فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۳۷، شمارهٔ ۶۳ (پاییز و زمستان ۱۳۹۷) صص. ۹۳ تا ۱۰۸

آغاز توپولوژی در لهستان*

کی. چِشِلسکی و زد. پوگودا

مترجم: سعید مقصودی

تا پایان قرن نوزدهم، لهستان در عرصهٔ ریاضیات چندان مورد توجه نبود. یافته‌های ریاضی نیکولاس کوپرنیک[۱] در قرن شانزدهم و یوزف خِنِه ورونیسکی[۲] در قرن نوزدهم به آن اندازه نبودند که ریاضیات لهستان را به شهرت جهانی برسانند. به یک‌باره، بعد از جنگ جهانی اول، مکتب ریاضیات لهستان شهرتی فراگیر یافت و دو شهر بدل به مراکز مهم ریاضیات شدند: یکی لووف[۳] که در آنجا استفان باناخ و جمعی دیگر دربارهٔ آنالیز تابعی پژوهش می‌کردند و دیگری وارشاو[۴] که حوزهٔ اصلی پژوهش در آنجا، نظریهٔ مجموعه‌ها و توپولوژی بود. در این مقاله، تمرکز ما بر دستاوردهای لهستان در حوزهٔ توپولوژی خواهد بود. در آن زمان، توپولوژی شاخه‌ای نوپا از ریاضیات بود. چه شد که در کشوری بدون سابقهٔ در خور توجه در ریاضیات، توپولوژی به شکوفایی رسید؟

به مدت دو قرن، لهستان بین آلمان، روسیه و اتریش تقسیم شده بود. با وجود این، دانشگاه‌های قدیمی در شهرهای لهستان همچنان در دو شهرِ آن، کراکوف[۵] و لووف که زیر سلطهٔ اتریش قرار داشتند، دایر بودند و درس‌ها در آنها به زبان لهستانی عرضه می‌شد. پژوهش‌های ریاضی چندان سطح بالا نبودند. اگر جوانی طالب بهترین آموزش در زمینهٔ ریاضیات جدید بود، باید برای تحصیل رهسپار پاریس، گوتینگن یا مراکز دیگر می‌شد.

عبارات و کلمات کلیدی. توپولوژی عمومی؛ نظریهٔ مجموعه‌ها؛ خم فضاپُرکُن؛ قالیچهٔ شِرپینسکی؛ واشر شِرپینسکی؛ پیوستار؛ ریاضیدانان لهستان.

*نام و نشان مقالهٔ اصلی از این قرار است:

Ciesielski, K., Pogoda, Z., The Beginning of Polish Topology, *The Mathematical Intelligencer*, **18** (1996), no. 3, 32–39.

[۱]Nicolaus Copernicus [۲]Józéf-Hoene Wroński [۳]Lwów [۴]Warsaw [۵]Kraków

در آغاز قرن بیستم، برخی از ریاضیدانان لهستانی افرادی معروف در دنیای ریاضیات بودند، لیکن [به‌لحاظ پژوهشی] در شاخه‌های مختلفِ ریاضیات پخش‌وپلا شده بودند. در سال ۱۹۱۱ چهارمین همایش دانشمندان علوم طبیعی و پزشکان لهستان در کراکوف برگزار شد. واتسلاف شِرپینسکی[۱] دربارهٔ آن همایش می‌نویسد [۱۴]:

«در این همایش، هر پنج نفر استاد لهستانی ریاضیات شرکت کردند. همهٔ ما سخنرانی کردیم اما وقتی با هم بودیم، دربارهٔ همه چیز صحبت می‌کردیم بجز ریاضی. دلیلش این بود که ما در حوزه‌های علمی متفاوتی پژوهش می‌کردیم: ژورافسکی[۲] به هندسه علاقه داشت، زارِمبا[۳] به معادله‌های دیفرانسیل، پوژینا[۴] به تابع‌های تحلیلی، دیکستین[۵] به تاریخ ریاضیات و من به نظریهٔ مجموعه‌ها و نظریهٔ اعداد. هیچ‌گونه مسئلهٔ علمی مشترکی بین ما وجود نداشت. بعد از این همایش، دربارهٔ این مشکل تأمل کردم و به این نتیجه رسیدم که این وضعیت نباید ادامه پیدا کند. نه همکاری‌ای وجود داشت و نه نظارتی بر امور. ریاضیدانانی در لهستان داشتیم که در بیرون از لهستان آنها را به‌واسطهٔ پژوهش‌هایشان می‌شناختند ولی چیزی به اسم ریاضیاتِ لهستانی نداشتیم. نتیجه‌گیری من این بود که خیلی بهتر می‌بود اگر عدهٔ زیادتری از ریاضیدانان لهستانی وارد یک حوزهٔ پژوهشی واحد، می‌شدند.»

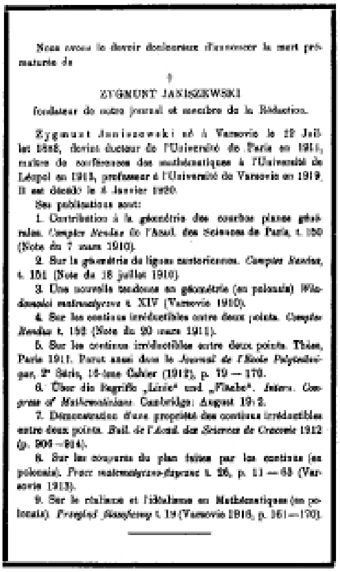
واتسلاف شِرپینسکی در سال ۱۹۱۰

استفان مازورکیه‌ویچ

شِرپینسکی بی‌درنگ دست به کار تحقّق بخشیدن به طرح‌هایش شد. از خوش‌اقبالی او، درست در همین زمان دو ریاضیدان جوان به نام‌های استفان مازورکیه‌ویچ[۶] و زیگمونت یانیشِفسکی[۷]، کار علمی خود را آغاز کردند و هر دوی آنها علاقه‌مند به نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن بودند. آن هنگام، یانیشِفسکی مشغول تحصیل در خارج از کشور بود. او در سال ۱۹۱۱ آزمون جامع دکتری خود را در پاریس گذراند؛ هیئت داوران مرکب بود از پوانکاره، لبگ و بُرل. او دو سال بعد، رسالهٔ استادی‌اش [۸] را به دانشگاه

[۱] Wacław Sierpiński [۲] Żorawski [۳] Zaremba [۴] Puzyna [۵] Dickstein [۶] Stefan Mazurkiewicz
[۷] Zygmunt Janiszewski

لووف تسلیم کرد. برخی از نتایج این مقاله را (که دربارهٔ برش صفحه با یک پیوستار[۱] است) امروزه *قضایای یانیشِفسکی* می‌نامند. در سال ۱۹۱۳ مازورکیه‌ویچ با راهنمایی شِرپینسکی، مقالهٔ دکتری‌اش را با موضوع خم‌های مربع‌پُرکُن به نگارش درآورد. شِرپینسکی استادراهنمایی بی‌نظیر برای دانشجویانش بود اما جنگ جهانی اول در نقشه‌های بلندپروازانه و دستاوردهای پُربار او وقفه انداخت. در سال ۱۹۱۴ روس‌ها شِرپینسکی را به اردوگاه کار اجباری فرستادند. او پس از چهار سال به ورشاو بازگشت و دید که دانشگاه ورشاو هنوز دایر است و دوستانش، یانیشِفسکی و مازورکیه‌ویچ، در آنجا مشغول به کار هستند؛ لهستان بار دیگر کشوری مستقل شده بود.



Nous avons le devoir douloureux d'annoncer la mort prématurée de

†

ZYGMUNT JANISZEWSKI

fondateur de notre journal et membre de la Rédaction.

Zygmunt Janiszewski né à Varsovie le 12 Juillet 1888, devint docteur de l'Université de Paris en 1911, maître de conférences des mathématiques à l'Université de Léopol en 1913, professeur à l'Université de Varsovie en 1919. Il est décédé le 3 Janvier 1920.

Ses publications sont:

1. Contribution à la géométrie des courbes planes générales. *Comptes Rendus* de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 150 (Note du 7 mars 1910).
2. Sur la géométrie des lignes cantoriennes. *Comptes Rendus*, t. 151 (Note du 18 juillet 1910).
3. Une nouvelle tendance en géométrie (en polonais) *Wiadomości matematyczne* t. XIV (Varsovie 1910).
4. Sur les continus irréductibles entre deux points. *Comptes Rendus* t. 152 (Note du 20 mars 1911).
5. Sur les continus irréductibles entre deux points. Thèse, Paris 1911. Paru aussi dans le *Journal de l'École Polytechnique*, 2e Série, 16-ème Cahier (1912), p. 79—170.
6. Über die Begriffe „Linie" und „Fläche". *Intern. Congress of Mathematicians*. Cambridge: August 1912.
7. Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points. *Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie* 1912 (p. 906—914).
8. Sur les coupures du plan faites par les continus (en polonais). *Prace matematyczno-fizyczne* t. 26, p. 11—63 (Varsovie 1913).
9. Sur le réalisme et l'idéalisme en Mathématiques (en polonais). *Przegląd filozoficzny* t. 19 (Varsovie 1916, p. 161—170).

صفحهٔ اولِ اولین شمارهٔ مجلهٔ *فوندامنتا* متمتیکا که سوگنامه‌ای برای یانیشِفسکی در آن آمده بود.

در سال ۱۹۱۷ مقاله‌ای از یانیشِفسکی با عنوان «دربارهٔ ضرورت ریاضیات در لهستان» [۷] در مجلهٔ *علوم لهستان*[۲] منتشر شد. این مقاله ادامهٔ همان اندیشه‌های اولیهٔ شِرپینسکی بود. یانیشِفسکی طرح تمرکز پژوهش روی یک شاخهٔ جدید و رو به رشد از ریاضیات را پیش برد. همچنین موضوع انتشار یک مجلهٔ جدید مختص چاپ مقالات در این حوزه از ریاضیات را مطرح کرد. این، نقطهٔ آغاز انتشار مجلهٔ *فوندامنتا متمتیکا*[۳] بود. تقریباً همهٔ مهم‌ترین نتایجی که ریاضیدانان لهستانی طی دهه‌های بیست و سی به‌دست

[۱] continuum [۲] Nauka Polska [۳] Fundamenta Mathematicae

آوردند، در این مجله منتشر شد. جای تأسف است که یانیشِفسکی پیش از آنکه اولین شمارهٔ *فوندامنتا متمتیکا* منتشر شود، به‌ناگاه در سال ۱۹۲۰ در سن ۳۲ سالگی، درگذشت.

کاریکاتوری از کوراتُفسکی و کناستر که آن را لئون یسیمانویچ (Leon Jeśmanowicz)، ریاضیدان لهستانی، در سال ۱۹۴۶ کشیده است.

همچنین در سال ۱۹۱۷، یانیشِفسکی و مازورکیه‌ویچ برگزاریِ سمینارهایی با موضوع توپولوژی را آغاز کردند که پس از بازگشت شِرپینسکی، برگزاریِ آنها بسیار فعال‌تر پیگیری می‌شد. این سمینارها شاید نخستین سمینارهای منظم با موضوع توپولوژی در دنیا بودند. خیلی زود شاگردان جوان، مستعد و جدّی این سه استاد، به جمع آنها پیوستند. آنها عبارت بودند از کازیمیِش کوراتُفسکی[۱] (نخستین دانشجوی دکتری شِرپینسکی پس از جنگ)، برونِسلاف کناستر[۲] (دانشجوی مازورکیه‌ویچ)، استانیسلاف ساکس[۳] و آنتونی زیگموند[۴]. مدتی بعد، شرکت ریاضیدانان خارجی هم در آن سمینارها آغاز شد. حکایتی هست دربارهٔ

[۱] Kazimierz Kuratowski [۲] Bronisław Knaster [۳] Stanisław Saks [۴] Antoni Zygmund

یکی از ریاضیدانانی که از ایالات متحده آمده بود. او در یکی از این سمینارها سخنرانی کرده بود و خیلی از قضیه‌هایی را که به قول خودش، مِزورکیک[۱] ثابت کرده بود، نقل می‌کرد. وسط سخنرانی، مازورکیه‌ویچ با صدای بلند گفت «او دربارهٔ نتایج من صحبت می‌کند!»–آن ریاضیدان آمریکایی، نام مازورکیه‌ویچ را درست تلفظ نکرده بود!

جای تأمل دارد که چرا فقط نظریهٔ مجموعه‌ها و توپولوژی برای جهت‌های اصلی فعالیت‌های پژوهشی انتخاب شدند. در آن زمان، نظریهٔ مجموعه‌ها کلاً شاخه‌ای بحث‌برانگیز از ریاضیات بود. به یاد داشته باشید که تاریخ‌نگاران علم، پژوهش‌های گئورگ کانتور را دربارهٔ سری‌های فوریه از سال ۱۸۷۹ تا سال ۱۸۸۴، سرآغاز توپولوژی عمومی محسوب می‌کنند. پژوهش‌های کانتور دربارهٔ نمایش تابع‌های حقیقی برحسب سری‌های مثلثاتی، نشان داد که مجموعهٔ همگراییِ این گونه سری‌ها دارای ساختاری بسیار پیچیده است. کانتور به‌منظور مشخص‌سازیِ این ساختارها، تعریف‌هایی جدید ابداع کرد که در مورد هر زیرمجموعه‌ای از خط حقیقی و فضای اقلیدسی قابل استفاده بود. تعریف همسایگی، نقطهٔ حدی، مجموعهٔ همبند، مجموعهٔ بسته، مجموعهٔ چگال و بسیاری دیگر از مفاهیم، به‌سرعت در پژوهش‌های مربوط به تابع‌ها و مسائل هندسیِ ناب، بسیار سودمند واقع شد. با کمال تعجب، حتی مجموعه‌هایی کاملاً شناخته‌شده مانند خم‌ها، خط‌ها، ناحیه‌ها و مرزهای آنها، به مسئله‌های مهم و دشوار منجر شدند و افزون بر آن، راه‌حل‌های آنها غالباً حیرت‌انگیز بودند و به مسائلی دیگر منجر می‌شدند.

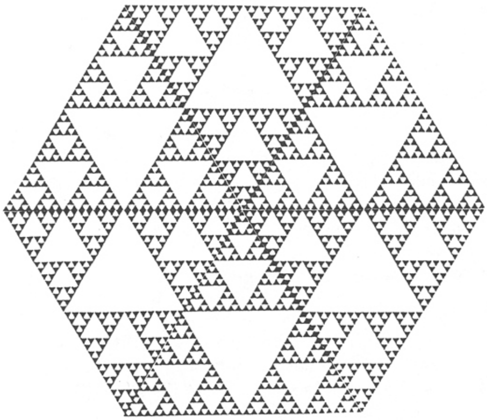
اندیشه‌های کانتور در چارچوب توپولوژیِ مبتنی بر نظریهٔ مجموعه‌ها (توپولوژی عمومی) گسترش یافتند. جریان دیگری از اندیشهٔ ریاضی مرتبط با توپولوژی وجود داشت که به هندسه و جبر نزدیک‌تر بود و منجر به توپولوژی جبری شد. به‌گفتهٔ آلکساندرُف[۲]، کانتور را باید «خالق توپولوژی عمومی» محسوب کرد و پوانکاره را «خالق توپولوژی جبری». این دو مسیر کاملاً متفاوت اما وابسته به هم بودند.

چرا ریاضیدانان ورشاو فقط توپولوژی را به‌منظور تحقّق برنامهٔ شِرپینسکی و یانیشِفسکی برگزیدند؟ این کار چند دلیل داشت. نخست اینکه این انتخاب نتیجهٔ منطقی علاقه‌های پژوهشی اولیه‌شان بود: شِرپینسکی علاقه‌مند به نظریهٔ مجموعه‌ها بود، یانیشِفسکی به ویژگی‌های پیوستارها[۳] و مازورکیه‌ویچ به خم‌ها. دوم اینکه شاید ریاضیدانان لهستانی پیش‌بینی می‌کردند که در سال‌های آینده نه نظریهٔ «ناب» مجموعه‌ها، بلکه کاربردهای آن نقش غالب را خواهد یافت. همچنین ریاضیدانان جوان از حمله به مسئله‌های دشوار و بدیع باکی ندارند و در انجام چنین اموری، احتمال توفیق در پایان کار در شاخه‌های جدید و رو به رشد علم بیشتر است و توپولوژی از این جهت، نامزدی بسیار مناسب بود.

کثرت نتایجی که ریاضیدانان لهستانی در مدتی کوتاه پس از جنگ به‌دست آوردند، درخور توجه است. بسیاری از آن نتایج تبدیل به قضیه‌های کلاسیک شدند و تقریباً در هر کتاب توپولوژی عمومی ذکر می‌شدند.

[۱] Mezoorkick [۲] Pavel S. Alexandrov [۳] continua

ریاضیدانان لهستانی همچنین قضیه‌های فنی بسیاری ثابت کردند که عمدتاً مورد توجه توپولوژی‌دانان هستند و اثبات‌هایی ساده‌تر برای قضیه‌های مشهور مانند قضیهٔ خم ژُردان یا قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر ارائه کردند. تا سال ۱۹۲۵ پنج ریاضیدان لهستانی، یعنی شِرپینسکی، یانیشِفسکی، مازورکیه‌ویچ، کناستر و کوراتُفسکی در حدود ۱۰۰ (!) مقاله دربارهٔ توپولوژی منتشر کردند.



خمی در قالب شکل‌های شش‌ضلعی که با کنار هم قرار دادنِ شش عدد واشر شِرپینسکی به‌دست آمده است. انشعاب هر نقطهٔ آن از نوع یکسانی است (یعنی پارامتری‌سازی‌ای وجود دارد که تصاویر وارون نقاط، شامل تعداد عضوهای برابر هستند). واشر شِرپینسکی این ویژگی را ندارد.

اجازه دهید جزئیات بیشتری از نتایج به‌دست آمده در این دوره بیان کنیم. وقتی کامیّ ژُردان[1] خم مسطح را به‌صورت تصویر یک بازهٔ بسته تحت یک نگاشت پیوسته به‌توی صفحه تعریف کرد، این تعریف، خوب، طبیعی و کاملاً رضایت‌بخش به نظر می‌رسید. متأسفانه در سال ۱۸۹۰ جوزپّه پئانو مثال مشهورش را ارائه کرد و در آن، خمی ساخت که مربع را پُر می‌کرد. ریاضیدانان پی بردند که تعریف خم باید بسیار دشوار باشد. مثال پئانو نشان داد که صوری‌سازیِ مفهوم بُعد نیز نباید آسان باشد. لهستانی‌ها دنبالهٔ مسائل مرتبط با خم‌ها و مفهوم بُعد را گرفتند. شِرپینسکی [۲۹] مثال دیگری از یک خم مربع‌پُرکُن به‌دست آورد (فریچه لوت[2] با آن خم، یک عکس تک‌چهره از شِرپینسکی ساخته است؛ نگاه کنید به *متمتیکال اینتلیجنسر*[3]، مجلد ۱۷، شمارهٔ ۱، روی جلد). به‌ویژه مجموعه‌هایی را مورد توجه قرار دادند که همزمان فشرده و همبند هستند. چنین مجموعه‌ای *پیوستار* خوانده می‌شود. تصویر پیوستهٔ یک بازهٔ بسته باید یک پیوستار باشد. مازورکیه‌ویچ (در سال ۱۹۱۳) و شِرپینسکی (در سال ۱۹۲۰) مشخص‌سازیِ کاملی از فضاهایی به‌دست دادند که تصویر پیوستهٔ یک پاره‌خط هستند. مازورکیه‌ویچ نشان داد [۲۰] که هر پیوستار موضعاً همبند را

[1]Camill Jordan [2]Fritz Lott [3]Mathematical Intelligencer

می‌توان همچون تصویر پیوستهٔ یک پاره‌خط به‌دست آورد. این مطلب ثابت می‌کند که این مجموعه‌ها ردهٔ بسیار بزرگی تشکیل می‌دهند (همین نتیجه را هان[۱] نیز در سال ۱۹۱۳ به‌دست آورده بود). بعداً شِرپینسکی [۲۶] دریافت که هر پیوستار موضعاً فشرده، مجموعه‌ای است که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ می‌توان آن را به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی پیوستار با قطر کمتر از ϵ نمایش داد.

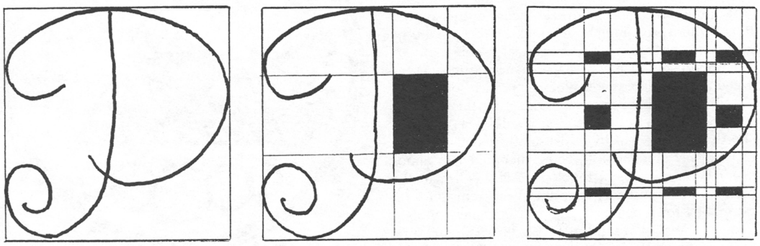
همچنین شِرپینسکی بود که ثابت کرد [۳۶] هیچ پیوستاری را نمی‌توان به‌صورت اجتماع شمارا از مجموعه‌های بستهٔ ناتهیِ دوبه‌دو جدا از هم نمایش داد. علاوه بر اینها، او مشخص‌سازیِ بسیار جالبی از کمان‌ها به‌دست داد: مجموعهٔ M تصویر پیوستهٔ یک بازهٔ یکهٔ بسته است اگر و تنها اگر یک پیوستار باشد و دو نقطهٔ $a, b \in X$ موجود باشند که به‌ازای هر x غیر از a و b مجموعه‌های A و B وجود داشته باشند که $a \in A$، $b \in B$، $A \cap B = \{x\}$ و $A \cup B = M$.

تعریفی دیگر نیز برای خم وجود داشت موسوم به تعریف کانتور. خم کانتور، پیوستاری مسطح بود که هیچ نقطهٔ درونی نداشت (به عبارت دیگر، یک پیوستار مسطح هیچ‌جا چگال). بر اساس این تعریف، خم پئانو دیگر پذیرفتنی نبود. با این حال، این تعریف راه را برای پدیدهٔ عجیب دیگری باز می‌گذاشت: معلوم شد که مثالی از این گونه خم‌ها وجود دارد که شامل هیچ کمانی نیست (یعنی هیچ زیرمجموعه‌ای از این خم همانریخت با هیچ پاره‌خطی نیست!). این مثال را یانیشِفسکی در سخنرانی‌اش در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در سال ۱۹۱۲ در کمبریج ارائه کرد. هوگو اشتاینهاوس[۲] در سمیناری در وارشاو در سال ۱۹۱۹ از مثال یانیشِفسکی به *پیچیده‌ترین مجموعهٔ هندسی‌ای که تاکنون در هندسه مورد بررسی قرارگرفته است*، نام برد. به‌زودی آشکار شد که مجموعه‌هایی بسیار پیچیده‌تر در صفحه وجود دارند. این مطلب پیامدی از نتایج کناستر بود. بعداً به این موضوع می‌رسیم. شِرپینسکی می‌اندیشید که حتی با ترکیب تعریف ژُردان و تعریف کانتور، مثال‌هایی عجیب به‌دست خواهد آمد. این اندیشه منشأ مجموعه‌های مشهور دیگری موسوم به *قالیچهٔ شِرپینسکی*[۳] و خم *مثلثی شِرپینسکی*[۴] بود.

خم مثلثی شِرپینسکی (موسوم به *واشر شِرپینسکی*[۵]) ویژگی جالبی دارد: هر نقطه‌اش (بجز سه رأس مثلث) نقطهٔ انتهاییِ مشترک سه کمان در این مجموعه است و آن سه کمان، تنها در همین نقطه مشترک‌اند. علاوه بر این، هر خم کانتور همانریخت با زیرمجموعه‌ای از خم شِرپینسکی است! شِرپینسکی روش‌های گوناگون برای ساختنِ خم‌هایی از این نوع عرضه کرده است. برای مثال، مربعی در نظر بگیرید، آن را به چهار مربع مختلف همنهشت[۶] تقسیم کنید و مربع واقع در گوشهٔ سمت چپ پایین را کنار بگذارید. سپس همین کار را برای هر سه مربع باقی‌مانده انجام دهید. این کار را تکرار کنید. اشتراک نامتناهی همهٔ مجموعه‌های به‌دست آمده از این کار، خمی با همان ویژگی‌ها خواهد بود. این روش ساخت را شِرپینسکی در مقاله‌اش [۲۸] شرح داده است. مقاله‌های اخیر در مجله *اینتلیجنسر*، روش ساخت کمتر مشهور [۶،

[۱] Hahn [۲] Hugo Steinhaus [۳] Sierpiński carpet [۴] Sierpiński triangle curve [۵] Sierpiński gasket [۶] congruent

واشر شِرپینسکی در نشان رقابت‌های المپیاد ریاضیات برای دورهٔ دبیرستان در لهستان به‌کار رفته است.



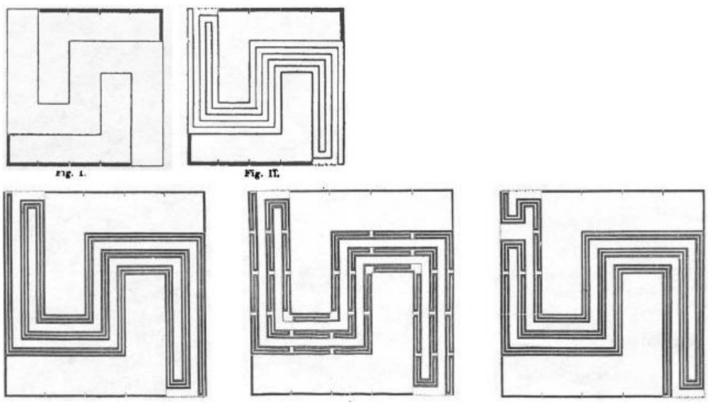
قالیچهٔ شِرپینسکی را خم *عام* شِرپینسکی نیز می‌نامند، چراکه هر خم کانتور با زیرمجموعه‌ای از قالیچهٔ شِرپینسکی همانریخت است ([۵] را ببینید). این یعنی برای هر خمی از این گونه مانند γ که در $\mathbb{R}^2$ است، مجموعهٔ S همانریخت با قالیچهٔ شِرپینسکی وجود دارد که $\gamma \subset S$. این تصویر، ایدهٔ ساختن مجموعه‌ای از این دست شامل یک خم مفروض (به‌شکل حرف $\mathcal{P}$) را نشان می‌دهد.

نمودار ۴] و همچنین مشهوری از خم مثلثی را نشان داده‌اند [۳۸، نمودار ۲]. در [۲۸] نیز با کمال تعجب می‌خوانیم که:

> «توجه داشته باشیم که همین یک سال پیش، آقای مازورکیه‌ویچ مثالی از خمی یافت که همزمان هم خم ژُردان است و هم خم کانتور . . .. مازورکیه‌ویچ این خم را با تقسیم یک مربع به نُه مربع کوچکتر با رسم خط‌های موازی اضلاع و حذف قسمت درونی مربع مرکزی و انجام همین کار روی هریک از هشت مربع باقی‌مانده و سپس تکرار این کار تا بی‌نهایت، ساخت.»

در بالا توصیف قالیچهٔ شِرپینسکی را می‌بینیم! ظاهراً قالیچهٔ شِرپینسکی را مازورکیه‌ویچ پیدا کرده است. تقریباً در هر کتاب امروزی دربارهٔ فراکتال‌ها از قالیچهٔ شِرپینسکی نام برده می‌شود.

پیش از این مثالی منسوب به یانیشِفسکی ذکر کردیم از خمی که هیچ کمانی در بر ندارد و وعده کردیم که مجموعه‌هایی مسطح با ویژگی‌های حتی عجیب‌تر از این نیز تعریف کنیم. بی‌شک مشهورترینِ آنها عبارت است از یک پیوستار *موروثی-تجزیه‌ناپذیر*[۱] که آن را برونِسلاف کناستر در رسالهٔ دکتری‌اش در سال ۱۹۲۲ [۱۱] ساخته است. این ساختار نسبت به روش‌های شناخته‌شدهٔ آن زمان، بی‌اندازه دشوار به‌حساب می‌آمد. پیوستار X را *تجزیه‌ناپذیر*[۲] می‌نامند اگر شامل بیش از یک نقطه باشد و برابر با اجتماع دو پیوستار بستهٔ متفاوت با X نباشد. پیوستارهای تجزیه‌ناپذیر را لوئیتزن براوئر[۳] در سال ۱۹۱۰ کشف کرد. پیوستار موروثی-تجزیه‌ناپذیر یا *پیوستار کناستر*، مجموعه‌ای است با این ویژگی که هر پیوستار مشمول در آن، یا یک مجموعهٔ تک‌نقطه‌ای است یا یک پیوستار تجزیه‌ناپذیر! به نظر باور نکردنی است، لیکن معلوم شد که چنین مجموعهٔ عجیبی آنقدرها هم ناآشنا نیست. مازورکیه‌ویچ ثابت کرد [۲۱] که پیوستارهای کناستر در خانوادهٔ همهٔ زیرپیوستارهای یک مربع، یک مجموعهٔ چگال G_δ تشکیل می‌دهند. هر مجموعه‌ای که کناستر می‌ساخت بی‌درنگ تبدیل می‌شد به یک مثال نقض ایده‌آل و همهٔ حدس‌های مربوط به پیوستارها را اول با پیوستارهای ساختِ کناستر می‌آزمودند. بعدها نشان دادند که پیوستارهای کناستر، گرچه خیلی عجیب‌اند، کاملاً در دسترس‌اند. در سال ۱۹۴۸ ای. ای. مویز ثابت کرد [۲۳] که پیوستار کناستر X با هر زیرمجموعهٔ X که پیوستار باشد و بیش از یک نقطه داشته باشد، همانریخت است. این مطلب منشأ نام دیگری برای این مجموعه شد: *کمان‌نما*[۴]. در سال ۱۹۵۱ آر. اچ. بینگ [۲] نتیجهٔ زیبای دیگری به‌دست آورد: هر کمان‌نما همگن است. به عبارت دیگر، اگر p و q دو نقطه از یک کمان‌نما باشند، آن‌گاه یک همانریختی وجود دارد که آن کمان‌نما را به خودش و p را به q می‌نگارد. دایره در این شرط صدق می‌کند. مدتی دراز تصور بر این بود که دایره تنها زیرمجموعهٔ صفحه با این ویژگی است.



شکل‌های برگرفته از مقاله‌ای مشهور از کناستر [۱۱]: برخی مراحل ساخت یک پیوستار موروثی-تجزیه‌ناپذیر.

[۱] hereditarily indecomposable [۲] indecomposable [۳] Luizen Brouwer [۴] pseudoarc

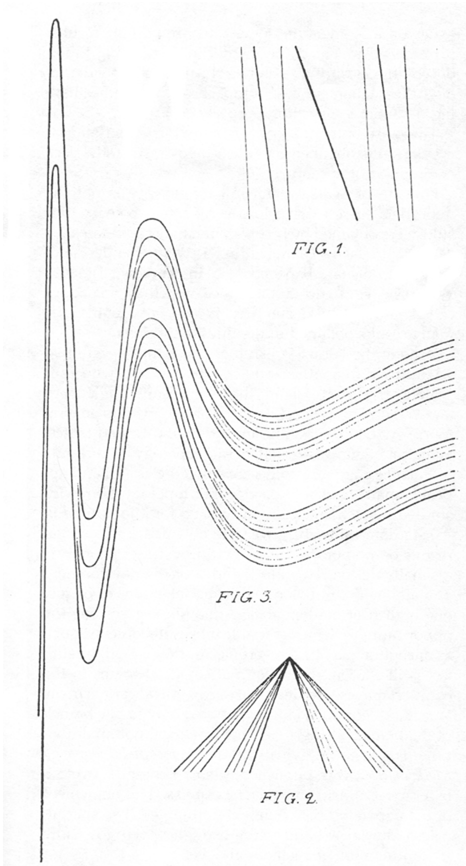
ساختن مجموعه‌های عجیب و غیرعادی در تخصص کناستر بود. بگذارید چند مثال دیگر ذکر کنیم. نخست یک تعریف: مجموعهٔ A را *جداساز*[۱] صفحه گویند اگر $\mathbb{R}^۲ \setminus A$ همبند نباشد. یک جداساز A *تحویل‌ناپذیر*[۲] است اگر هیچ زیرمجموعهٔ سره از A جداساز صفحه نباشد. کناستر یک جداساز مانند A برای صفحه ساخت [۱۱] به‌طوری که A شامل هیچ جداساز تحویل‌ناپذیری نیست. همچنین ثابت کرد که خانوادهٔ ناشمارا و دوبه‌دو مجزا از جداسازهای صفحه وجود دارد که موضعاً همبند نیستند. مثال دیگر از ساخته‌های کناستر، عبارت است از زیرمجموعه‌ای از صفحه که مرز مشترک تعداد نامتناهی ناحیه‌های دوبه‌دو جدا از هم است.

کوراتُفسکی نیز جداسازها را مورد بررسی قرار داده است. کوراتُفسکی نشان داد که هر زیرمجموعهٔ صفحه مانند A چنان‌که $\mathbb{R}^۲ \setminus A$ برابر با اجتماع تعدادی متناهی (دست‌کم دوتا) ناحیه باشد، شامل یک جداساز تحویل‌ناپذیر است. همچنین ثابت کرد که هر جداساز تحویل‌ناپذیر از صفحه مانند A چنان‌که $\mathbb{R}^۲ \setminus A$ برابر با اجتماع بیش از دو ناحیه باشد، یا یک پیوستار تجزیه‌ناپذیر است یا اجتماع دو پیوستار تجزیه‌ناپذیر.

اکنون به سراغ نتایجی مهم در توپولوژی صفحه می‌رویم که امروزه به قضیه‌های یانیشِفسکی معروف‌اند. قضیهٔ اول یانیشِفسکی می‌گوید اگر A و B دو پیوستار باشند که جداساز صفحه نباشند، آن‌گاه $A \cup B$ جداساز صفحه است اگر و تنها اگر $A \cap B$ همبند نباشد. قضیهٔ دوم یانیشِفسکی بیان می‌کند که کرهٔ دو بُعدی $S^۲$ یک فضای یانیشِفسکی است (پیوستارِ موضعاً همبند X را *فضای یانیشِفسکی* می‌نامند اگر به‌ازای هر دو پیوستار $A, B \subset X$ که $A \cap B$ ناهمبند است، نقاط $p, q \in X$ موجود باشند طوری که $A \cup B$ جداساز صفحه باشد و p و q متعلق به مؤلفه‌های متفاوتی از $X \setminus (A \cup B)$ باشند). بعدها کوراتُفسکی و استفان استراشِویچ[۳] این قضیه‌ها را تعمیم دادند. استراشِویچ پی برد که در فرض‌ها می‌توان به‌جای پیوستار، مجموعهٔ بسته و همبند قرار داد. قضیهٔ اول یانیشِفسکی در کوتاه کردنِ برهان قضیهٔ خم ژُردان به‌کار گرفته شده است.

لازم است مطلبی هم دربارهٔ نتایج معروف در مبحث همبندی بگوییم. مجموعه‌های همبند از همان آغازِ قرن بیستم مورد بررسی قرار گرفتند. با این حال، مفاهیم همبندی را کوراتُفسکی و کناستر تکامل بخشیدند. *بادبزن*[۴] کناستر–کوراتُفسکی یکی از مشهورترین مثال‌های توپولوژی است [۱۲]. فرض کنید C مجموعهٔ کانتور روی بازهٔ $[۰, ۱] \times \{۰\} \subset \mathbb{R}^۲$ باشد. مجموعهٔ همهٔ نقاط انتهایی بازه‌هایی را که در جریان ساختن مجموعهٔ کانتور از $[۰, ۱] \times \{۰\}$ حذف کرده‌ایم، با P نشان می‌دهیم. با پاره‌خط $I_{c'}$ نقطهٔ $c \in C$ را به نقطهٔ $q = (۱/۲, ۱/۲) \in \mathbb{R}^۲$ وصل می‌کنیم و مجموعهٔ همهٔ نقاط $(x, y) \in I_{c'}$ را با

[۱] separator [۲] irreducible [۳] Stefan Straszewicz [۴] fan



تصاویر منتشرشده در [۱۲] که روش ساختن مجموعه‌های همبند غیرمعمول (و اکنون معروف) را نشان می‌دهد.

F_c نشان می‌دهیم که در اینجا برای $c \in C \setminus P$ داریم $y \in \mathbb{Q}$ و برای $c \in P$ داریم $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
بادبزن کناستر–کوراتُفسکی عبارت است از مجموعهٔ $F = \bigcup\{F_c : c \in C\} \subset \mathbb{R}^2$.

ناهمبندی انواع مختلفی دارد. شِرپینسکی مجموعه‌های *نقطه‌مانند*[1] (مجموعه‌های ناپیوسته) را بررسی کرده است. این مفهوم را یانیشِفسکی معرفی کرد. یک مجموعه، نقطه‌مانند است اگر حاوی هیچ پیوستاری با عدد اصلی بزرگتر از ۱ نباشد. شِرپینسکی چند قضیه راجع به تجزیهٔ صفحه به مجموعه‌های نقطه‌مانند ثابت کرد [۲۷، ۳۴]. شِرپینسکی و کوراتُفسکی [۱۸] تجزیه‌ای از صفحه به دو مجموعهٔ نقطه‌مانند مثل A و B ارائه کردند به‌طوری که A برابر با اشتراک یک مجموعهٔ F_σ و یک مجموعهٔ G_δ و B برابر با اجتماع یک مجموعهٔ F_σ و یک مجموعهٔ G_δ است. در اینجا شِرپینسکی و کوراتُفسکی فن ساختن فضاهای

[1] punctiform

خاص با استفاده از نمودارهای تابع‌ها را برای نخستین بار به‌کار می‌برند. شِرپینسکی میان انواع «بهتر» و «بدتر» ناهمبندی که در زیر می‌آید، تمایز قائل می‌شود [تعریف‌های (پ) و (ت) را او در سال ۱۹۲۱ ارائه کرده است [۳۰] و (ب) را فلیکس هاوسدُرف در ۱۹۱۴]:

(الف) فضای شمارا؛

(ب) فضای موروثی–ناهمبند (فضایی که شامل هیچ زیرمجموعهٔ همبند نابدیهی نیست)؛

(پ) فضای کلاً ناهمبند (هر دو نقطهٔ آن را بتوان با مجموعه‌های باز–بسته جدا کرد)؛

(ت) فضای صفر بُعدی (فضایی که پایه‌ای مرکب از مجموعه‌های باز–بسته دارد)؛

(ث) فضاهای نقطه‌مانند.

برای مثال، بادبزن کناستر–کوراتُفسکی F همبند و نقطه‌مانند است؛ فضای $F \setminus \{q\}$ موروثی–ناهمبند است اما کلاً ناهمبند نیست. شِرپینسکی با مثال‌هایی، تفاوت این رده‌های فضاها را نشان داد. همچنین پی بُرد که فضای شمارا و چگال در خود، همانریخت با $\mathbb{Q}$ است. پژوهش‌ها روی فضاهای صفر بُعدی و همچنین برخی نتایج مازورکیه‌ویچ خط سیر تکامل نظریهٔ بُعد را معین ساخت.

اجازه دهید چند نتیجهٔ مهم دیگر را ذکر کنیم. روش تولید توپولوژی با استفاده از عملگر بستار را کوراتُفسکی ابداع کرد. شِرپینسکی، مستقل از اف. ریس[۱]، مجموعه‌های فشرده را برحسب خانواده‌ای که ویژگی اشتراک متناهی دارد، مشخصه‌سازی کرد [۳۵]. اینها تنها تعدادی از انبوه نتایج مهم و مشهور توپولوژی‌دانان لهستانی است که در همان آغاز قرن بیستم به‌دست آمدند.

توپولوژی عمومی در بیرون از وارشاو، حوزهٔ اصلی پژوهش نبود. با وجود این، ریاضیدانان در لووف نتایجی نیز در توپولوژی به‌دست آوردند: استانیسلاف مازور[۲]، استانیسلاف اولام[۳]، یولیوش پاوِل شاودر[۴] و البته استفان باناخ. همچنین در کراکوف، تادئوش واژِفسکی[۵] فضایی را ساخت که امروزه آن را *دندریتِ واژِفسکی*[۶] می‌نامند. در اینجا از ذکر بسیاری از نتایجی که در دههٔ سی و پس از آن به‌دست آمدند، می‌گذریم.

از بین توپولوژی‌دان‌های جوان لهستان، دو نفر از آنها به گونهٔ دیگری از توپولوژی روی آوردند و در اوایل کار جلای وطن کردند: این دو ساموئل اِیلِنبِرگ[۷] و ویتولت هورویچ[۸] بودند. اِیلِنبِرگ در آغاز، در حوزهٔ توپولوژی عمومی پژوهش می‌کرد. بعداً که به ایالات متحده نقل مکان کرد، به توپولوژی جبری علاقه‌مند شد. نتایج اِیلِنبِرگ امروزه جزء نتایج کلاسیک محسوب می‌شوند و در بسیاری از کتاب‌های درسی دربارهٔ توپولوژی جبری می‌آیند. هورویچ در وین تحصیل کرد و پس از آن، مدتی دراز تحت راهنمایی براوئر در آمستردام به پژوهش مشغول بود. وی نتایج بنیادی در نظریهٔ هموتوپی و نظریهٔ بُعد به‌دست آورد.

---

[۱] F. Riesz [۲] Stanisław Mazur [۳] Stanisław Ulam [۴] Juliusz Paweł Schauder [۵] Tadeusz Ważewski
[۶] Ważewski dendrite [۷] Samuel Eilenberg [۸] Witold Hurewicz

در پایان، اجازه دهید بازگردیم به اندیشهٔ گسترش ریاضیات در لهستان از طریق توجه ویژه به یک شاخه از ریاضیات. گرچه از این راه، حصول نتایجِ در خورِ توجه طی مدت زمانی کوتاه امکان‌پذیر می‌گردد، چنین فکری می‌تواند خطرناک باشد. مثلاً چنانچه موضوع پژوهش درست انتخاب نشود، ممکن است عالی‌ترین مغزهای ریاضی کشور انرژی خود را روی حوزه‌ای بی‌ارزش هدر دهند. همچنین در آن زمان، اداره کردن مجله‌ای مختصِ تنها یک شاخه از ریاضیات، تصمیمی پرحرف و حدیث بود. برای نمونه، وقتی اولین شمارهٔ *فوندامنتا متمتیکا* منتشر شد، آنری لُبِگ نامه‌ای به شِرپینسکی نوشت و در آن نامه خرسندی‌اش را از مقاله‌های چاپ‌شده در آن مجله بیان کرد، لیکن ابراز تردید کرد که آیا مجله‌ای آن‌قدر تخصصی، آن اندازه مقاله دریافت خواهد کرد که ادامهٔ کارش در این چنین سطح بالایی تضمین شود.

خالقان مکتب ریاضی ورشاو بر همهٔ این خطرات آگاه بودند. با این همه، آنها به درستیِ انتخابشان باور داشتند. شِرپینسکی بر این باور بود که تمرکز بر روی یک شاخهٔ واحد از ریاضیات بهتر از پژوهش‌های بی‌برنامه و درهم و فاقد حس همکاری است.

توپولوژی در قرن بیستم چنان رشد کرد که حتی کسانی که آن را حوزهٔ پژوهشیِ ریاضیات لهستان قرار دادند، انتظار چنین رشدی را نداشتند. گرایش‌هایی جدید مانند توپولوژی جبری و توپولوژی دیفرانسیل رشد و کاربردهایی گسترده یافتند. ریاضیدانان لهستانی در این حوزه‌ها به اندازهٔ حوزهٔ توپولوژی عمومی حکمران نبودند: مشهورترینِ آنها عبارت‌اند از کارُل بُرسوک[۱]، هورویچ و اِیلِنبِرگ که این دو نفر آخر خارج از لهستان مشغول‌اند.

برخی ریاضیدانان آن‌قدر که از تمرکز درازمدت پژوهشِ صِرف بر روی توپولوژی خرده می‌گیرند، خیلی بر انتخاب توپولوژی [به‌عنوان موضوع پژوهشی در لهستان] خرده نمی‌گیرند. آنها معتقدند که حوزهٔ پژوهشی می‌بایست به توپولوژی جبری و توپولوژی دیفرانسیل گسترش می‌یافت. نظرات ریاضیدانان مشهور در این باره متفاوت است.

تصور پیشرفت توپولوژی عمومی بدون نتایج حاصل از پژوهش‌های ریاضیدانان لهستانی، ناممکن است. از سوی دیگر، ریاضیاتِ حال حاضرِ لهستان، آن نقش هفتاد سال پیش را ایفا نمی‌کند. اما آیا خالقان مکتب ورشاو در این موضوع مرتکب اشتباه شده‌اند؟ آیا کسی کوتاهی کرده است؟ نمی‌شود ریاضیدانی مستعد را مجبور به پژوهش دربارهٔ نوعی ویژه از مسائل کرد. همچنین دورهٔ ۱۹۳۵–۱۹۵۰ که طی آن، توپولوژی جبری پیشرفت‌هایی پُربار داشت، دورانی پُرمشقّت برای لهستان بود. شاید اکنون برای قضاوت در این باره خیلی زود باشد. باید حدود صد سالی منتظر بمانیم.

می‌توان گفت که در تکامل توپولوژی، سهم ریاضیدانان لهستانی بی‌اندازه تأثیرگذار بوده است. لهستان جایی بود که اصول توپولوژی عمومی در آنجا سامان یافت، بسیاری از ایده‌های توپولوژیک صورت‌بندی

[۱] Karol Borsuk

شد، تعریف‌های بسیاری مطرح و خیلی از مسائل بسیار مهم توپولوژی حل شد. حتی چنین به نظر می‌آید که در دههٔ بیست، آن‌قدر مسئله حل کردند که دیگر چیزی برای وارثانشان نماند. کتاب‌هایی که توپولوژی‌دانان لهستانی نوشتند، به‌ویژه تک‌نگاشت تأثیرگذار کوراتُفسکی، به منابع کلاسیک در این حوزه تبدیل شدند. گرچه اکنون این متون قدیمی شده‌اند، هنوز به آنها بسیار ارجاع داده می‌شود. اجازه دهید با نقل قولی از ریاضیدان مشهور ژاپنی، جی. ناگاتا[۱] سخن را ختم کنیم. وقتی از او دربارهٔ استادانش سؤال کردند، در جواب گفت: «من دوتا استاد داشتم: آلکساندرُف و کوراتُفسکی، چراکه توپولوژی را از کتاب‌های این دو نفر آموختم.»

مراجع

[1] Arkhangelskii, A. V., Pontryagin, L. S. (eds.), *General Topology, vol. I*, Springer-Verlag, New York,1990.

[2] Bing, R. H., Concerning hereditarily indecomposable continua, *Pacific Journal of Mathematics*, **1** (1951), 43–52.

[3] Engelking, R., *General Topology*, PWN, 1977.

[4] Engelking, R., “P. S. Aleksandrow”, *Wiadomości Matematyczne*, **20** (1978), 174–177.

[5] Engelking, R., Sieklucki, K., *Introduction to Topology*, Amsterdam, North-Holland, 1994.

[6] Hannabuss, K., Forgotten fractals, *Mathematical Intelligencer*, **18** (1996), 28–31.

[7] Janiszewski, Z., O potrzebach matematyki w Polsce, in: Nauka Polska, Warszawa, Kasa im. Mianowskiego 1917, reprinted in: *Wiadomosci Matematyczne,* **7** (1963), 3–8.

[8] Janiszewski, Z., O rozcinaniu plaszczyzny przez continua, *Prace Matematyczno-Fizyczne*, **26** (1913), 11–63.

[9] Janiszewski, Z., Sur les continus irréductibles entre deux points, *Comptes Rendus Paris*, (1911), 752–755.

[10] Janiszewski, Z., Über die Begriffe “Linie” und “Fläche”, *International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912.*

[11] Knaster, B., Un continu dont tout sous-continu est indécomposable, *Fundamenta Mathematicae*, **3** (1922), 247–286.

[12] Knaster, B., Kuratowski, K., Sur les ensembles connexes, *Fundamenta Mathematicae*, **2** (1921), 206–255.

[13] Kuratowski, K., *Notatki do autobiografii*, Czytelnik, Warszawa, 1981.

[14] Kuratowski, K., *Pół wieku matematyki polskiej*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1977.

---
[۱] J. Nagata

[15] Kuratowski, K., S. Mazurkiewicz et son oeuvre scientifique, *Fundamenta Mathematicae*, **34** (1947), 316–331.

[16] Kuratowski, K., *Topologie, vol. I*, Warszawa, 1933.

[17] Kuratowski, K., *Topologie, vol. II*, Warszawa, 1950.

[18] Kuratowski, K., Sierpiński, W., Les fonctions de classe 1 et les ensembles connexes punctiformes, *Fundamenta Mathematicae*, **3** (1922), 303–313.

[19] Lelek, A., *Zbiory*, Warszawa, PZWS, Warszawa, 1966.

[20] Mazurkiewicz, S., O arytmetyzacji continuów, *Comptes Rendus Varsovie*, **6** (1913), 305–311.

[21] Mazurkiewicz, S., Sur les continus absolument indécomposables, *Fundamenta Mathematicae*, **16** (1930), 151–159.

[22] Mazurkiewicz, S., Sierpiński, W., Contribution à la topologie des ensembles dénombrables, *Fundamenta Mathematicae*, **1** (1920), 17–27.

[23] Moise, E. E., An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 581–594.

[24] Schinzel, A., Rola Waclawa Sierpińskiego w historii matematyki polskiej, *Wiadomości Matematyczne*, **26** (1984), 1–9.

[25] Sierpiński, W., *Oeuvres Choisies, vols. I, II,* PWN, Warszawa, 1974

[26] Sierpiński, W., Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne, *Fundamenta Mathematicae*, **1** (1920), 44–60.

[27] Sierpiński, W., Sur la décomposition du plan en deux ensembles punctiformes, *Bulletin International de L' Académie des Sciences de Cracovie, Ser. A*, (1913), 76–82.

[28] Sierpiński, W., O krzywej, której katżdy punktjest punktem rozgałęzienia (Sur une courbe dont tout point est un point de ramification), *Prace Matematyczno-Fizyczne*, **27** (1916), 77–85.

[29] Sierpiński, W., O krzywych, wypełniających kwadrat (Sur les courbes qui remplissent un carré), *Prace Matematyczno-Fizyczne*, **23** (1912), 193–219.

[30] Sierpiński, W., Sur les ensembles connexes et non connexes, *Fundamenta Mathematicae*, **2** (1921), 81–95.

[31] Sierpiński, W., Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *Comptes Rendus Paris*, **160** (1915), 302–305.

[32] Sierpiński, W., Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée, *Comptes Rendus Paris*, **172** (1916), 629–632.

[33] Sierpiński, W., Sur une nouvelle courbe continue quelconque, *Bulletin International de L' Académie des Sciences de Cracovie, Ser. A*, (1912), 462–478.

[34] Sierpiński, W., Sur un ensemble punctiforme connexe, *Fundamenta Mathematicae*, **1** (1920), 7–10.

[35] Sierpiński, W., Un théorème sur les ensembles fermés, *Bulletin International de L'Académie des Sciences de Cracovie, Ser. A*, (1918), 49–51.

[36] Sierpiński, W., Un théorème sur les continus, *Tôhoku Mathematics Journal*, **13** (1918), 300–303.

[37] Steen, L. A., Seebach Jr., J. A., *Counterexamples in Topology*, New York, Springer-Verlag, 1978.

[38] Stewart, I., Four encounters with Sierpinski's gasket, *Mathematical Intelligencer*, **17** (1995), 52–64.

[39] Temple, G., *100 Years of Mathematics,* Duckworth, London, 1981.

سعید مقصودی: دانشگاه زنجان، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی

رایانامه: s_maghsodi@znu.ac.ir