فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۳ (پاییز و زمستان ۱۳۹۷)، صص. ۵۱ تا ۹۱

پیدایش مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته و نقاط حدی در آنالیز ریاضی و توپولوژی*

جی. اچ. مور

مترجم: روح‌الله جهانی‌پور، رسول کاظمی و سعید مقصودی

چکیده

توپولوژی عمومی ریشه در آنالیز حقیقی و مختلط دارد، یعنی جایی که در آن از مفاهیم درهم‌تنیدهٔ مجموعهٔ باز، مجموعهٔ بسته و نقطهٔ حدی استفاده‌هایی مهم شده است. در این مقاله، به بررسی چگونگی پیدایش و تکامل این سه مفهوم در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم می‌پردازیم که به‌ویژه به یُمن پژوهش‌های وایرشتراس، کانتور و لبگ صورت گرفته است. به شکل‌های گوناگونِ قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس که در درس‌گفتارهای منتشرنشدهٔ وایرشتراس موجود است، توجهی ویژه خواهیم کرد. نخستین تلاش ناکامی را که در نوشته‌ای منتشرنشده از ددِکیند برای تعریف مجموعه‌های باز صورت گرفته است و همچنین نزدیک شدنِ پئانو و ژُردان را به تعریف این مجموعه‌ها مورد بحث قرار می‌دهیم. در عین حال، با بررسی تأثیر متقابل آن سه مفهوم (در کنار مفاهیم بستار و مجموعهٔ مشتق) می‌کوشیم تا شالوده‌های اصلی توپولوژی عمومی در نیمهٔ نخست قرن بیستم را آشکار سازیم.

عبارات و کلمات کلیدی. مجموعهٔ باز؛ مجموعهٔ بسته؛ نقطهٔ حدی مجموعه؛ فضای توپولوژیک؛ قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس؛ قضیهٔ هاینه–بُرل؛ توپولوژی عمومی.

نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:
Moore, Gregory H., The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology, *Historia Mathematica*, **35** (2008), 220–241.

۱. سرآغاز

در طول قرن بیستم، آنالیز حقیقی و آنالیز مختلط شدیداً به مفاهیم مجموعهٔ باز، مجموعهٔ بسته و نقطهٔ حدی متّکی بودند. در این مقاله، منشأ و سیر تکامل این مفاهیمِ به‌هم‌تنیده را در برهه‌ای مورد بررسی قرار می‌دهیم که در طول آن، تصوری از توپولوژی بر پایه این مفاهیم شکل گرفت.[۱] نخستین مفهوم، *نقطهٔ حدی* یک مجموعه بود که آن را وایرشتراس طرح کرد منتها توسط کانتور رواج یافت و کمی بعدتر، خودِ کانتور مفهوم مجموعهٔ *بسته* را هم معرفی نمود. مفهوم مجموعهٔ *باز* نیز (صرف‌نظر از نوشتهٔ مختصر و منتشرنشدهٔ ددِکیند دربارهٔ آن) بعد از همهٔ اینها تعریف شد. با توجه به اهمیت کنونیِ مجموعهٔ باز، جای تعجب است که این مفهوم چقدر کُند در ذهن‌ها جا باز کرده است.

پس از بحث دربارهٔ چگونگیِ پیدایش این مفاهیم در آنالیز ریاضی (یعنی جایی که در آن، این مفاهیم فقط ابزار محسوب می‌شدند نه بخشی از توپولوژی)، شکل‌گیریِ مفهوم فضای توپولوژیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. گرچه امروزه فضای توپولوژیک عموماً بر پایهٔ مفهوم مجموعهٔ باز تعریف می‌شود، دوره‌ای هم در فرآیند تکامل این مفهوم وجود داشته که معلوم نبوده است برای تعریفِ چنین فضایی، چه چیزی را باید مفهوم اولیه و چه چیزهایی را باید اصول موضوع قرار داد. این مرحله از فرآیند تکامل فضای توپولوژیک مجرّد، در سال ۱۹۰۴ و به‌واسطهٔ طرح L–فضاها به‌دست موریس فرِشه[۲]، آنالیزدان فرانسوی، آغاز شد [۳۲]. او حد دنبالهٔ نامتناهی را مفهوم اولیه در نظر گرفت و L–فضاها را به‌منزلهٔ چارچوبی مجرّد برای تعمیم قضیهٔ وایرشتراس به‌کار برد. بنابر این قضیه، هر تابع حقیقی پیوسته روی یک بازهٔ بسته، کوچکترین کران بالایی خود را روی آن بازه اختیار می‌کند.

فضای همسایگی که هاوسدُرف در [۳۷] تعریف کرد، در کنار زدنِ رقبایش، یعنی L–فضاهای فرِشه، فضاهای متریِ فرِشه و فضاهایی که فریدیِش ریس[۳] بر پایهٔ مفهوم نقطهٔ انباشتگی تعریف کرده بود، توفیق آنی به‌دست نیاورد. در واقع هاوسدُرف پژوهش‌هایی اساسی دربارهٔ فضاهای متری نیز انجام داد. سرانجام، تعریفی از فضاهای توپولوژیک پذیرفته شد که نسبت به تعریف هاوسدُرف، بسیار کلی‌تر و بر مفهوم مجموعهٔ *باز* استوار بود.

چندین دهه بین مفاهیمی حتی کلی‌تر از آن که سرانجام پیروز میدان شد و هم‌اینک با نام *فضای توپولوژیک* پابرجا است، کشمکش وجود داشت. در حوزهٔ آنالیز ریاضی، فضای متری تا چند دهه به‌ویژه در طول دههٔ ۱۹۲۰ در لوای فضاهای باناخ (فضای برداری نرمداری که نسبت به متر ناشی از نرم، کامل

[۱] واژهٔ ریاضی Topologie با کتاب یوهان لیستینگ با عنوان *مطالعات مقدماتی در توپولوژی* [۵۸] همگانی شد. لیستینگ که از شاگردان گاوس بود، پیش از آن در سال ۱۸۳۶ در نامه‌ای به یکی از دوستانش این واژهٔ غیر رایج را به‌کار برده بود؛ [۷۲، صص. ۴۱-۴۲] را ببینید. به نقلِ [۷۲]، واژهٔ Topologie پیش از سال ۱۹۲۰ به‌ندرت به‌کار رفته است، زیرا در آن دوره به‌جای این نام، «تحلیل مکان» را به‌کار می‌بردند. برای مطالعهٔ تاریخ عمومی توپولوژی به [۴، ۳۰، ۴۴] مراجعه کنید.

[۲] Maurice Fréchet [۳] Frigyes Riesz

است) مفهوم محوری بود تا اینکه بعداً مفهوم کلی‌ترِ فضای برداریِ توپولوژیک جای آن را گرفت؛ [۶۲، صص. ۲۷۵–۲۸۵] را ببینید.

۲. وایرشتراس، نقاط حدی و قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس

اگرچه مفهوم نقطهٔ حدیِ یک مجموعه را نخستین بار کانتور نامگذاری و منتشر کرد [۱۴، ص. ۹۷]، وایرشتراس آن را ابداع کرده بود. مفهوم نقطهٔ حدی بارها در درس‌گفتارهای منتشرنشده از وایرشتراس که در طول دو دهه ایراد کرد، در ضمنِ بیانِ قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس آمده است. بر این نکته نیز باید تأکید کرد که وایرشتراس این قضیه را جزئی از *توپولوژی* یا *تحلیل مکان*[۱] و یا هر بخش دیگری از هندسه نمی‌دانست، بلکه آن را قضیه‌ای از آنالیز کلاسیک می‌دانست. مدعای این قضیه این است که هر مجموعهٔ کراندار نامتناهی در فضای اقلیدسی nبُعدی، نقطهٔ حدی دارد. این قضیه را برخلاف نام سنتی آن، نمی‌توان در آثار بولتسانو یافت، زیرا در آثار او هیچ‌جا پیش نیامده بود که از مفهوم نقطهٔ حدی استفاده شود. چیزی که در [۷] می‌یابیم همان تقسیم پیاپی بازه‌ها است؛ شبیه روشی که وایرشتراس برای اثبات قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس به‌کار می‌برد. برای مطالعهٔ بحثی مشروح‌تر در این باره، [۶۳، صص. ۱۷۱–۱۷۹] را ببینید.

در طول دو دهه پژوهش‌های وایرشتراس، قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس صورت‌هایی گوناگون به خود گرفت و این امر روشن می‌کند که او چگونه نقاط حدی را به‌کار می‌برده است. هیچ‌یک از پژوهشگران تاریخ ریاضی نه اشاره‌ای به تفاوت بین این صورت‌های گوناگون کرده‌اند و نه آنها را مورد تحلیل قرار داده‌اند. ما در اینجا به این کار می‌پردازیم.

نخستین صورت شناخته‌شده از این قضیه در یک دورهٔ درسی به سال ۱۸۶۵ با نام *اصول نظریهٔ توابع تحلیلی*[۲] آمده است. یادداشت‌های منتشرنشده‌ای که موریتس پاش[۳] از این درس تهیه کرده، موجود است و در مجموعهٔ *میراث مکتوب*[۴] وی در گیسن[۵] نگهداری می‌شود.[۶] او در آنجا این قضیه را «لم»[۷] می‌نامد. قضیه برای فضاهای دو بُعدی بیان شده است و بیشتر صورتِ مفهومی دارد تا مصداقی؛ یعنی بیشتر به ویژگی‌های مورد بحث مربوط می‌شود تا به مجموعه‌ها. در آن قضیه، مفهوم همسایگی که بعدها در توپولوژی اهمیت یافت، به‌طرزی حیرت‌انگیز مورد استفاده قرار گرفته است:

[۶] نام این درس در فهرست درس‌های وایرشتراس مذکور در مجموعهٔ *آثار* وی با اندکی تفاوت به‌صورت

Theorie der Analytischen Functionen

آمده است.

[۱] Analysis Situs [۲] Prinzipien der Theorie der Analytischen Functionen [۳] Moritz Pasch [۴] Nachlass
[۵] Giessen [۷] Hülfssatz

> «اگر در قسمتی کراندار از صفحه، تعدادی نامتناهی نقطه با یک ویژگی مشخص وجود داشته باشد، آن‌گاه دست‌کم یک نقطه (داخل آن قسمت یا روی مرز آن) وجود دارد به‌طوری که در هر همسایگی آن نقطه تعدادی نامتناهی نقطه واجد آن ویژگی موجود است.» [۸۵، ص. ۱۷]

در شکل دیگری از این قضیهٔ وایرشتراس که به ما رسیده است، هم حکمی دربارهٔ تابع‌ها وجود دارد و هم ویژگی را بیان می‌کند. وایرشتراس در ترم تابستان سال ۱۸۶۸ درسی با عنوان *آشنایی با نظریهٔ توابع تحلیلی*[۱] ارائه کرد که مطالب بیان‌شده در این درس، از طریق یادداشت‌های درسیِ ویلهلم کیلینگ[۲] برجای مانده است. در آنجا می‌خوانیم: «اگر تابعی در یک دامنهٔ محدود ویژگی معینی را نامتناهی بار داشته باشد، آن‌گاه نقطه‌ای وجود دارد که در هر همسایگی آن، نامتناهی نقطه با آن ویژگی موجود است.» [۸۶، ص. ۷۷]

در سومین شکل این قضیه، نقش تابع‌ها پررنگ‌تر شده است. این قضیه مربوط به ترم تابستان سال ۱۸۷۴ است که در آن، وایرشتراس درسی با نام *مدخل نظریهٔ توابع تحلیلی*[۳] ارائه کرده بود. جزوهٔ گئورگ هِتنِر[۴] از این درس موجود است. در آنجا آمده است:

> «فرض کنیم در قلمرو کمیّت حقیقی x، کمیّت دیگری مانند x' تعریف شده باشد به‌گونه‌ای که بتواند نامتناهی مقدار بین دو کران معین را اختیار کند. در این صورت می‌توان ثابت کرد که در قلمرو x دست‌کم یک جا[۵] وجود دارد که در هر همسایگی آن، هر اندازه کوچک باشد، تعداد نامتناهی از مقدارهای x' موجود است.» [۸۷، ص. ۳۰۵]

سپس وایرشتراس این شکل از قضیه را برای فضای nبُعدی حقیقی و مختلط بیان و ثابت می‌کند که ظاهراً نخستین باری است که این کار را انجام داده است [۸۷، صص. ۳۱۳–۳۲۰]. با وجود این، برهانِ صورت اولیهٔ این قضیه را که به سال ۱۸۶۵ برای صفحه داده شده بود، می‌توان مستقیماً به بُعد n گسترش داد.

یکی از داوران مقاله از ما پرسیده بود که وایرشتراس چه استفاده‌ای از قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس کرده است. نمونهٔ سرراستی از این کاربردها به مسئلهٔ تکینی‌های توابع مختلط مربوط می‌شود که می‌توان آن را در مقالهٔ وایرشتراس به سال ۱۸۷۶ با نام *دربارهٔ نظریهٔ توابع تحلیلی تک‌مقداری* یافت. او در آنجا می‌نویسد:

> «اگر یک تابع تک‌مقداری در درون یک ناحیهٔ کراندار[۶] تعدادی نامتناهی نقطهٔ تکین غیر اساسی داشته باشد، آن‌گاه دست‌کم یک نقطه مانند p در درون یا روی مرز آن ناحیه موجود است با این ویژگی که در هر همسایگی آن، نقطهٔ تکینی غیر از p وجود دارد. بنابراین p لزوماً یک نقطهٔ تکین غیر اساسی برای تابع است.» [۸۸، ص. ۸۰]

---

[۱] Einführung in die Theorie der Analytischen Functionen [۲] Wilhelm Killing [۳] Einleitung in die Theorie der Analytischen Functionen [۴] Georg Hettner [۵] Stelle [۶] Bereich

وایرشتراس در درس‌های خود در سال ۱۸۷۸ شکلی از این قضیه را به‌دست می‌دهد که در بیان آن، از مجموعه‌ها بیشتر استفاده می‌شود تا تابع‌ها: «در هر دامنهٔ گسسته برای یک خمینه[۱] که شامل تعداد نامتناهی جا است، دست‌کم یک جا وجود دارد با این ویژگی که در هر همسایگی آن، هر اندازه کوچک باشد، تعداد نامتناهی جا از آن دامنه یافت می‌شود.» [۸۹، ص. ۸۶] این بار جزوهٔ باقی‌مانده از این درس متعلق به آدولف هورویتس[۲] است.

سرانجام، آخرین باری که وایرشتراس قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس را مطرح کرده است (و ما از آن اطلاع داریم)، طی درسی به تاریخ نهم ژوئن ۱۸۸۶ است. در آنجا بیان وایرشتراس از این قضیه یادآورِ حکمی است که در سال ۱۸۷۴ برحسب توابع بیان کرده بود (قسمت بالا را ببینید):

> «اگر x کمیّت متغیر بی‌کرانی باشد که به‌اصطلاح یک خمینهٔ ساده تشکیل می‌دهد و از لحاظ هندسی با یک خط مستقیم قابل نمایش است، و اگر در آن کمیّت متغیر دیگری مانند x' طوری تعریف شود که تعداد جاهای تعریف‌شده نامتناهی باشد، آن‌گاه در دامنهٔ x که x' در آن تعریف شده است، دست‌کم یک جا وجود دارد که در هر همسایگی آن جا، تعداد نامتناهی جای تعریف‌شده موجود است. چنین جایی ممکن است به جاهای تعریف‌شده تعلق داشته باشد یا نداشته باشد. در حالت اخیر آن را یک *جایِ حدی*[۳] می‌نامیم.» [۹۱، ص. ۶۰]

وایرشتراس هیچ‌گاه اصطلاح *نقطهٔ حدی*[۴] کانتور را به‌کار نبرد، ولی در آخرین کارهای پژوهشی‌اش به‌جای آن، اصطلاح «جایِ حدی» را که در نقل‌قول بالا دیده می‌شود و معنای دیگری دارد، معرفی کرد. دلیل این تفاوت این است که به‌تعبیر وایرشتراس، جایِ حدیِ یک مجموعه نمی‌تواند متعلق به آن مجموعه باشد در حالی که به‌تعبیر کانتور، *نقطهٔ حدیِ* یک مجموعه ممکن است عضو آن مجموعه باشد یا نباشد. باعث تعجب است که وایرشتراس مفهومی را که در طول بیست سال در قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس به‌کار می‌برده هرگز نامگذاری نکرده است. این مفهوم دقیقاً همان چیزی است که کانتور آن را *نقطهٔ حدی* نامید.

۳. کانتور، نقاط حدی و مجموعهٔ مشتق

در سال ۱۸۷۲ کانتور روی مفهوم نقطهٔ حدیِ یک مجموعه، نام Grenzpunkt را گذاشت. او این کار را حین پرداختن به مسأله‌ای در آنالیز ریاضی انجام داد. مسأله عبارت بود از گسترش قضیه‌ای دربارهٔ یکتاییِ نمایش تابع‌های حقیقی پیوسته برحسب سری‌های مثلثاتی، به توابعی که ناپیوستگی‌های پراکنده دارند.[۵] تعریف کانتور از نقطهٔ حدیِ یک مجموعه مانند P روی خط راست، مبتنی بر تعریفی از *همسایگی* است که خودِ این تعریف نیز استوار بر مفهوم *درون* یک بازه است:

[۵] بسیاری از نویسندگان، موضوع استفادهٔ کانتور از نقاط حدی و ابداع مجموعهٔ مشتق به‌منظور تعمیم قضیه‌اش دربارهٔ نمایش تابع حقیقی برحسب سری‌های مثلثاتی را به‌تفصیل بررسی کرده‌اند. برای نمونه، نگاه کنید به [۲۲، صص. ۷۸–۸۳] و [۲۳، صص. ۴۱–۴۶].

[۱] manifold [۲] Adolf Hurwitz [۳] Grenzstelle [۴] Grenzpunkt

«منظورم از *نقطهٔ حدیِ* مجموعهٔ P نقطه‌ای واقع بر خط راست است طوری که هر همسایگی آن، شامل تعدادی *نامتناهی* نقطه از P باشد. نقطهٔ حدی ممکن است خودش عضو P باشد. منظور از *همسایگی یک نقطه*، هر بازه‌ای است که آن نقطه را در *درون* خود داشته باشد. از اینجا به‌راحتی ثابت می‌شود که مجموعه‌ای متشکل از تعداد نامتناهی نقطه باید دست‌کم یک نقطهٔ حدی داشته باشد.» [۱۴، ص. ۹۸]

این قطعه، با تعریفِ نقطهٔ حدی آغاز می‌شود و با نخستین صورت مکتوبِ قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس به پایان می‌رسد. مایهٔ تعجب است که کانتور هیچ اشاره‌ای به منبع قضیه نمی‌کند و قضیه را نیز برای مجموعهٔ کراندار، علی‌رغم لزوم این شرط برای صدق آن، بیان نمی‌کند.[۱] احتمالاً هر دو مورد از سرِ اشتباه بوده است. اما در [۱۶، ص. ۱۴۹] نخستین «بیان، اثبات و کاربرد [آن قضیه] در نظریهٔ توابع» را در کلی‌ترین شکل، به وایرشتراس منسوب می‌کند.

کانتور در مقاله‌اش به سال ۱۸۷۲ دربارهٔ سری‌های مثلثاتی، اصطلاح جدید «نقطهٔ حدی» را برای تعریف مجموعهٔ مشتق، یعنی مجموعهٔ همهٔ نقاط حدی یک مجموعه مانند P به‌کار می‌برد. سپس عمل به‌دست آوردنِ مجموعهٔ مشتق را تکرار می‌کند و $P^{(n)}$ را کوتهنوشتی برای nاُمین مجموعهٔ مشتق P می‌گیرد. برای کانتور نیز همچون وایرشتراس، قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس جزء توپولوژی یا *تحلیل مکان* یا سایر بخش‌های هندسه نبود، بلکه قضیه‌ای در آنالیز کلاسیک بود. از دید کانتور، مفاهیم نقطهٔ حدی و مجموعهٔ مشتق نیز همین گونه بودند. کلاً کانتور خیلی به‌ندرت از توپولوژی یا *تحلیل مکان* اسم می‌بُرد.

چیزی نگذشت که مفهوم نقطهٔ حدی از طریق کتاب اولیسّه دینی[۲] [۲۸] دربارهٔ مبانی آنالیز حقیقی در ایتالیا رواج یافت. دینی در آن کتاب، قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس را شبیه به کانتور [۱۴] منتها دقیق‌تر بیان کرد: «مجموعهٔ نامتناهی G از نقاط واقع در بازهٔ (a,b) دارای یک نقطهٔ حدی است که امکان دارد متعلق به G باشد یا نباشد.» [۲۸، ص. ۱۶] مأخذ دومِ ریاضیدان ایتالیایی برای قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس، جزوهٔ درسی پینکِرله[۳] از درس‌های وایرشتراس به سال ۱۸۷۸ بود [۷۰، ص. ۲۳۷]. در آنجا قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس، هم برای خط حقیقی و هم برای فضای nبُعدی بیان و ثابت شده است.

در سال ۱۸۸۰ کانتور مجموعهٔ $P^{(\infty)}$ را اشتراک همهٔ $P^{(n)}$ها برای nهای متناهی تعریف کرد و با این کار، عمل به‌دست آوردنِ مجموعهٔ مشتق را تا اعداد ترامتناهی تکرار نمود. مجموعهٔ $P^{(\infty+1)}$ را مشتق مجموعهٔ $P^{(\infty)}$ تعریف کرد و با این کار توانست $P^{(\alpha)}$ را که در آن، α یک چندجمله‌ای برحسب ∞ یا نماهای آن است، تعریف کند. یوستا میتاگ–لِفلِر[۴] طی نامه‌ای منتشرنشده به تاریخ ۲۱ ژوئن ۱۸۸۲ از کانتور سؤال می‌کند که آیا می‌تواند ثابت کند برای مجموعهٔ هیچ‌جا چگال P از اعداد حقیقی، αیی وجود

---

[۱] تسرملو در ویرایش مجموعهٔ آثار کانتور، کلمهٔ beschränkte به‌معنای *کراندار* را برای مجموعهٔ P وارد کرده است.

[۲] Ulisse Dini [۳] Pincherle [۴] Gösta Mittag-Leffler

دارد که مجموعهٔ مشتق $P^{(\alpha)}$ تهی است. این موضوع برای میتاگ–لِفلِر اهمیت داشت، زیرا همان طور که خودش می‌نویسد: «در حال حاضر می‌توانم برای آن دسته از تابع‌های [مختلط] تک‌مقداری که مجموعهٔ تکینی‌های آنها از این نوع باشند، نمایش تحلیلی بنویسم»؛ یعنی مجموعه‌هایی که به‌ازای αیی از نوع گفته‌شده در بالا، $P^{(\alpha)}$ تهی است.[1] چنانچه پاسخ کانتور مثبت می‌بود، آن‌وقت میتاگ–لِفلِر می‌توانست هر تابع مختلط با مجموعهٔ نقاط تکینی هیچ‌جا چگال را به‌صورت تحلیلی نمایش دهد.

از بداقبالیِ میتاگ–لِفلِر، کانتور طی نامه‌ای به تاریخ ۲۵ ژوئن به پرسش او پاسخ منفی داد. در این نامه، کانتور مثالی را می‌آورد که به *مجموعهٔ کانتور* مشهور شد. این مجموعه همان مجموعهٔ عددهای حقیقی در بازهٔ [۰,۱] است که می‌توان آنها را در نمایش سه‌سه‌یی بدون ظاهر شدن رقم ۱ نوشت. این مجموعه هیچ‌جا چگال است ولی با مجموعهٔ مشتقِ خودش برابر است. کانتور در مقالهٔ [۱۸] که تاریخ انتشار آن را اکتبر ۱۸۸۲ زده است، اصطلاح *مجموعهٔ تام* را برای نامیدنِ مجموعه‌ای که با مجموعهٔ مشتقِ خودش برابر است، به‌کار می‌بَرَد. در آن مقاله، نخستین شکل قضیهٔ کانتور–بندیکسون[2] را می‌آورد: «$P^{(1)}$ برابر با اجتماع یک مجموعهٔ تام و یک مجموعهٔ شمارا است.» [۱۸، ص. ۱۹۳] پس از آن، *پیوستار*[3] را مجموعهٔ تامِ همبند تعریف می‌کند [۱۸، ص. ۱۹۴] (این تعریف که اساساً تعریفی با ماهیت توپولوژیک است، در حدود سال ۱۹۳۰ به *مجموعهٔ فشردهٔ همبند* تغییر یافت و نظریه‌ای بسیار زیبا و ژرف دربارهٔ آن به‌وجود آمد).

در سال ۱۸۸۴ کانتور نخست مفهوم مجموعهٔ بسته (مجموعه‌ای که شامل همهٔ نقاط حدی خود است) را تعریف کرد و نشان داد که هر مجموعهٔ بسته، مجموعهٔ مشتق مجموعهٔ دیگری است و همچنین مجموعهٔ مشتق $A \cup B$ برابر با اجتماع مجموعهٔ مشتق A و مجموعهٔ مشتق B است [۱۹، ص. ۲۲۶].[4] ویژگی دوم بعداً به فضاهای توپولوژیک نیز تسرّی پیدا کرد.

یک نمونهٔ خوب از مواردی که کانتور از مفهوم مجموعهٔ باز استفاده می‌کند، جایی است که توپولوژی‌دانان آن را *شرط زنجیرهٔ شمارا* می‌نامند. یک فضای توپولوژیک در این شرط صدق می‌کند اگر هر گردایه از زیرمجموعه‌های باز جدا از هم در آن فضا، شمارا باشد. کانتور عملاً نخستین صورت این قضیه را برای خط حقیقی در قالب یک لم بیان و ثابت کرد: «اگر روی یک خط مستقیم نامتناهی، گردایه‌ای نامتناهی از بازه‌هایی موجود باشد که تنها در نقاط انتهایی‌شان همپوشانی داشته باشند، آن‌گاه این گردایه شمارا است.» [۱۷، ص. ۱۶۱] البته یک سال پیش از آن، قضیه‌ای مشابه برای فضای nبُعدی همراه با اندکی بی‌دقتی، بیان کرده بود: «در فضای پیوستهٔ nبُعدی A فرض کنید (a) مرکب از تعدادی نامتناهی زیردامنهٔ

[1] این نامه هم مثل همهٔ نامه‌های رد و بدل شده بین کانتور و میتاگ–لِفلِر، در حال حاضر در مؤسسهٔ میتاگ–لِفلِر در استکهلم نگهداری می‌شود.

[4] هاوکینز [۳۹، ص. ۷۲] بر اهمیت مفهوم مجموعه‌های بستهٔ کانتور در نظریهٔ اندازهٔ بُرل تأکید کرده است.

[2] Cantor-Bendixon [3] continuum

تفکیک‌شده باشد که تنها روی مرزشان همپوشانی دارند. آن‌گاه مجموعهٔ (a) مرکب از این زیردامنه‌ها همیشه شمارا است.» [۱۶، ص. ۱۵۳] بعداً این قضیه به این صورت درآمد که در فضای nبُعدی تعداد مجموعه‌های بازِ جدا از هم، شماراست.

۴. رویکردی ناکام به مجموعه‌های باز

کانتور هیچ‌گاه مفهوم کلی مجموعهٔ باز را حتی روی خط راست به‌کار نبُرد، بلکه فقط از *نقطهٔ درونی* یک بازه [۱۴، ص. ۹۸] یا، چند سال بعد از آن، از *نقاط درونی* یک مجموعهٔ پیوسته از نقاط [۱۵، ص. ۱۳۵] صحبت می‌کرد. با وجود این، تعریفی که کانتور در سال ۱۸۷۹ از نقطهٔ درونی ارائه کرد، به آنچه جوزپه پئانو[۱] در کتابش با عنوان *کاربردهای هندسی حساب بی‌نهایت کوچک‌ها* [۶۹] گفته، نزدیک است.[۲] پئانو یک مجموعه از نقاط مانند A (در فضای یک، دو یا سه‌بُعدی) را در نظر می‌گیرد و نقطهٔ p را در *درون* A تعریف می‌کند هرگاه عددی مثبت مانند r موجود باشد به‌طوری که همهٔ نقاطی که فاصلهٔ آنها تا p کمتر از r است، متعلق به A باشند. پئانو در دو تعریف دیگر، پا را فراتر از کانتور می‌گذارد و p را در *بیرون* A می‌خواند اگر p در درونِ متمم A باشد. سرانجام، p یک *نقطهٔ مرزی* A نامیده می‌شود در صورتی که p نه در درون و نه در بیرون A باشد. پئانو دریافت که اگر A ناتهی باشد اما شامل همهٔ نقاط فضا نباشد، آن‌گاه A حتماً دارای نقطه‌ای مرزی است که ممکن است به A متعلق باشد یا نباشد [۶۹، صص. ۱۵۲–۱۶۰].

با این تعریف‌ها، پئانو همان موقع می‌توانست به مفهوم مجموعهٔ باز برسد اما چنین نشد. پئانو مرز یک مجموعه را گردایهٔ همهٔ نقاط مرزی آن مجموعه تعریف کرد. پس اگر می‌خواست، می‌توانست یک مجموعه را باز بنامد هرگاه آن مجموعه با مجموعهٔ همهٔ نقاط درونی‌اش برابر باشد. اما چنین چیزی نه به ذهن پئانو [۶۹] که حتی به ذهن کامیّ ژُردان[۳] [۴۵] هم، چنان‌که در بخش بعد خواهیم دید، خطور نکرد.

جالب اینجاست که مفاهیمی کاملاً شبیه به تعریف‌های پئانو و ژُردان سال‌ها پیشتر در دست‌نوشته‌ای منتشرنشده از ددِکیند مطرح شده بود. این دست‌نوشته، به همت اِمی نوتر[۴]، نخستین بار در مجموعهٔ آثار ددِکیند در سال ۱۹۳۱ منتشر شد. این دست‌نوشتهٔ کوتاه، با عنوان *قضیه‌های کلی دربارهٔ فضاها* با تعریفِ مفهومی شروع می‌شود که آن را Körper می‌نامد (این مفهوم با آنچه ددِکیند در پژوهش‌هایش در زمینهٔ جبر، Körper یا *میدان اعداد جبری* نامید، تفاوت دارد): «یک دستگاه [مجموعه] مانند P از نقاط p، p'، ... یک Körper تشکیل می‌دهد اگر به‌ازای هر نقطه از آن مانند p، عدد d یافت شود به‌طوری که همهٔ نقاطی که فاصله‌شان تا p کمتر از d است، متعلق به P باشند. در این حالت [گوییم] نقاط p، p'،

[۲] هاوکینز [۳۹، ص. ۸۷] اشاره می‌کند که پئانو در آن زمان با مفهوم مجموعهٔ بستهٔ کانتور آشنا بوده است.

[۱] Giuseppe Peano [۳] Camille Jordan [۴] Emmy Noether

. . . درون P جای دارند.» [۲۶، ص. ۳۵۳] مفهوم Körper که ددِکیند تعریف کرد، دقیقاً همان مجموعهٔ *باز* در فضای (فرضاً nبُعدی) اقلیدسی است. ددِکیند از مجموعهٔ باز یا Körper چه استفاده‌ای می‌کند؟ آن را برای تعریفِ وقوع یک نقطه در *بیرون* Körperی مانند P به‌کار می‌گیرد. سپس با این دو تعریف، *نقطهٔ مرزی*[۱] مجموعهٔ P را نقطه‌ای تعریف می‌کند که نه در درون P است و نه در بیرون آن. مرز[۲] مجموعهٔ P نیز مجموعهٔ همهٔ نقاط مرزی P تعریف می‌شود. نتیجهٔ آخر هم این است که مرز یک Körper نمی‌تواند Körper باشد [۲۶، ص. ۳۵۴].

دست‌نوشتهٔ کوتاه ددِکیند با آن نتیجه به پایان می‌رسد. بنابر قول نوتر، ددِکیند در نامه‌ای که در تاریخ ۱۹ ژانویهٔ ۱۸۷۹ به کانتور نوشته، اشاره کرده است که آن دست‌نوشته را چند سال پیش، در آن اوقاتی که در اندیشهٔ چاپ درس‌های دیریکله دربارهٔ نظریهٔ پتانسیل و ارائهٔ بررسی دقیقِ اصل دیریکله بوده، نوشته است. ددِکیند در ادامه می‌نویسد: «چندتایی تعریف از این دست داشتم که به نظرم مبنایی مناسب برای کار می‌آمد. اما بعداً همه را کنار گذاشتم و در آن زمان، تنها فرصت یک بررسی ناتمام را یافتم، چراکه سخت مشغول تصحیح [درس‌های] نظریهٔ اعداد دیریکله بودم.»[۳] چون آن دست‌نوشته صرفاً آغاز کار بود، تعجبی ندارد که ددِکیند قصد انتشار آن را نداشته باشد. با این همه، عجیب است که می‌بینیم ددِکیند مفهوم مجموعهٔ *باز* را در روزگاری تعریف کرده است که کسی حتی فکر آن را در سر نداشت.

نویسندگانِ [۲۹، ص. ۱۰۸] و [۳۱، ص. ۱۳۹] تصور کرده‌اند که بحث‌های ددِکیند در چارچوب فضاهای متری بوده است. چنین ادعایی به‌کلی نابجا است. مفهوم فضای متری پیش از فرشه که آن را در [۳۵] تعریف کرد، مطرح نشده بود. حقیقت چیز دیگری است؛ اینکه اگر تعریف‌ها و اثبات‌های ددِکیند را برحسب مفهوم فاصله بیان کنیم، آن‌وقت می‌توانیم آنها را به هر فضای متری دلخواه گسترش دهیم.

۵. نقاط حدی و فرانسویان

مفهوم نقطهٔ حدی از دو راه وارد کشور فرانسه شد. یکی از این راه‌ها را آنری پوانکاره[۴] گشود. او در مقاله‌ای به سال ۱۸۸۳ دربارهٔ گروه‌های کلاینی، چندین مفهوم از مفاهیم کانتور همچون مجموعهٔ مشتقِ مجموعهٔ P را ذکر کرد و به‌کار گرفت [۷۱، ص. ۷۸]. لیکن همهٔ اصطلاحات کانتور را به همان زبان آلمانی به‌کار برد و هیچ توضیحی دربارهٔ معنای آنها نداد. طبیعی است که از این راه، ریاضیدانان فرانسوی چیزی از ایده‌های کانتور درنیافتند.

[۳] رجوع کنید به [۲۶، ص. ۳۵۵]. در [۲۹، ص. ۱۰۷] تاریخ دست‌نوشتهٔ ددِکیند حوالی سال ۱۸۷۱ ذکر شده است در حالی که [۳۱، ص. ۱۳۸] تاریخ نگارش آن را بین سال‌های ۱۸۶۳ تا ۱۸۶۹ می‌داند.

[۱] Grenzpunkt [۲] Begrenzung [۴] Henri Poincaré

راه دوم را که بسیار هموارتر بود، ژول تانِری[۱] با بحث مروریِ دلپذیری از ترجمهٔ فرانسویِ مقاله‌های کانتور، گشود [۸۰]. تانِری در کتابی که به سال ۱۸۸۶ دربارهٔ تابع‌های حقیقی نگاشت، پس از مبحث حد دنباله، مفهوم *نقطهٔ حدی* را آورد و همانجا قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس را مطرح و به‌درستی آن را منحصراً به وایرشتراس منسوب کرد [۸۱، ص. ۴۲]. تانِری بر کتاب پئانو با عنوان *کاربردهای هندسیِ حسابانِ بی‌نهایت‌کوچک‌ها* (بخش ۴ را نگاه کنید) هم که در آن، مفاهیم نقطهٔ درونی، نقطهٔ بیرونی و نقطهٔ مرزی مجموعه تعریف شده است، نقدی نوشت [۸۲]. ژُردان احتمالاً از طریق نقد تانِری، با این مفهوم‌ها آشنا شده است.

ژُردان در مقاله‌ای راجع به انتگرال‌های معین به سال ۱۸۹۲، ایده‌های کانتور را به شیوه‌ای نو و مؤثر به‌کار گرفت. ژُردان در فضای nبُعدی، متری[۲] را معرفی کرد که با تابع فاصلهٔ متداول که مبتنی بر قضیهٔ فیثاغورس است، تفاوت دارد (تا سال ۱۸۹۲ بجز متر ناشی از قضیهٔ فیثاغورس، تنها متر دیگری که استفاده می‌شد، متر لگاریتمیِ کیلی[۳] در هندسهٔ نااقلیدسی بود). متری که ژُردان تعریف کرد، به دو نقطهٔ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ فاصلهٔ $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$ را نسبت می‌دهد. ژُردان بعد از این تعریف، تعریفی متفاوت با تعریفِ کانتور برای نقطهٔ حدی به‌دست داد. دو دهه بعد، این تعریف به‌صورت تعریف متداول درآمد: «p را *نقطهٔ حدی* مجموعهٔ E گوییم اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ نقطه‌ای مانند q غیر از p موجود باشد به‌طوری که فاصلهٔ p و q کمتر از ε باشد.» ژُردان به پیروی از کانتور، *مجموعهٔ مشتق* E را مجموعهٔ همهٔ نقاط حدی E تعریف کرد. بنابراین با اصطلاحات کانتور، مجموعهٔ E بسته است اگر مجموعهٔ مشتق E زیرمجموعه‌ای از E باشد. اما ژُردان کمی کج‌سلیقگی کرد و به‌جای اینکه این گونه مجموعه‌ها را بسته بنامد، آنها را *تام* نامگذاری کرد (و بنابراین اصطلاحی از آنِ کانتور را با معنایی ناسازگار با آن به‌کار برد). ژُردان *نقاط درونی* E را نقطه‌هایی در E تعریف کرد که به مجموعهٔ مشتق متمم E تعلق ندارند [۴۵، ص. ۷۲].

ژُردان با در دست داشتنِ این تعریف‌ها می‌توانست به شیوه‌ای کاملاً طبیعی مجموعهٔ E را *باز* بنامد اگر E فقط از نقاط درونی تشکیل شده باشد؛ اما چنین نکرد. ظاهراً به این دلیل که ضرورتی برای چنین مفهومی نمی‌دیده است. او بیشتر دلبستهٔ تعریف نقاط مرزی مجموعهٔ E (نقاطی که نه در درون E و نه در درون متمم آن هستند) و اثبات این مطلب بود که مجموعهٔ نقاط مرزی E همواره ناتهی و بسته است.[۴]

ژُردان این تعریف‌ها را که در مقالهٔ سال ۱۸۹۲ آمده بود، در سال بعد در چاپ تجدیدنظر شدهٔ کتابش با عنوان *درسنامهٔ آنالیز*[۵] [۴۶] وارد کرد؛ اما با یک تغییر قابل‌توجه. در این کتاب، تعریف نقطهٔ حدی

[۴] [۴۵، ص. ۷۳] را ببینید. ژُردان به این مطلب توجه نکرده بود که در استدلالش برای وجود نقاط مرزی E، لازم است هم E و هم متمم آن ناتهی باشند. این نکته‌ای است که پیشتر پئانو آن را به‌روشنی دریافته بود.

[۱] Jules Tannery [۲] écart [۳] Cayley's logarithmic metric [۵] Cours d'Analyse

مجموعهٔ E را اندکی تغییر داد. در چاپ تجدیدنظر شدهٔ کتاب، p *نقطهٔ حدی* E نامیده شده بود اگر p حد دنباله‌ای از نقاط E باشد [۴۶، ص. ۱۹۰]. برای متمایز کردن این تعریف از تعریف قبلی، نقطه‌ای را که در این تعریف جدید صدق می‌کند، *نقطهٔ حدیِ دنباله‌ای* می‌نامیم.[۱]

ژُردان برای اثباتِ هم‌ارزیِ تعریف نقطهٔ حدیِ دنباله‌ای با تعریف قبلیِ نقطهٔ حدی، نیاز به اصل انتخاب داشت و چنین اصلی در آن زمان هنوز به‌صراحت بیان نشده بود؛ نگاه کنید به [۶۱، ص. ۱۸].

بحث‌های توپولوژیِ مجموعهٔ نقاط که در دو کتاب درسی تانِری و ژُردان مطرح شد، تأثیری ژرف بر امیل بُرل، رُنه بِر و آنری لبگ، ریاضیدانان نسل بعد فرانسه، گذاشت چنان‌که می‌بینیم کتاب درسی بُرل با عنوان *درس‌هایی دربارهٔ نظریهٔ توابع مختلط* به تانِری تقدیم شده است و در آن، از کتاب ژُردان به تأیید نام برده می‌شود [۱۰، ص. ۱]. از دید این ریاضیدانان، بخش‌هایی از پژوهش‌های آنها که ماهیت توپولوژیکی داشت، پژوهش در شاخه‌ای جداگانه به نام *توپولوژی* نبود، بلکه جزئی از آنالیز ریاضی بود.

۶. نقاط حدی و همبندی

مفهوم همبندیِ مجموعهٔ نقاط، از میانهٔ قرن نوزدهم، پیش از آنکه اصلاً مجموعه‌های باز و بسته تعریف شده باشند، با موضوع پیوستار گره خورده بود. همان‌گونه که وایلدر خاطرنشان می‌کند [۹۴، ص. ۷۲۱]، در کتاب *پارادوکس‌های بی‌نهایت* نوشتهٔ بولتسانو (به سال ۱۸۵۱) که پس از مرگ وی منتشر شد، تصریح شده است که «وقتی و فقط وقتی یک پیوستار داریم که توده‌ای از موجودات بسیط (لحظه‌ها، نقطه‌ها یا ذرات) داشته باشیم که طوری انتظام یافته باشند که هر فردِ این توده، در هر فاصلهٔ به‌اندازهٔ کافی کوچک از خودش، دست‌کم یک عضو دیگر از آن توده را درکنار داشته باشد.» [۸، ص. ۱۲۹] کانتور ایرادهای جدی بر تعریفِ بولتسانو از پیوستار گرفت، زیرا بر پایهٔ این تعریف، هر مجموعهٔ مرکب از تعدادی پیوستارِ جدا از هم، پیوستار می‌شود. علی‌رغم این، احتمال دارد همین تعریف بولتسانو از پیوستار بوده باشد که کانتور را به تعریف مفهومِ به‌اصطلاح خودش، «همبندی» سوق داده است. او مجموعهٔ M را همبند می‌خواند اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر a و b در M عدد متناهی n و نقاط p_1، p_2، $\ldots$، p_n موجود باشند به‌طوری که فاصله‌های ap_1، p_1p_2، $\ldots$، p_nb همگی کمتر از ε باشند [۱۸، ص. ۱۹۴].

تعریفِ کانتور برای همبندی، همان کاستی‌هایی را دارد که تعریف بولتسانو برای پیوستار؛ گرچه در آن زمان ظاهراً هیچ‌کس به آنها اشاره نکرده است. برای نمونه، بر پایهٔ تعریف کانتور، مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد گنگ همبند می‌شوند و همین دو مجموعه به‌تعبیر بولتسانو، پیوستار می‌شوند (از دید توپولوژی‌دانان امروزی، این دو مجموعه نمونه‌هایی از مجموعه‌های *کلاً ناهمبند* هستند).

---

[۱] با این تعریف جدیدِ ژُردان، هر نقطه از E نقطهٔ حدیِ دنباله‌ایِ E است. با این حال، او می‌نویسد که ممکن است مجموعهٔ E نقاطی داشته باشد که نقطهٔ حدیِ دنباله‌ای نباشند. به همین دلیل، در تعریف او تغییری می‌دهیم و الزام می‌کنیم که جمله‌های دنبالهٔ همگرا به نقطهٔ حدیِ دنباله‌ای، متمایز از هم باشند.

ژُردان در مقالهٔ سال ۱۸۹۲ دربارهٔ انتگرال‌های معین، تعریفی کاملاً متفاوت برای همبندی بیان کرد. او بحث خود را به مجموعه‌های بسته و کراندار محدود کرد و مجموعهٔ E در $\mathbb{R}^n$ را همبند[۱] نامید اگر و تنها اگر E را نتوان به دو مجموعهٔ بسته و *از هم جدا شده*[۲] تقسیم کرد.[۳] ژُردان بلادرنگ به اثبات این مطلب پرداخت که با این تعریف، یک مجموعهٔ بسته و کراندار، همبند است اگر و تنها اگر به‌تعبیر کانتور، همبند باشد [۴۵، ص. ۷۵]. او مطالب مربوط به این دسته از مفاهیم (نقطهٔ حدی، مجموعه‌های از هم جدا شده، مجموعهٔ بسته، مجموعهٔ همبند) را در کتاب *درسنامهٔ آنالیز* بازگو کرد [۴۶، صص. ۲۵–۲۶].[۴] روشن است که آنچه را امروزه مفاهیم توپولوژیک می‌دانیم، ژُردان جزئی از آنالیز ریاضی و ابزاری برای آن می‌دانسته است نه حوزه‌ای مجزا در ریاضیات.

تعریفی که کانتور و ژُردان برای همبندی ارائه کردند، هر دو بر پایهٔ مفهوم فاصله بود. آرتور شونفلیس[۵] در سال ۱۹۰۴ استدلال کرد که داشتن تعریفی برای همبندی که «صرفاً بر اساس مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها بیان شده باشد»، چیز مطلوبی است (گرچه روشن نکرد که چرا تعریف مبتنی بر فاصله، مطلوب نیست) و برای مجموعه‌های تام در فضای nبُعدی اقلیدسی چنین تعریفی به‌دست داد: «یک مجموعهٔ تام، همبند است اگر نتوان آن را به دو مجموعهٔ تام تقسیم کرد.» [۷۵، ص. ۲۰۹] شونفلیس این تعریف را با ادوارت اشتودی[۶] در میان گذاشت و اشتودی به شونفلیس اطلاع داد که ژُردان قبلاً این تعریف را بیان کرده است.

نخستین تعریف همبندی را برای مجموعه‌های دلخواه در فضای nبُعدی اقلیدسی (که بعداً معلوم شد برای فضای توپولوژیک دلخواه هم قابل استفاده است) ان. جی. لِنِس[۷] طی یک سخنرانی در انجمن ریاضی آمریکا در ماه دسامبر سال ۱۹۰۵ عرضه کرد. چکیدهٔ این سخنرانی اندکی بعد از آن تاریخ چاپ شد [۵۶] ولی پنج سال بعد به‌صورت یک مقالهٔ کامل انتشار یافت. در آنجا آمده است که یک مجموعه همبند است در صورتی که اگر آن را به دو مجموعهٔ ناتهی B و C افراز کنیم، دست‌کم یکی از آن مجموعه‌ها یک نقطهٔ حدی از مجموعهٔ دیگر را در بر داشته باشد [۵۷، ص. ۳۰۳]. لِنِس هم آن زمان که در مقاله‌ای به سال ۱۹۱۱ کاربردی از «تحلیل مکان» را در حساب تغییرات ارائه کرد، مشغول پژوهش در حوزهٔ آنالیز ریاضی بود ولی همان‌جا این گفتهٔ شونفلیس در مقالهٔ سال ۱۹۰۴ را شاهد آورد که مطلوب است تعریفی

[۳] در اصطلاح او دو مجموعهٔ A و B *از هم جدا شده* هستند اگر بزرگترین کران پایین فاصلهٔ ab که a به A و b به B متعلق است، صفر نباشد.

[۴] وایلدر [۹۴، ص. ۷۲۲] دلیل می‌آورد که ژُردان اطلاعی از تعریف کانتور برای همبندی نداشته است، زیرا در کتابش [۴۶] صراحتاً نامی از کانتور نبُرده است. ولی وایلدر نمی‌دانست که ژُردان در [۴۵] هنگام بحث از مفاهیمی مانند نقطهٔ حدی و معرفی مفهوم مجموعهٔ همبند، صراحتاً از کانتور نام برده است. هاوکینز دربارهٔ مقالهٔ ژُردان می‌نویسد [۳۹، ص. ۹۳]: «مشکل بتوان آگاهی ژُردان از پژوهش‌های ریاضیدانان پیش از خودش را مدلّل کرد، زیرا او عادت نداشت به ریاضیدانان دیگر ادای دین کند و همین باعث شد میانهٔ او با ارمیت به‌هم بخورد. . . . با وجود این، آنچه روشن است این است که ژُردان با اندیشه‌های کانتور آشنایی داشته است.»

[۱] d'un seul tenant [۲] separated [۵] Arthur Schoenflies [۶] Eduard Study [۷] N. J. Lennes

برای همبندی داشته باشیم که کاملاً بر پایهٔ ابزارهای نظریهٔ مجموعه‌ها باشد. گویا آن مقاله انگیزهٔ لِنِس برای طرح تعریف خودش از همبندی بوده است [۵۷، ص. ۲۸۷].

۷. خطاهای بزرگ دربارهٔ مجموعه‌های بسته

ریاضیدانان در سال‌های پایانی قرن نوزدهم گرفتار چند خطای بزرگ دربارهٔ مجموعه‌های بسته شدند. این خطاها بعداً گریبان‌گیر مفهوم فشردگی هم شدند. نخستین خطا را هورویتس مرتکب شد. او در سخنرانی در نخستین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان اظهار کرد که اگر f تابعی یک‌به‌یک و پیوسته از مجموعهٔ بستهٔ P به مجموعهٔ بستهٔ Q باشد، آن‌گاه وارون f نیز پیوسته است و در نتیجه f همانریختی است [۴۳، ص. ۱۰۲]. ژُردان ثابت کرده بود که این ادعا صادق است اگر P هم بسته و هم کراندار باشد [۴۶، ص. ۵۳] اما در حالت کلی اگر P بسته باشد ولی کراندار نباشد، ادعای هورویتس کاذب است.[1]

شونفلیس [۷۴، ص. ۱۱۸] ادعای هورویتس را تأیید کرد. طنز داستان اینجا است که شونفلیس حتی صفحهٔ مربوط به قضیهٔ مذکور از کتاب ژُردان [۴۶] را ذکر کرد ولی توجه نداشت که با جاانداختنِ کلمهٔ «کراندار»، ادعایی کاذب کرده است. این خطا ناشی از تأکید بیش از اندازهٔ شونفلیس بر اهمیت مجموعه‌های بسته بود: «از دیدگاه نظری، مهم‌ترین مجموعه‌های نقاط، مجموعه‌های *بسته* و *تام* هستند. این مجموعه‌ها آنهایی هستند که بیشتر اوقات در آنالیز و هندسه با آنها سروکار داریم.» [۷۲، ص. ۷۴]

پس از این، باز خطاهایی از همین جنس صورت گرفت. شونفلیس استدلال کرد که تصویر یک‌به‌یک و پیوستهٔ یک مجموعهٔ تام مانند P تام است [۷۴، ص. ۱۱۷] (البته اگر P کراندار نباشد، ممکن است این حکم برقرار نباشد). برهانی که او آورد مبتنی بر این ادعا بود که هر مجموعهٔ نامتناهی از نقاط باید نقطهٔ حدی داشته باشد (این حکم، صورتی نادرست از قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس است و برای نمونه، اگر P را مجموعهٔ اعداد طبیعی بگیریم، صادق نیست). او صورتی قوی‌تر از همین ادعا را دربارهٔ مجموعه‌های بسته بیان کرد که آن نیز همچون ادعای مربوط به مجموعه‌های تام، صادق نبود. بعد از این، گفت که اگر تابعی در هر نقطه از مجموعهٔ تام P پیوسته باشد، آن تابع به‌طور یکنواخت روی P پیوسته است [۷۴، ص. ۱۱۹]. اما این ادعا نیز اگر P را مجموعهٔ اعداد نامنفی روی خط حقیقی و تابع را $f(x) = x^۲$ بگیریم، راست نیست. در آخرین مورد، ادعا کرد که اگر به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت n، P_n بسته و $P_{n+۱}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از P_n باشد، آن‌گاه اشتراک همهٔ P_nها ناتهی است [۷۴، ص. ۵۸]. چنانچه شرط می‌کرد که $P_۱$ کراندار باشد، آن‌گاه این ادعا صادق بود؛ اگرنه به‌آسانی رد می‌شود (فرض کنید P_n مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی باشد که کمتر از n نیستند).

[1] راجع به تاریخ خطاهای هورویتس، [۶۴، صص. ۳۳۸-۳۴۰] را مطالعه کنید.

چهار سال بعد، شونفلیس دریافت که تصویر یک مجموعهٔ تام و همبند مانند M در فضای اقلیدسی تحت یک نگاشت یک‌به‌یک و پیوسته، همبند است. در عین حال، تصور می‌کرد که اگر آن نگاشت پیوسته باشد ولی یک‌به‌یک نباشد، آن‌گاه تصویر M نمی‌تواند همبند باشد [۷۵، ص. ۲۰۹]. شونفلیس در این باره هم اشتباه می‌کرد. ژُردان یک دهه پیشتر نشان داده بود که تصویر پیوستهٔ یک مجموعهٔ بسته، کراندار و همبند، همبند است [۷۵، صص. ۷۹–۸۰].

۸. پس مجموعه‌های باز کجای داستان قرار دارند؟

اگر تنها یک قضیه در آنالیز ریاضی معاصر وجود داشته باشد که پیوندی ناگسستنی با مجموعه‌های باز دارد، نتیجه‌ای است که در کشورهای انگلیسی‌زبان و آلمان، *قضیهٔ هاینه–بُرل* و در فرانسه، *قضیهٔ بُرل–لبگ* خوانده می‌شود که البته این نام دوم درست‌تر است. این قضیه، تاریخی پُر پیچ‌وتاب دارد و به همین سبب، بررسی آن را به فرصتی دیگر وامی‌گذاریم. در این قضیه، مفهومی به‌کار می‌رود که وقتی نخستین بار طی دههٔ ۱۹۲۰ به‌طور دقیق بیان شد،[۱] *دوفشرده*[۲] نامیده می‌شد ولی امروزه همه‌جا آن را *فشردگی* می‌نامند. تعریف آن این است: مجموعهٔ E را *فشرده* می‌نامیم اگر برای هر خانواده مانند S از مجموعه‌های باز که E را می‌پوشاند، زیرخانواده‌ای متناهی از S موجود باشد که E را بپوشاند. حال قضیهٔ مورد بحث ما می‌گوید که هر مجموعهٔ بسته و کراندار در اعداد حقیقی، فشرده است. مفهوم مجموعهٔ باز جزء اساسی تعریف فشردگی است و بنابراین جزء اساسی قضیهٔ مورد بحث در حالت کلی نیز هست.

با این همه، زمانی که امیل بُرل نخستین صورت این قضیه را در رسالهٔ دکتری‌اش بیان کرد، نامی از مجموعهٔ باز نبُرد، بلکه بیان این نخستین صورتِ قضیه که جزئی از ابداعات وی در نظریهٔ اندازه و مجموعه‌های بُرل–اندازه‌پذیر محسوب می‌شود، از این قرار است:

> «اگر روی یک خط [پاره‌خط] تعداد نامتناهی بازهٔ جزئی وجود داشته باشد طوری که هر نقطه از آن خط [پاره‌خط] درون دست‌کم یک بازه باشد، آن‌گاه می‌توان عملاً *تعدادی متناهی* بازه از بین آن بازه‌ها انتخاب کرد که همان ویژگی را داشته باشند (یعنی هر نقطه از آن خط [پاره‌خط] در درون یکی از آنها قرار گیرد).» [۹، ص. ۵۱]

برای راحتی کار، این صورت اولیهٔ نتیجهٔ مذکور را *قضیهٔ بُرل* و صورت جدید آن را که می‌گوید هر مجموعهٔ بسته و کراندار در اعداد حقیقی، فشرده است، قضیهٔ هاینه–بُرل می‌نامیم. حدود ۳۰ سال بین نخستین بیان این قضیه توسط بُرل و بیان جدید آن، زمان سپری شد.

با وجود اینها، چهار سال پس از آنکه بُرل قضیه‌اش را ثابت کرد، نخستین صورتِ مکتوبِ مفهوم مجموعهٔ باز، توسط رُنه بِر[۳] در ضمن بحث از توابع حقیقی نیم‌پیوسته در رسالهٔ دکتری‌اش منتشر شد. او در

[۱] آلکساندرُف و اوریسون آن را *دوفشرده* نامیدند تا از مفهوم فشردگی فرِشه متمایز باشد.

[۲] bicompact [۳] René Baire

آنجا پس از تعریف «کرهٔ بسته» S و «کرهٔ باز» S' با مرکز و شعاع یکسان در فضای nبُعدی اقلیدسی، به این صورت ادامه می‌دهد:

> «به‌ازای هر نقطهٔ مفروض از S'، کره‌ای با شعاع مثبت وجود دارد که آن نقطه مرکزش است و همهٔ نقاطش به S' تعلق دارند. به‌طور کلی، هر مجموعه از نقاط را که دارای این ویژگی باشد، *دامنهٔ باز nبُعدی* می‌نامم.» [۵، ص. ۶-۷]

بعد از آن، دنباله‌ای از دامنه‌های باز را به‌کار می‌گیرد و در مورد شرط‌هایی که تحت آنها همهٔ تابع‌های نیم‌پیوستهٔ پایینی در یک حوزهٔ بازِ مفروض، کوچکترین کران بالایی یکسان اختیار می‌کنند، قضیه‌ای ثابت می‌کند.

عجیب است که این مطلب، تنها موردی است که بِر در رساله‌اش برای بیان آن، از مجموعه‌های باز استفاده می‌کند. در رسالهٔ بِر، مجموعه‌های تام به‌تعبیر کانتور، اهمیتی بسیار بیشتر از مجموعه‌های باز دارند. در واقع شالودهٔ رسالهٔ بِر این قضیه است که تابع ناپیوستهٔ f را می‌توان با یک سری نامتناهی از تابع‌های پیوسته نمایش داد اگر و تنها اگر f نسبت به هر مجموعهٔ تام، نقطه‌ای-ناپیوسته باشد [۵، ص. ۶۲]. بِر نیز مانند لبگ مفاهیم توپولوژیکی را به‌مثابهٔ ابزاری برای رسیدن به اهدافش در آنالیز ریاضی به‌کار می‌بُرد و اینکه این مفاهیم بخشی از شاخه‌ای جداگانه موسوم به *توپولوژی* هستند، برای او اهمیت نداشت.

نام «مجموعهٔ باز» را لبگ در رسالهٔ دکتری‌اش به سال ۱۹۰۲ ابداع کرد. هدف مهم در آن رساله، معرفی اندازهٔ لبگ (به‌عنوان تعمیمی از محتوای مجموعه‌های بُرل-اندازه‌پذیر) و انتگرال لبگ بود. لبگ که آشکارا تحت تأثیر کتاب *درسنامهٔ آنالیز* ژُردان چاپ سال ۱۸۹۳ قرار داشت، تعریف نقطهٔ درونی و مرز مجموعه را از آن کتاب اقتباس [۵۰، ص. ۲۳۱] و یک مجموعه روی خط مستقیم را *باز*[۱] نامید در صورتی که هیچ نقطه‌ای از مرزش را شامل نشود. سپس افزود که از اینجا نتیجه می‌شود هر نقطه از یک مجموعهٔ باز مانند E، نقطهٔ درونی E است و متمم هر مجموعهٔ باز، یک مجموعهٔ بسته است. به‌کمک این مطلب توانست نشان دهد که هر مجموعهٔ باز، بُرل-اندازه‌پذیر است، یعنی مجموعه‌ای بُرل است (اثبات این مطلب لازم بود، زیرا خودِ بُرل، خانوادهٔ مجموعه‌های بُرل-اندازه‌پذیر را خانواده‌ای می‌دانست که ساخت آن با بازه‌های بسته آغاز می‌شود و نسبت به عمل‌های متمم‌گیری و اجتماع شمارا، بسته است. به‌ویژه نشان داده بود که مجموعه‌های بسته، بُرل-اندازه‌پذیر هستند [۱۰، ص. ۴۹]). سپس لبگ، این مطالب و از جمله مجموعه‌های باز را به فضای nبُعدی اقلیدسی گسترش داد [۵۰، صص. ۲۳۲-۲۳۴]. لبگ در مباحث مربوط به صفحه غالباً به‌جای مجموعه‌های باز از مفهومی به نام *دامنه* (به‌زبان فرانسوی domaine) که همان درون یک خم بستهٔ ساده است، استفاده می‌کرد [۵۰، ص. ۲۳۵]. در بخش ۱۵ مجال خواهیم یافت تا بحث دربارهٔ اصطلاح *دامنه* و معادل آلمانیِ آن، کلمهٔ Gebiet را از سر بگیریم.

[۱] ouvert

با اینکه لبگ تعریف کلی مجموعهٔ باز در فضای nبُعدی اقلیدسی را بیان کرد و قضیهٔ بُرل را (به‌صورتی که در بالا آمد) به پوشش‌های ناشمارا تعمیم داد اما این تعمیم برای پوشش‌های متشکل از مجموعه‌های باز دلخواه نبود بلکه برای پوشش‌هایی بود که فقط از بازه‌ها تشکیل می‌شدند. به هر حال، این مطلبی است که در کتاب او به سال ۱۹۰۴ دربارهٔ انتگرال لبگ آمده است. لبگ در ویراست دوم آن کتاب به سال ۱۹۲۸، دوباره همین صورت از قضیه بُرل را بدون به‌کار بردنِ مجموعه‌های باز، این گونه بیان می‌کند:

> «اگر خانواده‌ای مانند Δ از بازه‌ها موجود باشد طوری که هر نقطه از بازهٔ (a,b) که شامل a و b نیز هست، در درون دست‌کم یکی از عضوهای Δ باشد، آن‌گاه خانواده‌ای متشکل از تعداد *متناهی* از بازه‌های Δ برخوردار از همان ویژگی وجود دارد (هر نقطهٔ (a,b) در درون یکی از آنها است).» [۵۲، ص. ۱۱۲]

علی‌رغم این، فریدیِش ریس، ریاضیدان مجارستانی، در سال ۱۹۰۵ قضیه بُرل را به مجموعه‌هایی که باز و همبند هستند، تعمیم داد. ریس در مقاله‌ای که در مجلهٔ *کُنت راندویِ*[۱] فرهنگستان علوم پاریس چاپ شد، می‌نویسد: «هر مجموعهٔ همبندی را که هیچ‌یک از عضوهای آن، نقطهٔ حدی متمم‌اش نباشد، *دامنه* می‌نامیم.» [۷۳، ص. ۲۲۶] سپس صورت کلی قضیه بُرل را برای فضای nبُعدی اقلیدسی بیان می‌کند: «اگر هر نقطه از یک مجموعهٔ بسته در درونِ دست‌کم یک عضو از خانواده‌ای مانند S از دامنه‌ها قرار گیرد، آن‌گاه زیرخانواده‌ای متناهی از S وجود دارد که دارای همین ویژگی است.»[۲] بعدها معلوم شد که شرط همبندی پیوندی با این مسأله ندارد و حتی اگر این شرط حذف شود، باز هم قضیه برقرار است.

در سال ۱۹۰۵ لبگ با انتشار مقاله‌ای جامع دربارهٔ *توابع تحلیلی-نمایش‌پذیر*[۳]، بررسی بسیار مفصل و بی‌سابقه‌ای از مجموعه‌های باز ارائه کرد (این بررسی بخشی از مطالعهٔ مفصل سلسله‌مراتب مجموعه‌های بُرل بود که برای نخستین بار صورت می‌گرفت). این مقاله شدیداً به رده‌بندی بِر برای توابع حقیقی وابسته بود. به‌ازای هر عدد ترتیبیِ شمارای α، تابع حقیقی f از ردهٔ α*ی بِر* نامیده می‌شد هرگاه f حد نقطه‌ایِ یک دنبالهٔ نامتناهی از توابع متعلق به ردهٔ بِر پایین‌تر از α بود ولی خودِ f به ردهٔ بِر پایین‌تر از α تعلق نداشت. متناظر با این رده‌های بِر از توابع حقیقی، ترازهای مجموعه‌های بُرل قرار داشتند. لبگ در این باره دوتا سلسله‌مراتب برای مجموعه‌های بُرل تعریف کرد. زیرمجموعهٔ E از اعداد حقیقی از ردهٔ F_α خوانده شد اگر E برابر با مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x بود که به‌ازای دو حقیقی مانند a و b و تابعی مانند f متعلق به ردهٔ αی بِر، $a \le f(x) \le b$ و در عین حال، اگر f به ردهٔ بِر پایین‌تر از α تعلق داشت، E با چنین مجموعه‌ای برابر نبود. لبگ نماد F_α را به‌کار برد که در آن، F نشان‌دهندهٔ fermé (به‌معنای بسته) است، زیرا F_0 همان ردهٔ مجموعه‌های بسته است. مشابهاً زیرمجموعهٔ E از اعداد حقیقی از ردهٔ O_α

[۲] متأسفانه قضیهٔ وی به‌صورتی که ذکر شد، نادرست است. برای اینکه قضیه صادق باشد، باید مجموعهٔ بستهٔ مورد بحث، کراندار فرض شود.

[۱] Comptes Rendus [۳] analytically representable functions

نامیده شد اگر E برابر با مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x بود که به‌ازای دو حقیقی مانند a و b و تابعی مانند f متعلق به ردهٔ αی بِر، $a < f(x) < b$ و در عین حال، اگر f به ردهٔ بِر پایین‌تر از α تعلق داشت، E با چنین مجموعه‌ای برابر نبود. به همین قیاس، لبگ نماد O_α را به‌کار برد که در آن، O نشان‌دهندهٔ ouvert (به‌معنای باز) است، زیرا O_0 همان ردهٔ مجموعه‌های باز است [۵۱، ص. ۱۵۷]. او ثابت کرد که اشتراک هر خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌هایی که حداکثر از ردهٔ F_α هستند، مجموعه‌ای حداکثر از ردهٔ F_α است. همین‌طور اجتماع هر خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌هایی که حداکثر از ردهٔ O_α هستند، مجموعه‌ای حداکثر از ردهٔ O_α است. به‌ویژه اجتماع هر خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است (در واقع این مطلب حتی اگر خانوادهٔ مورد بحث ناشمارا باشد هم صادق است ولی لبگ آن را ذکر نکرد و به نظر نمی‌رسد که از این موضوع آگاه بوده باشد).

ارتباط بین سلسله‌مراتب‌های F_α و O_α از این قرار است: یک مجموعه از ردهٔ F_α حداکثر از ردهٔ $O_{\alpha+1}$ است (مثلاً معنای اینکه F_0 از ردهٔ O_1 است این است که هر مجموعهٔ بسته برابر با اشتراک خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های باز است). همین طور یک مجموعه از ردهٔ O_α حداکثر از ردهٔ $F_{\alpha+1}$ است (به‌ویژه هر مجموعهٔ باز برابر با اجتماع خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های بسته است). پس نتیجه می‌شود که اجتماع هر خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌هایی که حداکثر از ردهٔ F_α هستند، مجموعه‌ای حداکثر از ردهٔ $F_{\alpha+2}$ است و اشتراک هر خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌هایی که حداکثر از ردهٔ O_α هستند، مجموعه‌ای حداکثر از ردهٔ $O_{\alpha+2}$ است. به این ترتیب لبگ از ساختار اصلی رده‌های مجموعه‌های بُرل سر درآورده بود. این آگاهی‌ها بعداً در زمینهٔ کلی‌تر فضاهای متری بسیار سودمند از کار درآمدند [۵۱، صص. ۱۵۹–۱۶۴].

علی‌رغم پژوهش‌های نوآورانهٔ لبگ دربارهٔ مجموعه‌های باز، رواج این مجموعه‌ها در جامعهٔ ریاضی با کُندی فراوانی صورت گرفت. در انگلستان، دبلیو. اچ. یانگ و جی. سی. یانگ[1] یک مجموعه را *باز* نامیدند اگر بسته نباشد. این تعریف با تعریفِ لبگ که بنابر آن، یک مجموعه باز است فقط اگر متمم آن بسته باشد، ناسازگار است. همین طور آنها یک بازه را *باز* نامیدند اگر دست‌کم یکی از نقاط انتهایی‌اش را در بر نداشته باشد [۹۵، صص. ۱۵، ۱۹]. ایی. دبلیو. هابسن[2] در کتابش با عنوان *نظریهٔ توابع با متغیر حقیقی*، تعریف یانگ برای مجموعهٔ باز (یعنی بسته نبودن) را می‌پذیرد، اما تعریفی جدید برای *بازهٔ باز* (بازه‌ای که شامل نقاط انتهایی‌اش نیست) به‌کار می‌برد [۴۱، صص. ۸۴، ۱۱۹]. هابسن دو دهه بعد، تعریف جدید مجموعهٔ باز را پذیرفت [۴۲، ص. ۷۸] اما این تعریف را از بِر و یا لبگ نگرفت، بلکه از دُلا واله پوسَن[3] اخذ کرد [۲۵، ص. ۱۰].

[1] W. H. Young and G. C. Young [2] E. W. Hobson [3] de la Vallée Poussin

۹. فرِشه و توپولوژی عمومی

تعمیم فضاهای اقلیدسی به فضاهای انتزاعی‌تر با معرفی L–*فضاها* توسط موریس فرِشه [۳۲] آغاز شد. انگیزهٔ تعریف این فضاهای انتزاعی، تعمیم قضیهٔ وایرشتراس بود که می‌گفت هر تابع پیوسته (از یک یا چند متغیر حقیقی) روی یک بازهٔ (حجرهٔ) بسته و کراندار، کوچکترین کران بالایی‌اش را اختیار می‌کند. البته فرِشه تحقیق اصل کمینه‌سازی دیریکله را نیز در ذهن داشت. فضاهای انتزاعی فرِشه موسوم به L–فضاها، بر پایهٔ ایدهٔ اولیهٔ حد دنبالهٔ نامتناهی و نیز الگوی طرح‌شده دربارهٔ نقاط حدیِ دنباله‌ای توسط ژُردان [۴۶]، بنا شده بود. یک L–فضا مجموعه‌ای مانند X همراه با یک تابع $F : S \to X$ است که در آن، S مجموعه‌ای از دنباله‌های نامتناهی از اعضای X است. اگر s عضوی از S باشد، آن‌گاه $F(s)$ حد *دنبالهٔ* s نامیده می‌شود و تنها دو اصل موضوع در مورد این ساختار وجود دارد:

(۱) اگر s یک دنبالهٔ ثابت با مقدار a باشد، آن‌گاه حد s برابر با a است؛

(۲) اگر حد دنبالهٔ s برابر با b باشد، آن‌گاه حد هر زیردنبالهٔ s نیز برابر با b است.

فرِشه سپس p را *نقطهٔ حدیِ* زیرمجموعهٔ A از X نامید در صورتی که p حد دنباله‌ای از عضوهای متمایز A باشد. همچنین A *بسته* تعریف شد اگر شامل همهٔ نقاط حدی‌اش باشد؛ یعنی دقیقاً همان گونه که کانتور آن را برای مجموعه‌های نقاط تعریف کرده بود. فرِشه تابع f روی X را پیوسته نامید به این شرط که به تعبیر ژُردان، پیوستهٔ دنباله‌ای باشد؛ یعنی اگر حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ برابر با p شد، آن‌گاه حد دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ برابر با $f(p)$ شود. او یکی از قضیه‌های (غلط) شونفلیس برای مجموعه‌های نقاط (با این مضمون که اگر برای هر عدد صحیح مثبت n، P_n بسته و P_{n+1} زیرمجموعه‌ای ناتهی از P_n باشد، آن‌گاه اشتراک همهٔ P_nها ناتهی است) را به‌عنوان تعریف *فشردگیِ* یک زیرمجموعه از L–فضا برگزید (البته به‌منظور پرهیز از اختلاط با مفهوم امروزیِ فشردگی، آن را به‌افتخار شونفلیس، S–*فشرده* می‌نامیم) [۳۲، ص. ۸۴۹]. نقطهٔ اوج مقالهٔ فرِشه، تعمیم زیر از قضیهٔ وایرشتراس بود:

(۳) هر تابع حقیقی‌مقدار پیوسته روی یک مجموعهٔ بسته و S–فشرده (در یک L–فضا) کراندار است و کوچکترین کران بالایی‌اش را اختیار می‌کند.

مبنای او برای اثبات این قضیه این بود که در یک L–فضا مجموعهٔ E، S–فشرده است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از E دارای یک نقطهٔ حدی باشد؛ یعنی E در قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس صدق کند (در اینجا فرآیندی داریم که بارها و بارها رخ می‌دهد: آنچه که در بستر فضاهای اقلیدسی یک قضیه است، به تعریفی برای یک ویژگی در فضایی کلی‌تر تبدیل می‌شود). او اشاره کرد که برای فضاهای متناهی‌بُعد، S–فشردگی، کرانداری را ایجاب می‌کند. سپس متذکر شد که با تعریفی مناسب از حد، این قضیه را می‌توان به فضاهای با بعد شمارای نامتناهی تعمیم داد [۳۲، ص. ۸۵۰].

فرِشه در مقالهٔ بعدی‌اش، انگیزهٔ تعریف L–فضاها را آشکار کرد:

> «درست همان طور که در مکانیک، نظریهٔ مقدماتی بردارها ما را از تکرار اثبات‌های مشابه برای نیروها، گشتاورها، سرعت‌ها و غیره بی‌نیاز می‌سازد، جداسازیِ ویژگی‌های مشترک در نظریه‌هایی مانند نظریهٔ مجموعهٔ نقاط، مجموعهٔ توابع، مجموعهٔ خم‌ها و توابع حقیقی‌مقدارِ تعریف شده بر آنها، می‌تواند بسیار سودمند باشد.» [۳۳، ص. ۲۷]

L–فضاهای فرِشه، کوششی برای جدا کردن این ویژگی‌ها بود؛ تلاشی که از آنالیز ریاضی سرچشمه گرفت و مقصود آن هم فراهم آوردن ابزارهایی نو برای آنالیز ریاضی بود. اما سپس این سؤال مطرح شد که آیا در این L–فضاها، هر مجموعهٔ مشتق، بسته است. یک سال بعد، آشکار شد که برای فضاهای تابعی خاصی، پاسخ منفی است.

فرِشه در سال ۱۹۰۶ در رسالهٔ دکتری‌اش به بررسی عمیق L–فضاها و مفهوم جدید فضای متری پرداخت [۳۴، ص. ۳۰]. هر فضای متری، یک L–فضا است اما عکس آن درست نیست. در یک فضای متری هر مجموعهٔ مشتق، بسته است اما این مطلب در هر L–فضا صادق نیست. اگرچه او مفاهیم کانتوریِ نقطهٔ حدی، مجموعهٔ بسته و مجموعهٔ تام و همچنین ایدهٔ نقطهٔ درونی را برای L–فضاها تعریف کرد اما مفهوم مجموعهٔ باز را در مورد هیچ‌یک از فضاهایش معرفی نکرد.

مفهوم کلیدی در رسالهٔ فرِشه چیزی بود که آن را مجموعهٔ *فشرده* می‌نامید. او مجموعهٔ A را فشرده نامید اگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از A دارای نقطه‌ای حدی باشد که ممکن است به A متعلق باشد یا نباشد [۳۴، ص. ۶]. به‌منظور پرهیز از اختلاط با مفهوم امروزیِ فشردگی، این تعریف را *فشردگی فرِشه* می‌نامیم. پس از این تعریف، او توانست قضیهٔ هاینه–بُرل را به فضاهای متری تعمیم دهد.

۱۰. هاوسدُرف و توپولوژی عمومی

ایدهٔ مجموعهٔ باز در یک فضای مجرّد (برخلافِ فضای اقلیدسی nبُعدی که این ایده از آنِ بِر و لبگ بود) از آنِ فلیکس هاوسدُرف در بستر فضاهای توپولوژیک بود. البته آنچه که هاوسدُرف فضای توپولوژیک نامید، خاص‌تر از آن چیزی است که امروزه عموماً فضای توپولوژیک نامیده می‌شود. او *همسایگی یک نقطه* را به‌عنوان مادهٔ اولیهٔ ساخت فضای توپولوژیک برگزید. برای پرهیز از ابهام، فضاهایی را که هاوسدُرف تعریف کرد، *فضاهای همسایگی* می‌نامیم. هاوسدُرف، فضای همسایگی را یک مجموعهٔ E که اعضایش نقطه نامیده می‌شدند به‌همراه خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E تعریف کرد که *همسایگی* نامیده می‌شدند و در چهار اصل زیر صدق می‌کردند:

(الف) هر نقطهٔ x به دست‌کم یک همسایگیِ x تعلق دارد و هر همسایگیِ x شامل x است؛

(ب) اگر U و V همسایگی‌های x باشند، آن‌گاه یک همسایگیِ x مانند W موجود است به‌گونه‌ای که $W \subseteq U \cap V$؛

(پ) اگر نقطهٔ y متعلق به همسایگی U از x باشد، آن‌گاه یک همسایگیِ y مانند V موجود است که V زیرمجموعهٔ U است؛

(ت) اگر x و y نقاط متمایز باشند، آن‌گاه یک همسایگیِ x مانند U و یک همسایگیِ y مانند V وجود دارند که U و V جدا از هم هستند [۳۷، ص. ۲۱۳].

هاوسدُرف بلافاصله پس از ارائهٔ این اصول برای فضای توپولوژیک، منظور خود را از *نقطهٔ درونی* زیرمجموعهٔ A از یک فضای توپولوژیک آشکار کرد: «x یک نقطهٔ درونی A است اگر x دارای یک همسایگی باشد که زیرمجموعهٔ A است و x یک نقطهٔ مرزی A است اگر x متعلق به A باشد اما نقطهٔ درونی A نباشد.» سپس مجموعهٔ A را *باز*[۱] نامید اگر همهٔ نقاطش، درونی باشند [۳۷، صص. ۲۱۵–۲۱۴]. سرانجام، نشان داد که اجتماع هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از مجموعه‌های باز، باز است و اشتراک هر تعداد متناهی مجموعهٔ باز نیز باز است (با اثبات اینکه اجتماع هر خانوادهٔ ناشمارا از مجموعه‌های باز، باز است، کاری برتر از کارِ لبگ در سال ۱۹۰۵ دربارهٔ مجموعه‌های باز انجام داد).

باید توجه کرد که اگر چنان‌که امروزه رایج است، مجموعهٔ باز را به‌عنوان مفهوم اولیه در تعریف توپولوژی در نظر بگیریم، همسایگی‌های هاوسدُرف لزوماً با همسایگی به معنای کنونی مطابقت ندارند. به‌ویژه برای یک فضای همسایگی E که شامل دست‌کم دو نقطه است، لزومی ندارد کل فضای E همسایگی هر نقطه باشد. مثلاً اگر تنها همسایگیِ هر نقطهٔ x مجموعهٔ $\{x\}$ باشد، آن‌گاه هرچند کل فضای X یک مجموعهٔ باز نیست، همهٔ اصول موضوع هاوسدُرف برقرار هستند. با این حال، اگر مفهوم کنونیِ «مجموعهٔ باز» را به‌عنوان مادهٔ اولیهٔ ساخت فضای توپولوژیک در نظر بگیریم، آن‌گاه همسایگی نقطهٔ x، هر مجموعه‌ای مانند V است به‌طوری که x متعلق به یک زیرمجموعهٔ باز V باشد. بنابراین برخلافِ مثال‌مان از فضای همسایگی هاوسدُرف، کل فضا باز می‌شود و در نتیجه همسایگیِ هر نقطه‌اش است (آنچه هاوسدُرف خانوادهٔ همسایگی‌های یک فضا می‌دانست، امروزه *پایهٔ همسایگی* برای فضا نامیده می‌شود).

هاوسدُرف پس از تعریف مجموعه‌های باز برحسب همسایگی‌ها، به تعریف نقاط انباشتگی و مجموعه‌های بسته روی آورد. او p را یک *نقطهٔ انباشتگی*[۲] مجموعهٔ B تعریف کرد در صورتی که هر همسایگیِ p شامل تعدادی نامتناهی نقطه از B باشد (این تعریف، کاملاً با تعریفی که کانتور برای نقطهٔ حدی بیان کرده بود، تطابق داشت). سپس یک مجموعه را بسته نامید اگر شامل همهٔ نقاط انباشتگی‌اش باشد و ثابت کرد که اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های بسته، بسته است و اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است [۳۷، صص. ۲۱۹–۲۲۵].

[۱] Gebiet [۲] Häufungspunkt

هاوسدُرف به پیروی از فرِشه، نام *فشرده* (که در بالا آن را *فشردهٔ فرِشه* نامیدیم) را بر مجموعه‌ای نهاد که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی‌اش یک نقطهٔ انباشتگی داشته باشد. آنچه که هاوسدُرف *قضیهٔ بُرل* نامید، این گزاره بود که اگر یک مجموعهٔ بسته و فشردهٔ فرِشه مانند M زیرمجموعه‌ای از اجتماع یک خانوادهٔ نامتناهی شمارای S از مجموعه‌های باز باشد، آن‌گاه M زیرمجموعهٔ اجتماع تعدادی متناهی از عضوهای S نیز هست [۳۷، ص. ۲۳۱].

دومین اصل شمارش‌پذیری هاوسدُرف (مجموعهٔ تمام همسایگی‌ها، شمارش‌پذیر است) نتیجه‌هایی مهم دربارهٔ مجموعه‌های باز و بسته به‌دنبال داشت. یکی از این نتایج چیزی است که امروزه به *شرط زنجیرهٔ شمارا* مشهور است: هر خانواده از مجموعه‌های باز جدا از هم، شمارا است. نتیجهٔ دیگر این بود که عدد اصلی خانوادهٔ مجموعه‌های باز با عدد اصلی خانوادهٔ مجموعه‌های بسته برابر است و هر دو برابر با عدد اصلی $\mathbb{R}$ است. به‌علاوه، این اصل صورت بهتری از قضیهٔ بُرل را در پی داشت: لزومی ندارد خانوادهٔ S شمارا باشد؛ می‌تواند هر عدد اصلی نامتناهی داشته باشد [۳۷، صص. ۲۷۰–۲۷۲].

روش ساخت مجموعه‌های بُرل در فضاهای متری که هاوسدُرف در پیش گرفت، پیرو همان خط‌مشی اصلی لبگ در مقالهٔ سال ۱۹۰۵ بود. به‌ویژه در یک فضای متری (و نه در هر فضای توپولوژیک دلخواه) هر مجموعهٔ بسته، اشتراک خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های باز است و هر مجموعهٔ باز، اجتماع خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های بسته است [۳۷، ص. ۳۰۶].

۱۱. آن‌که بهتر است، ماندنی است

تا یک دهه پس از آنکه هاوسدُرف فضای توپولوژیک را برحسب اصول موضوع روی همسایگی‌ها تعریف کرد، هیچ توافقی در بین ریاضیدانان وجود نداشت که توپولوژی باید برحسب فضاهای همسایگی هاوسدُرف تعریف شود یا مفاهیم انتزاعی دیگر؛ رقابت شدیدی بین رویکردهای مختلف برای تعریف فضای مجرّد در جریان بود.

در سال ۱۹۲۲، توپولوژی‌دان جوان لهستانی، کازیمیِش کوراتُفسکی[1] مقاله‌ای با عنوان *دربارهٔ عملگر* $\overline{A}$ *در نظریهٔ تحلیل مکان* بر مبنای رسالهٔ دکترای خودش که دو سال پیش از آن به پایان رسیده بود، منتشر کرد. او در این مقاله از عملگر بستار به‌عنوان یگانه مفهوم اولیه برای تعریف توپولوژی استفاده کرده بود. جالب است که کوراتُفسکی به L–فضاهای فرِشه اشاره کرده بود اما نامی از فضاهای همسایگی هاوسدُرف نبُرده بود [۴۸، ص. ۱۸۳] (کوراتُفسکی در کار بعدی‌اش [۴۹] به هر دو تعریف اشاره کرده است). برای راحتی کار، به آن دسته از فضاهایی که کوراتُفسکی تعریف کرد، *فضای بستاری* می‌گوییم (البته او هیچ نامگذاری‌ای انجام نداد). یک فضای بستاری، مجموعه‌ای مانند X است به‌همراه یک تابع (بستار) روی

[1] Kasimierz Kuratowski

خانوادهٔ زیرمجموعه‌های X به‌توی خانوادهٔ زیرمجموعه‌های X که در چهار اصل موضوع زیر صدق می‌کند: به‌ازای هر دو مجموعه مانند A و B

(۱) بستار $A \cup B$ برابر با اجتماع بستار A و بستار B است؛

(۲) A زیرمجموعه‌ای از بستار A است؛

(۳) بستار مجموعهٔ تهی خودِ مجموعهٔ تهی است؛

(۴) بستارِ بستار A برابر با بستار A است [۴۸، ص. ۱۸۲].

یک مجموعه *بسته* نامیده می‌شد اگر با بستارش برابر بود و *باز* نامیده می‌شد اگر با متمم بستار متمم‌اش برابر بود [۴۸، ص. ۱۸۸]. کوراتُفسکی به این حقیقت اشاره نکرد که اگر اصل موضوع آخر در فضاهای توپولوژیک هاوسدُرف (یعنی آن که می‌گفت هر دو نقطهٔ متمایز فضا مشمولِ همسایگی‌های جدا از هم هستند) حذف می‌شد، فضاهای بستاری با فضاهای توپولوژیک هاوسدُرف یکی می‌شدند. ولی گفت که فضاهای بستاری نسبت به L-فضاهای فرِشه (که بر پایهٔ اصول موضوع مربوط به حد دنباله‌ها تعریف شده بودند) کلی‌تر هستند. در حقیقت این فضاهای بستاری، نخستین صورت‌بندی از چیزی هستند که امروزه عموماً *فضای توپولوژیک* نامیده می‌شود.

کوراتُفسکی در پایان مقاله‌اش یک دستگاه اصل‌موضوعی دیگر بر پایهٔ مفهوم اولیهٔ متفاوت اما کانتوری‌ترِ *مجموعهٔ مشتق* ارائه کرد. برای راحتی کار، فضاهایی از این دست را *فضای مشتقی* می‌خوانیم. چنین فضایی یک مجموعهٔ X بود که باید در چهار اصل موضوع زیر صدق می‌کرد: اگر A و B زیرمجموعه‌های دلخواهی از X باشند، آن‌گاه

(۱) $(A \cup B)' = A' \cup B'$؛

(۲) $X' = X$؛

(۳) $\emptyset' = \emptyset$؛

(۴) A'' زیرمجموعه‌ای از A' است.

کوراتُفسکی متذکر شد که اگر بستار A را برابر با $A \cup A'$ بگیریم، آن‌گاه هر فضای مشتقی، یک فضای بستاری نیز هست [۴۸، ص. ۱۹۸]. ظاهراً او بر این باور بوده است که اگر A' را مجموعهٔ همهٔ نقاط p در X بگیریم که متعلق به بستار مجموعهٔ $A - \{p\}$ هستند، آن‌گاه هر فضای بستاری، یک فضای مشتقی است. اما به‌سادگی ملاحظه می‌شود که اگر X دقیقاً یک عضو داشته باشد، این ادعا صادق نیست، زیرا آن‌وقت X یک فضای بستاری هست، اما فضای مشتقی نیست.

یک سال بعد هاینریش تیتسه[۱]، توپولوژی‌دان اُتریشی، مقاله‌ای با عنوان «مباحثی در توپولوژی عمومی I. اصول موضوع برای شکل‌های مختلف مفهوم همسایگی» در مجلهٔ معتبر *ماتماتیشه آنالن*[۲]

[۱] Heinrich Tietze [۲] Mathematische Annalen

[۸۳] منتشر کرد. هاوسدُرف برای توصیف مجموعهٔ باز نه از کلمهٔ offen بلکه از کلمهٔ Gebiet استفاده کرده بود. تیتسه نام offen را از کتاب *درس‌هایی در نظریهٔ توابع حقیقی*[۱] تألیف کُنستانتین کاراتئودُری، آنالیزدان یونانی که در آلمان مشغول به کار بود [۲۱، ص. ۴۰]، برگرفت. کاراتئودُری از offen Menge یا *مجموعهٔ باز* به‌جای Gebiet استفاده می‌کرد [۸۳، ص. ۲۹۲]. کاراتئودُری پس از اثبات اینکه در فضای اقلیدسی nبُعدی، یک مجموعه بسته است اگر و تنها اگر متمم آن تنها شامل نقاط درونی باشد، افزوده است:

> «همان‌طور که خواهیم دید، دوگانی بین مجموعه‌های بسته و مجموعه‌هایی که صرفاً شامل نقاط درونی هستند، بسیار عمیق است. اگر مجموعه‌هایی را که فقط دارای نقاط درونی‌اند، با نامی که پیوندی آشکار با کلمهٔ «بسته» داشته باشد توصیف کنیم، بهترین بیان را برای فهم این دوگانی در دست خواهیم داشت. می‌خواهیم مجموعه‌ای را که فقط از نقاط درونی تشکیل شده است، *باز* بنامیم. این نامگذاری بیش از همه پذیرفتنی است، زیرا بعداً ثابت خواهیم کرد که یک مجموعه از نقاط، همزمان نمی‌تواند هم باز باشد هم بسته.» [۲۱، ص. ۴۰]

وقتی او بعداً این ادعا را ثابت کرد، حالتی را که مجموعهٔ نقاط، تهی یا کل فضا بود کنار گذاشت، زیرا این دو مجموعه به‌روشنی هم باز و هم بسته‌اند. لیکن بعداً معلوم شد که فضاهای توپولوژیکی (و حتی زیرفضاهایی از خط حقیقی) وجود دارند که دارای زیرمجموعه‌های هم باز هم بسته‌اند و اینها دقیقاً فضاهایی هستند که همبند نیستند.

به احتمال زیاد، دلیل دیگری که کاراتئودُری به‌جای استفاده از واژه‌ای که هاوسدُرف به‌کار برده بود (یعنی Gebiet)، واژه‌ای جدید برای *مجموعهٔ باز* ابداع کرد، این است که کاراتئودُری در کتابش نام Gebiet را بر مجموعه‌ای نهاده بود که هم باز و هم همبند باشد (البته تردید داریم که کاراتئودُری می‌دانسته که لبگ یک دهه پیش از آن، از عبارت «مجموعهٔ باز» استفاده کرده است).

تیتسه می‌خواست مجموعه‌ای از اصول موضوع برای فضای همسایگی بیابد که به‌جای همسایگی به‌عنوان مفهوم اولیه، بر پایهٔ مفهوم *مجموعهٔ باز* بیان شود. او این کار را با بیان اصولی که بسیار به اصول (الف)–(ت) هاوسدُرف نزدیک بود، انجام داد. بنابراین تیتسه آنچه را که ما O–*فضا* خواهیم نامید، تعریف کرد و این، مجموعه‌ای است که عضوهایش *نقطه* نامیده می‌شوند و در چهار شرط زیر صدق می‌کند:

(الف) هر نقطهٔ x متعلق به دست‌کم یک مجموعهٔ باز است؛

(ب) اگر U و V مجموعه‌هایی باز با دست‌کم یک نقطهٔ مشترک باشند، آنگاه $U \cap V$ یک مجموعهٔ باز است؛

(پ) اگر هر نقطهٔ x از A عضوی از یک زیرمجموعهٔ باز A باشد، آنگاه A باز است؛

---
[۱] Vorlesungen über Reelle Funktionen

(ت) اگر x و y نقاط متمایز باشند، آن‌گاه یک مجموعهٔ باز مانند U شامل x و یک مجموعهٔ باز مانند V شامل y وجود دارد به گونه‌ای که U و V جدا از هم هستند [۸۳، ص. ۲۹۴].

تیتسه ملاحظه کرد که در یک فضای همسایگی، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های باز (یعنی زیرمجموعه‌هایی از فضا که فقط از نقاط درونی تشکیل شده‌اند) یک O–فضا است. به‌عکس، اگر در یک O–فضا همهٔ مجموعه‌های باز شامل نقطهٔ x را همسایگی‌های x محسوب کنیم، آن‌وقت خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که هر یک، همسایگیِ نقطه‌ای از فضا است، یک فضای همسایگی است.

هدف اصلی مقالهٔ تیتسه، صورت‌بندی و بررسی اصول موضوع جداسازی بود که از اصل موضوع (ت)ی هاوسدُرف قوی‌تر بودند. از زمان چاپ کتاب آلکساندرُف و هوپف [۳]، اصل موضوع هاوسدُرف (ت) به اصل $T_۲$ مشهور شد در حالی که سه اصل موضوع جداسازی قوی‌تر تیتسه، امروزه عموماً به نام‌های اصول $T_۳$، $T_۴$ و $T_۵$ شناخته می‌شوند. این چهار اصل موضوع جداسازی حاکی از وجود دو مجموعهٔ باز به‌ترتیب، شامل دو نقطهٔ متمایز ($T_۲$)، یک نقطه و یک مجموعهٔ بستهٔ ناتهی که شامل آن نقطه نباشد ($T_۳$)، دو مجموعهٔ بستهٔ ناتهی جدا از هم ($T_۴$) و دو مجموعهٔ ناتهی جدا از هم که هیچ‌کدام شامل نقطه‌ای حدی از دیگری نباشد ($T_۵$)، هستند [۸۳، ص. ۳۰۱].

دو سال بعد توپولوژی‌دان روسی، پاول آلکساندرُف[۱]، مقاله‌ای در باب توپولوژی فضاهای اقلیدسی در همان مجله منتشر کرد. در آن مقاله او تعریفی بسیار ساده‌تر از تعریف تیتسه برای فضاهای همسایگی هاوسدُرف برحسب مجموعهٔ باز (که آلکساندرُف برای آن از واژهٔ Gebiet استفاده کرد) ارائه داد:

(۱) اشتراک دو مجموعهٔ باز، باز است و اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های باز، باز است؛

(۲) هر دو نقطهٔ متمایز، در مجموعه‌های باز جدا از هم قرار دارند [۲، ص. ۲۹۸].

(اگر اصل دوم آلکساندرُف حذف می‌شد، اصل اولش، فضای توپولوژیک را به‌طور دقیق تولید نمی‌کرد، زیرا ممکن بود هیچ مجموعهٔ بازی موجود نباشد یا تنها مجموعهٔ باز، تهی باشد و نه کل فضا.)

۱۲. فضاهای توپولوژیک: شِرپینسکی و کوراتُفسکی

یک سال پس از مقالهٔ آلکساندرُف در مجلهٔ *ماتماتیشه آنالن*، واتسلاف شِرپینسکی[۲]، توپولوژی‌دان لهستانی، تحلیلی مفصل ارائه داد از اینکه چگونه ایدهٔ *مجموعهٔ مشتق* را می‌توان به‌عنوان پایه و اساس تعریفِ توپولوژی قرار داد. این باعث شد کار او در چارچوب همهٔ کارهایی قرار گیرد که در بیست سال گذشته انجام شده بودند:

> «پس از رسالهٔ فرِشه، تلاش‌های متعددی برای بنا نهادن توپولوژی (تحلیل مکان) بر این یا آن مفهوم اولیه را دیده‌ایم. برای مثال، بر پایهٔ حد (فرِشه)، نقطهٔ انباشتگی (ریس)، فاصله یا

[۱] Pavel Aleksandrov [۲] Waclaw Sierpiński

> همسایگی (هاوسدُرف و فرِشه) و بستار (کوراتفسکی). هدف این مقاله این است که نشان دهیم چگونه با اختیار کردنِ مجموعهٔ مشتق به‌عنوان مفهوم اولیه، می‌توان توپولوژی را ایجاد کرد.» [۷۷، ص. ۳۲۱]

برای مجموعهٔ مفروض E، عملگر «مجموعهٔ مشتق» به‌چشم تابعی از خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های E به خودش نگریسته می‌شد. نخستین هدف شِرپینسکی این بود که نشان دهد با در نظر گرفتن هر تابع دلخواهی که در ویژگی‌های عملگر «مجموعهٔ مشتق» صدق کند، می‌توان تعدادی قابل توجه توپولوژی به‌دست آورد. با استفاده از چنین عملگر دلخواهی روی زیرمجموعه‌های E، او توانست منظورش را از مجموعهٔ بسته، در خود *چگال بودن* یک مجموعه، مجموعهٔ تام، مجموعهٔ همبند و همچنین مفهوم پیوستگی تابع $f : E \longrightarrow E$ در یک نقطه یا همانریختی بودن آن، بیان کند. او توانست ثابت کند که تصویر پیوستهٔ یک مجموعهٔ همبند، همبند است و در خود چگال بودن، یک ناوردای توپولوژیک است. سپس بررسی کرد که اگر عملگر «مجموعهٔ مشتق»، *یکنوا* فرض شود، یعنی اگر $A \subseteq B \subseteq E$، آنگاه $A' \subseteq B' \subseteq E$، چه نتایج دیگری به‌دست خواهد آمد. با افزودنِ این فرض، نتیجه می‌شد که اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های بسته، بسته است؛ اجتماع هر خانوادهٔ ناتهی از مجموعه‌های در خود چگال، یک مجموعهٔ در خود چگال است؛ بستار یک مجموعهٔ همبند، همبند است و سرانجام، اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های همبند که هر جفت از آنها اشتراک داشته باشند، همبند است [۷۷، صص. ۳۲۱–۳۳۴].

شِرپینسکی در بخش آخرِ مقاله‌اش رویکردی متفاوت اختیار کرد و مفهوم *مجموعهٔ بسته* را به‌عنوان تنها مفهوم اولیه در نظر گرفت. سپس او یک مجموعهٔ ناتهی دلخواه E و یک خانوادهٔ دلخواه $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های E را در نظر گرفت که تنها در دو اصل موضوع زیر صدق می‌کرد:

(۱) مجموعهٔ E بسته است؛

(۲) اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های بسته، بسته است.

بنابراین عضوهای $\mathcal{F}$ همان *مجموعه‌های بسته* در E بودند. او مجموعهٔ E به‌همراه یک چنین خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌هایش را یک F–فضا نامید. سپس ثابت کرد که مجموعهٔ E، یک F–فضا است اگر و تنها اگر E دارای یک عملگر مشتق یکنوا باشد (در اینجا مشتق مجموعهٔ A برابر با مجموعهٔ همهٔ عضوهای p از E در نظر گرفته می‌شد که هر مجموعهٔ بسته حاوی $A - \{p\}$، شامل p باشد). او همچنین مجموعه‌ای از اصول موضوع برای عملگر بستار ارائه داد به‌طوری که E در این اصول موضوع صدق می‌کرد اگر و تنها اگر E یک F–فضا بود (در این حالت یک مجموعه، بسته در نظر گرفته می‌شد هرگاه با بستارش برابر بود).

ردهٔ F–فضاهای شِرپینسکی (و معادل‌های آنها برحسب مجموعهٔ مشتق یا بستار) نسبت به فضاهای همسایگیِ هاوسدُرف و فضاهای بستاریِ کوراتُفسکی وسیع‌تر بود؛ به این معنی که هر فضای همسایگی

هاوسدُرف یک فضای بستاری کوراتُفسکی (به زبان امروزی، یک فضای توپولوژیک) بود و هر فضای بستاری کوراتُفسکی یک F–فضای شِرپینسکی بود. اما F–فضاهایی هم وجود داشتند که فضای بستاری نبودند و همچنین فضاهای بستاری وجود داشتند که فضای همسایگی نبودند. شِرپینسکی متذکر شد که اگر به اصل موضوع یکنوایی برای «عملگر مشتق»، فرض‌های

(۱) $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$ و

(۲) برای هر نقطهٔ p، $\{p\}'$ تهی است

را اضافه کنیم، آن‌گاه نتیجه می‌شود که اجتماع دو مجموعهٔ بسته، بسته است و قضیهٔ کانتور برقرار است (یعنی اشتراک یک دنبالهٔ نامتناهی نزولی از مجموعه‌های ناتهی، فشردهٔ فرِشه و بسته، ناتهی است) و قضیهٔ بُرل نیز برقرار است (یعنی اگر مجموعهٔ بسته و فشردهٔ فرِشهٔ A با یک خانوادهٔ شمارا مانند S از مجموعه‌های باز پوشیده شود، آن‌گاه A با یک زیرخانوادهٔ متناهی از S نیز پوشانده می‌شود) [۷۷، ص. ۳۳۶]. اگر به این سه اصل موضوع این فرض را نیز اضافه کنیم که مجموعهٔ مشتق هر مجموعه، بسته است، آن‌گاه آنچه که فرِشه H–فضا نامید، به‌دست می‌آید.

چندی پس از آن، شِرپینسکی کتابی به زبان لهستانی با عنوان *توپولوژی عمومی*[۱] منتشر [۷۸] و خودش درکانادا آن را به انگلیسی ترجمه کرد [۷۹]. در این کتاب، او خود را پیرو فرِشه (و نه هاوسدُرف) مطرح می‌کند و *مجموعهٔ باز* را به‌عنوان مفهوم اولیه قرار می‌دهد. او در سال ۱۹۲۸ در مقدمهٔ کتابش می‌نویسد: «به نظر می‌رسد که تعریف توپولوژی به روش اصل‌موضوعی بر مبنای مجموعهٔ باز (به‌عنوان مفهوم اولیه) برای ما ساده‌تر و شهودی‌تر از دیگر روش‌های اصل‌موضوعی است که به آن اشاره خواهد شد.» [۷۹] شِرپینسکی در فصل اول کتابش تعداد محدودی اصول موضوع برای مجموعه‌های باز معرفی و سپس در هر یک از شش فصل بعدی، یک یا چند اصل موضوع دیگر اضافه می‌کند. برای یک مجموعهٔ دلخواه K اصول موضوعی که او کار را با آنها شروع کرد، عبارت‌اند از:

(۱) مجموعهٔ تهی باز است؛

(۲) K مجموعهٔ باز است؛

(۳) اجتماع هر خانواده از زیرمجموعه‌های باز K، مجموعه‌ای باز است [۷۹].

با این اصول موضوع، او قضیه‌هایی را که در [۷۷] برای F–فضاها اثبات کرده بود، نتیجه گرفت. در فصل دوم، شِرپینسکی دو اصل موضوع دیگر اضافه می‌کند:

(۴) اگر p و q دو عضو متمایز K باشند، آن‌گاه مجموعه‌ای باز شامل p وجود دارد که شامل q نیست؛

(۵) اشتراک دو مجموعهٔ باز، مجموعه‌ای باز است [۷۹].

[۱] Topologia Ogólna

اصل‌های (۱) تا (۳) و (۵) همان‌هایی بودند که سرانجام به تعریفی استاندارد برای فضای توپولوژیک تبدیل شدند. اصل موضوع (۴) یک اصل جداسازی بود (و امروزه T_1 نامیده می‌شود) که توسط فرِشه [۳۵، ص. ۳۶۶] برحسب همسایگی‌ها صورت‌بندی شده بود و از اصل جداسازی هاوسدُرف (ت) ضعیف‌تر بود. سه اصل موضوع بعدی شِرپینسکی (به‌ترتیب در فصل‌های ۳، ۴ و ۵) یکی نسخه‌ای از اصل دوم شمارش‌پذیری هاوسدُرف بود:

(۶) یک خانوادهٔ شمارای S از مجموعه‌های باز مانند W_1، W_2، . . . موجود است به‌طوری که هر مجموعهٔ باز، اجتماعی از یک زیرخانوادهٔ S است [۷۹، ص. ۴۰]؛

و بقیه دو اصل موضوع جداسازی (به‌ترتیب، T_2 و T_3) بودند که به‌کمک آنها توانست لم معروف اوریسون را ثابت کند. این لم شرایطی را ارائه می‌دهد که تحت آنها برای هر دو مجموعهٔ بسته و جدا از هم مانند A و B در یک فضای توپولوژیک، تابعی پیوسته وجود داشته باشد به‌طوری که مقدارش روی A برابر با ۰ و روی B برابر با ۱ باشد [۷۹، صص. ۵۳، ۶۵، ۷۰].

شِرپینسکی در دو فصل آخر، رهیافتی متفاوت برگزید. او کار را با مفهوم فضای متری آغاز کرد و قضیهٔ متری‌سازی اوریسون (که شرایطی ارائه می‌دهد که تحت آنها یک فضای توپولوژیک، فضای متری می‌شود) را ثابت کرد و به بحث دربارهٔ فضای صفر بُعدی بِر پرداخت. آخرین اصل موضوع شِرپینسکی که به اصول مربوط به فضاهای متری افزوده شد، این بود که هر مجموعهٔ کراندار، فشردهٔ فرِشه است. او ثابت کرد که این فرض معادل با قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس است: *هر مجموعهٔ کراندار نامتناهی، دست‌کم یک نقطهٔ حدی دارد* [۷۹، ص. ۱۱۸]. به‌کمک این فرض توانست نتایجی عمیق دربارهٔ ساختار سلسله‌مراتبیِ مجموعه‌های بُرل در فضاهای متری به‌دست آورد.

اندک زمانی پیش از انتشار ترجمهٔ کتاب شِرپینسکی، کوراتُفسکی نیز کتابی دربارهٔ توپولوژی به زبان فرانسوی به رشتهٔ تحریر درآورد [۴۹]. او در این کتاب، اصول موضوع بیان‌شده در مقالهٔ سال ۱۹۲۲ خود را با افزودن یک اصل و حذف اصلی دیگر، اساس کار قرار داد. اصل اضافه‌شده این است که: «به‌ازای هر نقطهٔ p در فضا، مجموعهٔ $\{p\}$ با بستارش برابر است.» [۴۹، ص. ۱۵] اصل حذف‌شده همان اصل (۲) است که می‌گوید برای هر مجموعهٔ A در فضا، A زیرمجموعهٔ بستارِ A است. دلیل حذف این اصل این بود که اکنون می‌توانست این اصل را با استفاده از دیگر اصول موضوع به‌همراه اصل اضافه‌شده، ثابت کند. او در فصل‌های بعدی کتاب، اصل موضوع چهارم (اصل موضوع جداسازی تیتسه T_4) و اصل موضوع پنجم (دومین اصل شمارش‌پذیری هاوسدُرف) را نیز برمی‌گزیند [۴۹، صص. ۹۵، ۱۰۰]. در سایهٔ قضیهٔ متری‌سازی اوریسون، فضاهایی که در هر پنج اصل صادق بودند، با فضاهای متری جدایی‌پذیر همانریخت می‌شدند. کتاب با قضیه‌هایی دربارهٔ مجموعه‌های تصویری در فضاهای متری جدایی‌پذیر کامل به پایان می‌رسد.

بنابراین هم کتاب شِرپینسکی و هم کتاب کوراتُفسکی با بررسی فضاهای متری جدایی‌پذیر کامل به پایان می‌رسند. تفاوت بین این دو کتاب در آخرین اصل موضوع شِرپینسکی نمایان می‌شود که ادعا می‌کرد هر مجموعهٔ نامتناهی کراندار دست‌کم یک نقطهٔ حدی دارد. در حالی که این اصل برای فضاهای اقلیدسی متناهی‌بُعد صادق بود، بعضی فضاهای نامتناهی‌بُعد مانند فضای هیلبرت را با اینکه کامل و جدایی‌پذیر بودند، از دامنه بحث خارج می‌کرد.

۱۳. فضاهای توپولوژیک در آنالیز حقیقی و توپولوژی ترکیبیاتی

شگفت‌آور است که فضاهای توپولوژیک خیلی زود توسط ریاضیدانی که کمترین ارتباط را با توپولوژی‌دانان لهستانی داشت، به‌عنوان چارچوبی برای آنالیز حقیقی مورد استفاده قرار گرفت. او هانس هان[۱] از دانشگاه وین بود که کتابی [۳۶] دربارهٔ توابع حقیقی به رشتهٔ تحریر درآورد و فصل دوم آن را به فضاهای توپولوژیک و فضاهای متری اختصاص داد. هانس هان، مجموعهٔ باز را به‌عنوان مفهوم اولیه برای تعریف فضای توپولوژیک برگزید و البته شاهد او در انجام این کار، مقالهٔ تیتسه [۸۳] بود. اما اصول موضوع هان برای مجموعه‌های باز با اصول موضوع تیتسه متفاوت بودند و شامل سه‌تا از اصول موضوع آلکساندرُف [۲] می‌شدند که در بالا به آن پرداختیم (دو اصل دیگر هان، نتیجه‌هایی بی‌درنگ از اصول موضوع آلکساندرُف بودند اما او هیچ اشاره‌ای به مقالهٔ آلکساندرُف نکرد). این احتمال وجود دارد که هان، اصول موضوع آلکساندرُف را پیش خود دوباره کشف کرده باشد.

به‌عکس، آنقدرها هم تعجب‌آور نبود که فضاهای توپولوژیک در توپولوژی ترکیبیاتی کاربرد پیدا کنند. اما این جریان، در آغاز نسبتاً به‌کُندی رخ داد. کتاب آزوالْد وِبْلِن[۲] به انگلیسی دربارهٔ تحلیل مکان [۸۴]، همچون کتاب سُلُمون لِفشتس[۳] [۵۳] که به زبان فرانسوی و در همان موضوع نوشته شده بود، به n-حجره‌ها در فضای اقلیدسی nبُعدی می‌پرداخت و هیچ اشاره‌ای به فضاهای توپولوژیک نمی‌کرد. لِفشتس پیوستگی یک تابع را دانسته فرض می‌کرد. در عوض وِبْلِن، تابع f از X (یک حجره با مرزش) به‌توی Y (یک حجره با مرزش) را پیوسته تعریف کرد هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ A از X و هر نقطهٔ حدی p از A، $f(p)$ یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $f(A)$ باشد [۸۴، ص. ۲] (تعریف وِبلِن نتیجه‌ای غیرمنتظره داشت که او ظاهراً متوجه آن نبوده است: با این تعریف، تابع ثابت پیوسته نیست).

در طی چند سال، وضعیت در توپولوژی ترکیبیاتی دگرگون شد. لِفشتس در کتاب خود به زبان انگلیسی با نام *توپولوژی* [۵۴] که جایگزین کتاب قبلی‌اش به زبان فرانسوی شده بود، با نظر به «فضاهای همسایگی» هاوسدُرف [۵۴، ص. ۴] کار را آغاز کرد:

> «*توپولوژی یا تحلیل مکان* معمولاً مطالعهٔ ویژگی‌هایی از فضا یا پیکربندی‌های آن تعریف می‌شود که تحت تبدیل‌های پیوسته، ناوردا هستند. اما این *فضاها* و تبدیل‌های *پیوسته* روی

[۱] Hans Hahn [۲] Oswald Veblen [۳] Solomon Lefschetz

> آنها چه هستند؟ این فضا هر چه باشد، به‌سختی می‌توان آن را با چیزی که با شهود ما از مفهومِ فضا همخوانی داشته باشد، توصیف کرد مگر اینکه دارای ویژگی زیر باشد... : به هر نقطه، بخشی از فضا که نقطه در آن گنجانده شده است، الصاق شود.» [۵۴، ص. ۱]

او این بخش‌های فضای R را *همسایگی* نامید و در آغاز، آنها را تنها به اصل موضوع اول هاوسدُرف ملزم کرد: هر نقطهٔ p از R به دست‌کم یک همسایگی p تعلق دارد و هر همسایگی p شامل p است. او می‌نویسد: «حیرت‌آور است که بر پایهٔ همین اصل موضوع ضعیف چقدر امکان پیشرفت وجود دارد.» [۵۴، ص. ۲] به‌ویژه از این اصل موضوع برای تعریف مفهوم نقطهٔ درونی و نقطهٔ مرزی یک مجموعه، مجموعهٔ بسته، مجموعهٔ باز، بستار یک مجموعه، نقطهٔ حدی یک مجموعه و زیرمجموعهٔ چگال در فضا استفاده کرد. اما عجیب این بود که او یک تبدیل از چنین مجموعهٔ R به فضای S را پیوسته تعریف کرد اگر و تنها اگر تصویر هر زیرمجموعهٔ باز R، در S باز باشد [۵۴، ص. ۳]. این با تعریفِ هاوسدُرف از پیوستگیِ تابع مغایر بود و پیامد آن، دوباره این بود که تابع ثابت، پیوسته نیست. اما مانند تعریف عجیب و غریب وِبْلِن در بالا، تعریف لِفشتس برای پیوستگی، منجر به تعریفی از همانریختی شد که با تعریف استاندارد کنونی معادل است.

لِفشتس اشاره‌ای گذرا به سه اصل دیگر هاوسدُرف کرد و مبحث فضاهای همسایگی [۵۴، ص. ۶] را با قضیهٔ متری‌سازی اوریسون به پایان رساند که می‌گوید یک فضای هاوسدُرف شمارای نوع دوم مترپذیر است اگر و تنها اگر در اصل T_3ی تیتسه صدق کند.

در سال ۱۹۴۲ لِفشتس با انتشار کتابی مبسوط با عنوان *توپولوژی جبری*، به مبحث فضاهای توپولوژیک بازگشت. در این کتاب، توصیفی جامع از فضاهای توپولوژیک بر پایهٔ اصول موضوع استاندارد کنونی برای مجموعه‌های باز، ارائه داد. بنابراین مبنای کار در این کتاب، فضاهایی کلی‌تر از فضاهای همسایگی هاوسدُرف هستند [۵۵، صص. ۵–۶]. آنچه را که او در سال ۱۹۳۰ *تبدیل پیوسته* نامیده بود این بار به‌درستی، *تبدیل باز* نامید [۵۵، ص. ۷]. سپس یک تبدیل را پیوسته نامید هرگاه وارونش، باز باشد که این، با تعریف هاوسدُرف و تعریف کنونیِ پیوستگی مطابقت داشت. در آن کتاب همبندی، فشردگی، هموتوپی و دگردیسی، همگی در بستر فضاهای توپولوژیک مجرّد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

آنچه هم‌اکنون فضای توپولوژیک می‌نامیم، در آلمان نخستین بار در کتابی دربارهٔ *توپولوژی ترکیبیاتی*[1] تألیف هِربرت زایفرت و ویلیام ترِلفال[2] [۷۶] ظاهر شد که با کتاب‌های لِفشتس [۵۴] و کوراتُفسکی [۴۹] آشنا بودند. آنها نیز همانند لِفشتس، با یک «فضای همسایگی» کلی‌تر از فضای هاوسدُرف که تنها در اصل اول هاوسدُرف صدق می‌کرد، کار را آغاز کردند. اما بلافاصله اصل دومی را اضافه کردند که در حالت کلی برای مفهوم همسایگی هاوسدُرف درست نبود. این دومین اصل بیان می‌کرد که برای هر زیرمجموعهٔ

[1] Lehrbuch der Topologie [2] Herbert Seifert and William Threlfall

V از فضای M، اگر U یک همسایگی p و زیرمجموعه‌ای از V باشد، آن‌گاه V یک همسایگی p است [۷۶، ص. ۲۱] (در اصطلاح امروزی، آنچه که هاوسدُرف خانوادهٔ همسایگی‌های یک فضا نامید، *پایهٔ همسایگی* نامیده می‌شود و همسایگی‌ها در اصل دوم زایفرت و ترِلفال صدق می‌کنند). آنها در یادداشت پایانی، توضیح دادند که این مفهوم که بسیار کلی‌تر از فضای همسایگی بود، برای تعریفِ مفاهیم اساسی توپولوژی یعنی مجموعه‌های باز و بسته، تابع پیوسته و همانریختی کافی است اما در کتابشان تأکید کردند که مفهوم «فضای همسایگی» صرفاً ایستگاهی در مسیر کشف مفهوم ترکیبیاتیِ مهم‌ترِ *همبافت* است [۷۶، ص. ۳۱۶]. بنابراین در مورد تعریف فضاهای توپولوژیک، چندان تفاوتی بین کتاب زایفرت و ترِلفال با کتاب قبلی لِفشتس [۵۴] وجود نداشت.

لکن از دیدگاه آلکساندرُف و هوپف [۳]، فضاهای توپولوژیک هستهٔ مرکزی فضاهای توپولوژیک مجرّد و موضوع خاص‌ترِ توپولوژی ترکیبیاتی بودند. آلکساندرُف و هوپف نیز همانند لِفشتس [۵۴] و زایفرت و ترِلفال [۷۶]، با مفهومی از فضای توپولوژیک آغاز کردند که کلی‌تر از فضاهای همسایگی هاوسدُرف و همچنین کلی‌تر از فضاهای توپولوژیک مورد استفادهٔ امروزی بود. آلکساندرُف و هوپف، متأثر از اصول کوراتُفسکی [۴۸] برای عملگر بستار بودند اما برخلاف کوراتُفسکی، فقط الزام کردند که این عملگر به هر زیرمجموعهٔ A از فضا، مجموعهٔ $\overline{A}$ را نسبت دهد و لازم نبود که A پیوند خاصی با بستار A داشته باشد. آنها چنین فضایی را *فضای توپولوژیک عمومی* نامیدند تا آن را از *فضای توپولوژیک* متمایز کنند و در چنین فضایی منظور از بسته بودن و باز بودن یک زیرمجموعه را تعریف کردند [۳، ص. ۲۶]. آنها پس از مبحث فضاهای متری و ارائهٔ مثال‌ها، فضای توپولوژیک را آن فضای توپولوژیک عمومی تعریف کردند که در اصول موضوع بستار کوراتُفسکی [۴۸] صدق کند. سپس ثابت کردند که هر چنین فضای توپولوژیکی در همهٔ اصول فضاهای همسایگی هاوسدُرف بجز احتمالاً اصل جدایی‌پذیری (که بیان می‌کرد هر دو نقطهٔ متمایز در همسایگی‌های جدا از هم قرار دارند) صدق می‌کند [۳، صص. ۳۷–۴۳]. پیش از پرداختن به توپولوژی جبریِ همبافت‌ها، به‌تفصیل به بحث روی همهٔ اصول جدایی‌پذیری $T_۲$، $T_۳$، $T_۴$ و $T_۵$ و همچنین اصول ضعیف‌تر جدایی‌پذیری $T_۱$ (منسوب به فرِشه) و $T_۰$ (منسوب به کُلموگرُف) پرداختند [۳، صص. ۵۱–۷۷]. این بحث در قضیهٔ متری‌سازی اوریسون (که در بالا بیان شد) به نقطهٔ اوج خود رسید. سرانجام، آنها اهمیت ویژهٔ فضاهای توپولوژیک فشردهٔ فرِشه را تصدیق کرده و یک فصل را به آنها اختصاص دادند [۳، صص. ۸۳–۱۲۲].

در انگلیس، نخستین کتابی که به‌تفصیل به بحث دربارهٔ توپولوژی پرداخت، کتاب *مبانی توپولوژی مجموعهٔ نقاط صفحه* [۶۵] تألیف نیومَن بود. کتاب اساساً برحسب فضاهای متری تنظیم شده بود اما او شرح مختصری هم دربارهٔ آنچه *فضای توپولوژیک مجرّد* می‌نامید، آورده بود که در آن، به‌تعبیر خودش، پنج مفهوم اساسی توپولوژی (مجموعهٔ مشتق، بستار یک مجموعه، مجموعهٔ بسته، مجموعهٔ باز و دنبالهٔ

همگرا) مقید به هیچ اصل موضوعی نبودند. به‌عکس، در تعریفِ آنچه که *فضای توپولوژیک* نامید، یکی از این پنج مفهوم را به‌عنوان پایه گرفت و چند اصل موضوع دربارهٔ آن وضع کرد و سپس چهار مفهوم دیگر را برحسب همان مفهوم پایه، تعریف نمود. این تمایز بین *فضای توپولوژیک مجرّد* و *فضای توپولوژیک* در کتاب نیومن، شبیه تمایزی است که آلکساندرُف و هوپف [۳] بین *فضاهای توپولوژیک عمومی* و *فضاهای توپولوژیک* گذاردند و نیومن هم به کتاب آنها ارجاع می‌دهد. نیومن تنها یک رده از فضاهای کلی‌تر از فضاهای متری را مطرح کرد و آنها را *فضاهای همگرایی* نامید که بر پایهٔ مفهوم همگرایی دنباله‌ها و L-فضاهای فرِشه بنا می‌شدند [۶۵، صص. ۴۸–۴۹]. اما در یادداشت پایانی، فضاهای توپولوژیک را با استفاده از اصول کوراتُفسکی برای بستار تعریف کرد [۶۵، ص. ۲۰۷].

نیومن در دومین ویرایش کتابش [۶۶]، به مطالعه روی فضاهای متری ادامه داد اما فضاهای توپولوژیک را بر پایهٔ چهار اصل موضوع استاندارد کنونی برای مجموعه‌های باز، تعریف کرد [۶۶، ص. ۲۰۴]. به نظر می‌رسد که این تغییرات تحت تأثیر رهیافت بورباکی به توپولوژی بوده باشد که نیومن به آن ارجاع می‌دهد (شرح آن در ادامه آمده است).

در مقابل، در کتاب *توپولوژی تحلیلی* تألیف گوردُن وایبِرْن[۱]، توپولوژی‌دان آمریکایی، از همسایگی‌ها برای تعریف فضای توپولوژیک استفاده شده است. او اصول موضوع هاوسدُرف را به‌کار گرفت منتها اصل T_2ی هاوسدُرف را با اصل ضعیف‌ترِ T_1 جایگزین کرد [۹۳، صص. ۱–۲] اما بلافاصله این فرض را افزود که فضای مورد بحث، T_3 و شمارای نوع دوم است؛ انگار داشت فقط فضاهای متری جدایی‌پذیر را مطالعه می‌کرد.

۱۴. تعریف فضای توپولوژیک بر اساس مجموعهٔ باز

گروهی از ریاضیدانان فرانسوی که دسته‌جمعی به *نیکُلای بورباکی* مشهورند، در سال‌های ۱۹۳۵ تا ۱۹۳۸ تصمیم گرفتند به توپولوژی عمومی بپردازند. آنها با ترکیبی از مفاهیم برگرفته از فرِشه، ریس، وایل، هاوسدُرف و آلکساندرُف شروع کردند. بورباکی‌ها امیدوار بودند که کتاب آلکساندرُف و هوپف [۳] مشکلات ساختاری را تا اندازه‌ای برایشان حل و فصل کند. پیش‌نویس ارسالی توسط آندره وِی[۲] به بورباکی در سال ۱۹۳۶، با فضاهای متری آغاز می‌شد و همانند روشی که آلکساندرُف و هوپف در پیش گرفته بودند، بر لزوم بررسی فضاهای توپولوژیک کلی برحسب عملگر بستار کوراتُفسکی تأکید داشت [۶، ص. ۳۴۸]. در مقابل، کلود شِوالی[۳] تأکید داشت که: «فضاهای توپولوژیک کلی باید پیش از فضاهای متری معرفی شوند به این دلیل که به نظر من، متر یک مفهوم بسیار چرند است» [۶، ص. ۳۵۱]. آندره وِی از پیش فرض کرده بود که فضاهای توپولوژیک در اصل T_0 صدق می‌کنند اما جای زیادی را به

[۱] Gordon Whyburn [۲] André Weil [۳] Claude Chevalley

اثبات هم‌ارزیِ دسته‌های گوناگون اصول موضوع برحسب مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، بستار و همسایگی‌ها اختصاص داده بود. باز هم شِوالی ابراز مخالفت کرد. او بر شروع مستحکم با اصول موضوع مربوط به مجموعه‌های باز و بیان بقیهٔ اصول در یک پیوست اصرار می‌ورزید. گروه تصمیم گرفت بحث را به‌جای اصول موضوع بستار، با اصول موضوع مجموعه‌های باز آغاز کند، زیرا مفهوم مجموعهٔ باز در تعریف پیوستگی نیز مورد استفاده قرار می‌گرفت [۶، ص. ۳۵۳] (البته این دلیل بی‌مزه‌ای است، زیرا پیوستگی را به‌جای مجموعه‌های باز، برحسب بستار هم می‌توان بیان کرد). در پیش‌نویس بعدی که آندره وِی در همان سال ۱۹۳۶ ارائه کرد، از اصول موضوع مجموعه‌های باز استفاده می‌شد و هیچ الزامی برای برقراریِ هیچ‌یک از اصول جدایی‌پذیری، نه T_0 و نه اصلی قوی‌تر از آن، نبود.

بورباکی در نخستین ویرایش چاپ‌شده [۱۲] از فصل «ساختارهای توپولوژیک»، از مجموعهٔ باز به‌عنوان مفهوم اولیه استفاده کرد و تنها اصل موضوع، با یک تغییر جزئی، همان اصلی بود که آلکساندرُف در سال ۱۹۲۵ بیان کرده بود: اشتراک هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های باز، باز است و اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های باز، باز است [۱۲، ص. ۱]. سپس ملاحظه کرد که از این دو اصل نتیجه می‌شود که مجموعهٔ تهی باز است (به‌عنوان اجتماع خانوادهٔ تهی از مجموعه‌ها) و کل فضا نیز باز است (به‌عنوان اشتراک خانوادهٔ تهی از مجموعه‌ها: البته این مستلزم قراردادی ویژه برای تعبیر اشتراک خانوادهٔ تهی از مجموعه‌ها است) [۱۲، صص. ۱–۲]. آندره وِی قبلاً در نخستین پیش‌نویس این فصل در سال ۱۹۳۶ این قرارداد را پیشنهاد داده بود. در دومین ویرایش این فصل [۱۳] و بعداً در چاپ کل کتاب، این اصول برای مجموعه‌های باز، بدون تغییر ماند.

با وجود این، پس از معرفی پالایه به‌عنوان شکلی کلی‌تر از همگرایی دنباله‌ها، بورباکی اصل T_2ی هاوسدُرف را مفروض گرفت، زیرا در هر فضای توپولوژیک اصل T_2 معادل با این گزاره است که یک پالایه نمی‌تواند بیش از یک نقطهٔ حدی داشته باشد؛ گزاره‌ای که بورباکی بر آن تأکید داشت [۱۲، ص. ۳۲] و [۱۳، ص. ۴۷].

در ایالات متحده، پرنفوذترین کتاب درسی برای چندین دهه (از سال ۱۹۵۵ به این سو) بدون شک کتاب *توپولوژی عمومی* تألیف جان کِلی[۱] بوده است. او در مقدمهٔ کتاب می‌نویسد: «دوستانم به‌سختی توانستند من را از نامیدن کتاب با عنوان *آنچه یک آنالیزدان جوان باید بداند*، باز دارند.» [۴۷] به‌ویژه کِلی بحث خود را بر پایهٔ مفهوم جدید *فضای توپولوژیک* (بدون پیش‌فرضِ اصول جداسازی) قرار داد که در آن، مجموعهٔ باز تنها مفهوم اولیه در نظر گرفته شده بود. کِلی با کار بورباکی آشنا بود و دقیقاً دو اصل موضوع بورباکی را برای مجموعه‌های باز اقتباس کرد [۴۷، ص. ۳۷]. البته در مطالعات بعدی روی توپولوژی، دو اصل اضافی دیگر (اینکه مجموعهٔ تهی و کل فضا باز هستند) به‌صراحت بیان می‌شد. این چهار اصل برای فضای توپولوژیک که صرفاً برحسب مجموعه‌های باز بیان شده بودند، بعداً به تعریفِ استاندارد فضای

[۱] J. L. Kelley

توپولوژیک تبدیل شدند. تعداد زیادی کتاب درسی در زمینهٔ توپولوژی عمومی در دهه‌های آخر قرن بیستم منتشر شدند و همهٔ آنها از همین چهار اصل استفاده کردند. تا آنجا که به توپولوژی عمومی مربوط می‌شد، رقابت برای اینکه کدام مفهوم بنیادی‌تر است («بقای اصلح»)، با تعریفِ جدید فضای توپولوژیک بر پایهٔ مجموعه‌های باز، پایان پذیرفت. فضاهای کلی‌تری که شِرپینسکی، آلکساندرُف و هوپف معرفی کرده بودند به کناری نهاده شدند تا به گوشه‌هایی از تاریخ توپولوژی تبدیل شوند.

۱۵. قطعهٔ آخر: وایرشتراس، توابع تحلیلی و مجموعه‌های باز

وقتی هاوسدُرف در سال ۱۹۱۴ مفهوم Gebiet یا مجموعهٔ *باز* را در یک فضای همسایگی تعریف کرد، در پاورقی جالبی افزود:

> «این با اصطلاح متداولی که وایرشتراس به‌کاربرده است و بنابر آن، مجموعهٔ باز لزوماً باید همبند باشد، همخوانی ندارد. در بیان ما، مجموعهٔ بازِ وایرشتراس، یک مجموعهٔ بازِ همبند است و آنچه ما مجموعهٔ باز می‌نامیم، در حالت کلی مجموعه‌ای از بازها یا اجتماعی از بازها است. با این حال، مجموعه‌ای که نقطهٔ مرزی ندارد، چنان بنیادی است که قطعاً به یک نام خاص نیاز دارد.» [۳۷، ص. ۲۱۵]

روشن نیست که چرا هاوسدُرف در به‌کار بردنِ کلمهٔ Gebiet برای مجموعهٔ بازِ همبند با وایرشتراس همراهی کرده است، زیرا هاوسدُرف به هیچ مقاله‌ای از وایرشتراس که در آن چنین کاربردی موجود باشد، اشاره نکرده است. با وجود این، شواهد فراوانی هست که نشان می‌دهند وایرشتراس از واژه‌ای دیگر برای توصیف آنچه اکنون مجموعهٔ بازِ همبند در فضای اقلیدسی nبُعدی نامیده می‌شود، استفاده کرده است. برای مثال، وایرشتراس در مقالهٔ *دربارهٔ توابع مختلط*[۱] از کلمهٔ «*پیوستار*»[۲] برای بیان این معنی استفاده کرده است [۹۰، ص. ۷۲۱] و میتاگ–لِفلِر [۶۰، ص. ۲] هم کاربرد *پیوستار* را در این معنی از او اقتباس کرده است. به‌علاوه وایرشتراس هم در درس‌گفتارهایش دربارهٔ توابع تحلیلی در سال ۱۸۸۶، از کلمهٔ *پیوستار* به همین معنی استفاده می‌کند [۹۱، ص. ۶۵].[۳] زیگمونت–شولْتس[۴] که مجموعهٔ این درس‌های وایرشتراس را تدوین کرده است، دربارهٔ کاربرد این کلمه توسط وایرشتراس می‌نویسد:

> «مقصود وایرشتراس از *پیوستار*، یک مجموعهٔ بازِ همبند در $\mathbb{R}^n$ بود؛ آنچه که امروزه به Gebiet موسوم است.» [۹۱، ص. ۲۴۰]

[۳] از درس‌های سال ۱۸۷۸ وایرشتراس مشهود است که او در دوره‌ای کوتاه، پیوستار را به معنای مجموعه‌ای باز که لزوماً همبند نیست، به‌کار می‌برده است [۹۱، ص. ۸۳] اما در همین دوره هم او بیشتر به مؤلفه‌های همبندیِ مجموعه‌های باز علاقه‌مند بوده است. از سال ۱۸۸۰ به بعد، کلمهٔ پیوستار به معنای مجموعهٔ بازِ همبند برای او تثبیت شده بود و در مابقی آثارش استمرار داشت.

[۱] Zur Functionenlehre [۲] continuum [۴] R. Siegmund-Schultze

سرانجام، آزگود[۱] در سال ۱۹۰۱ در مقاله‌ای دربارهٔ توابع تحلیلی یک متغیرهٔ مختلط در *دانشنامهٔ آلمانی علوم ریاضی*[۲]، پیوستار[۳] را یک مجموعهٔ بازِ همبند در صفحهٔ مختلط تعریف می‌کند و متذکر می‌شود که این تعریف با آنچه مورد نظر وایرشتراس بوده است، هماهنگی دارد [۶۷، ص. ۹]. جالب اینکه آزگود در ویرایش کتاب درسی‌اش دربارهٔ آنالیز مختلط به سال ۱۹۲۸، یک مجموعه در صفحهٔ مختلط را پیوستار دو بُعدی می‌نامد هرگاه همبندِ مسیری باشد و همهٔ نقاطش، نقطهٔ درونی باشند [۶۸، ص. ۱۶۲].

انگیزهٔ وایرشتراس از کاربرد کلمهٔ «پیوستار» وقتی روشن می‌شود که بفهمیم او چگونه تابع تحلیلی را تعریف می‌کند. او «عنصر» چنین تابعی را یک سری توانی برحسب $z-a$ تعریف می‌کند که این سری توانی در درون دایره‌ای به مرکز a همگرا است. سپس دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای دیگر مانند b را در نظر می‌گیرد که با دایرهٔ قبلی همپوشانی دارد چنان‌که سری توانی برحسب $z-b$ در این دایره نیز همگرا است و مقدار آن در نقاط درونی اشتراک این دو دایره، با مقدار سری همگرا برحسب $z-a$ برابر است [۸۶، ص. ۷۲].

وایرشتراس از واژهٔ Gebiet به معنای دامنهٔ یک تابع از متغیر حقیقی بی‌کران هم استفاده کرد. او تمام مقادیری از تابع را که از درون دنباله‌ای از بازه‌های همپوشان قابل دستیابی بودند، *پیوستار* نامید و با استفاده از همسایگی‌های جعبه‌ای همپوشان به‌جای دایره‌ها و بازه‌ها، آن را به فضای nبُعدی نیز تعمیم داد. سپس متذکر شد که به‌آسانی می‌توان این فرآیند را به متغیرهای مختلط نیز انتقال داد [۸۹، ص. ۸۳].

با این حال، روشن است که در طول زمان، نحوهٔ به‌کارگیریِ این کلمات تغییر یافت به‌طوری که از کلمهٔ آلمانی Gebiet برای مجموعهٔ بازِ همبند (در آنالیز مختلط) استفاده شد. حدس ما این است که استفادهٔ کانتور از کلمهٔ پیوستار برای نامیدن مجموعهٔ تامِ همبند، در نهایت جانشین استفادهٔ وایرشتراس از همان کلمه در آنالیز مختلط شد و واژهٔ Gebiet در آلمانی (و Region در انگلیسی) جایگزین کلمهٔ «پیوستار» به‌تعبیر وایرشتراس برای مجموعهٔ بازِ همبند شد. این کشمکش بین تعبیر وایرشتراس (مجموعهٔ بازِ همبند) و تعبیر کانتور (مجموعهٔ تامِ همبند) از مفهوم پیوستار، در نامه‌هایی که کانتور و میتاگ–لِفلِر در سال ۱۸۸۳ رد و بدل کردند، آشکار است که در آنها میتاگ–لِفلِر بیشتر به تعبیر وایرشتراس متمایل است. اما در نامهٔ میتاگ–لِفلِر به کانتور به تاریخ ۱۱ مارس ۱۸۸۳، او به‌صراحت تعریفِ کانتور از پیوستار را برمی‌گزیند.

نیم قرن بعد، این کاربرد جدید به‌خوبی در میان آنالیزدانان آلمانی‌زبان جا افتاد و احتمالاً انگیزه‌شان از این کاربرد جدید، ریشه در کتاب تأثیرگذار کاراتئودُری با نام *درس‌هایی در نظریهٔ توابع حقیقی*[۴] داشته باشد که در آن، کاراتئودُری یک مجموعهٔ بازِ همبند را Gebiet و یک مجموعهٔ بستهٔ همبند را که شامل بیش از یک نقطه بود، پیوستار نامید [۲۱، صص. ۲۰۸، ۲۲۲]. جالب است که هاوسدُرف در ویرایش دوم کتابش در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، اصطلاحات خود را تغییر داد تا (تقریباً) با اصطلاحات کاراتئودُری

[۱] W. E. Osgood [۲] Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften [۳] Kontinuum [۴] Vorlesungen über Reelle Funktionen

هماهنگ شوند و به کتاب کاراتئودُری نیز ارجاع داد. اکنون از نظر هاوسدُرف، Gebiet یک مجموعهٔ بازِ همبند و پیوستار، یک مجموعهٔ بستهٔ همبند بود [۳۸، صص. ۱۵۰–۱۵۱]. هان، آنالیزدان اتریشی، در کتابش با نام *توابع حقیقی*[۱]، یک مجموعهٔ بازِ همبند را Gebiet و یک مجموعهٔ فشردهٔ همبند را پیوستار نامید [۳۶، ص. ۱۰۲] (این کار هان که در تعریف پیوستار، بسته بودن را با فشرده بودن عوض کرد، بعداً در توپولوژی متداول شد).

با استفاده از مقاله‌ای که آرنو دانژوا[۲] در سال ۱۹۱۰ منتشر کرد، می‌توانیم درکی از اینکه در فرانسه چگونه به این مباحث نگریسته می‌شد، به‌دست آوریم. در این مقاله، او به دو کلمهٔ آلمانی اشاره می‌کند: «مجموعه‌ای را که تنها شامل نقاط درونی است و همبند نیز هست، *پیوستار* (Gebiet) و اجتماع یک پیوستار با مرزش را، *دامنه* (Bereich) می‌نامیم.» [۲۷، ص. ۱۳۸] تعریفِ دانژوا از پیوستار با تعریفِ وایرشتراس و پیشتر از آن میتاگ–لِفلِر، مطابقت داشت. در همین زمان، بُرل یک مجموعهٔ بازِ همبند در صفحهٔ مختلط را *دامنهٔ وایرشتراس*[۳] نامید [۱۱، ص. ۱۰]. کمی پیشتر، ژُردان از واژهٔ فرانسویِ domaine برای مجموعهٔ بسته با درون ناتهی استفاده کرده بود [۴۶، ص. ۲۲].

در حال حاضر در ایالات متحده، کاربرد متداولِ واژهٔ «ناحیه»[۴] در آنالیز مختلط در معنیِ مجموعهٔ بازِ همبند است. برای مثال، لارْس آلفورس [۱، ص. ۵۷] آنالیزدان دانشگاه هاروارد و مارْسْدِن [۵۹، ص. ۷۰] آنالیزدان دانشگاه برکلی، این واژه را در همین معنی به‌کار برده‌اند. با این حال، کاربردِ واژهٔ «ناحیه» به معنیِ مجموعهٔ بازِ همبند، به هیچ‌روی همه‌گیر نیست. مثلاً اینار هیله[۵] در کتابش با نام «نظریهٔ توابع تحلیلی»، *ناحیه* را مجموعه‌ای باز به همراه زیرمجموعه‌ای (احتمالاً تهی) از مرزش و *دامنه* را مجموعه‌ای باز و همبندِ مسیری تعریف می‌کند: «به خواننده هشدار می‌دهیم که بسیاری از نویسندگان از واژهٔ ناحیه به‌جای آنچه ما دامنه می‌نامیم، استفاده می‌کنند و بقیه نیز هیچ تمایزی بین این دو واژه قائل نیستند.» [۴۰، ص. ۲۹]

مراجع

[1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, 3rd. edn., McGraw–Hill, New York,1979.

[2] Aleksandrov, P., Zur begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen topologie, *Mathematische Annalen*, **94** (1925), 296–308.

[3] Aleksandrov, P. S., Hopf, H., *Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[4] Aull, C. E., Lowen, R. (eds.), *Handbook of the History of General Topology*, 3 vols., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997–2001

[۱] Reelle Funktionen [۲] Arnaud Denjoy [۳] domaine de Weierstrass [۴] region [۵] Einar Hille

[5] Baire, R., Sur les fonctions de variables réelles, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **3** (1899), 1–123.

[6] Beaulieu, L., *Bourbaki: Une Histoire du Groupe de Mathématiciens Français et de ses Travaux (1934–1944)*, Doctoral dissertation, Université de Montréal, 1989.

[7] Bolzano, B., *Rein Analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß Zwischen je Zwey Werthen, die ein Entgegengesetztes Resultat Gewähren, Wenigstens eine Reelle Wurzel der Gleichung Liege*, Gottlieb Haase, Prague, 1817.

[8] Bolzano, B., *Paradoxes of the Infinite*, Steele, D. A. (trans.), Routledge and Kegan Paul, London, 1851/1950.

[9] Borel, E., Sur quelques points de la théorie des fonctions, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, **12** (1895), no. 3, 9–55.

[10] Borel, E., *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, Gauthier–Villars, Paris,1898.

[11] Borel, E., *Leçons sur les Fonctions Monogènes Uniformes d'une Variable Complexe*, Gauthier–Villars, Paris, 1917.

[12] Bourbaki, N., *Eléments de Mathématique II*, première partie: Les Structures Fondamentales de l'Analyse, Livre III. Topologie générale, Chapitre I: Structures Topologiques, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 858, Hermann, Paris, 1940.

[13] Bourbaki, N., *Eléments de Mathématique II*, première partie: Les Structures Fondamentales de l'Analyse, Livre III. Topologie générale, Chapitre I: Structures Topologiques, 2nd. edn., Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1142, Hermann, Paris, 1951.

[14] Cantor, G., Über die ausdehnung eines satzes aus der theorie der trigonometrischen reihen, *Mathematische Annalen*, **5** (1872), 123–132. Reprinted in [**20**, pp. 92–102], Pagination agrees with the reprint.

[15] Cantor, G., Über einen satz aus der theorie der stetigen mannigfaltigkeiten. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, *Mathematisch-physicalische Klasse* (1897), 127–135. Reprinted in [**20**, pp. 134–138], Pagination agrees with the reprint.

[16] Cantor, G., Über unendliche lineare punktmannichfaltigkeiten, 3. *Mathematische Annalen*, **20** (1882), 113–121. Reprinted in [**20**, pp. 149–157], Pagination agrees with the reprint.

[17] Cantor, G., Über unendliche lineare punktmannichfaltigkeiten, 4. *Mathematische Annalen*, **21** (1883a), 51–58. Reprinted in [**20**, pp. 157–164], Pagination agrees with the reprint.

[18] Cantor, G., Über unendliche lineare punktmannichfaltigkeiten, 5. *Mathematische Annalen*, **21** (1883b), 545–586. Reprinted in [**20**, pp. 165–209], Pagination agrees with the reprint.

[19] Cantor, G., Über unendliche lineare punktmannichfaltigkeiten, 6. *Mathematische Annalen*, **23** (1884), 453–488. Reprinted in [**20**, pp. 210–244], Pagination agrees with the reprint.

[20] Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts*, Zermelo, E. (ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1932.

[21] Carathéodory, C., *Vorlesungen über Reelle Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1918.

[22] Cavaillès, J., *Philosophie Mathématique*, Hermann, Paris, 1962.

[23] Dauben, J. W., The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets, *Archive for History of Exact Sciences*, **7** (1970), 181–216.

[24] Dauben, J. W., *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1979.

[25] de la Vallée Poussin, C., *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'Ensemble, Classes de Baire*, Gauthier–Villars, Paris, 1916.

[26] Dedekind, R., *Gesammelte Mathematische Werke*, vol. 2, Fricke, R., Noether, E., Ore, Ö. (eds.), Vieweg, Braunschweig, 1931.

[27] Denjoy, A., Continu et discontinu, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, **151** (1910), 138–140.

[28] Dini, U., *Fondamenti per la Teorica della Funzioni di Variabili Reali*, Nistri, Pisa, 1878.

[29] Dugac, P., *Richard Dedekind et les Fondements des Mathématiques*, Vrin, Paris, 1976.

[30] Epple, M., et al., *Zum begriff des topologischen raumes*, In: Brieskorn, E., et al. (eds.), Felix Hausdorff Gesammelte Werke, Band II: Grundzüge der Mengenlehre, Springer-Verlag, Berlin, 675–744, 2002.

[31] Ferreirós, J., *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 1999.

[32] Fréchet, M., Généralisation d'un théorème de Weierstrass, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, **139** (1904), 848–850.

[33] Fréchet, M., Sur les fonctions limites et les opérations fontionnelles, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, **140** (1905), 27–29.

[34] Fréchet, M., Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **22** (1906), 1–74.

[35] Fréchet, M., Sur les ensembles abstraits, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, **38** (1921), no. 3, 341–388.

[36] Hahn, H., *Reelle Funktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.

[37] Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, 1914.

[38] Hausdorff, F., *Mengenlehre*, de Gruyter, Berlin, 1927.

[39] Hawkins, T., *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, Chelsea, New York, 1979.

[40] Hille, E., *Analytic Function Theory*, vol. I, Ginn, Boston, 1959.

[41] Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1907.

[42] Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, vol. I., 3rd. edn., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1927.

[43] Hurwitz, A., *Über die entwickelung der allgemeinen theorie der analytischen funktionen in neuer zeit*, In Rudio, F. (ed.), Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9, bis 11, August 1897, Teubner, Leipzig, 91–112, 1898.

[44] James, I. M. (ed.), *History of Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[45] Jordan, C., Remarques sur les intégrales définis, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **8** (1892), no. 4, 69–99.

[46] Jordan, C., *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, vol. I, 2nd. revised edn., Gauthier–Villars, Paris, 1893.

[47] Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1955.

[48] Kuratowski, K., Sur l'opération $\overline{A}$ de l'analysis situs, *Fundamenta Mathematicae*, **3** (1922), 182–199.

[49] Kuratowski, K., *Topologie I: Espaces Métrisables, Espaces Complets*, Garasiński, Warsaw, 1933.

[50] Lebesgue, H., Intégrale, longueur, aire, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **7** (1902), no. 3, 231–359, Pagination follows the original printing of the dissertation, pp. 1–129.

[51] Lebesgue, H., Sur les fonctions représentables analytiquement, *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués*, **60** (1905), 139–216.

[52] Lebesgue, H., *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives*, 2nd. edn., Gauthier–Villars, Paris, 1928.

[53] Lefschetz, S., *L'analysis Situs et la Géométrie Algébrique*, Gauthier–Villars, Paris, 1924.

[54] Lefschetz, S., *Topology*, American Mathematical Society, New York, 1930.

[55] Lefschetz, S., *Algebraic Topology*, American Mathematical Society, New York, 1942.

[56] Lennes, N. J., Curves in non-metrical analysis situs (abstract), *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12** (1906), 284.

[57] Lennes, N. J., Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations, *American Journal of Mathematics*, **33** (1911), 287–326.

[58] Listing, J. B., Vorstudien zur topologie, *Göttinger Studien*, **2** (1847), 811–875.

[59] Marsden, J. E., Hoffman, M. J., *Basic Complex Analysis*, Freeman, New York, 1987.

[60] Mittag-Leffler, G., Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante, *Acta Mathematica*, **4** (1884), 1–79.

[61] Moore, G. H., *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development and Influence*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[62] Moore, G. H., The axiomatization of linear algebra: 1875–1940, *Historia Mathematica*, **22** (1995), 262–303.

[63] Moore, G. H., Historians and philosophers of logic: Are they compatible? The Bolzano–Weierstrass theorem as a case study, *History and Philosophy of Logic*, **20** (2000), 169–180.

[64] Moore, G. H., The evolution of the concept of homeomorphism, *Historia Mathematica*, **34** (2007), 333–343.

[65] Newman, M. H. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1939.

[66] Newman, M. H. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, 2nd edn., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1951.

[67] Osgood, W. F., *Allgemeine theorie der analytischen funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen grössen*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, II B 1, 1–45, 1901.

[68] Osgood, W. F., *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 5th. edn., Teubner, Leipzig, 1928.

[69] Peano, G., *Applicazione Geometriche del Calcolo Infinitesimale*, Fratelli Bocca, Turin, 1887.

[70] Pincherle, S., Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C. Weierstrass, *Giornale di Matematiche*, **18** (1880), 178–254, 317–357.

[71] Poincaré, H., Mémoires sur les groupes kleiniens, *Acta Mathematica*, **3** (1883), 49–92.

[72] Pont, J. C., *La Topologie Algébrique, des Origines à Poincaré*, Presses Universitaires de France, Paris, 1974.

[73] Riesz, F., Sur un théorème de M. Borel, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, **140** (1905), 224–226.

[74] Schoenflies, A., Die entwickelung der lehre von den punktmannigfaltigkeiten, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **8** (1900), 1–251.

[75] Schoenflies, A., Beiträge zur theorie der punktmengen I., *Mathematische Annalen*, **58** (1904), 195–238.

[76] Seifert, H., Threlfall, W., *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig, 1934.

[77] Sierpiński, W., La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits, *Mathematische Annalen*, **97** (1926), 321–337.

[78] Sierpiński, W., *Topologia Ogólna*, Kasa im. Mianowskiego, Warsaw, 1928.

[79] Sierpiński, W., *Introduction to General Topology*, University of Toronto, Toronto, 1934.

[80] Tannery, J., Review of Cantor, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, **2** (1884), no. 2, 162–171.

[81] Tannery, J., *Introduction à la Théorie des Fonctions d'une Variable*, Hermann, Paris, 1884.

[82] Tannery, J., Review of Peano, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, **11** (1887), no. 2, 237–239.

[83] Tietze, H., Beiträge zur allgemeinen topologie I: Axiome für verschiedene fassungen des umgebungsbegriffs, *Mathematische Annalen*, **88** (1923), 290–312.

[84] Veblen, O., *The Cambridge Colloquium 1916, Part II: Analysis Situs*, American Mathematical Society, New York, 1922.

[85] Weierstrass, C., *Prinzipien der Theorie der analytischen Functionen*, Unpublished lecture notes taken by Moritz Pasch at the University of Berlin, Kept in Pasch's Nachlass at the University of Gießen, 1865–1866.

[86] Weierstrass, C., *Einführung in die Theorien der Analytischen Functionen*, Lecture notes taken by Wilhem Killing in 1868, Published in 1986 in Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster (2), Heft 38, 1868/1986.

[87] Weierstrass, C., *Einleitung in die Theorien der Analytischen Functionen*, Lecture notes taken by G. Hettner at Berlin in the summer semester of 1874.

[88] Weierstrass, C., *Zur Theorie der Eindeutigen Analytischen Functionen*, Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1876), Reprinted in [1895, 77–124], Pagination agrees with the reprint.

[89] Weierstrass, C., *Einleitung in die Theorie der Analytischen Funktionen*, Vorlesung Berlin (1878), in einer Mitschrift von Adolf Hurwitz (Ullrich, P., ed.), Vieweg, Braunschweig, 1878/1988.

[90] Weierstrass, C., *Zur Functionenlehre*, Monatsbericht der Königl, Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 719–743, 1880.

[91] Weierstrass, C., *Ausgewöhlte Kapitel aus der Funktionenlehre*, Vorlesung, gehalten in Berlin 1886. Mit der Akademischen Antrittsrede, Berlin 1857, und drei weiteren originalarbeiten von K. Weierstrass aus den jahren 1870 bis 1880/86 Siegmund-Schultze, R., ed.), Teubner, Leipzig, 1886/1988.

[92] Weierstrass, C., *Mathematische Werke*, vol. 2 (Knoblauch, J., Hettner, G., Rothe, R., eds.), Mayer & Müller, Berlin, 1895.

[93] Whyburn, G., *Analytic Topology*, American Mathematical Society, New York, 1942.

[94] Wilder, R. L., Evolution of the topological concept of “connected”, *American Mathematical Monthly*, **85** (1978), 720–726.

[95] Young, W. H., Young, G. C., *The Theory of Sets of Points*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1906.

روح‌الله جهانی‌پور: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: jahanipu@kashanu.ac.ir
رسول کاظمی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir
سعید مقصودی: دانشگاه زنجان، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی
رایانامه: s_maghsodi@znu.ac.ir