فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۲ (بهار ۱۳۸۸) صص. ۳۹ تا ۵۲

بعضی نتایج جدید در نظریهٔ حلقه‌های تعویض ناپذیر

آگاتا اسموکتونویچ

مترجم: منصور معتمدی

ارائه شده توسط آگاتا اسموکتونویچ[1] در کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان ۲۰۰۶ اسپانیا

چکیده

در این مقاله چند نتیجه دربارهٔ ساختار حلقه‌های تعویض ناپذیر را مرور خواهیم کرد. به طور عمده بر حلقه‌های پوچ، حلقه‌هایی رادیکالِ جیکوبسن و حلقه‌های با بعد گلفاند[1] کیریلف[2] تأکید خواهیم کرد.

رده‌بندی موضوعی ریاضیات: (۲۰۰۰)، ۰۲–۱۶، ۰۶–۱۶، ۴۰–N،۱۶ ۲۰ N ۱۶، ۶۰ N ۱۶، ۶۰ D ۱۶، ۹۰ P ۱۶.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌های پوچ، رادیکال جیکوبسن، جبرهای جبری، جبرهای اول، رشد جبرها، بعد گلفاند ـ کیریلف.

۱. **مقدمه:** در این جا به توصیف مختصری از نتایج و مثال‌هایی که بیش‌تر به حلقه‌های تعویض ناپذیر پوچ ارتباط پیدا می‌کنند می‌پردازیم. در این توصیف حلقه‌ها تعویض‌ناپذیر و شرکت پذیرند. یک فضای برداری R یک جبر (با یک $K-$ جبر) است هرگاه R به یک عمل دوتاییِ

$$*: (R,R) \to R$$

که ضرب نامیده می‌شود مجهز باشد، به طوری که برای هر $a,b,c \in R$ و برای هر $\alpha \in K$ داشته باشیم:

1) Agata Smoktunowicz 2) Gelfand 3) Kirillov

$$(a+b)*c = a*c+b*c, \quad a*(b+c) = a*b+a*c$$
$$(a*b)*c = a*(b*c), \quad a*(b+c) = a*b+a*c$$

می‌دانیم که حلقه‌های نیم سادهٔ آرتینی، حلقه‌های ساده تعویض ناپذیر و حلقه‌های ساده نویتری راست با مشخصهٔ صفر عضو واحد دارند [35]. در این متن، حلقه‌ها معمولاً بدون ۱ هستند. در واقع حلقه‌های پوچ و حلقه‌های رادیکال جیکوبسن نمی‌توانند عضو واحد داشته باشند.

۲. حلقه‌های پوچ

مهم‌ترین مسأله در این عرصه حدسیهٔ کوته[1] است که نخستین بار در ۱۹۳۰، توسط کوته بیان شده است. کوته حدس زد که اگر حلقه R بدون ایدال ناصفر (دوطرفه) پوچ باشد، ایدال یک طرفه پوچ نیز نخواهد داشت، [24]، هم‌چنین [15] و [27] را ببینید. این حدسیه اگرچه توجه بسیاری از جبرپیشه‌ها را به خود جلب کرده، اما تاکنون مفتوح باقی مانده است. این حدسیه یکی از پرسش های اساسی راجع به ساختار حلقه‌هاست.

درستی این حدسیه برای رده‌های زیادی از حلقه‌ها به اثبات رسیده است: به طور مثال می‌توان نشان داد که برای یک رده داده شده حلقه‌ها مجموع تمام ایدال‌های پوچ یک طرفه، پوچ است. معروف‌ترین مثال چنین نتیجه‌ای اثبات حدسیه در حالت جبرها روی یک هیات ناشماراست که توسط آمیتسر[2] انجام شده است، دیگر این که لویتزکی[3] [27] نشان داده است که ایدال های پوچ در رده حلقه های نویتری، پوچ توان هستند، با این حال همان طور که اشاره شد حدسیه کوته، در حالت کلی هم چنان مفتوح است.

عضو r در حلقهٔ R را پوچ‌توان گویند، هرگاه برای nای، $r^n = 0$. حلقهٔ R را پوچ می‌نامیم هرگاه هر عضو آن پوچ‌توان باشد و حلقهٔ R را پوچ‌توان می‌نامیم، هرگاه به ازای nای $R^n = 0$، یک تعریف مناسب دیگر در حالت حلقه‌های نامتناهی ـ تولید شده چنین است: حلقهٔ R به طور موضعی پوچ است هرگاه هر زیر حلقهٔ متناهی ـ تولید شده R پوچ‌توان باشد. شناخت کامل حلقه‌های پوچ و پوچ‌توان برای کوششی در جهت شناخت حلقه‌ها در حالت کلی حائز اهمیت است.

علاوه بر آن حلقه‌های پوچ کاربردهایی در نظریهٔ گروها دارند. قضیه‌ای که بیان می‌شود ابتدا توسط گولد[3] و شفرویچ[4] اثبات شده است: برای هر هیأت F یک $F-$ جبر R متناهی ـ تولیدشده پوچ وجود دارد که پوچ‌توان نیست [20]. یادآوری می‌شود که گروه G را تابدار می‌نامند، هرگاه مرتبهٔ هر $g \in G$ متناهی باشد. گولد از گروه $R + 1$، در حالتی که مشخصهٔ F صفر است، استفاده کرده تا بتواند یک مثال نقیض برای مسألهٔ عمومی برنساید[5] بیابد: اگر G یک گروه متناهی تولید شدهٔ تابدار باشد آیا G لزوماً متناهی است؟

1) Köthe 2) Amitsur 3) Levitzki 3) Golod 4) Shafarevish 5) Burnside

پرسش‌های بدون پاسخ فراوانی دربارهٔ حلقه‌های پوچ وجود دارد. همان طور که پیش‌تر اشاره شد معروف‌ترین این پرسش‌ها اینک حدسیهٔ کوته است که در ۱۹۳۰ توسط کوته بیان شده است: اگر حلقهٔ R ایدال ناصفر پوچ‌توان نداشته باشد، ایدال ناصفر پوچ یک طرفه هم ندارد. کوته خود حدس زده است که پاسخ مثبت است ([24] ، [27] ، [37]). گزاره‌های بسیاری از جمله گزاره‌های زیر هم‌ارز حدسیه کوته هستند:

۱ — در هر حلقه، مجموع دو ایدال راست پوچ، پوچ است.

۲ — (کرمپا[۱] [26]) برای هر حلقهٔ پوچ R حلقهٔ ماتریس‌های ۲×۲ روی R پوچ‌توان است.

۳ — (فیشر[۲]، کرمپا [18]) برای هر حلقهٔ R، اگر R^G پوچ باشد، آن گاه R پوچ است (G گروه خودریختی‌های R، R^G مجموعه عناصر $G-$ ثابت R است.

۴ — (فِررو[۳]، پوزیلوسکی[۴] [17]) هر حلقه که مجموع یک حلقهٔ پوچ‌توان و یک حلقهٔ پوچ است باید پوچ باشد.

۵ — (کرمپا [26]) برای هر حلقهٔ R، حلقهٔ چندجمله‌ای $R[X]$ با یک متغیر یک رادیکال جیکوبسن است.

۶ — (اسموکتونویچ [44]) برای هر حلقهٔ پوچ R، حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $R[X]$ با یک متغیر، روی R اولیه چپ نیست.

۷ — (چو[۵] [49]) پوچسازهای چپ هر مجموعهٔ تک عضوی در هر متمم یک رادیکال در یک ایدال ماکسیمال چپ و پوچ در شرط زنجیری فزاینده صدق می‌کنند.

یادآوری می‌کنیم که حلقهٔ R رادیکال جیکوبسن است هرگاه برای هر $r \in R$ ، $r' \in R$ وجود داشته باشد که $r + r' + rr' = ۰$. هر حلقهٔ پوچ یک رادیکال جیکوبسن است. بزرگ‌ترین ایدال در حلقهٔ R را که رادیکال جیکوبسن باشد، رادیکال جیکوبسن R می‌نامند.

رادیکال جیکوبسن R برابر است با اشتراک تمام ایدال‌های اولیهٔ راست حلقهٔ R (ایدال J را اولیه می‌نامند، هرگاه R/J اولیه باشد). یادآوری می‌کنیم که حلقه R را اولیه (راست) می‌نامیم هرگاه ایدال ماکسیمال Q وجود داشته باشد به طوری که برای هر ایدال ناصفر I در R، که $Q + I = R$، $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $r \in R$ ، $br - r \in Q$. ([13])

گوییم حدسیهٔ کوته برای حلقهٔ R برقرار است، هرگاه ایدال تولید شده توسط ایدال‌های چپ پوچ، پوچ باشد. حدسیهٔ کوته برای ردهٔ حلقه‌های نویتری (لویتزکی [27] و [32]) حلقه‌های گلدی[۶] [32])، حلقه‌های با بعد کرول[۷] راست (لنگان[۸] [29] و [15])، جبرهای تک جمله‌ای (بیدار[۹]، فونگ[۱۰] [6]). حلقه‌های اتحاد چندجمله‌ای (رازمیسلف[۱۱] ،کِمِر[۱۲] ــ براون[۱۳] [14] ، [34] ، [22] ، [12])، جبرهای روی هیأت‌های نامتناهی (آمیتسر [27] و [36]) برقرار است.

---

1) Krempa 2) Fisher 3) Ferrero 4) Puczylowski 5) Xu 6) Goldie 7) Krull
8) Lenagan 9) Beidar 10) Fong 11) Razmyslov 12) Kemer 13) Braun

نتایج مرتبط دیگری وجود دارند که اینک به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود.

قضیهٔ ۲.۱ (لویتزکی، [32]) فرض کنیم R یک حلقهٔ نویتری راست است، در این صورت هر ایدال پوچ یک طرفه R، پوچ‌توان است. **قضیهٔ ۲.۲ (لنگان** [29]) اگر R بعد کرول راست داشته باشد، آن گاه زیرحلقه‌های پوچ R، پوچ‌توان هستند.

قضیهٔ ۳.۲ (گردن، لنگان و رابسون ،گردن و رابسون [15]). اگر R بعد کرول راست داشته باشد، آن گاه رادیکال اول R پوچ‌توان است.

رادیکال اول R یک ایدآل پوچ است و برابر است با اشتراک همهٔ ایدآل‌هال اول R.

قضیهٔ ۴.۲ (بیدار، فونگ [16]). فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی، $Z =< X >$ تکوارهٔ آزاد روی X، Y یک ایدآل تکوارهٔ Z و F یک هیأت باشد. در این صورت رادیکال جیکوبسن جبر تک‌جمله‌ای $F[Z/Y]$ به طور موضعی پوچ توان است.

نتیجهٔ فوق در حالتی که مشخصه برابر با صفر باشد به یاسپر[1] و پوزیلوسکی منسوب است. پیش‌تر، بلف[2] و گاتوا[3] ــ ایوانوا[4] [10] نشان داده‌اند که رادیکال جیکوبسن یک جبر متناهی ــ تولید شده تک‌جمله‌ای روی یک هیأت پوچ است، با این حال چنین نیست که رادیکال جیکوبسن یک جبر تک جمله‌ای متناهی ــ تولید شده، پوچ‌توان باشد، زیرا زلمانوف[5] [50] نشان داده است که یک جبر تک‌جمله‌ای متناهی تولید شده اول وجود دارد که دارای یک ایدآل ناصفر به طور موضعی پوچ‌توان است.

قضیهٔ ۵.۲ (رازمیسلف[6] ــ کمر ــ براون) [34] [22] [12] [14]) اگر R یک جبر اتحاد چند جمله‌ای متناهی ــ تولید شده روی هیأت F باشد، آن گاه رادیکال جیکوبسن R پوچ‌توان است.

رازمیسلف [34] نتیجهٔ فوق را برای حلقه‌هایی که در تمام اتحادهای چندجمله‌ای ماتریس‌ها صدق می کنند ثابت کرد. پس از آن کمر[32] این نتیجه را برای جبرهای روی هیأت‌های با مشخصهٔ صفر ثابت کرد. بعدها بروان، پوچ توانی رادیکال را در هر جبر اتحاد چند جمله‌ای متناهی ــ تولید شده، روی یک حلقهٔ تعویض پذیر نویتری ثابت کرد. آمیتسر پیش‌تر نشان داده است که رادیکال جیکوبسن یک جبر اتحاد چندجمله‌ای روی یک هیأت، پوچ است. قضیهٔ معروف دیگر قضیهٔ ناگاتا[7] ــ هیگمن[8] است.

قضیهٔ ٦.٢. (ناگاتا ــ هیگمن [19]) اگر A یک جبر شرکت‌پذیر با مشخصهٔ p باشد به طوری که برای هر $a \in A$، $a^n \in \circ$ و $p > n$ یا $p = \circ$، آن گاه A پوچ‌توان است.

برای آشنایی با نتایج مرتبط با قضیهٔ ناگاتا ــ هیگمن [19] را ببینید.

قضیه‌ای از کلاین[9] بیان می‌کند که اگر R یک حلقهٔ پوچ‌توان با شاخص متناهی باشد، آن‌گاه

---

1) Jaspers 2) Belov 3) Gateva 4) Ivanova 5) Zelmanov 6) Razmyslov 7) Nagata 8) Higman 9) Klein

$R[X]$ یک حلقهٔ پوچ با شاخص متناهی است.

در ۱۹۵۶ آمیتسر [27]، نشان داد که اگر R یک جبر پوچ روی هیات ناشمارای F باشد، آن گاه حلقهٔ چندجمله‌ای $R[x]$ با یک متغیر، روی R نیز پوچ است. اگر R شمارا باشد، همان طور که مؤلف در ۲۰۰۰ نشان داده است، وضعیت کاملاً به گونهٔ دیگری است.

قضیهٔ ۷.۲ (اسموکتونویچ) [43] برای هر هیأت شمارای K یک K جبر N وجود دارد به طوری که حلقهٔ چندجمله‌ای با یک متغیر روی N پوچ نیست. نتیجهٔ فوق به یک سؤال آمیتسر جواب می‌دهد. یک قضیهٔ مهم دیگر آمیتسر قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۸.۲ (آمیتسر [27]) فرض کنیم R یک حلقه است، در این صورت رادیکال جیکوبسن حلقهٔ چندجمله‌ای $R[x]$ برابر $N[x]$ است که N یک ایدال پوچ حلقهٔ R است.

در ۱۹۵۶، آمیتسر حدس زد که اگر R یک حلقه باشد و $R[x]$ ایدال پوچ نداشته باشد، آن‌گاه نیم اولیه است (یعنی رادیکال جیکوبسن $R[x]$ صفر است). این گزاره همان طور که در بالا به آن اشاره شد برای رده‌های مهمی از حلقه‌ها درست است. با این حال قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این حدسیه در حالت کلی برقرار نیست: حلقهٔ پوچ N وجود دارد که حلقهٔ چندجمله‌ای با یک متغیر روی N رادیکال جیکوبسن است، اما پوچ نیست [41]. تعمیم‌های این قضیه را در [45] ببینید. این قضیه در حالت‌های کلی‌تر درست است: برای هر عدد طبیعی n، حلقهٔ پوچ N وجود دارد به طوری که حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با n متغیر تعویض شونده روی N رادیکال جیکوبسن است، اما پوچ نیست. یادآوری می‌شود، همان‌طور که توسط کرمپا در [26] نشان داده شده است، حدسیهٔ کوته با این گزاره هم ارز است که حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌های پوچ، رادیکال جیکوبسن است. با این حال تصاویر هم‌ریخت حلقه‌های چندجمله‌ای روی حلقه‌های پوچ با هسته‌های ناصفر همان‌طور که در نتیجهٔ زیر آمده است، اغلب رادیکال جیکوبسن هستند.

قضیهٔ ۹.۲ (اسموکتونویچ [44]). فرض کنیم R یک حلقهٔ پوچ و $R[x]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با یک متغیر روی R باشد. فرض کنیم I یک ایده‌آل $R[x]$ و M ایدال R تولید شده با ضرایب چندجمله‌ای‌های متعلق به I باشد. در این صورت $R[x]/I$ رادیکال جیکوبسن است اگر و تنها اگر $R[x]/M[x]$ رادیکال جیکوبسن باشد.

پرسش‌های زیر مسائل جالبِ مفتوح دربارهٔ حلقه‌های پوچ‌اند:

پرسش ۱ (لاتیشف[1]، [16]،صص ۱۲). فرض کنیم R یک جبر شرکت‌پذیر با تعداد متناهی مولد و رابطه باشد. اگر A یک جبر پوچ باشد، آیا باید پوچ‌توان باشد؟

پرسش ۲ (آمیتسر، [33]). فرض کنیم A یک جبر شرکت‌پذیر با تعداد متناهی مولد و رابطه باشد، آیا رادیکال جیکوبسن A پوچ‌توان است؟

---

1) Latyshev

۳. جبرهای جبری

معروف‌ترین پرسش در این عرصه مسألهٔ کوروش[1] است ([15]، [16]). فرض کنید R یک جبر متناهی ـ تولید شده روی هیأت F و R روی F جبری باشد آیا R روی F با بعد متناهی است؟

پاسخ این مسأله در حالت کلی منفی است. ساختمان معروف گلود و شفرویچ در دهه ۱۹۹۰ یک جبرمتناهی ـ تولید شده پوچ که پوچ‌توان نیست به‌وجود می‌آورد. از این مسأله استفاده شد تا یک مثال نقیض برای بی‌تکلیف‌ترین مسألهٔ نظریهٔ گروه‌ها، در آن زمان، یعنی حدسیهٔ برنساید به وجود آورید. زلمانوف بعدها به خاطر حل مسألهٔ محدود برنساید جایزهٔ فیلدز را دریافت کرد [27]. با وجود این مسألهٔ کوروش هم چنان برای حالت خاص کلیدی حلقه‌های تقسیمی حل نشده است.

پرسش ۳: (مسألهٔ کوروش برای حلقه‌های تقسیمی [16]، [36]) فرض کنیم R یک جبر متناهی ـ تولید شده روی هیات F ، R روی F جبری و R یک حلقهٔ تقسیمی باشد. آیا R روی مرکز R یک فضای برداری متناهی ـ بعد است؟

باز هم مانند مسأله‌های حلقهٔ پوچ‌توان نتایج جزئی فراوانی وجود دارد. مسألهٔ کوروش برای حلقه‌های تقسیمی هم‌چنان مفتوح است، اما برای حالتی که F متناهی یا دارای تعداد متناهی توسیع هیأت‌هاست، به ویژه برای هیأت‌های به طور جبری بسته ([36]) پاسخ آن مثبت است. به موجب قضیهٔ لویتزکی و کاپلانسکی[2] حدسیهٔ کوروش در حالتی که برای درجهٔ عناصر R کرانی وجود داشته باشد درست است ([15]). معلوم نیست که مسألهٔ کوروش برای حلقه‌های تقسیمی در حالت جبری روی هیأت‌های ناشمارا پاسخ مثبت داشته باشد. هم‌چنین این سؤال هم‌چنان مفتوح است که آیا حدسیهٔ کوروش برای حلقه‌های تقسیمی با بعد گلفاند ـ کیریلف و به‌ویژه برای حلقه‌های تقسیمی با رشد درجه دوم درست است؟ این مسأله ارتباط‌های آشکاری با مسائل حلقه‌های پوچ مرتبط با یک جبر دارد. یک عضو پوچ به وضوح جبری است، در جهت عکس، می‌توان یک جبر شرکت‌پذیر مدرج مثبت جبری به قسمی ساخت که قسمت مثبت آن یعنی تمام عناصر همگن پوچ باشند. از طرف دیگر مسألهٔ کوروش برای حلقه‌های با بعد گلفاند ـ کیریلف متناهی دارای جواب منفی است [35]. برای حلقه‌های ساده [42]، برای حلقه‌های اولیه [2] و برای حلقه‌های متناهی تولید شدهٔ جبری اولیه [8] پاسخ منفی دارد، با وجود این پرسش طبیعی برخاسته از مسأله عمومی کوروش هم‌چنان حل نشده است:

پرسش ۴: (پرسش اسمال[3]) فرض کنیم R یک جبر متناهی ـ تولید شده با عضو واحد روی هیأت F و R روی F جبری باشد، آیا R یک فضای برداری متناهی ـ بعد روی مرکز آن است؟

پرسش دیگری که چند سال است مطرح شده پرسش زیر است:

پرسش ۵: فرض کنیم K یک هیأت و R یک جبرمتناهی ـ تولید شده و یک حلقهٔ تقسیمی باشد.

1) Kurosh 2) Kaplanski 3) Small

آیا R یک فضای برداری متناهی ــ تولیدشده روی K است؟

تا آن جا که من می‌دانم هنوز به این پرسش با شرایط مختلف، مثلاً در حالتی که بعد گلفاند ــ کیریلف برابر ۲ باشد پاسخ داده نشده است. اسمال ([38]) نشان داده است که هر حلقهٔ تقسیمی که تصویر هم‌ریخت یک جبر مدرج نویتری است (البته با یک ایدآل نامدرج) باید با بعد متناهی باشد مسألهٔ مفتوحِ مشابهی در مورد حلقه ها موجود است: **پرسش ٦:** ([16] ص ۲۰) آیا یک حلقهٔ تقسیمی شرکت‌پذیر نامتناهی که متناهی ــ تولید شده باشد وجود دارد؟

۴. جبرهای با بعد گلفاند ــ کیریلف متناهی

بعد گلفاند ــ کیریلف، میزانی را که یک جبر به وسیلهٔ یک مجموعه تولید می شود اندازه می‌گیرد. بعد GK برای جبرهای با بعد متناهی صفر است و یک استدلال شمارشی مقدماتی نشان می‌دهد که بعد ممکن بعدی یک است. با این حال بورهو[۱] و کرافت[۲] نشان دادند که هر عدد حقیقی بزرگ‌تر یا برابر ۲ می‌تواند بعد GK باشد([25]). قضیهٔ معروف شکاف برگمن[۳] نشان می‌دهد که جبری با بعد GK که اکیداً بین ۱ و ۲ باشد وجود ندارند ([11]، هم چنین [25] را ببینید) قضیه‌ای از اسمال و وارفیلد[۴] جبر اول آفین R روی هیأت F با بعد GK برابر ۱، یک مدول متناهی روی مرکز آن است و مرکز آن یک $F-$جبر متناهی تولید شده با بعد GK یک است ([40] و [25]). در حالت خاص که R یک دامنهٔ متناهی ــ تولید شده روی یک هیأت به طور جبر بسته و بعد گلفاند ــ کیریلف آن ۱ است، از قضیه اسمال ــ وارفیلد و از قضیهٔ تسن[۵] ([15] را بینید) نتیجه می‌شود که R در واقع تعویض‌پذیر است ([47]). قضیه‌ای از اسمال، استافورد[٦] و وارفیلد نشان می‌دهد که جبر متناهی ــ تولید شده که بعد گلفاند ــ کیریلف آن برابر ۱ باشد به تعویض‌پذیر بودن نزدیک است، به این معنی که در یک اتحاد چندجمله‌ای صدق می‌کند ([39] ، [25]).

با پیشرفت هندسه تعویض‌ناپذیر، حالت مدرج، توجه بسیاری را در دههٔ پیشین به خود جلب کرده است. در این جا پیشرفت با مطالعهٔ جبرهایی با شرایط محدود، شامل رشد جبرها صورت می‌گرفت. روشی است که مثال‌هایی با بعد گلفاند کیریلف متناهی مورد توجه بودند. از آن جا که این نظریه در قیاس با حالت پروژکتیو کلاسیک گسترش یافته است، محقق نوعاً با جبرهای مدرج سر و کار دارد. بنابراین در مقایسه با حالت نامدرج ابعاد باید یک واحد افزایش یابند. اولین حالت مطالعهٔ دامنه‌های مدرج با بعد گلفاند ــ کیریلف ۲ است؛ یعنی خم‌های تصویری تعویض ناپذیر. این حالت در حدود ده سال پیش در یک مقالهٔ معروف در *Inventiones Mathematicae* به وسیلهٔ آرتین[۷] استافورد انجام شد. در واقع آرتین و استافورد در [3] ساختمان دامنه‌های متناهی ــ مدرج را برحسب جبرهای مرتبط با خودریختی‌های خم‌های بیضوی توصیف کرده‌اند. آنان توانستند مشخص کنند که در چه حالت‌هایی این جبرها نویتری، اولیه، اتحاد چندجمله‌ای و غیره هستند.

---

1) Borho 2) Kraft 3) Bergman 4) Warfield 5) Tsen 6) Stafford 7) Artin

آنان در این مقاله قضیه‌ای مشابه قضیه شکاف برگمن را فرمول‌بندی کردند: هیچ دامنهٔ مدرج شده با اعداد طبیعی با بعد گلفاند ـ کیریلفی که اکیداً بین دو و سه باشد وجود ندارد. آنان هم‌چنین توانستند بازه (۲, ۱۱/۵) را مستثنی کنند. مؤلف توانسته است در ۴۶ درستی حدسیه را در حالت کلی اثبات کند. خطوط برجسته‌ای بین سه عرصه‌ای که به آن اشاره شد وجود دارد. همان طور که پیش‌تر بیان شد. عضوهای پوچ جبری هستند و جبرهای مدرج پوچ را می‌توان از جبرهای جبری به عنوان جبرهای مدرج ساخت. مثال گلود و شفرویچ یک جبر پوچ، اما نه پوچ‌توان را به دست می‌دهد که دارای رشد نمایی است و از این رو به طور قطع بعد گلفاند ـ کیریلف آن نامتناهی است.

مؤلف این متن در یک کار مشترک که اخیراً بالنگان انجام داده است مثالی از یک جبر پوچ متناهی ـ تولید شده اما نه پوچ توان ساخته است که دارای بعد گلفاند ـ کیریلف متناهی کوچک‌تر یا برابر ۲۰ است. شرط دقیق رشد که تقسیم‌بندی پوچ‌توان توان و پوچ اما نه پوچ‌توان را موجب می‌شود آزار دهنده است.

به سادگی دیده می‌شود جبرهای پوچ‌توان که بعد گلفاند ـ کیریلف آن‌ها برابر ۱ است پوچ‌توان نیستند. شاید خط تقسیم کننده مسأله، رشد درجه دوم باشد.

در این زمینه این پرسش مفتوح باقی می‌ماند که آیا یک جبر متناهی ـ تولید شده با رشد درجه دوم وجود دارد؟ و می‌تواند به عنوان پرسش آزمونی برای پرسش‌های جدید باشد. یک F−جبر دارای رشد درجه دوم است هرگاه یک ثابت c و یک زیرفضای مولد روی R وجود داشته باشد که برای هر $n > ۰$، $dim_F(V + V^۲ + \ldots + V^n) \le cn^۲$ به ویژه $GKdimR \le ۲$.

در این باره نتیجهٔ جدید بارتولدی[۱] شایسته یادآوری است. بارتولدی در ۲۰۰۴ قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیهٔ ۱.۴ (بارتولدی [4]) فرض کنیم K یک توسیع جبری هیأت $F_۲$ باشد. در این صورت یک K−جبر متناهی ـ مولد مدرج R وجود دارد به طوری که تمام عضوهای همگنِ R پوچ‌اند، اما این جبر یک عضو وارون‌پذیر متعالی دارد. به ویژه R پوچ مدرج است اما پوچ نیست. این جبر هم‌چنین یک زیرجبر یک ریخت با حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ روی R دارد.

با جزئیات بیش‌تر، بارتولدی نشان داد که یک جبر «بازگشتی متعدی» آفین (بدون واحد) که از گروه گریکورچوک[۲] رشدهای میانی ساخته می‌شود، رشد درجه دوم دارد. به علاوه با فرض این که هیأت پایه، بسط جبری $F_۲$ باشد، این جبر رادیکال جیکوبسن است، اما پوچ نیست. این جبر پیش‌تر توسط آنا کریستیناویرا[۳] [48] مطالعه شده بود. وی نشان داده است که R اول است و برای هر ایدآل ناصفر دوطرفه I در R، R/I با بعد متناهی است.

یک روش دیگر برای ساختن مثال‌هایی از جبرهای متناهی ـ مولد را مارکف[۴] معرفی کرده است که بعدها توسط بیدار ([15])، بل[۵] و اسمال ([7] ، [8] ، [32] ، [36]) بسط داده شده است.

1) Bartholdi 2) Grigorchuk 3) Christina Vieira 4) Markov 5) Bell

تأثیر نتیجهٔ مارکف این است که نخست امکان ساختن در جبرهای نامتناهی ـ مولد را فراهم می‌آورد، که بدین ترتیب مسأله ساده‌تر می‌شود. سپس با استفاده از روش مارکف، ساختار به یک جبر متناهی ـ مولد آورده می‌شود.

قضیهٔ ۲.۴ (مارکف [31]). فرض کنیم K یک هیأت و R یک $K-$ جبر اول شمارا ـ مولد باشد. در این صورت یک $k-$ جبر اول A با مولد x، y وجود دارد به طوری که R با یک اید آل راست xR از A یک‌ریخت است.

یادآوری می‌شود که $T \subseteq R$ گوشه یک جبر R است هرگاه T زیرجبر R باشد و $TRT \subseteq T$. قضیهٔ مارکف توسط اسمال بسط داده شد، وی نشان داد (حدود ۱۹۸۲، چاپ نشده) که اگر K یک هیأت و T یک، K-جبراول و شمارا تولید شده باشد، آن گاه یک جبر اول متناهی ـ تولید شده A وجود دارد به طوری که T گوشه آن است.

این نتیجه را می‌توان در حالت‌های مختلف به کار برد. به عنوان نمونه بل و اسمال در [8] این نتیجه را به کار برده و نشان داده‌اند که یک جبر اولیه متناهی ـ تولید شده وجود دارد که مرکز آن با بعد نامتناهی است. در ۲۰۰۳ بل، قضیهٔ اسمال را چنین تعمیم داد: فرض کنیم K یک هیأت و F یک K جبر اول شمارا تولید شده با بعد گلفاند ـ کیریلف $\alpha < \infty$ باشد، در این صورت یک جبرمتناهی ـ تولید شده مانند A با بعد گلفاند ـ کیریلف $\alpha + ۲$ وجود دارد به طوری که T گوشه A است.

قضیهٔ بل به یک مسأله دیگر اسمال ارتباط پیدا می‌کند: اگر R یک جبر نویتری آفین با رشد درجه دوم باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت که R اولیه یا اتحاد چندجمله‌ای است. در ۲۰۰۰ آرتین و استافورد نشان دادند که پاسخ این پرسش در حالت مدرج شده مثبت است. براساس پژوهش اسمال این نتیجه، هم چنین در حالتی که هر اید آل ناصفر اول ماکسیمال باشد درست است.

یک کاربرد این قضیه توسط بل این مثال است که یک مثال نقیض برای پرسش دیگر اسمال است: یک جبر اول آفین با بعد گلفاند ـ کیریلف ۲ وجود دارد که اتحاد چندجمله‌ای نیست، اولیه هم نیست. رادیکال جیکوبسن این جبر صفر است. نتیجهٔ زیر از لنسکی[۱]، رسکو[۲] و اسمال این اطمینان را می‌دهد که معمولاً مستوی‌سازی یک حلقه اول هم چنان اولیه است.

قضیهٔ ۳.۴ (اسمال، رسکو، لنسکی [28]) فرض کنیم R یک حلقهٔ اول است در این صورت موارد زیر برقرارند:

۱. فرض کنیم V یک اید آل راست R باشد، در این صورت یک حلقهٔ اولیه وجود دارد اگر و تنها اگر $V/V \cap l(V)$ اولیه باشد که

$$l(V) = \{r \in R = rV = ۰\}$$

1) Lanski 2) Resco

۲. اگر R شامل یک عضو خودتوان باشد، آن گاه R یک حلقهٔ اولیه است اگر و تنها اگر eRe یک حلقهٔ اولیه باشد.

۵. حلقه‌های ساده

حلقهٔ R (احتمالاً بدون واحد) ساده نامیده می‌شود اگر $R^۲ \neq ۰$ و R هیچ ایدال سره دوطرفه نداشته باشد. لویتزکی، جیکوبسن، کاپلانسکی، و دیگران پرسیده‌اند که آیا حلقهٔ سادهٔ پوچ وجود دارد؟ ساسیدا[1] در ۱۹۶۱ حلقهٔ ساده‌ای پیدا کرد که حلقهٔ رادیکال جیکوبسن است (یعنی $R = J(R)$ ، که $J(R)$ رادیکال جیکوبسن R است). در این مورد می‌توانید [15] را ببینید. با این حال این حلقهٔ پوچ نیست. توجه می‌کنیم که حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با یک متغیر روی حلقهٔ ساسیدا اولیه راست و اولیه چپ است [44]. به موجب لم ناکایاما[2] یک حلقهٔ ساده که رادیکال جیکوبسن باشد نمی‌تواند متناهی ـ مولد باشد. از آن جا که هر حلقهٔ پوچ، رادیکال جیکوبسن است، یک حلقهٔ ساده پوچ نمی‌تواند متناهی ـ مولد باشد. چند سال پیش مثال‌هایی از حلقه‌های ساده توسط مؤلف ساخته شده است ([15]).

قضیهٔ ۱.۵ (اسموکتونوویچ [42]): برای هر هیأت شمارای K یک جبر ساده پوچ روی K وجود دارد. توجه کنید که در آن مقاله تمام حلقه‌ها توسط اعداد صحیح مدرج شده بودند.

پرسش ۷. آیا یک جبر سادهٔ تعویض‌ناپذیر پوچ روی یک هیأت ناشمارا وجود دارد؟

تشکر و قدردانی. مؤلف از تام لنگان و لنس اسمال به خاطر پیشنهادهای مفید آنان سپاسگزاری می کند. از تام لنگان برای همکاری در نوشتن بخش ۴ متشکرم.

منابع

[1] Amitsur, S. A., A generalization of Hilbert's Nullstellensatz. *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 649-656.

[2] Amitsur, S. A., unpublished.

[3] Artin, M., Stafford, J. T., Noncommutative graded domains with quadratic growth. *Inventiones Math.* **122** (1995), 231-276.

[4] Bartholdi, L., Branch Rings, thinned rings, tree enveloping rings. *Israel J. Math.,* to appear.

[5] Beidar, K. I., Radicals of finitely generated algebras. *Uspiekhi mat. Nauk.* **222** (1981), 203-204.

1) Sasiada 2) Nakayama

[6] Beidar, K. I., Fong, Y., On radicals of monomial algebras. *Comm. Algebra* **26** (1998), 3913-3919.

[7] Bell, J., Examples in finite Gelfand-Kirillov dimension. *J. Algebra* **263** (2003), 159-175.

[8] Bell, J., Small, L. W., A question of Kapalansky. *J. Algebra* **258** (2002), 386-388.

[9] Bell, J., Lenagan, T., Small, L., Smoktunowicz, A., unpublished.

[10] Belov, A., Gateva- Ivanova, T., Radicals of monomial algebras. In *First International Tainan-Moscow Algebra Workshop* (Tainan 1994), De Gruyter, Berlin 1996, 159-169.

[11] Bergman, G. M., A *note of growth functions of algebras and semigroups.* Mimeographed notes, University of California, Berkeley 1978.

[12] Braun, A., The nilpotency of the radical in a finitely generated PI ring. *J. Algebra* **89** (1984), 375-396.

[13] Divinski, N. J., *Rings and radicals.* Mathematical expositions No. 14, University of Toronto Press, Toronto, Ont., 1965.

[14] Drenski, V., *Polynomial identity rings.* Advanced Courses in Mathematics, Barcelona. Birkhäuser, Basel 2004.

[15] Faith, C., *Rings and Things and a Fine Array of Twentieth Century Associative Algebra.* Math. Surveys Monogr. 65, amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999; 2nd ed., 2004.

[16] Filippov, V. T., Kharchenko, V.K., Shestakov, I., P. (eds.) *Dniester Notebook: Unsolved Problems in Theory of Rings and Modules.* Fourth edition, Mathematics Institute, Russian Academy of Science, Siberian Branch, Novosibirsk 1993.

[17] Ferrero, M., Puczylowski, E. R., On rings which are sums of two subrings. *Arch. Math. (Basel)* **53** (1989). 4-10.

[18] Fisher, J. W., Krempa, J., "R^G is nil implies R is nil" is equivalent to the "Koethe conjecture". *Houston J. Math.* **9** (1983), 177-180.

[19] Formanek, E., The Nagata-Higman Theorem. *Acta Appl. Math.* **21** (1990), 185-192.

[20] Golod, E. S., Shafarevich, I. R., On the class field tower. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Mat. Ser.* **28** (1964), 261-272.

[21] Jespers, E., Puczylowski, E. R., The Jacobson radical and Brown-McCoy radical of rings graded by free groups. *Comm. Algebra* **19** (1991), 551-558.

[22] Kemer, A. R., Capelli identities and nilpotency of the radical of finitely generated PI algebra. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **255** (1980), 739-797.

[23] Klein, A. A., Rings with bounded index of nilpotence. *Contemp. Math.* **13** (1982), 151-154.

[24] Köthe, G., Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständing reduzibel ist. *Math. Z.* **32** (1930), 161-186.

[25] Krause, G., Lenagan, T. H., *Growth of Algebras and Gelfand-kirillov Dimension.* Revised edition, Graduate Studies in Mathematics 22, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[26] Krempa, J., Logical connections between some open problems concerning nil rings. *Fund. Math.* **76** (1972), 121-130.

[27] Lam, T. Y., A *first course in noncommutative rings.* Second edition, Graduate Texts in Mathematics 131, Springer-Verlag, New York 2001.

[28] Lanski, C., resco, R., Small, L., On the primitivity of prime rings. *J. Algebra* **59** (1979), 395-398.

[29] Lenagan, T. H., The nil radical of a ring with Krull dimension. *Bull. London Math. Soc.* **5** (1973), 307-311.

[30] Lenagan, T. H., Smoktunowicz, A., An infinite dimensional affine nil algebra with finite Gelfand-Kirillov dimension. Submitted.

[31] Markov, V. T., Some examples of finitely generated algebras. *Uspekhi Mat. Nauk* **221** (1981), 185-186.

[32] McConnel, J. C., and Robson, J. C., *Noncommutative Noetherian Rings.* Wiley Interscience, Chichester 1987.

[33] Puczylowski, E. R. Some results and questions on nil rings. In *15th School of Algebra* (Portuguese) (Canela, 1998), *mat. Contemp* **16** (1999), 265-280.

[34] Razmyslov, Ju. P., The Jacobson radical in PI algebras. *Algebra i Logika* **13** (1974), 337-360.

[35] Robson, J. C., Do simple rings have unity elements? *Algebra* **7** (1967), 140-143.

[36] Rowen, L. H., *Ring Theory.* Vol. I, II, Pure and Applied Mathematics 127, 128, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[37] Rowen, L. H., Koethe's conjecture. In *Rings Theory* 1989 (Ramat Gan and jerusalem, 1988/1989), Israel Math. Conf. Proc. 1, Weizmann Science Press of Israel, Jersalem 1989, 193-202.

[38] Small, L. W., private communication.

[39] Small, L. W., Stafford, J. T., Warfield, R. B., Jr, Affine algebras of Gelfand-Kirillov dimension one are PI. *Math. Proc. Cambridge philos. Soc.* **97** (1984), 407-414.

[40] Small, L. W., Warfield, R. B., Jr, Prime affine algebras of Gelfand-Kirillov dimension one. *J. Algebra* **91** (1984) 384-389.

[41] Smoktunowicz, A., Puzylowski, E. R., A polynomial ring that is Jacobson radical but not nil. *Israel J. Math.* **124** (2001), 317-325.

[42] Smoktunowicz, A., A simple nil rings exits. *Comm. Algebra* **30** (2002), 27-59.

[43] Smoktunowicz, A., Polynomial rings over nil rings need not be nil. *J. Algebra* **233** (2000) 427-436.

[44] Smoktunowicz, A., On primitive ideals in polynomial rings over nil rings. *Algebra. Represent Theory* **8** (2005), 69-73.

[45] Smoktunowicz, A., Amitsur's conjecture on polynomial rings in n- commuting indeterminates. *math. Proc. Roy. Irish Acad.* **102** (2002), 205-213.

[46] Smoktunowicz, A., There are no graded domain with GK dimension strictly between 2 and 3. *Invent. Math,* to appear.

[47] Stafford, J., T., Van den Berg, M., Noncommutative curves and noncommutative surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (2001) 171-216.

[48] Vieira, A. C. Modular algebras of Burnside p-groups. In *16th School of Algebra, Part II* (Portuguese) (Brasilia, 2000), *Mat. Contemp.* **21** (2001), 287-304.

[49] Xu, Y. H., On the Koethe problem and the nilpotent problem. *Sci. Sinica Ser. A* **26** (1983), 901-908.

[50] Zelmanov, E. I., An example of a finitely generated prime ring. *Sibirsk. Mat. Zh.* **20** (1979), 303-304.

[51] Zelmanov, E. I., Solution of the restricted Burnside problem for 2-groups. *Mat. Sb.* **182** (1991), 568-592.

مترجم: منصور معتمدی
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی
man_ motamedi@hotmail.com