌گفت که من پرسیدم زیبایی در ریاضیات چیست و شما تعدادی مثال به من ارائه کرده‌اید.

در ملائانی اقامت داشته‌اند.^۱ طبیعی است که آن موقع دسترسی به کتابخانه و کتاب میسر نبوده و این سخنرانی ثمره حافظه خلاق سخنران بوده است و بس. می‌دانیم که لودویگ ویتگنشتاین^۲ در زمان جنگ جهانی اول، تراکتاتوس^۳ (رساله منطقی-فلسفی) خود را به رشته تحریر درآورد و یا پونسله، بخشی مهم از هندسه تصویری را در زمان اسارت به دست ارتش روسیه تزاری، ابداع و کشف کرد.^۴ دیدن نمونه‌ای کوچکتر از این گونه شهامت‌های انسانی در برابر ناملایمات، این گونه وقایع تاریخی را برای ما باورپذیرتر می‌کند.

سخنرانی با بحثی نسبتاً مفصل درباره اینکه چه مسائلی دشوار، زیبا، انگیزه‌بخش و ... هستند آغاز می‌شود. کرم‌زاده می‌کوشد نشان دهد که ارائه تعریفی همه‌پسند برای این مفاهیم، کاری دشوار (بلکه ناممکن) است و سرانجام با فروتنی می‌گوید: «اما از آنجا که تحسین آثار هنری فقط کار هنرمندان نیست و هنردوستان نیز این حق را دارند، من به خود این حق را دادم که از این فرصت استفاده کنم و چند مسئله را برای شما نام ببرم» سبب اصالت این سخنرانی‌ها این است که کرم‌زاده با رجوع به تجارب ریاضی خودش، مسئله‌ها را انتخاب و دسته‌بندی می‌کند. حتی دسته‌بندی او از مسائل نیز کاملاً از تجربه‌های شخصی‌اش نشأت می‌گیرد. معلوم است که او در ضمن جستجو، در موقعیت‌هایی قرار گرفته است که مسئله مورد نظر در یکی از این دسته‌ها قابل بیان بوده است. او مسئله‌ها را به شش دسته تقسیم می‌کند: «دسته اول: مسائلی که از زمان تحصیلات دبیرستانی تاکنون در فکر ما جایی برای خود باز کرده‌اند و در علاقه ما به ریاضیات تأثیر داشته‌اند. دسته دوم: مسائلی که در اولین برخورد با آنها وادار می‌شویم به اینکه یا حلی از آنها را شخصاً ارائه دهیم و یا در اولین فرصت حل آنها را در منابع پیدا کنیم. دسته سوم: مسائلی که در لابه‌لای مجله‌ها و کتاب‌ها ضمن گشتن برای موضوعی خاص، به‌طور تصادفی آنها را می‌یابیم. دسته چهارم: مسائلی که در سر کلاس درس در رابطه با تدریس مان مطرح می‌کنیم. دسته پنجم: مسائلی که در رابطه با کار تخصصی مان با آنها سروکار داریم. دسته ششم: مسائل معروف حل شده و یا حل نشده.» سپس

^۱ در سی‌وپنجمین کنفرانس ریاضی کشور در اهواز، دکتر رجبعلی پور پشت تریبون آمد و داستانی را تعریف کرد که احتمالاً مربوط به همین دوران بوده است. ایشان می‌گفت: «با کاروانی برای دیدار از مناطق جنگی به اهواز رفته بودیم. من به همراهان گفتم که اینجا دوستی دارم و مایلم سری به او بزنم. به خانه امید رفتم و همین‌طور که مشغول صحبت بودیم، یک‌دفعه شهر بمباران شد و ظاهراً بمبی نزدیک خانه افتاد. من و خانواده امید به زیرزمین دویدیم اما امید نیامد. پس از اینکه اوضاع آرام شد و به طبقه فوقانی بازگشتیم، دیدم امید با خونسردی مشغول به مطالعه و کار است.» امیدوارم سخنان دکتر رجبعلی پور را کم و بیش با صحت به یاد آورده باشم.

^۲ آندره وی (André Weil) یکی از مهم‌ترین کارهایش را در حبس پدید آورد. تاریخ علم، پُر از فداکاری‌های کوچک و بزرگ است و بدون این شهامت‌ها و رشادت‌ها در راه حقیقت، بشر به مقام کنونی خود در اندیشه دست پیدا نمی‌کرد. به‌زعم من، این گونه رشادت‌ها در راه حقیقت، شهامتی مقدس هستند و هر دانشمند راستینی در زندگی خود به‌نوعی در مواجهه با مصائب روزگار به آن نیاز دارد. زندگی بسیاری از متفکران و دانشمندان، پُر از این رشادت‌ها است. سقراط، گالیله، جوردانو برونو، آبل، گالوا، ماری کوری و ... رشادت‌هایی بزرگ از خود نشان داده‌اند.

ترجیح می‌دهد که به دو دسته آخر نپردازد «چون دسته پنجم مشتریان چندانی ندارد و مسائل دسته آخر هم همان‌طور که از اسمشان پیدا است، به اندازه کافی معروف هستند و در حقیقت معروفیت آنها هم ممکن است به بعضی‌ها تحمیل شده باشد.»

مثلاً، این ساده‌ترین و پر رمز و رازترین همه شکل‌های هندسی، نقش‌آفرین نخست این سخنرانی است. عمری زیستن با مثلث، شوری در وجود سخنران ما دمیده است که هنوز او را به پیش می‌رانند. به‌عنوان نمونه‌ای از مسائل دسته اول، مسئله‌ای منسوب به پاپوس بیان می‌شود و در ادامه پس از طرح چند موضوع دربارهٔ مثلث از جمله قضیه مورلی،^۱ آنچه تبدیل به محور اصلی بحث می‌شود این است که هر مثلثی را می‌توان بر روی یک مثلث متساوی‌الاضلاع تصویر کرد (به‌طور کلی‌تر هر مثلثی را می‌توان بر روی یک مثلث با زاویه‌های دلخواه تصویر کرد) و این حقایق با نامساوی‌هایی در مثلث معادل هستند.^۲ در ادامه تعدادی نتیجه جالب از این مطلب به‌دست می‌آورد و نشان می‌دهد که این قضیه را می‌توان از آن نوع قضیه‌های ساختاری دانست که قضیه آرتین-ودربرن^۳ یا قضیه بنیادی حساب، نمونه‌هایی از آنها هستند. او وجه اشتراک همه این قضیه‌ها را در آن می‌داند که موجودات پیچیده‌تر را می‌توان توسط این موجودات ساده‌تر توصیف کرد. اثبات بسیاری از روابط میان میانه‌ها، ارتفاع‌ها و نیمسازها و نیز دیگر نامساوی‌های مهم در مثلث متساوی‌الاضلاع ساده‌تر است و گاه این سادگی می‌تواند توسط قضیه مذکور در اثبات حالت کلی‌تر به‌کار آید (قضیه سوا و مینائوس و چند قضیه دیگر را می‌توان با استفاده از این نکته به روشی ساده‌تر ثابت کرد).

سخنران از مسئله‌های دسته دوم، مسئله اردوش-آنینگ^۴ را مطرح می‌سازد: هر تعداد نامتناهی نقطه در صفحه که دارای فاصله‌های صحیح باشند، بر یک خط قرار دارند. سپس دربارهٔ اثبات‌های آن صحبت می‌شود. به‌زعم اردوش، این یکی از مسائلی است که حضرت آفریدگار در کتاب از آن ذکری به میان خواهد آورد [۴]. چند مسئله هم‌خانواده با این مسئله نیز ذکر می‌گردد از جمله مسئله سیلوستر (هر تعداد متناهی از نقاط در صفحه اقلیدسی یا هم خط هستند یا خطی وجود دارد که دقیقاً از دوتا از آنها می‌گذرد^۵)، قضیه مازورکیه‌ویچ^۶ (در صفحه مجموعه‌ای از نقاط وجود دارد که هر خط راست آن را تنها در دو نقطه قطع

^۱ فرنک مورلی (Frank Morley) ریاضیدانی انگلیسی بود که به آمریکا مهاجرت کرد و در ارتقای ریاضیات آمریکا نقشی به‌سزا داشت. او همچنین شطرنج‌بازی ماهر بود و یک بار ایمانوئل لِسکر، استاد بزرگ شطرنج و قهرمان جهان را شکست داد.

^۲ معلوم است از همان زمان دکتر کرم‌زاده به قضیه مورلی علاقه‌ای خاص داشته است. این را می‌گویم چون اخیراً او به این قضیه رویکردی خلاقانه و نوآورانه داشته که حاصل آن اثباتی است که قضیه مورلی را تقریباً تا مرز بداهت پیش می‌برد. به این مطلب باز خواهیم گشت.

^۵ این مسئله در سال ۱۸۹۳ توسط جیمز جوزف سیلوستر (James Joseph Sylvester) مطرح شد و ابرهارت ملشیور (Eberhard Melchior) در سال ۱۹۴۱ نخستین اثبات آن را منتشر کرد. پال اردوش بی‌خبر از قضیه ملشیور، مسئله را در سال ۱۹۴۳ مطرح کرد و تیبور گالای (Tibor Gallai) در سال ۱۹۴۴ اثباتی برای آن ارائه کرد. دیگران نیز مسئله را حل کرده‌اند از جمله ال. ام. کلی (L. M. Kelley) و هرل کاکستر (Harold Coxeter).

می‌کند) و حدس اولام (آیا مجموعه‌ای از نقاط چگال در صفحه وجود دارد که فاصله هر دوتا از عضوهای آن، عددی گویا باشد؟). این حدس بیشتر به حدس اردوش-اولام^۱ شهرت دارد و اگر تکلیفش روشن شود، تکلیف چندین حدس مشهور دیگر نیز روشن خواهد شد.

به عنوان نمونه‌ای از مسائل دسته سوم، پس از ذکر مثالی از نظریه حلقه توابع پیوسته، به قضیه‌ای از هنری بلومبرگ^۲ (برای هر تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مجموعه‌ای چگال مانند D وجود دارد که $f|_D$ ، تحدید تابع f بر مجموعه D ، تابعی پیوسته است) اشاره می‌کند. دلم می‌خواستم می‌دانستم دکتر کرم‌زاده در جستجوی چه چیزی به قضیه بلومبرگ برخورد کرده است؛ هرچند گمانم بر آن است که به دنبال مطلبی درباره حلقه توابع پیوسته بوده است. اصولاً دکتر کرم‌زاده به این ریاضیدان علاقه‌ای ویژه دارد و در برخی از سخنرانی‌های دیگر خود نیز از او و آثارش یاد کرده است.^۳



هنری بلومبرگ (۱۸۸۶-۱۹۵۰)



فرانک مورلی (۱۸۶۰-۱۹۳۷)

در مورد دسته چهارم، یعنی آن دسته از مطالب ریاضی که «در کلاس درس و در رابطه با تدریس مان مطرح می‌کنیم»، او سروق نتیجه‌ای مهجور در نظریه مجموعه‌ها می‌رود: مجموعه X شمارا است اگر و تنها اگر تابعی دوسویی مانند $f: X \rightarrow X$ موجود باشد چنان‌که برای هر زیرمجموعه ناتهی از X مانند A داشته باشیم $f(A) \neq A$. این مطلب که در یکی از کتاب‌های نظریه مجموعه‌ها [۱۹] ذکر شده و ظاهراً مهجور افتاده است، از همان دفینه‌های ارزشمندی است که در مقدمه این نوشته بدان اشاره شد. سخنران به درستی می‌گوید که بنابر این مسئله، $\mathbb{Z}$ مدل بهتری برای مجموعه‌های شمارا است تا $\mathbb{N}$. قبل از این نتیجه، دکتر کرم‌زاده اشاره‌ای به قضیه کاپلانسکی می‌کند: هر مدول تصویری برابر با جمع مستقیم زیرمدول‌های تصویری به‌طور شمارا تولیدشده است. تعلق خاطر دکتر کرم‌زاده به کوچکترین نوع نامتناهی،

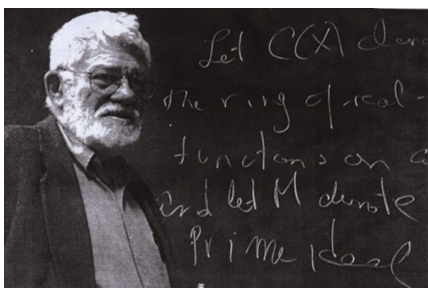
^۳ هنری بلومبرگ ریاضیدان آمریکایی و از شاگردان ادموند لاندائو (Edmund Landau) بوده است.

یعنی «همیشه برای من الهام‌بخش بوده است. نخستین بار در راهروی گروه ریاضی بودیم که از او شنیدم «یک مدول، نیم‌ساده است اگر و تنها اگر هر زیرمدول به‌طور شمارا تولیدشده آن جمعونند مستقیم باشد.» این نتیجه مسلماً از آن نوع نتیجه‌هایی است که در کلاس درس به‌کار می‌آید. عدم اشاره به آن احتمالاً به دلیل احتراز از اشاره به نتایج شخصی و فنی‌تر خودش بوده است. یکی از مثال‌های این دسته چهارم می‌توانست لم معروف شنیوئل^۱ باشد. ظاهراً کاپلانسکی در کلاس درس جبر همولوژیک، موضوع را مطرح می‌کند و استیون اچ. شنیوئل^۲ همانجا آن را حل می‌کند. احتمالاً این یکی هم به دلیل فنی بودن از فهرست مثال‌های مناسب کنار گذاشته شده است. پایان‌بخش این دسته از مسائل، مطلبی است از خود سخنران که در آن با تغییر ظریف توپولوژی زاریسکی وابسته به یک حلقه، قادر به اثبات این مطلب می‌شود که «فضای ایدال‌های اول حلقه R دارای بُعد مشتق است اگر و تنها اگر R دارای بُعد کرول باشد و اگر بُعد مشتق، یک عدد ترتیبی حدی باشد، این دو بُعد برابرند وگرنه بُعد کرول یکی کمتر از بُعد مشتق است.» این یکی از معدود دفعاتی است که سخنران ما به کارهای خودش اشاره می‌کند اما چون دلیل بیان این قضیه، یک مسئله درسی در [۲۱] بوده است، کاملاً با این طبقه‌بندی همخوانی دارد.

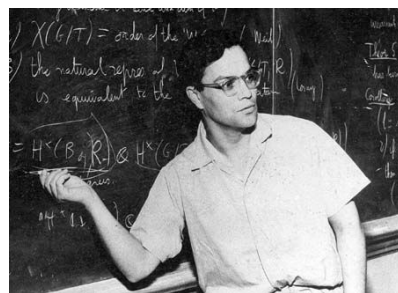
در مورد دسته پنجم، یعنی مسائل تخصصی‌تر، با سخنران احساس همدلی می‌کنم؛ این دسته «مشتریان زیادی ندارد.» در مورد دسته ششم که تشکیل شده است از «مسائل معروف حل‌شده و یا حل‌نشده که به‌اندازه کافی معروف هستند و در حقیقت معروفیت آنها هم ممکن است به بعضی‌ها تحمیل شده باشد»، چه می‌توان گفت؟ مسائل دسته اول و دوم جملگی مشهور هستند اما شاید نه به‌اندازه حدس ریمان در مورد تابع زتا یا فرضیه پیوستار و یا قضیه‌های ناتمامیت گودل. افلاطون به مثَل ریاضی باور داشت؛ جهانی که در آن اشیاء و نتایج ریاضی حضوری به‌مراتب واقعی‌تر از جهان محسوسات دارند. افلاطون هیچ‌جا پیش‌شرط شهرت و آوازه بلند یک قضیه یا کاشف آن را برای ورود به دنیای مثالی‌اش ذکر نمی‌کند. همچنین اثبات‌های هوشمندانه یا نوعی زیبایی‌اثیری را پیش‌فرض ورود به مثَل نمی‌گذارد. اردوش چرا، افلاطون نه! او بر سر در آکادمی‌اش نوشته بود: «هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود.» شاید افلاطون چنین می‌پنداشته که هر قضیه‌ای تنها از آن‌رو در مثَل قرار دارد که از حقیقت برخوردار است. حقیقت، خیر و زیبایی سه فضیلت بنیادی و محبوب او بودند. آیا حقایق کوچک همان‌قدر حقیقی هستند که حقایق بزرگ و یا آنکه بعضی حقایق حقیقی‌تر هستند؟! آرمان بُرل با تیزبینی این موضوع را از نظر گذرانده است [۱]. او معتقد است تا آنجا که بحث به ریاضیات محض محدود می‌شود، می‌توان به جنبه هنری ریاضیات وزن بیشتری (در برابر وزن علمی آن) داد و در اینجا معیارهای زیباشناختی ریاضیدانان که به‌زعم بُرل، اتفاق نظر عجیبی هم بر سر آنها وجود دارد، ملاک اصلی فرق نهادن میان زشت و زیبا است. ولی آیا آنچه که بُرل از آن به‌عنوان حس زیبایی‌شناختی قوی ریاضیدان یاد می‌کند، بستگی تام به آن بخش از ریاضیات ندارد که جزء تخصص

^۱Schanuel's lemma ^۲Stephen H. Schanuel

ریاضیدان است؟ ملوین هنریکسن^۱ باور داشت که جامعه ریاضی را گاه دسته‌ای از ریاضیدانان خوب اما متعصب در اختیار می‌گیرند و به دیگران مجال تنفس نمی‌دهند [۷]. آیا آنها نیز این کار را بر اساس حس زیبایی‌شناختی قوی خودشان انجام می‌دهند؟



ملوین هنریکسن (۱۹۲۷-۲۰۰۹)



آرمان بیرل (۱۹۲۳-۲۰۰۳)

۳. نتایج باورنکردنی در ریاضیات

این سخنرانی در بیست و پنجمین کنفرانس سالانه ریاضی کشور در سال ۱۳۷۳ و در دانشگاه صنعتی شریف ایراد شده است و مفصل‌ترین سخنرانی دکتر کرم‌زاده است. عجیب به نظر می‌رسد که چگونه سخنران در بازه زمانی محدود سخنرانی، تقریباً همه آن را با گچ بر روی تخته سیاه نوشته است، زیرا در آن موقع استفاده از پاورپوینت هنوز باب نشده بود. سخنران در آغاز سخنرانی، فهرستی از ۲۵ مسئله یا نتیجه را به طور مختصر برمی‌شمارد که گرچه از نظر او همگی آنها جالب هستند، آنها را انگیزه‌بخش می‌داند و در سخنرانی قبلی‌اش با عنوان کدام مسائل انگیزه‌بخش هستند؟، امثال این مسائل را مرور کرده است. او منظور خود را از باورنکردنی بودن یک مسئله چنین بیان می‌کند: «منظور من از نتایج باورنکردنی، نتایجی است که علیه شهود هستند؛ آنها در زمان‌هایی بعضی از ریاضیدانان برجسته را وادار به شک و تردید کرده‌اند.» اولین نمونه از این دست مسائل، اصل پنجم اقلیدس است. سخنران به اختصار تاریخ این اصل را تا ظهور هندسه‌های نااقلیدسی مرور می‌کند. سخنران، دومین منبع مسائل باورنکردنی را در دنیای شگفت‌انگیز اعداد می‌یابد. نخست از جادوی آرایه‌های عددی و مربع‌های توافقی و گنگ بودن برخی از اعداد سخن می‌گوید و نتایج جالبی را بیان می‌کند تا می‌رسد به ارائه فرمولی که اعداد اول را به دست دهد (نه همه اعداد اول را بلکه فرمولی که تولیدش عدد اول است یا بعضی از تولیداتش اگر فرمول چندجمله‌ای باشد). همگی از درس نظریه مقدماتی اعداد، چندجمله‌ای خوش‌بر روی $x^2 + x + 41$ را به یاد داریم که به ازای مقادیر یک، دو، ... تا چهل برای x عددی اول به دست می‌دهد اما برای $x = 41$ حاصل آن اول نمی‌شود. بحثی واقعاً مفصل راجع به این گونه فرمول‌ها ارائه می‌شود و قضیه‌هایی نیز ذکر می‌شود. ظاهراً هاردی به وجود چنین فرمول‌هایی باور نداشته است. سخنرانی اندک اندک و به شیوه‌ای هنرمندانه

^۱Melvin Henriksen

به سمت مسئلهٔ دهم هیلبرت (وجود الگوریتمی برای حل‌پذیری معادلات دیوفانتی) و حل آن توسط مارتین دیویس^۱، هیلری پاتنام^۲، جولیا رابینسون و آن کس که تیر خلاص را زد، یعنی یوری ماتیا‌سویچ^۳ می‌رود (چنین الگوریتمی وجود ندارد). مجموعه‌های دیوفانتی معرفی می‌شوند و این قضیه ثابت می‌شود که مجموعه $S \subseteq \mathbb{N}$ دیوفانتی است اگر و تنها اگر یک چندجمله‌ای وجود داشته باشد به‌طوری که S دقیقاً برابر با مقادیر مثبت آن باشد. معلوم می‌شود که مجموعهٔ اعداد اول هم دیوفانتی است و یک چندجمله‌ای با بیست‌وشش متغیر (جل‌الخالق!) وجود دارد که مقادیر مثبت آن دقیقاً همگی عدد اول هستند؛ آنک رؤیای هاردی! در قسمت پایانی «قصهٔ ریاضیات» (مجموعه‌ای چهار قسمتی که مارکوس دو سوتوی^۴، ریاضیدانی از دانشگاه آکسفورد، مجری آن است)، به مسئلهٔ دهم هیلبرت و قهرمانان اصلی آن به‌ویژه جولیا رابینسون و یوری ماتیا‌سویچ پرداخته می‌شود؛ توصیه می‌کنم این مجموعه را ببینید.

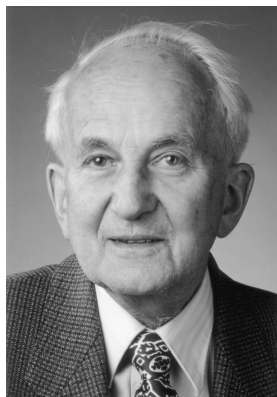
در ادامه از قضیهٔ گوداستاین^۵ و مسئلهٔ $3x + 1$ ^۶ سخن به میان می‌آید. اکنون که این سطرها را می‌نگارم، خاطره‌ای جالب از مسئلهٔ گوداستاین در ذهنم زنده شد. اخیراً نویسندگان کتاب نام‌گذاری بر بی‌نهایت^۷، لورن گراهام و ژان میشل کانتور^۸ که اولی استاد بازنشستهٔ تاریخ علوم از دانشگاه هاروارد و دومی ریاضیدانی فرانسوی و علاقه‌مند به تاریخ علم است (هر دو به زبان روسی مسلط هستند)، به دعوت مترجم دانشمند کتاب، دکتر رحیم زارع نهندی، به ایران آمده بودند. ایدهٔ اصلی کتاب آن است که مکتب مهم مسکو به رهبری لوزین و آگورف^۹ با نوعی گرایش عرفانی-مسیحی به نام پرستش نام^{۱۰} پیوند وثیق دارد و از آن نیرو و انگیزه گرفته است. عارف و دانشمندی بنام پاول فلورنسکی^{۱۱} رهبر معنوی این جریان مهم ریاضی اتحاد جماهیر شوروی بوده است. من در دو سخنرانی نویسندگان کتاب شرکت داشتم؛ یکی در اصفهان (به همت خانهٔ ریاضیات اصفهان) و دیگری در دانشگاه شیراز. ظاهراً این دو نویسنده قرار گذاشته بودند که گراهام مطالب تاریخی و فلسفی و کانتور مطالب ریاضی را بیان کند. در هر دو سخنرانی، کانتور برای آنکه مخاطبان را قانع کند که حتی بخش متناهی ریاضیات به بخش نامتناهی نیازمند است (مطلبی که احتمالاً هیلبرت از شنیدنش خوشحال نمی‌شد)، همین قضیهٔ گوداستاین را مثال زد.

^۵ روبین گوداستاین (Reuben Goodstein) ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی که علاقه‌ای بسیار به آموزش ریاضیات داشت. او در محضر لودویگ ویتگنشتاین، فیلسوف نامدار اتریشی، نیز تلمذ کرد و مقاله‌هایی در زمینهٔ فلسفه و فلسفهٔ ریاضیات به رشتهٔ تحریر در آورد. تنها منطق-ریاضیدان هم‌تراز دیگری از شاگردان ویتگنشتاین که من سراغ دارم، گئورگ کرایسل (Georg Kreisel) است که ظاهراً یک بار ویتگنشتاین از او (زمانی که کرایسل تنها بیست و یک سال سن داشته است) به‌عنوان تواناترین ریاضیدان-فیلسوفی یاد کرده بود که در عمرش دیده است.

^۶ این مسئله به حدس کولاتس نیز معروف است. لوتار کولاتس (Lothar Collatz)، ریاضیدان آلمانی، حدسی زد که تا امروز بلا تکلیف مانده است.

^۱Martin Davis ^۲Hilary Putnam ^۳Yuri Matiyasevich ^۴Marcus de Sautoy ^۵Naming Infinity

^۸Loren Graham and Jean-Michel Kantor ^۹Lusin and Egoroff ^{۱۰}name worshiping ^{۱۱}Pavel



لوتار کولانس (۱۹۱۰-۱۹۹۰)



روبین گوداستاین (۱۹۱۲-۱۹۸۵)

خواننده مشتاق ممکن است بر من خرده بگیرد که بعد از همه این حاشیه رفتن‌ها درباره قضیه گوداستاین، جا داشت خود قضیه و حتی شبه اثباتی از آن را ارائه می‌کردی! این وظیفه دشوار را به یکی از ریاضیدانان برجسته معاصر و یکی از ابداع‌کنندگان هندسه تعویض‌ناپذیر، آلن گُن^۱، وامی‌گذارم. او در مصاحبه‌ای [۱۱] می‌گوید: «ممکن است گمان برید که عددهای ترتیبی به‌دردنخور هستند اما این نظر اصلاً درست نیست. برای مثال، یاد می‌آید یک بار در روز درهای باز در ITHES^۲ یک کلاس سیکل اول بود برای آنها مثالی از نظریه عددهای ترتیبی ارائه کردم: داستان خرگوش و لاک‌پشت. گفتم عددی مثل n که خیلی بزرگ نباشد در نظر بگیرید؛ آنها عدد ۵ یا یک چنین چیزی را در نظر گرفتند. قبلاً آموخته بودند که چگونه اعداد را در پایه‌های مختلف مانند ۲، ۳ و غیره بنویسند. برایشان توضیح دادم که نخست یک نفر آن عدد را در پایه ۲ می‌نویسد؛ بعد خرگوش سر و کله‌اش پیدا می‌شود و همه ۲ها را ۳ می‌کند. بنابراین $۱ + ۲ = ۵$ جایش را به $۱ + ۳ = ۲۸$ می‌دهد. سپس لاک‌پشت ۱ را از عدد حاصل کم می‌کند؛ آن وقت یک نفر می‌آید و این عدد را در پایه ۳ می‌نویسد و دوباره خرگوش سر و کله‌اش پیدا می‌شود و همه ۳ها را به ۴ تبدیل می‌کند و دوباره لاک‌پشت ۱ را از عدد حاصل کم می‌کند و کار به همین ترتیب ادامه می‌یابد. خوب! پدیده خارق‌العاده‌ای که حاصل نظریه عددهای ترتیبی است، این است که لاک‌پشت برنده می‌شود: بعد از تعدادی متناهی گام و با وجود اینکه فکر می‌کنید خرگوش هر بار جهش‌های غول‌آسایی می‌کند، لاک‌پشت عدد ۰ را به دست می‌آورد. آنچه باورش دشوار است، این است که این مسئله در چارچوب حساب پئانو قابل اثبات نیست. در اثبات آن از نظریه عددهای ترتیبی استفاده می‌شود! در واقع می‌توانید نشان دهید که تعداد گام‌های مورد نیاز قبل از آنکه لاک‌پشت برنده شود، رشدی سریع‌تر از هر تابع صریحی روی $\mathbb{N}$ دارد. می‌توانید بررسی کنید که برای رایانه چند گام لازم است تا به ۰ برسد. اما برهان اینکه لاک‌پشت برنده می‌شود، به کمک عددهای ترتیبی تنها یک سطر دارد. چطور؟ اولین عدد را بگیرید و به جای اینکه ۲

^۱Alain Connes ^۲Institut des Hautes Études Scientifiques

را با ۳ و ۳ را با ۴ عوض کنید و الی آخر، همه را با عدد ترتیبی w جایگزین کنید. برای مثال، ۵ برابر $1 + 2$ است، لذا شما بنویسید $1 + w$. این یک عدد ترتیبی است و می‌دانیم عدد ترتیبی، یک مجموعه خوش‌ترتیب است و هر دنباله نزولی از عددهای ترتیبی لزوماً متوقف می‌شود. حال اگر حرکت خرگوش را انجام دهید، چیزی تغییر نمی‌کند اما حرکت لاک‌پشت یکی از این عدد کم می‌کند و بدین سان دنباله‌ای اکیداً نزولی از عددهای ترتیبی به دست می‌آید که باید جایی متوقف شود. چون در این برهان از $w^{w^{w^{...}}}$ استفاده می‌شود، پس عجیب نیست اگر از حساب پئانو فراتر رود....»

مسئله $1 + 3x$ صورتی ساده دارد؛ عدد طبیعی x را در نظر بگیرید. اگر این عدد زوج بود، آن را نصف کنید و اگر فرد بود، آن را سه برابر کنید و حاصل را با ۱ جمع کنید. مسئله این است که آیا این فرآیند جایی به عدد ۱ ختم می‌شود؟ برخی از ریاضیدانان احساس می‌کنند که این مسئله برای ریاضیات کنونی لقمه‌ای گلوگیر است و ریاضیات کنونی از عهده حل آن بر نمی‌آید.^۱ سخنران جایی در ادامه از احساس خودش درباره مسئله $1 + 3x$ سخن می‌گوید و اینکه ممکن است مانند قضیه گوداستاین در چارچوب نظریه اعداد قابل حل نباشد: «نمی‌دانم چرا من (نه اردوش) احساس می‌کنم که این مسئله هم مانند قضیه قبلی حل حسابی ندارد.» صورت قضیه گوداستاین نیز کاملاً در چارچوب نظریه اعداد مقدماتی قابل بیان است اما حل آن چنان‌که آلن گُن نشان داد، به حساب عددهای ترتیبی نیاز دارد و بدون این موجودات نامتناهی، یافتن پاسخ مسئله ممکن نیست. خواننده می‌تواند مسئله کاکیا^۲ و شرح جذابی از حل آن را توسط آبرام سمونیلوویچ بسیکوویچ^۳ در صفحه‌های پایانی متن مکتوب این سخنرانی در [۲] مطالعه کند.^۴



آ. اس. بسیکوویچ، ریاضیدان روسی-انگلیسی (۱۸۹۱-۱۹۴۷)



سواچی کاکیا، ریاضیدان ژاپنی (۱۸۸۶-۱۹۴۷)

^۱ من معنی چنین اظهار نظرهایی را نمی‌فهمم و به نظرم برای انسان فانی مقدر نیست که این گونه سخن بگوید. ظاهراً این اظهار نظر از پال اردوش است.

^۴ در ویکی‌پدیا نام دکتر غلامحسین مصاحب به عنوان یکی از دانشجویان دکتری بسیکوویچ ذکر شده است.

۴. روش‌ها و نتایج کلیدی در ریاضیات

محل برگزاری این سخنرانی دانشگاه تهران و زمان آن، شهریورماه سال ۱۳۷۹ است. محافل بین‌المللی این سال را سال جهانی ریاضیات اعلام کردند. این سخنرانی ادای دینی به مرحوم دکتر محسن هشترودی نیز هست. سخنران در بخشی از گفتار آغازین سخنرانی می‌گوید: «هر کسی در ریاضی هر کاری بکند، چه مقاله چاپ کند، چه مسئله حل کند یا فقط تدریس کند، همیشه روش‌ها و نتایجی وجود دارند که کار را برای همه آنها ساده می‌کنند. اینها را روش‌ها و نتایج کلیدی می‌نامیم. متأسفانه تعداد آنها در هر زمینه خاص ریاضی چندان زیاد نیست و در اینجا به تعدادی از آنها اشاره خواهم کرد.» او سپس یاد می‌دهد که آن روش‌هایی مانند روش دکارت در ایجاد هندسه تحلیلی می‌کند که شاخه‌های به‌ظاهر دور از هم را به هم متصل می‌کنند اما اضافه می‌کند که منظورش این گونه روش‌ها نیست. آن‌گاه چند روش را برمی‌شمارد که عبارت‌اند از (الف) روش برهان خلف؛ (ب) روش نزول نامتناهی فرما (هیچ دنباله نامتناهی اکیداً نزولی از اعداد طبیعی وجود ندارد)؛ (پ) روش استقرا که در اینجا هم از استقرای معمولی (گسسته) و هم از استقرای پیوسته سخن به میان می‌آید؛ (ت) روش انعکاس؛ (ث) روش تغییر بُعد (روش مگس)؛ (ج) روش انتخاب اجباری، (چ) روش‌های یکسان برای اثبات و بیان بعضی قضیه‌ها؛ (ح) روش تقلیل؛ (خ) فشرده‌سازی، موضعی‌سازی، کامل کردن، تعمیم و دوگان کردن. این مقاله اگر به‌دقت خوانده شود، مطالب آموزنده فراوانی برای یک ریاضی‌آموز جوان دارد؛ ریاضی‌آموزی که قصد دارد روزی یک ریاضیدان توانمند گردد. در این مجال تنگ، گزیده‌هایی از مطالب پرشمار این مقاله را مرور می‌کنیم.

(الف) دکتر کرم‌زاده در اینجا نخست به روش برهان خلف اقلیدس می‌پردازد و با اثبات اقلیدس برای نامتناهی بودن اعداد اول بحث را آغاز می‌کند و حضور بی‌چون و چرای این روش را در نظریه اعداد و هندسه و امی‌کاود و سرانجام نتیجه می‌گیرد: «... ولی این نکته را باید مورد توجه قرار داد که در اثبات‌های برهان خلفی چون هدف، رسیدن به یک تناقض است، ترجیح داده می‌شود هرچه زودتر به این تناقض برسیم. بنابراین معمولاً تعداد نتایجی که قبل از رسیدن به هدف به دست می‌آوریم، کمتر از تعداد نتایجی است که در اثبات‌های مستقیم به دست می‌آوریم.» برای نشان دادن این نکته، اثبات دیگری برای نامتناهی بودن اعداد اول را به بحث می‌گذارد که پیامد گذاردن توپولوژی جالبی روی $\mathbb{N}$ است: اگر برای هر $a, b \in \mathbb{N}$ که $(a, b) = 1$ مجموعه‌های $\{an + b \mid n \in \mathbb{N}\}$ را به عنوان عضوهای پایه این توپولوژی در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که با این توپولوژی، $\mathbb{N}$ به فضایی هاوسدورف، همبند و نافشرده تبدیل می‌شود. با این روش می‌توان نشان داد که تعداد اعداد اول نامتناهی است و نیز قضیه مشهور دیریکله درباره تصاعد‌های حسابی (هر تصاعد حسابی $\{an + b\}$ که در آن، $(a, b) = 1$ شامل تعدادی نامتناهی عدد اول است) با چگال بودن اعداد اول در $\mathbb{N}$ (نسبت به این توپولوژی) معادل است. شاید هم براوئر و دیگر شهودگرایان حق داشتند که به برهان خلف به چشم تردید بنگرند. بدون برهان خلف، چه بسا ساختمان‌های ریاضی

جالبی ساخته می‌شد که برهان خلف عملاً مانع ایجاد آنها شده است. با این حال، سخنران نظر نهایی خود را دربارهٔ این روش بیان می‌کند: «باید اقرار کرد که این روش برهان خلف در اکثر اوقات تحمیلی است و هیچ انتخاب دیگری نداریم.» سخن هاردی را دربارهٔ برهان خلف به خاطر بیاوریم که می‌گفت: «یک گامی است ظریفتر از هر گامی شطرنج: شطرنج‌باز ممکن است یک پیاده یا یک سوار را فدای بازی کند، ولی ریاضیدان خود بازی را فدا می‌کند.»

(ب) آیا یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع صحیح وجود دارد که مساحتش مربع کامل شود؟ فرما فکر می‌کرد چنین مثلی وجود ندارد. برای اینکه این موضوع را ثابت کند، نشان داد در صورت وجود چنین مثلی، یک مثلث کوچکتر با ویژگی مشابه وجود دارد و در نتیجه مثلی دیگر و مثلی دیگر و اما در این صورت دنباله‌ای اکیداً نزولی از عددهای طبیعی به دست خواهیم آورد و می‌دانیم که چنین دنباله‌ای وجود ندارد. اینکه در $\mathbb{N}$ هیچ دنبالهٔ اکیداً نزولی نامتناهی نمی‌توان سراغ گرفت، نتیجه‌ای از اصل خوش‌ترتیبی اعداد طبیعی است. اما در روزگار فرما این موضوع هنوز دانسته و شناخته شده نبود. در اینجا دکتر کرمزاده تعدادی مثال و نتیجه در مورد این روش به دست می‌دهد.

(پ) سخنران در اینجا میان آنچه از آن به روش استقرا یاد می‌کند و اصل استقرا فرق می‌گذارد: «فرض کنیم می‌خواهیم یک ویژگی P را برای برخی از موجودات ریاضی نشان دهیم. اگر با توجه به شرایط بتوانیم در بین این موجودات یک عضو مینیمال داشته باشیم، وقتی این عضو مینیمال را در نظر می‌گیریم و به بررسی خود ادامه می‌دهیم و معمولاً نیز ما را به نتیجه می‌رساند، این روش استقرا است. اولین بار این روش توسط فرما به کار برده شد که همان روش نزول نامتناهی است. اصل استقرا به ما این امکان را می‌دهد که برای دسته‌ای بزرگ از مسائل، روش فرما را به کار ببریم.» نکتهٔ جالب دربارهٔ روش استقرا، اشاره به استقرای پیوسته است. خوب! البته تعمیمی از استقرای معمولی به هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب وجود دارد؛ همان استقرای ترامتناهی. اما استقرای پیوسته را می‌توان بر مجموعهٔ کلاً مرتب پیوستار یا خط حقیقی اعمال کرد. فرض کنیم P یک ویژگی برای اعداد حقیقی باشد. فرض کنیم عددی حقیقی مانند x موجود باشد که P برای همهٔ اعداد کوچکتر از x صادق باشد و نیز اگر P برای همهٔ مقادیر کوچکتر از y صادق باشد، آن‌گاه عدد مثبت δ موجود باشد که P برای همهٔ اعداد کوچکتر از $y + \delta$ نیز صادق باشد. در این صورت ویژگی P برای همهٔ اعداد حقیقی برقرار است. ظاهراً نخستین بار هنری بلومبرگ طی یک سخنرانی به استقرای پیوسته اشاره کرده است؛ سخنرانی مذکور در بولتن انجمن ریاضی آمریکا به چاپ رسیده است. بنابر روایت دکتر کرمزاده، ریاضیدانی به نام ژانگ جینگ‌ژونگ، استقرای پیوسته

را در یکی از گزارش‌های فنی تریسته ایتالیا در سال ۱۹۸۹ منتشر می‌سازد [۱۲] و بسیاری از قضیه‌های آنالیز مقدماتی را با این روش ثابت می‌کند.^۱

در آبان‌ماه سال ۱۳۸۲ دکتر ایرج کلانتری مهمان پژوهشگاه دانش‌های بنیادی بود و سخنرانی‌هایی جذاب هم در پژوهشگاه و هم در دانشگاه تهران ایراد کرد. به یاد می‌آورم که دکتر کلانتری در یکی از سخنرانی‌ها به استقرای پیوسته اشاره کرد و از مخاطبان و علاقه‌مندان خواست که قضیه‌های آنالیز ریاضی را با استفاده از روش استقرای پیوسته ثابت کنند. برگردیم به سخنرانی مورد بحث خودمان. دکتر کرم‌زاده در ادامه سخنرانی می‌گوید: «تعجب می‌کنم چطور در این ۷۰ سال که بلمبرگ اشاره کرده استقرای برای اعداد حقیقی نیز درست است، حتی یک کتاب آنالیز ریاضی مقدماتی بر اساس این روش که به نظر من برای همه دانشجویان کاملاً طبیعی‌تر از اصل ددکیند و اصل کمال است، نوشته نشده است» و ظاهراً دکتر کلانتری در این ناخشنودی با کرم‌زاده سهم بود.

(ت) سخنران می‌گوید: «وقتی که این روش را در زمان بچگی یاد گرفتم، فکر می‌کردم می‌توانم دنیای ریاضی را فتح کنم. می‌توانستم از هر نتیجه موجود در هندسه یک نتیجه قشنگ دیگر بسازم. مسائل یا قضیه‌هایی که با این روش قابل اثبات هستند، اثبات آنها با روش‌های دیگر یا ناممکن است و یا دارای پیچیدگی‌های غیر قابل تحمل خواهد بود. همان‌طور که می‌دانید، تبدیل انعکاس، مجموعه خط‌ها و دایره‌ها را به خود این مجموعه می‌برد و زاویه بین دو خم را ثابت نگه می‌دارد. همچنین مجموعه کره‌ها و صفحه‌ها را نیز به خودش می‌برد.» در وصف و شرح این روش دو مثال جالب از هندسه دایره‌ها ارائه می‌شود.

(ث) وجه تسمیه «روش مگس» از زبان سخنران: «۳۲ سال پیش در همین دانشگاه تهران در بخش ریاضی با مرحوم دکتر هشتودی کلاس داشتیم و طبق معمول از هر فرصتی استفاده می‌کرد تا راجع به موضوعات علمی غیر درسی که خیلی هم در دانشجو انگیزه ایجاد می‌کردند، صحبت کند. یکی از آن موضوع‌ها مفهوم بُعد فضا و ناتوانی انسان به عنوان موجودی بود که نمی‌تواند به‌طور فیزیکی از همه ابعادش استفاده کند. او گفت مثلاً ورق کاغذی را در نظر بگیرید که به شکلی در فضا نگاه داشته شده است و روی آن سه موجود مثلاً یک عقرب، یک سوسک و یک مگس قرار داده‌اید. اگر این ورق را آتش بزنید، مگس پرواز می‌کند ولی دو موجود دیگر که ظاهراً قوی‌تر از مگس هستند، کشته می‌شوند. یعنی یک حادثه ظاهراً در یک فضای دو بُعدی برای سه موجود سه بُعدی اتفاق می‌افتد ولی فقط یکی از آنها جان سالم به‌در می‌برد.» از میان مثال‌هایی که برای این روش ارائه می‌شود، به دوتا بسنده می‌کنیم. نخست قضیه سیلستر: در بخش ۲ دیدیم که این مسئله، در دسته دوم جای دارد، یعنی مسائلی که به محض مواجهه با آنها ترغیب می‌شویم یا شخصاً اثباتی برای آنها ارائه کنیم یا اثبات آنها را در نوشتجات ریاضی بیابیم.

^۱ این مقاله با عنوان «استقرای پیوسته» توسط آقای دکتر رشید زارع نهندی ترجمه شده و در جلد هفتم مجله جنگ ریاضی دانشجو در سال ۱۳۷۰ به چاپ رسیده است.



دکتر محسن هشترودی (۱۳۵۵-۱۲۸۶)

پس یک بار دیگر به این قضیه توجه کنیم: اگر n نقطه در صفحه داشته باشیم که همخط نباشند، آن‌گاه یک خط وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از این نقاط می‌گذرد. سخنران تعمیمی از این قضیه را در فضای سه‌بعدی بیان می‌کند و آن این است که اگر n نقطه در فضا داشته باشیم که روی یک صفحه نباشند، آن‌گاه یک صفحه وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این نقاط می‌گذرد. سخنران بلافاصله هشدار می‌دهد که این نتیجه نادرست است؛ «کافی است دو خط متناظر در نظر بگیریم و روی هر خط چهار نقطه قرار دهیم.» سپس به تعمیمی بامعنا از قضیه سیلوستر در صفحه می‌پردازد. اگر خط‌گذاری در قضیه سیلوستر را دایره‌ای با شعاع بی‌نهایت بگیریم، این تعمیم به‌دست می‌آید: اگر n نقطه در فضا داشته باشیم که روی یک صفحه نباشند، آن‌گاه دایره‌ای وجود دارد که دقیقاً از سه نقطه از این نقاط می‌گذرد.

برای اثبات، سخنران از چهار نقطه از این نقاط، کره‌ای می‌گذراند و سپس یکی از این چهار نقطه را به‌عنوان مرکز انعکاس در نظر می‌گیرد و کره را منعکس می‌کند. کره به صفحه مماسی که از نقطه‌گذاری می‌گذرد، مماس می‌شود؛ انگار کره را از همان نقطه، روی یک آینه قرار داده‌ایم. از میان این n نقطه آنهایی که روی کره هستند، به‌یقین همخط نیستند و لذا تصویرشان روی آینه نیز همخط نیستند. بنابر قضیه سیلوستر، یک خط وجود دارد که دقیقاً از دو نقطه از نقاط روی آینه می‌گذرد. تصویر این خط در بازگشت به کره یک دایره از کره است. این دایره از سه نقطه که یکی از آنها همان مرکز انعکاس است، می‌گذرد. سخنران ادامه می‌دهد: «دیدیم برای اینکه قضیه سیلوستر را تعمیم دهیم اول به فضا رفتیم، بیان گزاره را حدس زدیم و بعد برای اثبات آن به صفحه برگشتیم، یعنی دوبار تغییر بُعد دادیم.»

مسئله دیگر در توصیف و تشریح «روش مگس» را از مثال‌های غیر هندسی دکتر کرم‌زاده برگزیده‌ام. او می‌گوید: «این ایده تغییر بُعد در خیلی جاها ایده اصلی است اما بیان نمی‌شود. مثلاً در تعریف فضای

حاصل ضرب فضاهای توپولوژیک $X = \prod_{i \in I} X_i$ در حقیقت وقتی می‌گوییم این توپولوژی کوچکترین توپولوژی روی X است که همهٔ توابع افکنش $\pi_i : X \rightarrow X_i$ نسبت به آن پیوسته‌اند، فضای X را که دارای بُعد بالاتری است روی فضاهای X_i که بُعد کمتری دارند، تصویر کرده‌ایم و از توپولوژی X_i ها توپولوژی X را ساختیم.» حتی پا را فراتر می‌نهد و مفاهیم ضرب دکارتی و جمع مستقیم ساختارهای جبری مانند مدول‌ها، حلقه‌ها و گروه‌ها را نیز از مصادیق ایدهٔ تغییر بُعد می‌داند. مثال دوم خود را از تجربهٔ دکتر کرم‌زاده و یکی از دانشجویان دکترایش در حل دستگاهی از معادلات برگزیده‌ام. حل دستگاه معادلات از مسائل اساسی ریاضیات است. نظریهٔ معادلات روی میدان‌ها تا اندازهٔ زیادی رام شده است اما اگر با این معادلات روی یک حلقهٔ تعویض‌ناپذیر روبه‌رو شویم، دردسرها یمان زیاد می‌شود. با وجود این، در میان حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، حلقه‌های تقسیمی می‌توانند در حل برخی دستگاه‌های معادلات نقشی سودمند بازی کنند. خوشبختانه معادلاتی که دانشجوی دکتر کرم‌زاده^۱ با آن روبه‌رو شده بوده است، از این نوع بوده‌اند. اما مشکل آن بوده است که ضرایب نه از حلقه‌های تقسیمی، بلکه از حلقه‌های قویاً منظم می‌آمده‌اند. باز هم خوشبختانه هرچند این حلقه‌ها بسیار دور از حلقه‌های تقسیمی هستند، می‌توان آنها را در حاصل ضربی از حلقه‌های تقسیمی نشانند. لذا استاد و شاگرد نخست معادلاتشان را برای حلقه‌های تقسیمی و سپس حاصل ضرب آنها و در پایان، برای زیرحلقه‌های آنها یعنی همین حلقه‌های قویاً منظم حل می‌کنند.

خاطره‌ای خیلی دور از روش تغییر بُعد در یاد من مانده است؛ خاطره‌ای که ممکن است دیگران نیز با من در آن سهم باشند: از ما خواسته شده بود که با شش کبریت، چهار مثلث درست کنیم به شرط آنکه این کبریت‌ها یکدیگر را قطع نکنند!

(ح) در مورد روش‌های یکسان برای اثبات و بیان قضیه‌ها، سخنران چنین فتح باب می‌کند: «یکی از نصیحت‌های مکرر من به دانشجویان دکترایم این است که وقتی بیان درست گزاره‌ای را حدس زدند، زیاد نگران اثبات آن نباشند، چون اثبات به شکلی لابه‌لای اثبات قضیه‌های مشابه پیدا می‌شود و اگر اثبات پیدا نشد، آن وقت می‌توانید به عنوان یک حدس مشکل آن را یک مسئله اعلام کنید. آنگاه یا دیگران با جستجو، اثبات آن را در لابه‌لای اثبات‌های مشابه می‌یابند و یا بالأخره کسی پیدا می‌شود که با یک روش کاملاً جدید کار را تمام می‌کند و ما صاحب یک روش جدید در ریاضی می‌شویم و یا سال‌ها به عنوان مسئله حل نشده باقی می‌ماند و باعث شهرت شخص می‌شود.» پس از این، شروع به ارائه مثال‌هایی جذاب می‌کند. مثلاً اثباتی ارائه می‌کند از اینکه لم تسورن، اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد و نشان می‌دهد که اثبات‌های محک بئر و قضیهٔ هان-باناخ، صرف‌نظر از تغییراتی اندک، عملاً همین اثبات هستند. پس

^۱ در این سخنرانی نام آن دانشجو ذکر نشده است اما کلاغ‌ها برایم خبر آورده‌اند که او دکتر عبدعلی کوچک‌پور، انسانی بسیار دوست‌داشتنی، از اعضای هیئت علمی دانشگاه شهید چمران اهواز بوده است.

از آن، به بیان‌های مشابه در قضیه‌ها می‌پردازد. چندین مثال در جبر ارائه می‌شود که صورت‌های بسیار مشابه دارند. او نتیجه می‌گیرد که «از این نوع قضیه‌ها در ریاضیات زیاد است. منظور من از عنوان کردن این موضوع این است که بعضی اوقات نه تنها اثبات قضیه را می‌توان از جایی دیگر قرض کرد، بلکه حتی خود بیان قضیه را می‌توان از جای دیگر گرفت.» اما از سرکنجکاو، میل دارم بدانم چرا گاهی نه تنها اثبات‌ها، بلکه حتی بیان قضیه‌ها تا این اندازه به یکدیگر شباهت پیدا می‌کنند؟ آیا اینها حالت‌هایی خاص از یک ابرقضیه هستند که همه آنها را در بر می‌گیرد؟ نوعی ابرقضیه در مثل افلاطون؟ و یا نوعی بیان رسته‌ای (کتگوریک) وجود دارد که هریک از اینها صورتی از آن بیان در رسته‌ای خاص هستند؟ شاید چنین پرسشی در باور به افلاطون‌گرایی، پاسخ خود را بیابد.

درباره مابقی روش‌های مورد اشاره، خواننده را به مطالعه این مقاله در [۲] دعوت می‌کنم.

۵. عکس نتایج را به عکس گذشتگان دریابیم؟

این سخنرانی در سی‌وسومین کنفرانس سالانه ریاضی کشور در دانشگاه فردوسی مشهد ایراد شده است. سخنرانی با این جمله آغاز می‌شود: «عنوان بالا دو معنی دارد: یکی اینکه عکس نتایج را آن‌طور که گذشتگان دریافته‌اند، درنیابیم و دیگر اینکه گذشتگان توجهی به عکس نتایج نداشتند ولی ما باید داشته باشیم.» به اندازه کافی گویا هست، نه؟ محور اصلی این سخنرانی، یافتن عکس برخی نتایج مهم است که گاه از دیدگان آموزش‌دیده نیز پنهان می‌مانند. سخنران چند نکته جالب را به ما یادآور می‌شود. یکی اینکه قضیه‌های «اگر و تنها اگر»، زمانی خوب هستند که یک طرف آنها به سختی ثابت شود و طرف دیگر، به سادگی. از زبان خودش بشنوم، لطفش بیشتر است: «در بیشتر زمینه‌های ریاضی، نتیجه‌ای خوب و بااهمیت است که به شکل «اگر و تنها اگر» باشد و هر دو طرف «اگر و تنها اگر» به ما اطلاعاتی تازه از موجود مورد مطالعه بدهند و اثبات یک طرف آن حتماً بدیهی باشد» کمی بعد در تکمیل سخنانش می‌افزاید: «بدیهی بودن اثبات یک طرف حتماً ضروری است، زیرا این موضوع به این معنی است که موجودی را که همه یک طرف آن را دیده‌اند، این قضیه طرف دیگرش را آشکار می‌کند ولی اگر نتیجه‌ای اثبات‌های بغرنج برای دو طرفش داشت، یعنی اینکه موجودی را که هیچ‌کس ندیده و به‌طور طبیعی خود را نشان نداده است، با زور به وجود آوریم» به‌زعم دکتر کرمزاده، رضایت دادن به «اگر-آن‌گاه» به جای «اگر و تنها اگر»، میراث اصول اقلیدس است. اقلیدس، به‌شهادت کتاب مستطاب/اصول، چندان در بند یافتن عکس قضیه‌ها و یا ارائه مثال نقض نبوده است. دکتر کرمزاده ضمن ارج نهادن بر نقش بی‌بدیل اقلیدس در آموزش ریاضیات، گناه این بی‌توجهی نسل‌های پی‌درپی ریاضی‌کاران را نیز بر دوش اقلیدس می‌نهد که این بنا نهاد. دیگران چندان در بند بیان قضیه‌ها به شکل «اگر و تنها اگر» نبودند چون آنها هم دست‌پرونده همین فرهنگ «اگر-آن‌گاه»ی بوده‌اند.

سخنرانی با ارائه نمونه‌هایی جالب در هندسهٔ دبیرستانی، نظریهٔ اعداد، جبر، نامساوی‌ها، آنالیز ریاضی، توپولوژی و جبرخطی ادامه می‌یابد. تنها به ذکر سه نمونه اکتفا می‌کنم. نخستین نمونه را از میان مثال‌های دکتر کرم‌زاده در توپولوژی انتخاب کرده‌ام: «مسئله‌ای در کتاب توپولوژی ویلارد [۲۱] وجود دارد به این شکل که نشان دهید هر مجموعهٔ بسته در فضای $\mathbb{R}^2$ مرز یک مجموعه است. این مسئله برای جالب بود، زیرا می‌دانیم که مرز یک مجموعه همیشه بسته است و در این مسئله می‌بینیم که در بعضی فضاها مجموعه‌های بسته و مرزها بر هم منطبق می‌شوند. ولی اول از خودم پرسیدم که $\mathbb{R}^2$ چه ویژگی دارد که مثلاً $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^n$ ندارد (بجز بُعد فضا). بعد دیدم که اگر یک فضای X بخواهد دارای این ویژگی باشد، چون خود X بسته است، پس X هم باید یک مرز باشد؛ یعنی باید مجموعه $A \subseteq X$ وجود داشته باشد که $A^\circ = \emptyset$ و $\bar{A} = X$. پس باید $X = b(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$. یعنی باید یک زیرمجموعهٔ چگال که درونش تهی است وجود داشته باشد. بعد دیدم $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}^2$ چنین است. در نتیجه حدس زدم که فضاهایی که این ویژگی را دارند باید همهٔ آن گونه فضاها را به ما بدهند و آن را ثابت کردم. چند سال بعد این موضوع را به صورت مسئله در مجلهٔ مانتلی دیدم و خودم را سرزنش کردم که چرا من آن را به شکل مسئله برای این مجله نفرستادم.» سپس تصمیم می‌گیرد که نتیجه‌ای قوی‌تر ثابت کند و حاصل تلاش او این است: گیریم X یک فضای توپولوژیک باشد و $F \subseteq X$. مجموعهٔ F بسته است اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ A از X موجود باشد چنان‌که برای هر مجموعهٔ چگال Y در X داشته باشیم $A^\circ = F^\circ \cap Y^\circ$ و $\bar{A} = \bar{F}$. نتیجهٔ بعدی به جبرخطی تعلق دارد. پیش از این نیز در دیگر سخنرانی‌های دکتر کرم‌زاده مثال‌هایی از این مبحث زیبای ریاضی وجود داشت که در میان مواردی که به آنها اشاره شد، نیامده‌اند. برای جبران این نقیصه و بیان علاقه‌ای که دکتر کرم‌زاده به این موضوع از جبر دارد، نمونهٔ بعدی را از این مبحث انتخاب کرده‌ایم. بهتر است برای طرح مطلب، به نقل قول جالبی از خود وی بپردازم: «همان‌طور که تفاوت اساسی وجود دارد بین عکاسی که از یک منظره با دوربین عکاسی خود عکس می‌گیرد با کسی که از این عکس یک فتوکپی می‌گیرد، در ریاضی هم بین کسی که عکس یک نتیجه را حدس می‌زند و اثبات می‌کند با کسی که این حدس و اثبات را از نتیجه‌ای دیگر فتوکپی می‌کند، تفاوت هست. در اینجا فقط به یک مثال بسنده می‌کنم، زیرا دارم بیش از حد دست خود را رو می‌کنم.» گیریم K میدانی با مشخصهٔ صفر و V یک فضای برداری متناهی‌بُعد روی این میدان باشد. در این صورت برای هر دو عملگر $T, S : V \rightarrow V$ داریم $TS - TS \neq \lambda I$. در اینجا λ عضوی ناصفر از میدان K و I عملگر همانی است. از آنجا که اثر $TS - ST$ صفر است ولی اثر λI در صورت ناصفر بودن λ ، ناصفر است، این نتیجه قابل انتظار خواهد بود (نقش صفر بودن مشخصهٔ میدان K چیست؟). دکتر کرم‌زاده نتیجه را به صورت «اگر و تنها اگر» بیان می‌کند: اگر K میدانی با مشخصهٔ صفر باشد، فضای برداری V روی K متناهی‌بُعد است اگر و تنها اگر برای هر دو عملگر $T, S : V \rightarrow V$ داشته باشیم $TS - TS \neq \lambda I$. در اثبات نیمهٔ نابديهی (و تنها

اگر از فن فتوکپی کردن استفاده می‌شود. برای اثبات، از برهان خلف یاری می‌گیریم. فرض کنیم بُعد V نامتناهی باشد. کافی است فرض کنیم بُعد V شمارا است. خوب! البته به جای یک فضای دلخواه می‌توان از یک فضای برداری (نامتناهی بُعد) خوش رفتارتر و آشنا تر بهره جست. فضای برداری چندجمله‌ای‌ها روی K یعنی $K[x]$ را در نظر می‌گیریم که پایه رام و سر به راهی مانند $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ دارد. حال عملگرهای مشتق و انتگرال (تقریباً انتگرال) D و S روی این فضا چنان‌اند که $DS - SD = I$ و این منجر به تناقض می‌شود.

نتیجه‌ای دیگر در این سخنرانی که به جبرخطی مربوط است، حسن ختام سخنرانی نیز هست. «قبل از اینکه سخنان خود را به پایان برسانم، ذکر این واقعه را ضروری می‌دانم. دو سه روز پیش که پس از پایان کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در چین، در هواپیما در حال بازگشت به ایران بودیم، ... آقای دکتر اسدالله نیکنام دبیر سی‌وسومین کنفرانس ریاضی کشور که همسفرم بود، گفت: 'تو که سخنران مدعو کنفرانس ریاضی کشور هستی فقط عنوان سخنرانی‌ات را فرستاده‌ای؛ ممکن است بگویی راجع به چه چیزی می‌خواهی صحبت کنی؟' من داشتم فکر می‌کردم که جواب دهم ولی او ادامه داد: 'راستی در سخنرانی آن فرانسوی که در چین راجع به چگونگی تدریس جبرخطی صحبت می‌کرد، شرکت داشتی؟' گفتم: 'نه'. گفت: 'آره خیلی اظهار نارضایتی از دانشجویان می‌کرد؛ مثلاً می‌گفت سر یک کلاس از دانشجویان پرسیده است که اگر T یک عملگر خطی و α و β دو بردار باشند، آن‌گاه کدام یک از دو گزاره زیر راست است: (الف) اگر α و β مستقل خطی باشند، آن‌گاه $T(\alpha)$ و $T(\beta)$ هم مستقل خطی هستند؛ (ب) اگر $T(\alpha)$ و $T(\beta)$ مستقل خطی باشند، آن‌گاه α و β نیز مستقل خطی هستند. ولی اکثراً قادر به دادن جواب درست نبوده‌اند.' من دیدم که بهترین موقع است که با استفاده از همین سؤال موضوع سخنرانیم را به او بگویم. گفتم: 'خوب معلوم است که گزاره دوم راست است ولی نباید این گونه سؤال‌ها را فقط جواب دهیم و رها کنیم. چیزی که من می‌خواهم در مشهد راجع به آن صحبت کنم، این است که ما باید سعی کنیم در بیشتر موارد، تکلیف یک مسئله یا یک قضیه را معلوم کنیم. به این معنی که من الان در ذهنم دیدم با به کار بردن ویژگی‌های عملگر T ، گزاره دوم راست است؛ آیا تمام قدرت عملگر T برای این مسئله لازم است؟ به عبارت دیگر، من در مشهد به دنبال این موضوع هستم که نشان دهم در بیشتر موارد، ما می‌توانیم از هر مسئله ساده یا یک نتیجه که یک طرفه بیان شده است، یک قضیه به صورت «اگر و تنها اگر» بسازیم ولی متأسفانه آموزش ریاضی تاکنون به گونه‌ای بوده که این موضوع را تشویق نکرده است ...» سپس برای اینکه همین مطلب را به نتیجه‌ای در قالب «اگر و تنها اگر» تبدیل کند، به یک تعریف نیاز دارد: اگر V فضایی برداری و $V \rightarrow V : T$ یک تابع باشد، T را شبه‌خطی گوئیم هرگاه برای هر بردار ناصفر α و هر عدد ناصفر λ ، عددی ناصفر مانند γ وجود داشته باشد که $T(\lambda\alpha) = \gamma T(\alpha)$. اکنون قضیه این است: تابع $V \rightarrow V : T$ شبه‌خطی است اگر و تنها اگر برای هر دو بردار α و β در V که $T(\alpha)$ و

$T(\beta)$ مستقل خطی‌اند، α و β مستقل خطی باشند. پیامد این ملاحظه این است که اگر فضای برداری را روی میدان $\mathbb{Z}_2$ در نظر بگیریم، آنگاه این قضیه برای هر تابعی درست است. «حال هر کس بتواند تا پایان کنفرانس قضیه بالا را به جای دو بردار α و β به هر تعداد متناهی بردار تعمیم دهد، یک جایزه باور نکردنی به او می‌دهم.» نمی‌دانم کسی این جایزه را ربوده است یا نه!

۶. گام‌های نو

این نوشته باید همین‌جا خاتمه می‌یافت اما دشواریِ مرور آثار هر ریاضیدان پویا این است که درست وقتی به جایی می‌رسیم که او چندی پیش در آن نقطه بوده است و مشغول بررسی آثارش می‌شویم، او کمی پیشتر رفته است و ما خود را در موقعیتی مشابه با پارادوکس‌های زنون ایلایی می‌یابیم. خوشبختانه ریاضیدان‌ها اخیراً فعالیت‌هایی جالب توجه داشته‌اند که بدون انداختن نگاهی هرچند گذرا به آنها، این نوشته از این هم که هست ناقص‌تر خواهد شد. اخیراً دکتر کرم‌زاده یک رشته از مقاله‌ها را منتشر ساخته است [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸] که حاوی اثبات‌های بسیار دیدنی از برخی نتایج کلاسیک مانند قضیه مورلی، نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی، قضیه سه دایره جانسون و قضیه کوچک کانوی هستند.

۱.۶. اثباتی یک سطری برای نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی. گیریم a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند که $a < b$. وقتی می‌گوییم عدد مثبت x بین a و b قرار دارد، منظورمان چیست؟ پاسخی که در [۱۳] به این سؤال داده می‌شود، اثباتی بسیار کوتاه برای نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی در پی دارد. پاسخ این است: $a \leq x \leq b$ اگر و تنها اگر $a + b \geq x + \frac{ab}{x}$. این اثبات، در حقیقت نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی را در حد اینکه عددی میان دو عدد دیگر قرار دارد یا نه، بدیهی می‌سازد. اگر در نامساوی بالا به جای x عبارت $\sqrt{ab}$ را قرار دهیم، نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی به دست می‌آید و در ضمن، روشن است که تساوی وقتی رخ می‌دهد که $x = a$ یا $x = b$. اثبات تعمیم نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی برای n تا عدد حقیقی مثبت $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، یعنی نامساوی

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

نیز از همین مشاهده هوشمندانه با اندکی تلاش به دست می‌آید. اگر $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ که چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. فرض کنیم دست‌کم دو مقدار از $x_1, x_2, \dots, x_n$ با هم مساوی نباشند و استقرا را به کار می‌بریم که برای حالت $n = 2$ بررسی شد. گیریم نامساوی برای $n - 1$ درست باشد و قرار می‌دهیم $x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = g^n$. نیز می‌توان فرض کرد که به ازای هر i ، $x_i \leq x_2$ و $x_1 \leq x_i$. لذا داریم $x_1 < g < x_2$. اما اینکه g بین این دو مقدار قرار دارد با توجه به بحث آغازین ما به این معنا

است که $x_1 + x_2 > g + \frac{x_1 x_2}{g}$. حال به دو طرف این نامساوی بقیه مقدارها را می‌افزاییم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > g + \frac{x_1 x_2}{g} + x_3 + \dots + x_n.$$

اما بنابر فرض استقرا،

$$g + \frac{x_1 x_2}{g} + x_3 + \dots + x_n \geq g + (n-1)g = ng$$

مشاهده می‌کنیم که فرآیند اثبات، این نکته را در پی دارد: تساوی وقتی رخ می‌دهد که همه این n مقدار با هم برابر باشند. از بسیاری از اثبات‌های نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی، این نتیجه حاصل نمی‌شود.

نامساوی آغازین این بخش، منجر به شماری نامساوی نابديهی می‌شود [۸]. برای مثال، به‌ازای $x = \sqrt[n+m]{a^n b^m}$ خواهیم داشت

$$a + b \geq \sqrt[n+m]{a^n b^m} + \sqrt[n+m]{a^m b^n}.$$

هیجان‌انگیزتر اینکه اگر x را تابعی مناسب از a و b بگیریم، می‌توانیم به برخی نامساوی‌های نابديهی دست بیابیم. نیز اگر $x < y \leq b$ ، $0 < a \leq x$ ، آن‌گاه می‌توان نشان داد که

$$\frac{1}{y}(x+y) + ab \frac{\ln y - \ln x}{y-x} \leq a+b.$$

اثبات این نامساوی تنها به همان نامساوی نخست و کمی محاسبه با انتگرال‌ها نیاز دارد. می‌دانیم که $a \leq t \leq b$ اگر و تنها اگر $t + \frac{ab}{t} \leq a+b$. لذا

$$\int_x^y \left(t + \frac{ab}{t}\right) \leq (y-x)(a+b).$$

با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{y}(y^2 - x^2) + ab(\ln y - \ln x) \leq (a+b)(y-x).$$

با تقسیم دو طرف این نامساوی بر $y-x$ ، به نامساوی مطلوب دست می‌یابیم.

۲.۶. قضیه سه دایره جانسون. در سال ۱۹۱۶ راجر آرتور جانسون^۱، ریاضیدان آمریکایی، مقاله‌ای با عنوان قضیه‌ای دربارهٔ دایره در مجلهٔ آمریکن مَتَمَتیکال مانثلی منتشر کرد.

^۱Roger Arthur Johnson

قضیه ۱.۶. فرض کنیم سه دایره با شعاع‌های برابر، یکدیگر را در نقطه‌ای قطع کنند. در این صورت شعاع دایره‌ای که از سه نقطه دیگر حاصل از برخورد دوه‌دوی آنها می‌گذرد، با شعاع آن سه دایره مساوی است.

در [۱۴] نخست داستان پرداختن به این قضیه آمده است. دکتر کرم‌زاده که برای دیدار فرزندش به آمریکا رفته بوده است، از طریق او مطلع می‌شود که اخیراً پسرش کم سن و سال به نام جیکب بارت^۱ در محیط‌های دانشگاهی سر و صدایی به پا کرده است. ظاهراً بارت در بچگی مشکوک به ابتلا به بیماری اوتیسم بوده است و سپس توانسته در مدتی بسیار کوتاه تحصیلات پایه دانشگاهی را طی کند. فیلمی از بارت از سلسله سخنرانی‌های تِد، انگیزه دکتر کرم‌زاده برای پرداختن به قضیه جانسون می‌شود. در این فیلم [۹]، بارت با آوردن مثال از نیوتون و اینشتین می‌گوید که رمز موفقیت این دو یافتن نگاهی نو بیرون از چارچوب نگاه سنتی بوده است. در واقع این دو نفر شهادت داشتند که خودشان با دیدگاه خودشان، گویی برای اولین بار، درباره مسئله‌هایشان فکر کنند و همین رمز یافتن راه‌های جدید بوده است. بارت در ضمن سخنرانی، با هیجانی وصف‌ناپذیر به قضیه جانسون اشاره می‌کند. این اشاره و نیز مضمون سخنرانی بارت، کرم‌زاده را همانجا دوباره به فکر این قضیه می‌اندازد. چنان‌که در مقدمه [۱۴] آمده است، دکتر کرم‌زاده اثباتی از این قضیه را حدود پنجاه سال پیش در دوران مدرسه یافته بوده است اما پس از سخنرانی بارت، به این صرافت می‌افتد که از نو به قضیه فکر کند که حاصل آن تعمیم قضیه جانسون و اثباتی بسیار ساده برای آن می‌شود.



جیکب بارت (۱۹۹۸-)

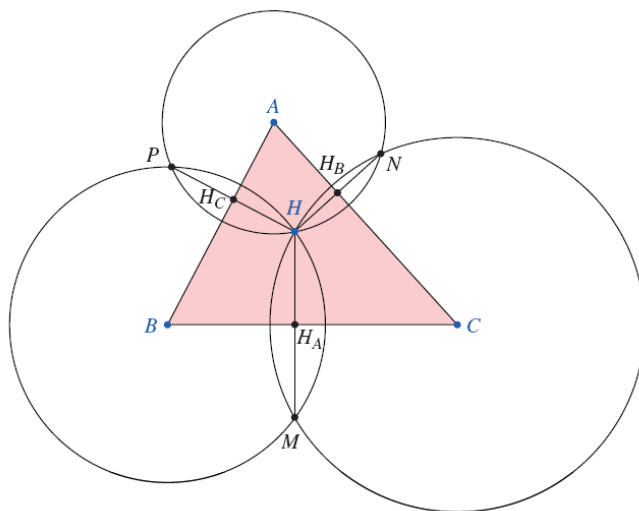


راجر آرتور جانسون (۱۸۹۰-۱۹۵۴)

قضیه ۲.۶ (تعمیم قضیه جانسون). گیریم سه دایره با مرکزهای A ، B و C یکدیگر را در نقطه H قطع کنند و این دایره‌ها دوه‌دوی یکدیگر را در نقاط M ، N و P نیز قطع کنند. فرض کنیم H_A ، H_B و H_C به ترتیب پای ارتفاع‌هایی باشند که از نقطه H بر خط‌های BC ، AC و AB رسم کرده‌ایم. در این صورت مثلث MNP با مثلث $H_A H_B H_C$ متشابه و نسبت تشابه ۲ است. به‌ویژه اگر سه دایره قابل

^۱Jacob Barnett

انطباق باشند، مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle MNP$ نیز قابل انطباق هستند و دایره‌های محیطی آنها با سه دایره اول قابل انطباق هستند.

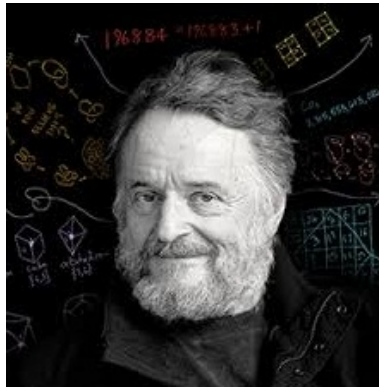


توجه می‌کنیم که در این تعمیم، حالتی که دایره‌ها قابل انطباق نباشند نیز کاملاً توصیف شده است و حالت خاص آن (یعنی قضیه جانسون) به‌سادگی به‌دست می‌آید [۱۴].

۳.۶. قضیه مورلی و اثبات‌های کانوی و کرمزاده. نام مورلی با قضیه‌ای جالب در هندسه مسطحه عجین شده است که می‌گوید مثلثی که از تثلیث هر سه زاویه یک مثلث دلخواه ایجاد می‌شود، متساوی‌الاضلاع است. به عبارت دیگر، مثلث دلخواهی را در نظر بگیرید و هر سه زاویه آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید و خط‌های مقسم این زاویه‌ها را امتداد دهید تا در درون مثلث اول، مثلثی ایجاد کنند. در این صورت مثلث دوم متساوی‌الاضلاع است.

درباره قضیه مورلی دو نکته فوراً به ذهن متبادر می‌شود. نخست اینکه چطور این قضیه به‌مدت تقریباً دو هزار سال از چشمان تیزبین هندسه‌دانانی همچون تئودوروس، تثایتوس، ائودوکسوس، آپولونیوس و ارشمیدس پنهان بوده است؛ کسانی که هندسه آرمان آنان بود و آن را از جان دوست‌تر می‌داشتند. نکته دیگر اینکه این از نوادر قضیه‌های هندسه است که در آن به‌جای دو نیم کردن زاویه، از تثلیث آن و به‌جای نیمساز از تثلیث‌گر استفاده می‌شود. شاید یکی از دلایل کشف نشدن این قضیه در یونان باستان، مشکل تثلیث زاویه به‌کمک خط‌کش نامدرج و پرگار بوده است [۱۷].

اثبات‌های فراوانی برای قضیه مورلی در دست است. ریاضیدانان بسیاری برای ارائه اثباتی جدید، طبع آزمایی کرده‌اند (۲۷ اثبات در یکی از مراجع [۱۷] ذکر شده است). با نگاهی به [۱۶]، نام‌هایی مشهور



جان هورتن کانوی (۱۹۳۷-)

مانند آلن کُن و راجر پنروز^۱ را خواهید دید که برای قضیه مورلی اثبات‌های جدید ارائه کرده‌اند. از میان این نام‌های پرآوازه، جان هورتن کانوی^۲، ریاضیدان بزرگ انگلیسی، اثباتی از قضیه مورلی ارائه کرده و مدعی شده است که «ساده‌ترین اثبات موجود برای قضیه مورلی است». ریاضیدان دیگری به نام ا. کین ضمن نگارش مقاله‌ای مدعی شده است که اثبات کانوی اثباتی خلق الساعه^۳ است. کین اثبات کانوی را از این جهت مورد نقد قرار می‌دهد که گویی یکباره و به شکلی خلق الساعه به وجود آمده است و این را به جهت زیبایی‌شناسی نقصی برای اثبات کانوی می‌داند. کرم‌زاده با توجه به نقد کین تلاش می‌کند تا نشان دهد که اثبات کانوی، هرچند بسیار هوشمندانه، خلق الساعه نیست و ریشه در بعضی تأملات کاملاً طبیعی دارد و سپس می‌کوشد تا اثبات کانوی را ساده کند. چنان‌که به‌خوبی در [۱۷] نشان داده شده است، پس از اثبات حکم زیر، قضیه مورلی اثباتی به مراتب کوتاه‌تر و بنیادی‌تر از اثبات کانوی به خود می‌بیند.

مقاله کین و پاسخ کرم‌زاده، از آن دست گواه‌هایی است که نشان می‌دهند ریاضیدانان آنقدرها هم که آرمان بُرل فکر می‌کند، بر سر معیارهای زیبایی‌شناختی در ریاضیات هم‌نوايي وجود ندارد. درست مانند اثباتش برای نامساوی میانگین‌های حسابی-هندسی، کرم‌زاده اینجا نیز تلاش می‌کند تا جوهر اثبات کانوی را درک کند و سپس تا آنجا که ممکن است، آن را ساده سازد. این تلاش، پاداش کاملاً درخوری نیز داشته است. این بار لم کلیدی کرم‌زاده از این قرار است. من ترجیح می‌دهم نام آن را قضیه کرم‌زاده بگذارم و

^۳ (Deus ex Machina) برای این اصطلاح معادل بهتری نیافتم. این اصطلاح اشاره به مطلبی دارد که یکباره و بدون هیچ رد پایی، انگار از هیچ پدید آمده باشد. ظاهراً ریاضیدانان در اینکه «با دشمن رد پایشان را پاک کنند» تبحر فراوانی دارند و به همین دلیل در ریاضیات اثبات‌های خلق الساعه یا دست‌کم آنهایی که خلق الساعه به نظر می‌رسند، زیاد داریم. می‌گویند گاوس در این کار تبحر و حتی تعمّد داشته است.

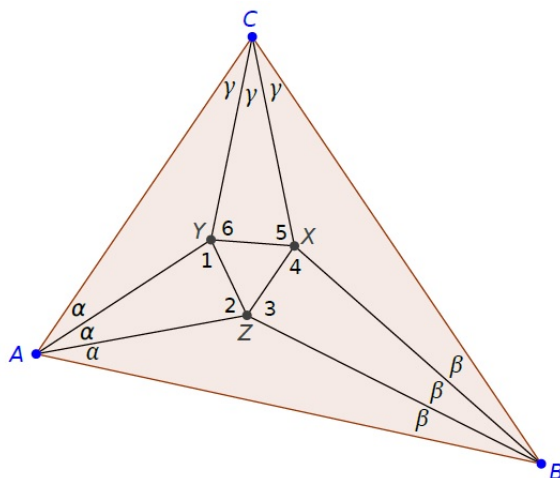
تلاش خواهیم کرد نشان دهم که این قضیه ارزشی بسیار بیش از صرفاً یک لم برای ساده‌سازی قضیه مورلی دارد:

قضیه ۳.۶ (کرمزاده). فرض کنیم A درون زاویه $\angle xOy$ باشد و نقاط B و C به ترتیب روی اضلاع Ox و Oy واقع باشند. از سه گزاره زیر اگر دوتا برقرار باشند، سومی هم برقرار خواهد بود:

(ا) $\tilde{A}$ روی نیمساز زاویه $\angle xOy$ قرار دارد؛

(ب) $AB = AC$ ؛

(ج) زاویه‌های $\angle OCA$ و $\angle OBA$ یا مساوی هستند یا مکمل.



مثلث مورلی در وسط دیده می‌شود.

قضیه کرمزاده کمک می‌کند تا قضیه مورلی را به شکل «اگر و تنها اگر» بیان کنیم: فرض کنیم در مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم $\angle A = 3\alpha$ ، $\angle B = 3\beta$ و $\angle C = 3\gamma$. اگر تثلیث‌گرهای سه زاویه مثلث $\triangle ABC$ در سه نقطه X ، Y و Z یکدیگر را قطع کنند، آنگاه $\triangle XYZ$ (یا همان مثلث مورلی) متساوی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر مثلث‌های $\triangle AZY$ ، $\triangle BZX$ و $\triangle CXZ$ در تساوی‌های زیر صدق کنند:

$$\angle 1 = \angle 4 = 60^\circ + \gamma, \quad \angle 2 = \angle 5 = 60^\circ + \beta, \quad \angle 3 = \angle 6 = 60^\circ + \alpha.$$

با اثبات این قضیه، راز قضیه مورلی برای همگان فاش می‌شود. تا پیش از اثبات کرمزاده، همه اثبات‌های قضیه مورلی، یا مثلثاتی بودند یا تحلیلی یا جبری و یا در ذات خود شامل چیزی ظاهراً بی‌ربط به قضیه

بودند. این اثبات، عاری از چنین ویژگی‌هایی است و عمیقاً هندسی است طوری که برای یونانیان باستان نیز به راحتی قابل درک است! و ای بسا اگر اقلیدس قضیه نیمساز کرم‌زاده را می‌دانست، آن را در کتاب اصول جای می‌داد! در [۱۷] نشان داده شده است که این حکم به ظاهر بی‌آزار، بسیاری از مسئله‌های دشوار را آسان و بلکه بدیهی می‌کند. یکی از این مسئله‌ها از کتاب ترنس تائو^۱، برنده مدال فیلدز و مشهور به موتسارت ریاضیات، برگرفته شده و نشان داده شده است که با به کارگیری قضیه بالا، مسئله تقریباً بدیهی می‌شود.

۴.۶. قضیه کوچک کانوی. جان هورتن کانوی اخیراً [۱۰] با این مطلع همراه با مطایبه که «چرا تنها فرما قضیه کوچک داشته باشد؟»، واقعیت جالبی را بیان و ثابت کرده است: یک مثلث متساوی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر نسبت اضلاع به یکدیگر و نیز نسبت زاویه‌ها به یکدیگر گویا باشند. دکتر کرم‌زاده اثباتی کوتاه برای این قضیه کانوی ارائه کرده است [۱۸].

۷. آرزوهایی کوچک برای مردی بزرگ

به باور من (به گمانم بسیاری دیگر هم در این باور با من سهیم هستند)، اگر امیدعلی شهنی کرم‌زاده پس از پایان تحصیلات خود، در انگلستان می‌ماند یا به آمریکا مهاجرت می‌کرد، ریاضیدانی به مراتب بزرگتر و پراوازه‌تر می‌شد. شاید حتی برنده یکی از همین جایزه‌ها و مدال‌های پرافتخار مانند مدال فیلدز می‌شد. به هر حال ریاضیدانی با شهرت جهانی می‌شد؛ در این شکی نیست - با یا بدون مدال فیلدز - چنان‌که یوری مَنین هم بدون مدال فیلدز از بزرگان ریاضیات به حساب می‌آید. اما چنین نشد. او و عاشقانی دیگر از جنس خود او بلندپروازی و عشق به پژوهش‌های ناب و روزآمد را که در وجود هر ریاضیدان جوان و مستعدی می‌جوشد، با چیزی دیگر معاوضه کردند. با عشقی از نوعی دیگر. توصیف درست و دقیق چنین عشقی دشوار است اما هر چه هست، مردان و زنانی بوده‌اند که همواره این عشق دوم را برگزیده‌اند. این عشق دوم، حیات دیگرانی، بس پرشمار، را تغییر داده است. من یکی از این دیگرانم. این عشق، غیرشخصی است. عشق به ریاضیات هم عشقی غیرشخصی است اما این عشق دوم در عین حال، تماماً انسانی است. این زنان و مردان، خود را وقف انسان‌ها می‌کنند. محتمل بود کرم‌زاده اگر به دنبال عشق اولش که ریاضیات بود، می‌رفت، سر از دانشگاه‌های بزرگ جهان چون کمبریج و هاروارد درمی‌آورد و اکنون شهرتی بسیار داشت. روزنامه‌ها و مجله‌ها او را می‌ستودند و خبرنگاران برای مصاحبه با او به رقابت می‌پرداختند. ای بسا عضو افتخاری هیئت تحریریه بولتن انجمن ریاضی ایران هم می‌شد. به هر حال کرم‌زاده کنونی ما نبود. چیزی بود همچون مجسمه‌ای سر در ابر فروبرده که تنها می‌توان زیبایی غیر قابل درک آن را ستود.

^۱Terence Tao



با دستی به نشانه دوستی بر شانه‌اش

تنها کرمزاده نیست که عشق اولش را با این عشق دوم معاوضه کرده است. شما می‌توانید با مراجعه به حافظه، فهرستی از کسانی را به خاطر بیاورید که خود را وقف و بلکه فدای این عشق دوم کرده‌اند. مربی کشتی دوران نوجوانی من، قاسم فرهمند، یکی از آنهاست. او نیز هرچه داشت به پای بچه‌های مشتاقی ریخت که به تشک کشتی پناه می‌آوردند. حال او هیچ ندارد جز سقف کوچکی بالای سرش اما آتش عشق بزرگی در دلش زبانه می‌کشد. او در این سال‌های مربیگری، بدون اغراق، هزاران نفر را از اعتیاد و از بلایایی که در کمین بچه‌های ما است رها کنید. او برای من، در همین هیئت، خمیده و تکیده که دیگر تنها مربی پیشکسوتان است و روزهای فرد هفته، یکی دو ساعت سالی را به احترام زحمت‌هایش در اختیارش می‌گذارند، بی هیچ مدال المپیک و مدال جهانی از همه قهرمانان کشتی (بجز غلامرضا تختی)، از الکساندر مدوید و الکساندر کارلین بزرگتر است.

غلامحسین یوسفی از معلمی سخن می‌گوید که در یک روز سرد زمستان که کوچه‌ها تا کمر به آب و گل آغشته بوده است، او را که پسر بچه‌ای ده ساله بوده، با پایهای برهنه به دوش می‌گیرد تا به محل برگزاری امتحان برساند در حالی که کفش‌هایش را جایی در میانه راه در میان گل و لای کوچه‌ها رها می‌کند. من نام این معلم فداکار را نمی‌دانم ولی او به یقین به فهرست مقدس ما تعلق دارد.

اعضای فهرست، عموماً غریب و گمنام هستند. جز حلقه کوچکی متشکل از شاگردان، اطرافیان و دوستانشان کسی آنها را نمی‌شناسد و بزرگشان نمی‌دارد (گاه آنها نیز قدرشان را نمی‌دانند). اینها عموماً و به تمامی وجود خویش را نثار می‌کنند. فرهنگ امروزی به ما القا می‌کند که افراد مشهور را ببینیم یا حتی سرمشق قرار دهیم و ستایش کنیم. قهرمانان فوتبال، ثروتمندان نابغه (مانند استیو جابز و بیل گیتس) یا

نادان (نیازی به مثال نیست)، بازیگران مطرح سینما، مجریان معروف و بعد هم دانشمندان و عالمانی که بخت (تنها بخت می‌تواند چنین کند) نام آنها را بلند آوازه کرده است. اما تکریم آن گمنامان مقدس را هیچ‌کس به ما نمی‌آموزد و یادآور نمی‌شود. برای یک ملت و کشور، مصون داشتن وجود هزاران نفر از اعتیاد و فساد چقدر ارزش دارد؟ چقدر می‌ارزد؟ آیا به یک مدال طلای المپیک یا یک مدال فیلدز هم نمی‌ارزد؟ شاید به همین دلیل، کرم‌زاده برای من و بسیاری از ما از اندرو وایلز^۱، الکساندر گروتندیک^۲، آندره وِی و جان هورتُن کانوی بزرگتر است. او در لحظه‌ای مهم از زندگی ما (کدام لحظه زندگی باشد، مهم نیست) چیزی انسانی؛ رایحه‌ای که حیات را به ما هدیه داده، در ما دمیده است.

به باور من، عظمت یک ملت و بزرگی یک کشور در بلندبالا بودن فهرست کسانی است که خود را وقف این دومین عشق می‌کنند. اگر ایران هنوز ایران است، به سبب حضور نامرئی مردان و زنان این فهرست مقدس است و بس. همه امیدم آن است که این فهرست در کشور ما روز به روز لاغرتر و کوتاه‌تر نشود؛ آب نرود. بدون این فهرست، ما جمعی خودشیفته و خودخواه را می‌مانیم که تنها به کار خویش می‌پردازیم و غمی از آسیب و درد دیگران در دل نداریم. زندگی در چنین جایی جهنم به معنای واقعی کلمه خواهد بود.

امید و آرزوی شخصی‌تر و کوچک‌تر من این است که گلچینی از بخش‌های صرفاً ریاضی کتاب نتایج باورنکردنی در ریاضیات و تکمله آن، اثبات‌های فراموش‌نشده در ریاضیات، و نیز مقاله‌های تازه منتشر شده دکتر کرم‌زاده در یک مجموعه به چاپ رسد. نسخه‌ای که مسلماً با نرم‌افزارهای ریاضی نویسی مناسب تایپ شده باشد و پُر از تصاویر ریاضیدانانی باشد که از آثار آنان سخن به میان آمده است. آرزوی کوچک دیگر من این است که ترجمه‌ای انگلیسی از گزیده‌ای از مقاله‌های این دو اثر به انضمام آثار متأخر که خود خوشبختانه به زبان انگلیسی فاخری نوشته شده‌اند، تهیه شود و به چاپ رسد تا علاوه بر فارسی‌زبانان، دیگر علاقمندان به ریاضی نیز از آن استفاده کنند. زیرا گمان من بر این است که حتی در میان آثار مشابه در دنیای انگلیسی‌زبان هم این مجموعه حرف‌های بسیار برای گفتن خواهد داشت. به امید آن روز.

در راه عملی کردن چنین هدفی، پس از حضرت آفریدگار، دل به همت انجمن ریاضی ایران بسته‌ام. این سنت و شیوه انجمن‌های ریاضی کشورهای ریاضی‌خیز است که ریاضیدانان خود را در انتشار آثارشان یاری دهند و هم‌تی بدرقه راه آنان کنند. از این نظر، انجمن ریاضی آمریکا و اروپا الگویی خوب است. آثار بسیاری از ریاضیدانان آمریکایی و اروپایی به صورت تک‌نگاشت توسط این انجمن‌های ریاضی انتشار یافته است. از آنجا که معمولاً بسیاری از ریاضیدانان اهل قلم، تعداد مقاله‌های عمومی‌شان کمتر از انگشتان یک دست است، چنین مجموعه غنی و مفصل را باید مغتنم شمرد و انجمن ریاضی ایران هم‌تی کند و از اعضای جوان و دانشمندش فرد یا افرادی را مسئول برگرداندن گلچین این مقالات به انگلیسی نماید و

^۱Andrew Wiles ^۲Alexander Grothendieck

سپس آن را به دست چاپ سپارد. امید است مسئولان کوشا و خادم انجمن ریاضی ایران این گونه اقدامات مؤثر را وجهه همت خویش قرار دهند.

مراجع

- [۱] بُرل، آ.، ریاضیات: علم و هنر، ترجمه روح‌الله جهانی‌پور و سعید مقصودی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال ۳۷، شماره ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، ۳۳-۱۵.
- [۲] شهنی کرمزاده، امیدعلی، نتایج باورنکردنی در ریاضیات، گردآورنده: احسان ممکن، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ۱۳۷۹.
- [۳] شهنی کرمزاده، امیدعلی، اثبات‌های فراموش‌نشدنی در ریاضیات؛ تکمله کتاب نتایج باورنکردنی در ریاضیات، گردآورنده: امید غیور، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ۱۳۸۳.
- [۴] ایگتر، مارتین و تسیگلر، گونتر، کتاب اثبات، ترجمه سیامک کاظمی، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ۱۳۷۹.
- [۵] هاردی، گ. ف.، دفاعیه یک ریاضیدان، ترجمه سیامک کاظمی، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۵.
- [۶] هالموس، پال، چگونه ریاضی بنویسیم، ترجمه حسن نجومی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال ۲۳، شماره ۳۳ (پاییز و زمستان ۱۳۸۳)، ۷۵-۴۳.
- [۷] هنریکسن، ملوین، فزون از حد ریاضیدان م. و. ز. وجود دارد، ترجمه احسان ممکن، فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال ۲۹، شماره ۴۵ (پاییز و زمستان ۱۳۸۹)، ۲۹-۲۱.
- [8] Azarang, A., Persian tarof in mathematics, *The Math. Intelligencer*, **33** (2011), 1.
- [9] Barnett, J., *Forget What You Know*, TEDxTeen, 2012.
- [10] Conway, J. H., A characterization of the equilateral triangles and some consequences, *The Math. Intelligencer*, **36** (2014), no. 2, 1-2.
- [11] Goldstein, C., Skandalis, G., An interview with Alain Connes, Part I, *Eur. Math. Soc. Newsletter*, **63** (2007), 25-30.
- [12] Jingzhong, Z., *The Induction on a Continuous Variable*, Technical Report of ICTP, IC1157, 1989.
- [13] Karamzadeh, O. A. S., One-line proof of AM-GM inequality, *The Math. Intelligencer*, **33** (2011), 3.
- [14] Karamzadeh, O. A. S., Johnson's three circles theorem revisited, *The College Math. J.*, **45** (2014), no. 3, 217-218.
- [15] Karamzadeh, O. A. S., Namdari, M., Gorjian, I., Morely's theorem is no longer mysterious!, *The Math. Intelligencer*, **37** (2015), 6-7.
- [16] Karamzadeh, O. A. S., Is John Conway's proof of Morley's theorem the simplest and free of Deus Ex Machina, *The Math. Intelligencer*, **36** (2014), 4-7.
- [17] Karamzadeh, O. A. S., Is the mystery of Morley's trisector theorem resolved?, (to appear) in *Forum Geometricorum*.

- [18] Karamzadeh, O. A. S., A very elementary short proof for Conway's little theorem, (to appear) in *Mathematical Gazette*.
- [19] Rotman B., Kneebone, T., *The Theory of Sets and Transfinite Numbers*, Max Parrish and Co. Ltd., Oldbune Math. Series, London, 1966.
- [20] Rota, G. C., The phenomenology of mathematical beauty, *Synthese*, **111** (1997), no. 2, 171–182.
- [21] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley, New York, 1968.

احسان ممّتن: دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی
رایانامه: e-momtahan@yu.ac.ir