فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۳ (پاییز و زمستان ۱۳۹۷) صص. ۳۷ تا ۵۰

ساختارگرایی در فلسفهٔ ریاضی معاصر

مرتضی منیری

چکیده

در این مقاله، به ساختارگرایی به‌عنوان یک مبنای پیشنهادی برای ریاضیات می‌پردازیم. هرچند ریشه‌های این مکتبِ فکری در ریاضیات بسیار قدیمی است، بُروز آن به‌عنوان یک نظام فلسفی برای ریاضیات، به چالش‌هایی برمی‌گردد که بناسراف، فیلسوف معاصر ریاضی، پیشِ رویِ واقع‌گرایی در فلسفهٔ ریاضی قرار داد. ساختارگرایی، مکتبی فلسفی است که مختص ریاضیات نیست، بلکه در فلسفهٔ علوم تجربی به‌طور عام نیز می‌توان ساختارگرا بود. به‌علاوه فارغ از جزئیات فلسفی، می‌خواهیم ببینیم که از دیدگاه یک ریاضیدان، ساختارگرایی چه کمکی به درک بهتر ریاضیات و کاربردهای آن می‌کند.

۱. سرآغاز

تلقّی ریاضیدانانِ حرفه‌ای از مفاهیم ریاضی چیست؟ پیوند حقایق ریاضی با واقعیت‌های جهان خارج چگونه است؟ کورانت[۱] و رابینز[۲] در کتاب خود [۴] به توصیف ریاضیات می‌پردازند؛ از دستگاه‌های گوناگون اعداد گرفته تا هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. از دیدگاه کورانت و رابینز، یک عدد طبیعی مانند ۲، پیامد فرآیند انتزاع از همهٔ مجموعه‌های دو عضوی است. آنها این سؤال را که خودِ عدد ۲ چیست یا ماهیت این فرآیند انتزاع چیست، برای ریاضیدانان مهم نمی‌دانند و پاسخ دادن به آنها را به فیلسوفان واگذار می‌کنند. فراتر از این، با در نظر گرفتنِ پیشرفت‌های علم فیزیک مانند نظریهٔ نسبیت و کوانتم که آنها را نتیجهٔ توجه صِرف به رخدادها و صرف‌نظر کردن از توجه به ماهیت ذاتی اشیاء می‌دانند، این نسخه

عبارات و کلمات کلیدی. فلسفهٔ ریاضی؛ واقع‌گرایی؛ ساختارگرایی.

[۱] Richard Courant [۲] Herbert Robbins

را برای ریاضیدانان هم می‌پیچند. برای مثال، به باور آنها، آنچه در حساب مهم است صرفاً بررسی روابط بین اعداد است:

> «اینکه نقطه، خط و عدد *واقعاً* چه هستند، نمی‌تواند و لازم نیست در علم ریاضی مورد بحث قرار گیرد. آنچه اهمیت دارد و آنچه به واقعیتِ *تحقیق‌پذیر* مربوط می‌شود، ساختار و رابطه است: اینکه دو نقطه، خطی را معین می‌کنند؛ اینکه عددها بنابر قاعده‌های معینی با هم ترکیب می‌شوند و عددهای دیگری پدید می‌آورند و امثال اینها.» [۴]

البته آنها تکیهٔ صِرف بر روش اصل‌موضوعی را نیز خطا می‌دانند:

> «این ادعا که *ریاضیات چیزی نیست جز دستگاهی از نتایج حاصل از تعریف‌ها و اصول موضوعی که فقط باید سازگار باشند و از سایر لحاظ به میل و ارادهٔ ریاضیدانان خلق می‌شوند*، متضمن تهدیدی جدّی برای علم است. اگر این توصیف درست می‌بود، ریاضیات نمی‌توانست هیچ انسان باهوشی را به‌سوی خود جلب کند و چیزی نبود جز بازی با تعریف‌ها، قاعده‌ها و قیاس‌ها بدون هیچ انگیزه یا هدفی. این تصوّر که ذهن انسان می‌تواند دستگاه‌های اصل‌موضوعی معنادار را آزادانه خلق کند، تنها نیمی از حقیقت را دربردارد و گمراه‌کننده است. تنها با احساس مسئولیت نسبت به کل ساختار ریاضیات و به راهنمایی ضروریات درونی آن است که ذهنِ آزاد می‌تواند نتایجی به‌دست آورد که ارزش علمی داشته باشند.» [۴]

کورانت و رابینز، نخست دستگاه اعداد طبیعی را مطرح می‌کنند. عمل‌های جمع، تفریق و ضرب روی اعداد طبیعی و رابطهٔ کوچکتری روی آنها با روش اصل‌موضوعی به گونه‌ای تعریف می‌شوند که با الگوی شهودیِ حاصل از در نظر گرفتنِ آرایه‌های مستطیل‌شکل حاوی نقطه‌ها و عمل‌های شهودی و ترتیب طبیعی روی آنها، هماهنگی داشته باشند. همچنین مستطیل خالی را نیز الگویی برای عدد صفر در نظر می‌گیرند. علم حساب مبتنی بر این اصول و روابطی است که آنها بین اعداد طبیعی حاکم می‌کنند. اینکه عددهای طبیعی واقعاً چه هستند، موضوع علم حساب نیست. به نظر می‌رسد که این رویکرد برای معرفی عددهای طبیعی هم با دیدگاه فکری کرونکر[۱] مطابقت دارد که می‌گفت: «خداوند اعداد صحیح [مثبت] را آفرید، مابقی کار انسان است» و هم با دیدگاه ددکیند[۲] که می‌گفت: «اعداد [طبیعی] حاصل ابداع آزادانهٔ ذهن بشر است.» البته این دو دیدگاه در ادامه به نتایجی متفاوت منجر شده‌اند. کرونکر یک *پیش‌شهودگرا* و ددکیند یک *پیش‌صورتگرا* (به‌نظرِ برخی، *پیش‌منطق‌گرا*) بوده است [۳].

عدد طبیعی را به دو گونه می‌توان نگریست. در دیدگاه اول، به آن به‌چشم عدد *اصلی*[۳] و در دیدگاه دوم، به‌چشم عدد *ترتیبی*[۴] نگریسته می‌شود [۱، ۱۲]. از نظر تاریخی و قبل از پیدایش مفهوم عدد، مقایسهٔ دو مجموعه از اشیاء از طریق ایجاد نوعی تناظر بین عضوهای آن دو مجموعه انجام می‌شده است. در

[۱] Leopold Kronecker [۲] Richard Dedekind [۳] cardinal [۴] ordinal

مرحلهٔ بعد، مجموعه‌هایی با تعداد مشخص عضو به‌عنوان مقیاس به‌کار رفته‌اند؛ مثلاً انگشتان دست. از این میان، مفهوم عدد طبیعی به‌عنوان عدد اصلی به‌وجود آمده است. مرحلهٔ شمارش بعد از این آغاز شده است. برای این منظور، دستگاهی از اعداد استفاده شد که یکی پس از دیگری قرار می‌گرفتند. این منشاء مفهوم اعداد طبیعی به‌عنوان اعداد ترتیبی بوده است. سرانجام، این دو تعبیر با هم ترکیب شدند.

کورانت و رابینز در ادامه به دیگر دستگاه‌های اعداد می‌پردازند. توسعهٔ دستگاه اعداد طبیعی به دستگاه‌های دیگر طی چندین قرن اتفاق افتاده است. برای مثال، ساختن اعداد گویای مثبت، حاصل نیاز به اندازه‌گیریِ زمان، وزن و نظایر آنها و تحویل آنها به شمارش بوده است. اندازه‌گیری نیازمند انتخاب واحد است. خودِ واحد را می‌توان به n قسمت تقسیم کرد و mتا از این بخش‌ها را در نظر گرفت. قرن‌ها طول کشیده است تا از میان این محاسبات، مفهوم کسر $\frac{m}{n}$ جنبهٔ ملموس خود را از دست بدهد و در جایگاه یک شئ ریاضی، عدد گویا، به رسمیت شناخته شود. دوباره اعمال ریاضی روی این اعداد به گونه‌ای تعریف شده‌اند که با مثال‌های ملموس مورد نظر، هماهنگ باشند [۴]. نمونهٔ جدیدتر، ظهور مفهوم گروه به‌عنوان یک ساختار ریاضی در جبر مجرّد است. این مفهوم از دل تلاش گالوا برای حل معادله‌های درجه‌پنجم و اثبات حل‌ناپذیری آنها با رادیکال‌ها، بیرون آمده است. کشف دستگاه‌های گوناگونی که در اصول موضوع گروه‌ها صدق می‌کردند، ریاضیدانان را قانع کرد که این ساختارها را در چارچوب یک نظریهٔ واحد به رسمیت بشناسند [۱۳].

به باور کورانت و رابینز، ورود اعداد به حوزهٔ اشیای ریاضی مثال خوبی از این است که یک شئ چگونه می‌تواند وارد قلمرو ریاضیات شود. اینکه ماهیت ذاتی آن شئ چیست، اهمیتی ندارد. مهم آن است که تعریفِ آن، مبنای شهودی خوبی داشته باشد و عمل‌های ریاضی مناسبی را بتوان روی آن تعریف کرد که هم با نظریه‌های ریاضی موجود سازگار باشند و هم با نیازهایِ عملی، هماهنگ. خلاصه اینکه از دیدگاه کورانت و رابینز که گویا دیدگاه غالب در میان ریاضیدان باشد، ریاضیات عبارت است از مطالعهٔ ساختارهایی مجرّد که از محسوسات و واقعیت‌ها نشأت گرفته‌اند. اهمیت شاخه‌های گوناگونِ ریاضیات، با توجه به نسبتشان با حقایق جهان خارج و همچنین با دیگر شاخه‌های ریاضی، تعیین می‌گردد.

البته ریاضیاتِ امروزی به‌طور کامل بر این روال پیش نمی‌رود. بخش‌هایی از ریاضیات به‌طور کاملاً مجرّد و یا به‌دور از بدنهٔ اصلی، رشد کرده‌اند. فیلیپ دیویس[۱]، روبن هرش[۲] و النا مارچیسوتو[۳] اشاره‌ای طنزآمیز به این موضوع می‌کنند:

> «او (ریاضیدان) اشیایی را مطالعه می‌کند که غیر از معدودی از همکارانش همه از وجودشان بی‌خبرند. در واقع اگر کسی که در این مباحث تعلیم ندیده است از او بپرسد که چه چیزی را مطالعه می‌کند، او از تبیینِ چیستیِ موضوع کارش ناتوان خواهد بود.» [۲]

---
[۱] Philip J. Davis [۲] Reuben Hersh [۳] Elena Anne Marchisotto

البته هیچ‌گاه نمی‌توان یافتن کاربردهای احتمالی یا کشف پیوندهای غیرمنتظره با دیگر شاخه‌ها را برای یک نظریهٔ ریاضی، منتفی دانست. جامعهٔ ریاضی است که باید دربارهٔ اهمیت یا بی‌ریشه بودنِ بخشی از ریاضیات تصمیم بگیرد. به‌قول کورانت و رابینز:

> «چه در نظر متخصصان و چه در نظر غیرمتخصصان، نه فلسفه بلکه تجربهٔ فعال در خودِ ریاضیات است که می‌تواند به این پرسش پاسخ دهد که ریاضیات چیست.» [۴]

در ادامه به برخی از دیدگاه‌های فلسفی از قبیل *واقع‌گرایی*[۱] و *ساختارگرایی*[۲] دربارهٔ ریاضیات می‌پردازیم که به نظر می‌رسد پیوند خوبی با تجربهٔ ریاضیاتی دارند.

۲. واقع‌گرایی و چالش‌های آن

ریاضیات بخشی جدانشدنی از مجموعهٔ علوم است نه‌تنها به این دلیل که علوم همگی از روش‌های ریاضی استفاده می‌کنند، بلکه در واقع در بسیاری موارد، تمایز بین ریاضیات و کاربردهای آن بسیار مبهم است. برای مثال، مفهوم *میدان* در فیزیک را در نظر بگیرید. آیا میدان مفهومی صرفاً ریاضی است یا مصداقی در جهان خارج دارد؟ در این مورد در میان فیزیکدانان و فیلسوفان علم، اختلاف نظر وجود دارد. در واقع بنابر نظری پرطرفدار در حوزهٔ فلسفهٔ علم، نظریه‌های فیزیکی نظریه‌هایی ریاضی هستند و اشیای مورد اشاره در آنها صرفاً ماهیت نظری دارند و حداکثر، شکل‌های ایده‌آل اشیای واقعیِ فیزیکی هستند. برای مثال، وقتی از گاز ایده‌آل صحبت می‌شود یا زمانی که از جاذبهٔ بین دو ذرّه بدون در نظر گرفتن اثر ذرّات دیگر بحث می‌شود، تنها با وضعیت‌هایی فرضی و غیرواقعی مواجه هستیم. در هر حال، این یک حقیقت انکارناپذیر است که ریاضیات زبان علوم است. بر اساس این اندرکنش میان ریاضیات و علوم دیگر همچون فیزیک، به نظر می‌رسد که باید ملاک‌های یکسانی برای آنها در نظر گرفته شود. این ما را به واقع‌گرایی در فلسفهٔ ریاضیات می‌رساند؛ واقع‌گرایی در مورد وجود اشیای ریاضی و واقع‌گرایی در حوزهٔ معناشناسی ریاضیات و ملاک صدق گزاره‌های ریاضی.

بناسراف[۳]، فیلسوف بزرگ ریاضی، در دو مقاله‌ای که در دهه‌های شصت و هفتاد میلادی منتشر کرد، چالش‌هایی پیشِ رویِ واقع‌گرایی در فلسفهٔ ریاضی قرار داد که منشأ بسیاری از مباحث امروزی در این حوزه گردیده است. بناسراف در مقاله‌ای به سال ۱۹۷۳، به این موضوع و نتایج فلسفی آن پرداخت [۸]. نظر او را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

۱. ملاک‌های صدق گزاره‌های ریاضی همچون ملاک‌های صدق گزاره‌های علوم دیگر از قبیل فیزیک هستند.

[۱] realism [۲] structuralism [۳] Paul Benacerraf

۲. پذیرش مورد ۱، به واقع‌گرایی در معناشناسی منجر می‌شود؛ یعنی پذیرش *معناشناسی تارسکی*[۱] برای گزاره‌های ریاضی.
۳. مطابق با این معناشناسی، صدق گزاره‌های ریاضی به معنای هماهنگیِ آنها با رخدادهای جهان خارج است. صدق گزاره‌های ریاضی، مستقل از خواست و نظر ریاضیدانان است.
۴. حدس‌های مشهوری مانند حدس گُلدباخ[۲]، مستقل از خواست یا نظر ریاضیدانان یا صادق هستند یا کاذب.
۵. پذیرش مورد ۴ به واقع‌گرایی در *هستی‌شناسی*[۳] منجر می‌شود: اشیای ریاضی موجوداتی غیرمادی و مجرّد هستند و وجودی مستقل از ریاضیدانان دارند.

با توجه به این موارد، این مشکلِ به‌ظاهر حل‌نشدنی پیش می‌آید که «ما چگونه به حقایق ریاضی دسترسی پیدا می‌کنیم؟» راه‌حل سادهٔ مبتنی بر رد یگانگی ریاضیات و علوم (برای مثال، مصنوعی و ذهنی فرض کردنِ ریاضیات)، مشکلی دیگر برای توجیه کاربردپذیریِ ریاضیات پیش می‌آورد. در این صورت پیوند اشیای ریاضی با این جهان مادی چگونه است؟

رویکردی دیگر که در فلسفهٔ علم مطرح شده است، این است که حتی شناخت ما از عالم تجربی و حسی، غیرمستقیم و از طریق نظریه‌های ریاضی است. هیچ مشاهدهٔ محضی وجود ندارد. همیشه برای تفسیر رخدادها نیاز به مراجعه به نظریه است. اما این رویکرد نه‌تنها چگونگیِ دسترسی ما به حقایق ریاضی را بی‌پاسخ می‌گذارد، بلکه این ابهام را به شناخت ما از عالم محسوس نیز گسترش می‌دهد. به‌طور خلاصه، مشکل توجیه نحوهٔ دسترسی ما آدمیان به حقایق ریاضی، از مهم‌ترین سؤال‌های مطرح در فلسفهٔ ریاضیات است. این سؤالی در حوزهٔ *شناخت‌شناسی*[۴] است و واقع‌گرایان در حوزهٔ فلسفهٔ ریاضی باید به آن پاسخ دهند.

بناسراف در مقاله‌ای به سال ۱۹۶۵، یک سؤال اساسی دیگر را در حوزهٔ فلسفهٔ ریاضی و به‌ویژه واقع‌گراییِ نظریه‌مجموعه‌ای، مطرح می‌کند [۷]. این سؤال در زمینهٔ هستی‌شناسی است و به وجود اعداد طبیعی به‌عنوان مهم‌ترین اشیای ریاضی مربوط می‌شود. *تحویل‌گراییِ* نظریه‌مجموعه‌ای که دیدگاهی غالب در حوزهٔ مبانی ریاضی است، مدعی است که همهٔ مفاهیم ریاضی را می‌توان برحسب مجموعه‌ها تعریف و همهٔ ویژگی‌های اعداد را می‌توان به‌کمک اصول نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت کرد. خلاصه اینکه ریاضیات به نظریهٔ مجموعه‌ها تحویل می‌شود. به این ترتیب، نظریهٔ مجموعه‌ها مبنایی مستحکم برای ریاضیات فراهم می‌کند. البته اعداد طبیعی را به روش‌های گوناگون می‌توان برحسب مجموعه‌ها تعریف و با هر یک از آنها می‌توان به‌طور مناسب کار کرد. با توجه به این موضوع، نظر بناسراف را در مورد ماهیت اعداد به شرح زیر می‌توان بیان کرد:

[۱] Alfred Tarski [۲] Christian Goldbach [۳] ontology [۴] epistemology

۱. تحویل‌گرایی در ریاضیات می‌خواهد کل ریاضیات را به نظریهٔ مجموعه‌ها تحویل کند.
۲. برای تعریف نظریه‌مجموعه‌ایِ اعداد، پیشنهادهای مناسب متفاوتی مطرح شده است.
۳. این سؤال پیش می‌آید که کدام‌یک از این پیشنهادها اعداد را واقعاً تعریف می‌کنند.
۴. از آنجا که هیچ‌یک از این پیشنهادها بر دیگری رجحان ندارد، جواب پرسش قبلی این است که هیچ‌کدام.
۵. بنابراین به‌خلاف نظر واقع‌گرایان، اعداد نمی‌توانند شئ باشند.
۶. موضوع مطالعهٔ ریاضی تنها بررسی روابط بین اعداد است.

اما اگر اعداد شئ باشند، باید بتوانیم ملاکی ارائه کنیم که بر اساس آن بتوان معلوم کرد که یک شئ خاص، عدد هست یا نه. به همین سبب، فرِگه[1]، فیلسوف بزرگ ریاضی و پیشرو منطق‌گرایی در فلسفهٔ ریاضیات که یک افلاطون‌گرا و معتقد به وجود اعداد بود، اعداد را به‌طور سیاقی تعریف کرد. تعریف او از عدد، ماهیت عدد را مشخص نمی‌کند، بلکه فقط نحوهٔ کاربست آن را در گزاره‌های ریاضی توضیح می‌دهد. البته راهبرد فرِگه با مشکلات بزرگی مواجه شده است [۵].

باید توجه کرد که ساختارگرایی، مکتبی فلسفی است که مختص ریاضیات نیست. ساختارگرایی در فلسفهٔ علم به‌طور عام به سؤال‌هایی از این قبیل می‌پردازد که در یک نظریهٔ علمی مانند مکانیک کلاسیک نیوتنی، قانونی همچون قانون دوم نیوتن را چگونه باید در نظر گرفت؟ در وهلهٔ اول به نظر می‌رسد که این فرمولی برای تعریف نیرو به‌عنوان عامل ایجاد شتاب باشد، در حالی که اغلب فیزیکدانان آن را یک حقیقت تجربی می‌دانند. ارتباط بین نظریه‌های علمی که در حین پیشرفت علم به‌مرور کشف می‌شوند و به موضوعاتی به‌ظاهر مشابه می‌پردازند نیز از موارد مهم مورد توجه است. برای مثال، ارتباط بین مفهوم سرعت در مکانیک‌های نیوتنی و نسبیتی. برخی معتقدند که این دو هیچ پیوندی با یکدیگر ندارند. برخی هم می‌گویند که سرعت نیوتنی در فیزیک نسبیتی قابل تعریف است و لذا فیزیک نیوتنی به‌نوعی مشمول در فیزیک نسبیتی است [۱۹].

۳. ساختارگرایی در فلسفهٔ ریاضی

ساختارگرایی، فلسفه‌ای برای ریاضیات است که می‌کوشد به سؤال‌هایی از نوع آنچه بناسراف مطرح کرد، پاسخ دهد. ایدهٔ اصلی اهمیت ساختارها در ریاضیات، همواره طرفداران زیادی در میان ریاضیدانان داشته است. در بالا نظرات کورانت و رابینز را در این باره بیان کردیم. این نظرات ریشه در باورها و دیدگاه‌های آشکارِ ریاضیدانانی بزرگ از قبیل ددکیند، گاوس[2] و پوانکاره[3] دارد. برای مثال، پوانکاره می‌گوید:

[1] Gottlob Frege [2] Carl Friedrich Gauss [3] Henri Poincaré

> «ریاضیدانان نه اشیاء، بلکه روابط بین آنها را مطالعه می‌کنند. برای آنها اینکه آن اشیاء با چیزهای دیگر جایگزین شوند، تفاوتی ایجاد نمی‌کند مشروط بر اینکه آن رابطه‌ها تغییر نکنند.» [۱۷]

برای درک مفهوم ساختار، این سؤال را طرح می‌کنیم که ماهیت مهرهٔ فیل در بازی شطرنج چیست؟ آیا جز اینکه قوانین حاکم بر بازی هستند که نحوهٔ حرکت آن را تعیین می‌کنند، چیز بیشتری در پاسخ به این سؤال می‌توان گفت؟ یک فیل، چیزی جز یک جایگاه در ساختار بازی شطرنج نیست. شطرنج‌های مختلف فیزیکی، همگی دستگاه‌هایی هستند که به‌عنوان مثال‌هایی ملموس از ساختار بازی شطرنج عمل می‌کنند. به همین گونه، وقتی صحبت از ساختار ادارهٔ کشور می‌شود، ریاست جمهوری مکانی است در این ساختار با اختیارات، مسئولیت‌ها و وظایفی که به او واگذار شده است. هر رئیس جمهورِ منتخب، یک مورد ملموس از این جایگاه در دستگاه ادارهٔ کشور است. بنابراین درکی از مفهوم ساختار، مستقل از ریاضیات وجود دارد.

نخستین ساختارگرا در ریاضیات را می‌توان ددکیند دانست. او اعداد طبیعی را تنها جایگاه‌هایی در یک تصاعد حسابی نامتناهی می‌دانست. راسل در این مورد به او ایراد گرفت. از دیدگاه راسل، تعریف ددکیند اعداد طبیعی را مشخص نمی‌کرد. در قرن بیستم، رزنیک[۱] و شاپیرو[۲] دو تن از پیشگامان ساختارگرایی در فلسفهٔ ریاضی بودند. رزنیک در عباراتی فشرده، اساس این فلسفه را بیان کرده است:

> «موضوع اصلی در ریاضیات، اشیای ریاضی خاص نیستند، بلکه ساختارهایی هستند که آن اشیاء در آنها قرار گرفته‌اند. اشیای ریاضی، یعنی همان هستی‌مندهایی که ثابت‌های ریاضی و سورهای ما بر آنها دلالت می‌کنند، اتم هستند؛ نقاطی بی‌ساختار یا مکان‌هایی در ساختارها. به این ترتیب، هیچ هویت یا مشخصه‌ای خارج از یک ساختار ندارند.» [۱۸]

این ایدهٔ کلیِ ساختارگرایی است. البته به‌عنوان یک موضع فلسفی مشخص، بسیاری از جزئیات باید تحلیل شوند. برای مثال، خودِ مفهوم ساختار باید به‌روشنی تحلیل گردد. شاپیرو در کتاب خود به معرفی ساختارگرایی می‌پردازد [۲۰]. ساختارگراییِ مورد نظر او و رزنیک را می‌توان *ساختارگراییِ الگویی*[۳] نامید. یک ساختار عبارت از یک الگو[۴] که در دستگاه‌های مختلف می‌تواند تکرار شده باشد. توصیف او را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

۱. یک دستگاه عبارت است از تعدادی شئ و رابطه‌هایی بین آنها.
۲. ساختار، شکل مجرّد یا الگوی ساختمانی یک دستگاه است با تکیه بر پیوندها و صرف‌نظر کردن از همهٔ آن ویژگی‌هایی از اشیاء که به پیوند آنها با یکدیگر ارتباط ندارند.
۳. مفهوم ساختار یک مفهوم اولیه و ماقبل ریاضیاتی است.

---
[۱] Michael Resnik [۲] Stewart Shapiro [۳] pattern structuralism [۴] pattern

۴. ریاضیات دانش ساختارها است مستقل از اینکه نمونه‌هایی از آن ساختارها به‌شکل فیزیکی یا مجرّد موجود باشند یا نباشند. برای مثال، حساب به ساختار یکتا و مجرّد اعداد طبیعی می‌پردازد.
۵. راه‌های گوناگون تعریف اعداد، تنها نمونه‌هایی از ساختار اعداد هستند. اینها دستگاه‌هایی گوناگون برای اعداد طبیعی هستند. ساختار اعداد آن چیزی است که در بین همهٔ این دستگاه‌ها مشترک است.
۶. اینکه اعداد طبیعی واقعاً چه هستند، موضوع مورد بررسی در ریاضی نیست. ریاضیدانان تنها نحوهٔ ارتباط اعداد با یکدیگر را مطالعه می‌کنند؛ یعنی ویژگی‌های ساختاریِ اعداد.
۷. ساختارگرایی، مفهوم شئ در ریاضیات را متحوّل می‌کند. یک شئ، تنها جایگاهی در یک ساختار است.

از دیدگاه ناب فلسفی، می‌توان افلاطون‌گرایانه یا ارسطوگرایانه یا نام‌گرایانه دربارهٔ خودِ ساختارها اندیشید. به عبارت دیگر، وجودی غیرمادی و مجرّد برای آنها قائل شد یا آنها را کلیاتی دانست که وجود مستقل ندارند و حاصل انتزاع و تجرید از نمونه‌های جزئی هستند و یا آنها را با علائم نشان‌دهنده‌شان یکی گرفت [۱۶].

خود شاپیرو سه دیدگاه مختلف در مورد ماهیت ساختارهای ریاضی به‌شرح زیر ذکر می‌کند:

۱. ریاضیات به ساختارها می‌پردازد مستقل از اینکه دستگاه‌های مشخصی که ساختارها بر پایهٔ آنها ساخته شده‌اند، موجود باشند یا نه. اشیای ریاضی، مکان‌هایی در این ساختارها هستند. این دیدگاهی واقع‌گرایانه دربارهٔ وجود اشیای ریاضی و شرط صدق گزاره‌های ریاضی است. شاپیرو این دیدگاه را که خودش به آن اعتقاد دارد، ante rem یا *اصالت کلی* می‌نامد.
۲. گزاره‌های ریاضی دربارهٔ اشیای ریاضی خاص نیستند، بلکه گزاره‌هایی کلی دربارهٔ همهٔ دستگاه‌های ریاضی هستند که ساختار مورد نظر را دارند (دیدگاه حذفی). لازمهٔ این دیدگاه، فرض وجود دست‌کم یک دستگاه ریاضی با ساختار مورد نظر است. این دیدگاهی ضدواقع‌گرایانه نسبت به وجود ساختارهای ریاضی و واقع‌گرایانه نسبت به شرط صدق گزاره‌های ریاضی است.
۳. دیدگاهی مشابه با دیدگاه دوم با این تفاوت که دستگاه‌هایی که امکان وجود دارند ولی به‌طور بالفعل وجود ندارند نیز لحاظ می‌شوند.

ساختارگرایی سؤالی از نوع «عدد ۲ چیست؟» را به این شکل جواب می‌دهد که عدد ۲ تنها جایگاهی در ساختار اعداد طبیعی است که پس از جایگاه عدد ۱ قرار دارد. می‌توان گفت که ۲ نوعی *وجود نسبی* دارد. خارج از ساختار مربوطه هیچ هویتی ندارد. این دیدگاه، مشکلات فلسفی مربوط به وجود اشیای ریاضی را برطرف می‌کند. مهم‌تر اینکه با این تلقّیِ غالب ریاضیدانان همخوانی دارد که تعریف نظریه‌مجموعه‌ایِ اعداد با شهود ریاضی در تضاد است.

نحوهٔ دسترسی ما به حقایق ریاضی نیز پرسشی است که ساختارگرایی تلاش می‌کند پاسخی برای آن فراهم کند. چگونه به یک ساختار ریاضی پی می‌بریم؟ توضیح شاپیرو در این مورد آن است که این پرسش در واقع در حوزهٔ روانشناسی و علوم شناختی جای دارد. به اعتقاد او یک ساختار، یک طرح یا الگو است. انسان این توانایی را دارد که الگوی‌های مشترکی را که در دستگاه‌های گوناگون وجود دارند، تشخیص دهد. البته همان‌طور که خود شاپیرو متذکر می‌شود، این روش حداکثر می‌تواند توانایی انسان را در تشخیص الگوهای متناهی توجیه کند و در مورد ساختارهای نامتناهی، به‌ویژه ناشمارا، چندان قانع‌کننده نیست. حتی می‌توانیم طرحی کاملاً جدید خلق کنیم که هیچ نمونه‌ای از آن ندیده‌ایم. این یک توانایی انکارناپذیر است که ما انسان‌ها به درجات متفاوت داریم. افراد باهوش معمولاً با سرعت زیاد این شباهت‌ها و الگوها را تشخیص می‌دهند و نوابغ گاهی طرح‌هایی کاملاً بدیع را با چشم سر می‌بینند که نمونه‌ای از آنها قبلاً دیده نشده است. البته هنوز توضیحی قانع‌کننده و جامع دربارهٔ این توانایی‌ها داده نشده است. گودل[۱] در این باره به نوعی «شهود» اشاره می‌کند که ریاضیدانان را به حقایق ریاضیاتیِ فرامتناهی می‌رساند. او توضیح زیادی دربارهٔ ماهیت این شهود نمی‌دهد. البته این شهود از دید او خطاناپذیر نیست. به اعتقاد او پذیرش اصولی خاص در حوزهٔ مجموعه‌های نامتناهی، می‌تواند موقتی باشد و بر اساس نتایج منطقی ملموسِ آنها می‌توان در موردشان تجدید نظر کرد [۸].

در زمینهٔ کاربردپذیریِ ریاضیات، ساختارگرایی توضیح خوبی دارد. ریاضیات به این علت کاربرد دارد که شامل ساختارهایی مشابه با ساختارهای جهان فیزیکی است. ساختار اعداد طبیعی به همین علت در شمارش به‌کار می‌آید و ساختار هندسهٔ اقلیدسی به همین علت به درد توصیف جهان محسوس اطراف ما می‌خورد.

یک ساختار را چگونه می‌توانیم معرفی کنیم؟ یک روش، استفاده از تعریف ضمنی با ارائهٔ اصول است. ساختار اعداد طبیعی را می‌توان به‌کمک اصول موضوع پئانو ارائه کرد. یک گروه را می‌توان با ارائهٔ اصول موضوع تعریف کرد. هندسهٔ اقلیدسی نیز توسط چند اصل موضوع معرفی می‌شود. به‌طور کلی، در مورد خودِ مفهومِ ساختار نیز می‌توان از روش اصل‌موضوعی استفاده کرد. شاپیرو در کتابش، اصولی را برای ساختارها ذکر می‌کند که نظیر اصول ZF برای مجموعه‌ها هستند. او در بیان این اصول از برخی مفاهیم نظریه‌مجموعه‌ای همچون تعلق نیز استفاده می‌کند که باعث می‌شود اصول او چندان پذیرفتنی نباشند یا برتریِ قابل ملاحظه‌ای بر نظریهٔ مجموعه‌ها نداشته باشند. در نظریهٔ ساختارها، نظریهٔ مجموعه‌ها تنها بخشی از ریاضیات است. راه دیگر برای فراهم کردن توصیفی از ساختارها، استفاده از نظریهٔ رسته‌ها است. نظریهٔ رسته‌ها را می‌توان مستقل از نظریهٔ مجموعه‌ها ارائه کرد. توپوس نوعی خاص از رسته است که برخی ویژگی‌های مجموعه مانند وجود ضرب دکارتی و توان به آن اضافه شده است. بخشی بزرگ از ریاضیات را می‌توان در نظریهٔ توپوس بازسازی کرد. ایرادی که به این رویکرد گرفته شده این است که گرچه

[۱] Kurt Gödel

نظریهٔ توپوس مستقل از نظریهٔ مجموعه‌ها است، در اصول آن، ویژگی‌های مجموعه‌ها به‌طور ضمنی به‌کار رفته‌اند. پرداختن به نظریهٔ رسته و ساختارگرایی مبتنی بر آن، به مقاله‌ای مستقل نیاز دارد.

همان‌طور که گفته شد، ساختارگرایی انواعی دارد. در اینجا به‌طور مختصر به نظر ففرمن[۱] منطق‌دان و فیلسوف ریاضی شهیر امریکایی از دانشگاه استنفورد که اخیراً درگذشت، اشاره می‌کنیم [۱۱]. ففرمن دیدگاه خود را *ساختارگرایی مفهومی*[۲] می‌نامد. این دیدگاهی غیرواقع‌گرایانه نسبت به ساختارها است. از دید او ساختارها تنها مفاهیمی ذهنی هستند و ریشه در عملیات ذهنی شمارش[۳]، مرتب‌سازی[۴]، تطبیق[۵]، ترکیب[۶]، تجزیه[۷] و قرار دادن در زمان و مکان[۸] دارند. ریاضیات محض ریشه در این تشخیص آدمی دارد که این عمل‌ها مستقل از اشیایی هستند که بر آنها انجام می‌شوند و اینکه این عمل‌ها را می‌توان به‌طور بی‌پایان ادامه داد. ریاضیات محض مجموعه‌ای از تفکرات ژرف است که در اثر کاربرد متوالی و پالایش‌یافتهٔ این عمل‌ها به‌دست می‌آید. این عمل‌ها، مستقل از ریاضیات هستند و دسترسی ما به آنها پیش‌ریاضیاتی است.

۴. پرسش‌های پیشِ روی ساختارگرایی

از دیدگاه فلسفی، یکی از مهم‌ترین پرسش‌هایی که ساختارگرایی با آن مواجه است، توضیح چیستیِ ساختارها است. دیدیم که شاپیرو یک تلقّی افلاطون‌گرایانه از ساختارها دارد؛ دیدگاه اصالت کلی. در این صورت، همان سؤال بناسراف دربارهٔ چگونگیِ دسترسی انسان به آنها مطرح می‌شود. آیا توانایی درک ساختار اعداد طبیعی از قابلیت درک ماهیت خود این اعداد به‌عنوان موجوداتی افلاطونی، موجّه‌تر است؟ واقعیت این است که ساختارگرایی کلاً منکرِ وجود مستقل اشیای ریاضی از قبیل عدد است. بنابراین هر گونه سؤال وجودی دربارهٔ آنها را منتفی می‌داند. سؤالی از نوع اینکه «آیا عدد ۲ برابر با مجموعهٔ متشکل از تهی و مجموعهٔ شامل تهی است؟» از نظر شاپیرو بی‌معنی است، زیرا اعداد شئ به‌معنای متداول نیستند. این، تعریفِ متداولِ نظریه‌مجموعه‌ای برای عدد ۲ است.

در مورد چگونگیِ دسترسی ما به ساختارها نیز همان‌طور که گفته شد، شاپیرو این را سؤالی در حوزهٔ علوم شناختی می‌داند. چگونه یک انسان یا رایانه یا رُبات می‌تواند دست‌نوشته‌ای را تشخیص دهد در حالی که حروف این نوشته هر کدام به شیوه‌ای خاص نوشته شده‌اند که با طریقهٔ استاندارد نوشتن آنها، اگر چنین استانداردی موجود باشد، متفاوت هستند؟ چگونه با چند مثالِ عددی، می‌توان قاعده‌ای کلی را حدس زد؟ اینها موضوع‌هایی جالب در حوزهٔ الگوشناسی هستند.

براون در کتاب خود [۶] به این سؤالِ پیشِ رویِ ساختارگرایی پرداخته است. به اعتقاد او در مورد ساختارهای ساده و متناهی می‌توان پذیرفت که با الهام از جهان خارج می‌توانیم آنها را دریابیم اما در مورد

[۱] Solomon Feferman [۲] conceptual structuralism [۳] counting [۴] ordering [۵] matching [۶] combining [۷] separating [۸] locating in space and time

ساختارهای پیچیده و به‌ویژه ساختارهای نامتناهی چنین چیزی ممکن نیست. برای اینکه تشخیص دهیم پدیده‌ای طبیعی یک ساختار پیچیده مانند S دارد، باید از قبل ایده‌ای از S داشته باشیم. اما چگونه؟ از این نظر ساختارگرایی مزیتی بر افلاطون‌گرایی ندارد. در پاسخ به این ایراد، شاید بتوان به نظرات چامسکی[۱] دربارهٔ زبان متوسّل شد. حتی یک کودک قادر است بر اساس اطلاعاتی محدود از زبان مادری، تشخیص دهد که آیا جملهٔ جدیدی که با آن مواجه شده است، مطابق قواعد زبان مادری ساخته شده است یا نه. به عبارت دیگر، بر اساس شنیدن تعدادی محدود جمله، الگوی حاکم بر زبان را تشخیص می‌دهیم. به اعتقاد چامسکی، این توانایی ذاتی انسان و یکی از جنبه‌های متمایزکنندهٔ انسان از حیوان است. بنابراین پرسش، صرفاً دربارهٔ تواناییِ انسان در تشخیص ساختارها و الگوهای مختص حوزهٔ ریاضیات نیست.

از جنبهٔ ریاضیاتی، یک سؤال مهم دیگر در این زمینه این است که پیوند ساختارهای گوناگون با یکدیگر چگونه است؟ برای مثال، عدد ۵ جایگاهی در ساختار اعداد طبیعی و همچنین در ساختار اعداد حقیقی است. آیا این دو جایگاه یکی هستند؟ در ادامه به برخی پاسخ‌های داده‌شده به این پرسش می‌پردازیم.

تعبیر نظریه‌مجموعه‌ایِ مفهوم ساختار، همان مدل است که در نظریهٔ مدل‌ها[۲] به‌عنوان شاخه‌ای از منطق ریاضی مطالعه می‌شود [۱۰]. در نظریهٔ مدل‌ها یک ساختار، عبارت است از یک مجموعهٔ زمینه یا عالم سخن به‌همراه تعدادی رابطه و عمل روی آن، و تعدادی عضو از عالم سخن به‌عنوان عضوهای متمایز. برای مثال، ساختار اعداد طبیعی: $(\mathbb{N}, +, \times, ۰, ۱)$ و حلقهٔ اعداد صحیح: $(\mathbb{Z}, +, \times, ۰, ۱)$. مانند ساختارهای جبری، ساختارهای کلی نیز می‌توانند زیرساختار داشته باشند یا با هم یکریخت باشند. زمانی که جمله‌ای در یک ساختار راست باشد، می‌گوییم آن ساختار مدلی برای آن جمله است. دو ساختار ممکن است به‌ظاهر متفاوت باشند اما به‌نوعی بتوان یکی را در دیگری تعبیر کرد. برای مثال، ساختار $(\mathbb{N}, +, \times, ۰, ۱)$ در ساختار $(\mathbb{Z}, +, \times, ۰, ۱)$ تعبیرپذیر است. بنابر قضیهٔ چهار مربع لاگرانژ در نظریهٔ اعداد، یک عدد از حلقهٔ اعداد صحیح، مثبت یا صفر است دقیقاً وقتی بتوان آن را به‌صورت مجموع مربع‌های چهار عدد صحیح نوشت. پس می‌توان نسخه‌ای از ساختار اعداد طبیعی را در ساختار اعداد صحیح داشت. به‌علاوه بنابر قضیه‌ای از جولیا رابینسون[۳]، $\mathbb{Z}$ در ساختار $\mathbb{Q}$ تعریف‌پذیر است. اما از طرف دیگر، ساختار اعداد طبیعی $(\mathbb{N}, +, \times, ۰, ۱)$ در ساختار اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +, \times, ۰, ۱)$ تعبیرپذیر نیست. دلیلش این است که اولی بنابر قضیهٔ ناتمامیت گودل تصمیم‌ناپذیر است در حالی که دومی بنابر قضیه‌ای از تارسکی، تصمیم‌پذیر است. ساختار اعداد گویا را نمی‌توان در ساختار اعداد حقیقی بازیابی کرد [۱۴].

البته معمولاً ساختارهای مطرح در نظریهٔ مدل‌ها در چارچوب نظریهٔ مجموعه‌ها بررسی می‌شوند و از این‌رو با اصطلاحات شاپیرو، آنها دستگاه هستند و نه ساختار. در هر حال، هر کدام از این دستگاه‌ها

[۱] Noam Chomsky [۲] model theory [۳] Julia Robinson

ساختاری را مشخص می‌کنند: الگوی مشترک همهٔ ساختارهای یکریخت با ساختار مورد بحث. اگر بحث را به ساختارهایی از نوع ساختارهای مرتبهٔ اول فوق محدود کنیم، می‌توانیم دربارهٔ پیوند میان ساختارها سخن بگوییم. در این صورت طبیعی خواهد بود که بگوییم ۲ در ساختار اعداد طبیعی و اعداد صحیح یکی است. اما این را در مورد ۲ در ساختار اعداد طبیعی و ساختار اعداد حقیقی نمی‌توان گفت.

جالب است که حتی فرگه یک عدد طبیعی مانند ۲ را از همتای حقیقی‌اش متمایز می‌دانسته و به همین سبب، نمادهای متفاوتی برای آنها به‌کار برده است. از دیدگاه او، کارکرد اصلی و اولیهٔ اعداد طبیعی فراهم آوردن زمینهٔ پاسخ به سؤال‌هایی از قبیل *چندتا شیء ویژگی F دارند*، است ولی اعداد حقیقی اصالتاً به‌منظور اندازه‌گیری مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به اعتقاد رزنیک، ما نمی‌توانیم دربارهٔ یکی بودن یا نبودن اشیای نظیر در ساختارهای مشابه نظر دهیم، زیرا در ساختارگرایی هیچ شاهدی برای این تناظر وجود ندارد. در این مورد او به نوعی *نسبیت ارجاعی* قائل است. در مقابل، پارسونز[۱] معتقد است که چنین سؤالی علی‌الاصول بی‌معنا است، زیرا نمی‌توان اشیای ساختارهای گوناگون را با هم مقایسه کرد. نظر خودِ شاپیرو در این زمینه به‌مرور تغییر کرده است؛ از نامعلومی و عدم قطعیت در پاسخ به این سؤال تا اعتقاد به مجزا بودنِ اشیاء یا جایگاه‌ها در ساختارهای مختلف [۱۵].

نادلمن[۲] و زالتا[۳] با استفاده از *نظریهٔ اشیای مجرّد*[۴]، نوعی ساختارگرایی افلاطون‌گرایانه را پی‌ریزی کرده‌اند [۱۵]. این نظریه یک نظریهٔ اصل‌موضوعی برای اشیای مجرّد است و آنها آن را یک فرانظریه برای ریاضیات می‌دانند که مستقل از ریاضیات و به‌ویژه نظریهٔ مجموعه‌ها است. هدف آنها توسعهٔ ساختارگرایی در ریاضیات در *نظریهٔ شیء* است. در نظریهٔ شیء، یک شیء مجرّد مانند یک شیء ریاضی همچون مثلث در هندسهٔ اقلیدسی، ویژگی‌هایی را که اصول این هندسه برای آن لحاظ می‌کنند، اصطلاحاً *کدگذاری*[۵] می‌کند. از جملهٔ این ویژگی‌ها این است که مجموع زوایای درونی مثلث برابر با ۱۸۰درجه است. در مقابل، مثلث واقعی مانند وجه یک هرم فیزیکی، ویژگی‌هایی مانند ساخته‌شدن از یک مادهٔ خاص را اصطلاحاً *مُمَثَّل*[۶] می‌کند.

نظریهٔ شیء یک نظریهٔ منطقیِ بناشده در منطق وجهی محمولی مرتبهٔ دوم است. در این نظریه، اشیای معمولی یکی فرض می‌شوند هرگاه ویژگی‌هایی یکسان را ممثّل کنند و اشیای مجرّد یکی فرض می‌شوند هرگاه ویژگی‌هایی یکسان را کد کنند. در این روش، یک نظریهٔ ریاضی T مانند هندسهٔ اقلیدسی، با شیء مجرّدی که درستی‌های نظریهٔ T را کد می‌کند، یکی گرفته می‌شود. سرانجام، خودِ ساختار هندسهٔ اقلیدسی با این T یکی گرفته می‌شود. به‌علاوه اشیای ساختار T آنهایی هستند که درون T (به‌کمک یک ویژگی) متمایز می‌شوند:

$$x \text{ عضوی از } T \text{ است.} \iff T \models \forall y(y \neq x \to \exists F(Fx \,\&\, \neg Fy))$$

[۱] Parsons [۲] Uri Nodelman [۳] Edward N. Zalta [۴] theory of abstract objects [۵] encoding [۶] exemplify

شئ درون ساختار می‌تواند ناکامل باشد، یعنی یک ویژگی ساختاری موجود باشد که آن شئ نه آن ویژگی و نه نقیض آن را کد نکند. یکی از نتایجی که نادلمن و زالتا از تحلیل خود می‌گیرند این است که اشیای دو ساختار متفاوت نمی‌توانند یکی باشند [۱۵].

کارتر در [۹] به موضوع فعالیت ریاضی و ساختارگرایی می‌پردازد. از نظر او، هنگام بحث دربارهٔ ساختارها، باید دو وضعیت را از هم سوا کرد. گاهی به‌طور طبیعی با ساختارهای ریاضی مواجه هستیم و گاهی تنها مجموعه‌ای داریم و سپس به‌عنوان فعالیتی ریاضی، ساختار یا ساختارهایی روی آن می‌سازیم. برای مثال، در نظریهٔ گالوا روی مجموعهٔ ریشه‌های یک چندجمله‌ای، ساختار گروه تعریف می‌شود. این ایرادی است که می‌تواند وارد باشد اگر بخواهیم ریاضیات را صرفاً مطالعهٔ ساختارها بدانیم. ریاضیات جنبه‌های دیگری هم دارد. اما به هر حال یک ساختارگرای متعصّب در پاسخ به ایراد مطرح‌شده می‌تواند بگوید که روی هر مجموعه‌ای ساختارهای متعدد می‌توان بنا کرد مانند ساختارهای جبری یا ترتیبی. انتخاب ساختار ریاضی مناسب، یک فعالیت ریاضی اساسی است.

در ریاضیات جنبه‌های مهم دیگری هم وجود دارند که ساختارگرایی به آنها نمی‌پردازد؛ از موضوعات قدیمی مانند نقش نمادگذاری در ریاضیات گرفته تا مسائل جدیدتری همچون بررسی مشروعیت برهان‌های متکی بر رایانه. ساختارگرایی یک مکتب فلسفی واحد هم نیست. دیدیم که این فلسفه انواع و اقسامی دارد؛ مثلاً می‌توان ساختارگرای نام‌گرا یا افلاطون‌گرا بود. ساختارگرایی هرچند به همهٔ پرسش‌ها دربارهٔ ریاضیات پاسخ نمی‌دهد، یک رویکرد سودمند به ریاضیات بوده است که توانسته برای مهم‌ترینِ این پرسش‌ها جواب‌های نسبتاً قابل قبولی فراهم کند. ساختارگرایی یکی از مکتب‌های فکری بانفوذ در فلسفهٔ ریاضی معاصر است.

مراجع

[۱] دانتزیگ، ت.، عدد *زبان علم*، عباس گرمان، شرکت سهامی کتابهای جیبی، تهران، ۱۳۶۱.

[۲] دیویس، ف.، هرش، ر.، مارچیسوتو، ا.، ریاضیدان ایده‌آل (بخشی از کتاب تجربهٔ ریاضی)، ترجمهٔ کاوه لاجوردی، *نشر ریاضی*، سال ۱۹، شمارهٔ ۱و ۲ (۱۳۹۰)، ۱۵-۱۹.

[۳] کلاینر، ا.، ازگالوا تا اشتاینیتس: صد سال نظریهٔ میدان‌ها، ترجمهٔ علیرضا جمالی، *نشر ریاضی*، سال ۱۹، شمارهٔ ۱و ۲، ۴۹-۵۶.

[۴] کورانت، ر.، رابینز، ه.، *ریاضیات چیست؟* ویراست دوم، ترجمهٔ سیامک کاظمی، نشر نی، تهران، ۱۳۷۹.

[۵] منیری، م.، چرا فلسفه‌های سه‌گانهٔ مشهور ریاضی مهم هستند؟، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، سال ۳۷، شمارهٔ ۶۲ (بهار و تابستان ۱۳۹۷)، ۱-۱۳.

[6] Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, New York, 2008.

[7] Benacerraf, P., ‘What numbers could not be’, in: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Benacerraf, P., Putnam, H. (eds.), 272–294, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[8] Benacerraf, P., ‘Mathematical truth’, in: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Benacerraf, P., Putnam, H. (eds.), 403–420, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[9] Carter, J., Structuralism as a philosophy of mathematical practice, *Synthese*, **163** (2008), 119–131.

[10] Chang, C. C., Keisler, H. J., *Model Theory: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1990.

[11] Feferman, S., ‘Logic, mathematics, and conceptual structuralism’, in: *The Metaphysics of Logic*, Rush, P. (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[12] Flegg, G., *Numbers: Their History and Meaning*, Penguin Books, 1983.

[13] Kleiner, I., *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[14] Koenigsmann, J., Defining $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$, *Annals of Math.*, **183** (2016), 73–93.

[15] Nodelman, U., Zalta, E. N., Foundations for mathematical structuralism, *Mind*, **123/489** (2014), 39–78.

[16] Parsons, C., Structuralism and Nominalism, in: *Mathematical Thought and its Objects*, 40–79, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[17] Poincaré, H., *Science and Hypothesis*, Walter Scott Publishing Company, New York, 1905.

[18] Resnik, M., *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[19] Schmidt, Heinz-Juergen, ‘Structuralism in physics’, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2014 edn.), Zalta, Edward N. (ed.): https://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/physics-structuralism.

[20] Shapiro, S., *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی

تارنما: http://facultymembers.sbu.ac.ir/mortezamoniri/

رایانامه: m-moniri@sbu.ac.ir