فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۷، شمارهٔ ۶۳ (پاییز و زمستان ۱۳۹۷) صص. ۱۴۹ تا ۱۶۵

روش‌های جبری در نظریهٔ بازی‌ها

مهدی‌رضا درویش‌زاده و بنفشه راستگو

چکیده

در این مقاله، ضمن مروری بر روش‌های به‌کار رفته در اثبات وجود تعادل نش طی ۷۰ سال اخیر، نشان می‌دهیم که محور این روش‌ها، قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر و تعمیم‌های آن بوده است و سپس به تبیین روشی جدید می‌پردازیم که مبتنی بر استفاده از روش‌های جبری در اثبات وجود تعادل است. گرچه این روش هنوز دوران طفولیت خود را می‌گذراند، پیشینهٔ استفاده از روش‌های جبری در حل مسائل ریاضی نشان می‌دهد که این روش، نویدبخش یک رویکرد پژوهشیِ گسترده در آینده است.

۱. سرآغاز

در قرن بیستم شاهد پیشرفت‌های علمی فراوانی در زمینه‌های گوناگون بوده‌ایم. بدون تردید یکی از قله‌هایی که در سرزمین این قرن خودنمایی می‌کند، نظریهٔ بازی‌ها است که بر تارک آن، مفهوم تعادل نش می‌درخشد. گرچه در مورد زمان آغاز هر شاخه‌ای از علم، اختلاف‌نظرهایی وجود دارد و نظریهٔ بازی‌ها نیز از این قاعده مستثنی نیست، آنچه مورد اتفاق همگان است این است که سنگ‌بنای این رشته، کتاب مشهور فون‌نویمان–مورگنشترن[۱] با عنوان *نظریهٔ بازی‌ها و رفتارهای اقتصادی* است که در سال ۱۹۴۴ توسط دانشگاه پرینستون منتشر شد [۴۰]. تمرکز این کتاب علاوه بر کاربردهای این نظریه، بر بازی‌های همکارانه به‌ویژه بازی‌های ساده و بازی‌های مجموع–صفر قرار دارد. با وجود این، این کتاب همچنان الهام‌بخش رویکردهایی جدید در نظریهٔ بازی‌ها است. مفهوم راهکار پاسخی که در این کتاب برای بازی‌های همکارانه

عبارات و کلمات کلیدی. بازی‌های غیرهمکارانهٔ نامتناهی؛ تعادل نش؛ قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر؛ قضیهٔ کاکوتانی؛ بازی والد.

[۱] von Neumann-Morgenstern

پیشنهاد شده است، مفهوم *مجموعه‌های پایدار* است. مجموعه‌های پایدار بیش از سه دهه پس از انتشار این کتاب، در کانون توجه پژوهش‌ها قرار داشت و منجر به ابداع مفاهیم دیگری از پاسخ مانند مفهوم هسته[۱]، مجموعهٔ چانه‌زنی[۲] [۲]، K–هسته[۳] [۱۸]، N–هسته[۴] [۴۳]، ارزش شاپلی[۵] [۴۴] و پاسخ نش[۶] [۳۸] شد.

مهم‌ترین تحوّل در نظریهٔ بازی‌ها بعد از انتشار کتاب *نظریهٔ بازی‌ها و رفتارهای اقتصادی*، کارهای جان نش[۷] در زمینهٔ بازی‌های غیرهمکارانه بود. از جملهٔ این کارها می‌توان به ابداع مفهوم *تعادل نش*[۸] در دهۀ ۱۹۵۰ اشاره کرد. این ابداع، زیربنای تحوّل در برخی از شاخه‌های علوم انسانی مانند اقتصاد، سیاست، علوم اجتماعی و حتی فراتر از آن، زیست‌شناسی، علوم اعصاب، فیزیک و مهندسی شد [۳۶]. این تحوّل از چنان اهمیتی برخوردار است که راجر مایرسون[۹]، اقتصاددان و یکی از متخصصان نظریهٔ بازی‌ها، معتقد است که در حال حاضر «نظریهٔ نش در زمینهٔ بازی‌های غیرهمکارانه یکی از پیشرفت‌های برجستهٔ قرن بیستم است و باید آن را با کشف ساختار مارپیچ دوگانهٔ DNA در علوم زیستی مقایسه کرد.» سرانجام، این تحوّلات منجر به اعطای جایزهٔ نوبل اقتصاد سال ۱۹۹۴ به جان نش شد. نظریهٔ بازی‌ها

جدول ۱. جایگاه نظریهٔ بازی‌ها در ریاضیات

چند بازیکن	یک بازیکن	
نظریهٔ بازی‌ها (استاتیکی)	بهینه‌سازی ریاضی	**استاتیکی**
نظریهٔ بازی‌ها (دینامیکی یا دیفرانسیلی)	نظریهٔ کنترل بهینه	**دینامیکی**

تعمیم نظریهٔ تصمیم و در واقع مدل ریاضی رقابت و همکاری است. در نظریهٔ تصمیم، یک بازیکن با یک تابع سود (یا زیان) سروکار دارد که باید آن را بیشینه (کمینه) کند. در حقیقت، نظریه‌های بهینه‌سازی به همین منظور تدوین شده‌اند. در بهینه‌سازی با یک تابع مانند $f : A \to \mathbb{R}$ سروکار داریم و با توجه به ویژگی‌های f مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری و ... و نیز با توجه به ویژگی‌های مجموعهٔ A مانند فشردگی، تحدب و ...، به بررسی وجود نقاط اکسترمم تابع می‌پردازیم. اگر به‌جای یک تابع، با چند تابع هدف (چند بازیکن) مانند f_1، f_2، ...، f_N سروکار داشته باشیم و بخواهیم همهٔ آنها را اکسترمم کنیم، وارد حوزهٔ نظریهٔ بازی‌ها شده‌ایم. در واقع اکسترمم‌سازی هر کدام از این تابع‌ها، لزوماً به اکسترمم‌سازی بقیهٔ آنها منجر نمی‌شود، بلکه عموماً وضع بقیه (یا برخی از آنها) را بدتر می‌کند. لذا در چنین شرایطی، یعنی در شرایط ستیز باید بتوان به‌طور بهینه تصمیم‌گیری کرد. تعادل نش در واقع پاسخی به این سؤال است؛ یعنی پاسخ به تصمیم‌گیری در شرایط متضاد. وضعیت ستیز بین چند بازیکن را می‌توان در حالت استاتیکی یا در حالت دینامیکی مورد بررسی قرار داد. حالت اول به نظریهٔ بازی‌های استاتیکی و حالت دوم به نظریهٔ بازی‌های

[۱] core [۲] bargaining set [۳] kernel [۴] nucleous [۵] Shapley value [۶] Nash solution [۷] John Nash [۸] Nash equilibrium [۹] Roger Myerson

دینامیکی یا دیفرانسیلی منجر می‌شود. به این ترتیب، جایگاه نظریهٔ بازی‌ها در ریاضیات را می‌توان به صورت جدول ۱ نشان داد [۷].

از پیدایش نظریهٔ بازی‌ها تا به امروز، در مقایسه با دیگر رشته‌های علمی، زمان زیادی نمی‌گذرد ولی به‌جرأت می‌توان گفت که تنها رشته‌ای است که در این عمر کوتاه، با این وسعت مورد بهره‌برداری در رشته‌های مختلف قرار گرفته است؛ از اقتصاد گرفته که بستر تولد نظریهٔ بازی‌ها است [۴۰]، تا علوم سیاسی و روابط بین‌الملل، حقوق و علوم اجتماعی. همچنین می‌توان به کاربرد نظریهٔ بازی‌ها در حوزهٔ ژنتیک و نیز مهندسی مانند زنجیرهٔ تأمین، الکترونیک و مخابرات، طراحی سازهٔ هواپیماهای بدون سرنشین و ... اشاره کرد. دلیل این وسعتِ کاربرد این است که اولاً موضوع نظریهٔ بازی‌ها، بهینه‌سازیِ چندمعیاره (چندهدفه) است. ثانیاً هیچ پدیده‌ای وجود ندارد که بهینه‌سازی آن، تحت تأثیر عوامل دیگری نباشد، زیرا هر پدیده‌ای در اندرکنش با دیگر پدیده‌ها است. لذا بهینه‌سازیِ یک هدف، باید با توجه به تأثیر دیگر عوامل، مورد محاسبه قرار گیرد. به این ترتیب، در بهینه‌سازیِ هر پدیده عملاً وارد یک حوزهٔ ستیز می‌شویم که همان حوزهٔ نظریهٔ بازی‌ها است. به همین دلیل است که کاربرد نظریهٔ بازی‌ها در رشته‌های گوناگون با رشد نمایی در حال گسترش است. با وجود کاربردهای وسیع نظریهٔ بازی‌ها در دهه‌های اخیر، این نظریه هنوز دوران طفولیت خود را سپری می‌کند. تأثیر روزافزون و فزایندهٔ نظریهٔ بازی‌ها باعث شده است تا در بیست سال اخیر، بسیاری از برندگان جایزهٔ نوبل اقتصاد به‌دلیل به‌کارگیریِ نظریهٔ بازی‌ها موفق به اخذ این جایزه شوند که در این خصوص می‌توان به تیرُل[۱] برندهٔ جایزهٔ نوبل اقتصاد سال ۲۰۱۴، شاپلی[۲] و روت[۳] برندگان جایزهٔ نوبل اقتصاد سال ۲۰۱۲، هورویچ[۴] و ماسکین[۵] و میرسون در سال ۲۰۰۷، آومان[۶] و شلینگ[۷] در سال ۲۰۰۵، میرلیس[۸] و ویکری[۹] در سال ۱۹۹۶، لوکاس[۱۰] در سال ۱۹۹۵، هارسانی[۱۱] و نش و زِلتن[۱۲] در سال ۱۹۹۴ و ... اشاره کرد.

پس از آنکه یک پدیده را به‌صورت یک بازی مدل کردیم، با سه چالش مواجه می‌شویم. اول، وجود راهکار پاسخ: منظور از راهکار پاسخ در بازی‌های غیرهمکارانهٔ مجموع–ناصفر[۱۳]، تعادل نش یا تعادل استکلبرگ[۱۴] است و در بازی‌های همکارانه، یکی از مفاهیمی است که در آغاز بخش به آنها اشاره شد؛ البته منحصر به آن مفاهیم نیست و مفاهیم دیگری از راهکار پاسخ نیز مطرح شده است. وجود راهکار پاسخ در یک بازی، به معنای وجود یک تصمیم‌گیریِ بهینه برای همهٔ بازیکنان است. دوم، پالایش راهکار پاسخ‌ها: چنانچه یک بازی دارای راهکار پاسخ باشد، این پاسخ عموماً یگانه نیست. در این شرایط، کدام راهکار پاسخ را باید انتخاب کنیم؟ برای جواب دادن به این سؤال باید از طریق روش‌هایی، مجموعهٔ راهکارهای پاسخ را کوچکتر کنیم تا بتوانیم به یک تصمیم بهینه برسیم. به چنین روش‌هایی، روش‌های *پالایش*[۱۵] راهکار

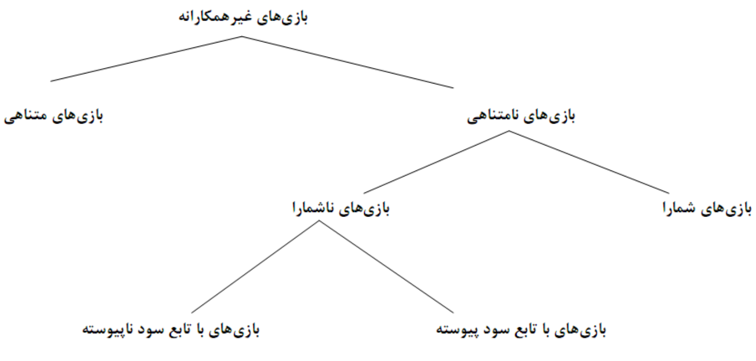
[۱]Jean Tirole [۲]Lloyd Stowell Shapley [۳]Alvin E. Roth [۴]Leonid Hurwicz [۵]Eric Maskin [۶]Robert John Aumann [۷]Thomas C. Schelling [۸]James A. Mirrlees [۹]William Vickrey [۱۰]Robert E. Lucas [۱۱]John C. Harsanyi [۱۲]Reinhard Selten [۱۳]nonzero-sum [۱۴]Stackelberg equilibrium [۱۵]refinement

پاسخ گوییم. سوم، محاسبهٔ راهکار پاسخ: با توجه به مفاهیم مطرح‌شده برای راهکار پاسخ در بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه، کاملاً روشن است که محاسبهٔ راهکار پاسخ با استفاده از تعریف، عموماً در یک زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر نیست. لذا باید روش‌هایی را به‌دست آورد تا بتوان در یک زمان چندجمله‌ای به راهکار پاسخ رسید. همین ضرورت، منجر به گرایشی در نظریهٔ بازی‌ها شده است که *نظریهٔ بازی‌های الگوریتمی*[۱] نام دارد و هدف آن، یافتن الگوریتم‌هایی است که با استفاده از آنها بتوان راهکار پاسخ را در یک زمان چندجمله‌ای به‌دست آورد.

۲. روش‌های اثبات وجود تعادل نش

در این بخش، به مرور روش‌هایی می‌پردازیم که تاکنون برای اثبات وجود تعادل در بازی‌های غیرهمکارانه به‌کار رفته‌اند. مطالعهٔ این روش‌ها دریچه‌ای به‌سوی ابداع روش‌های جدیدتر در آینده خواهد گشود.

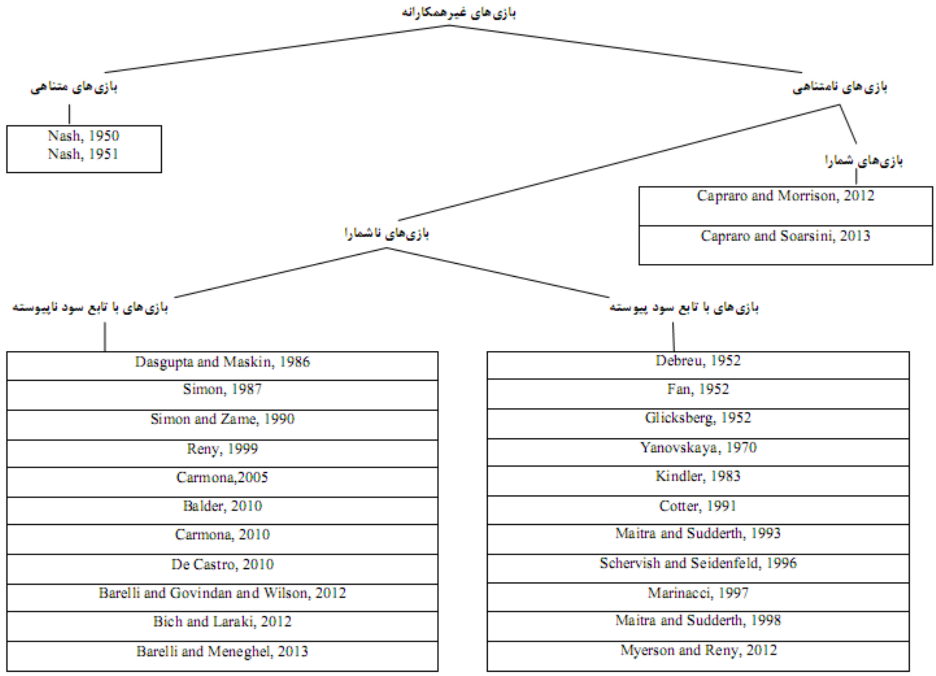
یک بازی استراتژیک[۲]، یک سه‌تایی مانند $\langle N, (A_i)_{i=۱}^n, (\geq_i)_{i=۱}^n \rangle$ است که در آن، N مجموعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا n است، برای هر $۱ \leq i \leq n$، A_i مجموعهٔ راهبردهای بازیکن iاُم است و منظور از $\geq_i$، $۱ \leq i \leq n$، یک رابطهٔ دوتایی کامل، بازتابی و ترایایی روی $A = \prod_{i=۱}^n A_i$ است که ارجحیت‌های بازیکن iاُم را نشان می‌دهد. رابطهٔ ارجحیت $\geq_i$ را می‌توان تحت شرایطی به رابطهٔ متداول در اعداد حقیقی منتقل کرد. برای مثال، اگر A_iها همبند باشند و $\geq_i$ پیوسته باشد، تابعی مانند $u_i : A \to \mathbb{R}$ وجود دارد که نسبت به رابطهٔ $\geq_i$ روی A و رابطهٔ متداول در $\mathbb{R}$ صعودی و پیوسته است [۲۲]. در چنین شرایطی، u_i را تابع مطلوبیت[۳] یا تابع سود[۴] بازیکن iاُم می‌گوییم. بازی فوق را *متناهی* گوییم اگر A_iها متناهی باشند. به‌منظور بررسی روش‌های اثبات وجود راهکار پاسخ و برای ساماندهیِ این روش‌ها، شکل ۱ را در نظر بگیرید. در این شکل، به یک تقسیم‌بندی از بازی‌های غیرهمکارانه پرداخته‌ایم



شکل ۱. یک تقسیم‌بندی از بازی‌های غیرهمکارانه

[۱] algorithmic game theory [۲] strategic game [۳] utility function [۴] payoff function

که مبتنی بر تمایز تدبیرهایی است که در اثبات تعادل نش به‌کار رفته‌اند. در شکل ۲، به مقاله‌های موجود در هر شاخه اشاره کرده‌ایم که در ادامه به بیان تدبیرهای به‌کار رفته در این مقاله‌ها خواهیم پرداخت.



شکل ۲. تقسیم‌بندی مقاله‌ها در زمینهٔ اثبات وجود راهکار پاسخ در بازی‌های غیرهمکارانه

قبل از پرداختن به تدبیرهای به‌کار رفته در اثبات وجود تعادل نش، می‌گوییم که بازی‌های غیرهمکارانه با تابع سود پیوسته و نیز بازی‌های با تابع سود ناپیوسته همانند بازی‌های متناهی، از اهمیت زیادی در کاربردها برخوردارند. در واقع برای خواننده‌ای که کمتر با نظریهٔ بازی‌ها آشنا است، ممکن است این سؤال مطرح شود که اولاً با توجه به اینکه در عمل عموماً یک بازیکن با تعدادی متناهی گزینه مواجه است، چگونه ممکن است راهبرد یک بازیکن یک پیوستار باشد. ثانیاً با قبول فرض بالا، چگونه ممکن است تابع سود یک بازیکن که روی حاصل‌ضرب دکارتی $\prod_{i=1}^{n} A_i$ تعریف می‌شود، تابعی ناپیوسته باشد. قبل از ادامهٔ مطلب، به پاسخگویی به این سؤال‌ها می‌پردازیم. گرچه بازی‌های غیرهمکارانهٔ متناهی دارای کاربردهای فراوانی هستند، بازی‌های غیرهمکارانه‌ای که در آنها مجموعهٔ راهبردهای محض هر بازیکن یک پیوستار است نیز از اهمیت زیادی برخوردارند. برای مثال، می‌توان به مجموعهٔ مصرف هر مصرف‌کننده یا به مجموعهٔ تولید هر تولیدکننده در یک اقتصاد اشاره کرد که هر کدام یک پیوستار در *فضای کالا*[1] هستند و

[1] commodity space

یک فضای اقلیدسی با بُعد متناهی به شمار می‌آیند [۲۲]. همچنین اگر چند بنگاه که یک کالای همگن را تولید می‌کنند، در حال رقابت روی قیمت باشند، آن‌گاه راهبردهای هر بازیکن یک بازه در $\mathbb{R}$ است که یک پیوستار است. از طرفی، بازی‌های غیرهمکارانه با تابع سود ناپیوسته [۴۵] نیز در کاربردها مهم هستند.

مثال ۱.۲ (بازی برتران). مدل برتران[۱] مدل انحصار چندجانبه است که در آن، بنگاه‌ها روی قیمت رقابت می‌کنند. این مدل قبل از تولد نظریهٔ بازی‌ها مطرح بوده است ولی در چارچوب بازی‌های غیرهمکارانه به‌صورت زیر مدل می‌شود. ما این مدل را برای دو بنگاه بیان می‌کنیم. دو بنگاه، بازیکنان این بازی هستند. راهبردهای هر بازیکن، قیمتی است که به کالای خود نسبت می‌دهد که یک پیوستار در $\mathbb{R}$ است. راهبردهای بازیکن اول و دوم را به‌ترتیب با $p_۱$ و $p_۲$ نشان می‌دهیم. تابع سود بازیکن اول (به‌طور مشابه بازیکن دوم) به‌صورت زیر است:

$$P_۱(p_۱, p_۲) = \begin{cases} p_۱ D(p_۱) - FC & p_۱ < p_۲ \\ -FC & p_۱ > p_۲ \\ ۱/۲ p_۱ D(p_۱) - FC & p_۱ = p_۲ > ۰ \\ ۰ & p_۱ = ۰ \end{cases}$$

که در آن، FC هزینهٔ ثابت هر بنگاه برای تولید و $D(p_۱)$ تقاضای بازار است. هر بنگاهی که قیمت کمتر بدهد، تقاضای بازار را تأمین خواهد کرد و اگر قیمت‌های دو بنگاه یکسان باشد، بازار به دو بخش تقسیم می‌شود. مشاهده می‌کنیم که تابع‌های سود در مدل برتران که یک مدل اساسی در اقتصاد است، تابع‌هایی ناپیوسته هستند.

مثال ۲.۲ (بازی انتخابات، [۵]). مدل انتخابات به این صورت است: بازیکنان این بازی ۲ نامزد و k رأی‌دهنده $(k > ۲)$ هستند. راهبردهای رأی‌دهنده‌ها، مجموعهٔ همهٔ سیاست‌های موجود است که زیرمجموعهٔ فشردهٔ یک فضای اقلیدسی است و آن را با p نمایش می‌دهیم و راهبردهای نامزدها مجموعهٔ همهٔ سیاست‌های *پذیرفتنی* است که بستار یک زیرمجموعهٔ باز در p است و آن را با $X = X_۱ \times X_۲$ نمایش می‌دهیم. هر رأی‌دهنده به نامزدی رأی می‌دهد که سیاستش مورد قبول او است. دو نامزد برای جمع کردن رأی‌های رأی‌دهندگان با هم رقابت می‌کنند. نامزدی که بیش از نصف کل رأی‌ها را به خود اختصاص دهد، پیروز میدان است و سود ۱+ را می‌گیرد و در مقابل، نامزد دیگر شکست خورده است و سود ۱− را می‌گیرد. اگر تعداد رأی‌ها مساوی شود، هر دو نامزد سود صفر را می‌گیرند. تابع سود هر نامزد به‌صورت $\pi : X \to [-۱, ۱]$ و تابع سود هر رأی‌دهنده به‌صورت $u : p \to \mathbb{R}$ است. این بازی نیز که یکی از مهم‌ترین پدیده‌ها در جوامع را مدل می‌کند از تابع‌های سود ناپیوسته برای نامزدها برخوردار است.

[۱] Joseph Louis François Bertrand

سرانجام، حالت ناشمارای بازی والد را در نظر می‌گیریم.

مثال ۳.۲ (بازی والد، [۱۲]). این بازی به این صورت مدل می‌شود: بازیکنان این بازی دو نفر هستند و راهبردهای هر بازیکن $\mathbb{R}$ است. تابع سود بازیکن اول $u_۱(x, y)$ و تابع سود بازیکن دوم $u_۲(x, y)$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_۱(x, y) = ۱ - u_۲(x, y) = \begin{cases} ۱ & x > y \\ ۱/۲ & x = y \\ ۰ & x < y \end{cases}$$

در واقع دو بازیکن به‌طور مستقل، دو عدد حقیقی دلخواه را انتخاب می‌کنند. سپس خروجی‌ها مشخص می‌شود و شخصی که عدد بزرگتر را گفته باشد، پیروز می‌شود و سود ۱+ را به‌دست می‌آورد و در مقابل، شخص دیگر شکست می‌خورد و سود او صفر است. اگر هر دو بازیکن عدد یکسانی را گفته باشند، سود ۱ را به‌تساوی بین خود تقسیم می‌کنند. همان‌طور که می‌دانیم، در اجرای هر پروژه‌ای ده‌ها و گاهی صدها مناقصه برگزار می‌شود که بازی والد در واقع مدلی از این مناقصه‌ها است. مشاهده می‌کنیم که در این بازی، راهبرد هر بازیکن یک پیوستار است و به‌علاوه تابع‌های سود، ناپیوسته هستند.

۱.۲. بازی‌های متناهی. مهم‌ترین مقاله در زمینهٔ وجود تعادل نش در بازی‌های متناهی، مقالهٔ بنیادی [۳۶] است که در آن، وجود یک تعادل مخلوط در هر بازی متناهی اثبات شده است. تدبیر به‌کار رفته در این مقاله، استفاده از قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر است. در واقع یک بازی متناهی لزوماً دارای یک تعادل نش محض نیست. برای مثال، بازی مسابقهٔ سکه‌ها[۱] که به‌صورت جدول ۲ است، فاقد تعادل نش محض است.

جدول ۲. بازی مسابقهٔ سکه‌ها

	شیر	خط
شیر	۱	۱-
خط	۱-	۱

جان نش با توسعهٔ فضای راهبردهای محض، به فضای راهبردهای مخلوط (مجموعهٔ همهٔ تابع‌های احتمال روی راهبردهای محض) دست یافت. این فضا یک سادک[۲] با بعد متناهی است که یک مجموعهٔ محدب و فشرده است. سرانجام، جان نش با تعریف تابع بهترین پاسخ[۳]، شرایط مسئله را به شرایط قضیهٔ

[۱] matching pennies game [۲] simplex [۳] best response function

نقطهٔ ثابت براوئر تبدیل کرد و با استفاده از آن قضیه، نشان داد که یک تعادل نش مخلوط وجود دارد. یادآوری می‌کنیم که

قضیه ۴.۲ (نقطهٔ ثابت براوئر، [۱۰]). *فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای فشرده و محدب از یک فضای اقلیدسی متناهی‌بُعد و نگاشت $\varphi : S \to S$ پیوسته باشد. در این صورت φ دارای یک نقطهٔ ثابت است؛ یعنی نقطه‌ای مانند $x^* \in S$ وجود دارد به‌طوری که $x^* = \varphi(x^*)$.*

۲.۲. بازی‌های نامتناهی و ناشمارا با تابع سود پیوسته.

محور تدبیرهای استفاده شده در مقاله‌هایی که به این دسته از بازی‌ها پرداخته‌اند، تعمیم روش نش در بند قبل به حالت نامتناهی است. به عبارت دیگر، در همهٔ این مقاله‌ها تلاش شده است تا با تعمیمی از قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر، مسئلهٔ وجود راهکار پاسخ را تبدیل به مسئلهٔ وجود نقطهٔ ثابت برای یک تابع بکنند. در این دسته از بازی‌ها، راهبردهای محض هر بازیکن، نه یک مجموعهٔ متناهی، بلکه یک پیوستار است. بنابراین فضای راهبرد مخلوط لزوماً یک مجموعهٔ فشرده نیست و در نتیجه در این حالت، از قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر نمی‌توان استفاده کرد. لذا برخی از نویسندگان با توجه به ویژگی‌های مسئله، به تعمیم قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر پرداخته‌اند و برخی دیگر، ضمن تقریبِ بازی مورد نظر با دنباله‌ای از بازی‌ها، به استفاده از قضیه‌های نقطهٔ ثابت پرداخته‌اند. اما برخی دیگر نیز به اثبات وجودِ ارزش بازی در بازی‌های مجموع–صفر[۱] پرداخته‌اند که ما به‌منظور شفافیت و ساده‌نویسی، ضمن اشاره به تدبیرها و قضیه‌های نقطهٔ ثابت مورد استفاده در این مقاله‌ها در شکل ۳، به برخی از این قضیه‌ها اشاره می‌کنیم.

۳.۲. بازی‌های نامتناهی و ناشمارا با تابع سود ناپیوسته.

محور تدبیرهای استفاده شده در این دسته از بازی‌ها برای اثبات وجود راهکار پاسخ، بر قضیهٔ نقطهٔ ثابت کاکوتانی و تعمیم‌هایی از آن مانند قضیهٔ نقطهٔ ثابت کاکوتانی–فان–گلیکسبرگ[۲] قرار دارد. محتوای برخی از مقاله‌ها بر این تدبیر استوار است که بازی اصلی را با دنباله‌ای از بازی‌ها تقریب زده و به این شیوه، ارزش بازی را تقریب بزنند. برخی مقاله‌ها نیز با توجه به ماهیت مسئله، بر تدبیرهای خاصی استوار هستند. لازم به ذکر است که قضیهٔ نقطهٔ ثابت کاکوتانی، تعمیم قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر برای تابع‌های مجموعه–مقدار است.

قضیه ۵.۲ (نقطهٔ ثابت کاکوتانی، [۳۰]). *فرض کنیم X یک مجموعهٔ محدب، فشرده و ناتهی در $\mathbb{R}^n$ و $\varphi : X \to X$ یک نگاشت مجموعه–مقدار باشد که اولاً نیم‌پیوستهٔ بالایی است و ثانیاً برای هر $x \in X$، $\varphi(x)$ یک زیرمجموعهٔ محدب و ناتهی از X است. در این صورت φ دارای یک نقطهٔ ثابت است.*

در شکل ۳ به تدبیرها و قضیه‌های نقطهٔ ثابت به‌کار رفته برای این دسته از بازی‌ها اشاره شده است.

[۱] zero-sum games [۲] Kakutani-Fan-Glicksberg

قضیه ۶.۲ (کاکوتانی-فان-گلیکسبرگ، [۱]). *فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای ناتهی، فشرده و محدب از یک فضای هاسدورف موضعاً محدب X باشد. همچنین فرض کنیم نگاشت مجموعه-مقدار $\varphi : K \to K$ دارای نمودار بسته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in K$، $\varphi(x)$ یک زیرمجموعهٔ محدب و ناتهی از X است. در این صورت مجموعهٔ نقاط ثابت φ ناتهی و فشرده است.*

قضیه ۷.۲ (نقطهٔ ثابت فان، [۲۵]). *فرض کنیم L یک فضای خطی توپولوژیکی موضعاً محدب و K یک مجموعهٔ محدب فشرده در L باشد. همچنین فرض کنیم $A(K)$ خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های محدب و بستهٔ (ناتهیِ) K باشد. در این صورت برای هر نگاشت مجموعه-مقدار مانند $f : K \to A(K)$ که نیم‌پیوستهٔ بالایی باشد، نقطهٔ $x_\circ \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_\circ \in f(x_\circ)$ است.*

قضیه ۸.۲ (مینی ماکس فان، [۲۶]). *فرض کنیم X و Y دو فضای هاسدورف فشرده و $X \times Y \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. همچنین فرض کنیم برای هر $y \in Y$، $f(x,y)$ روی X شبه‌پیوستهٔ پایینی و برای هر $x \in X$، $f(x,y)$ روی Y شبه‌پیوستهٔ بالایی باشد. در این صورت*

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y) = \max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y)$$

اگر و تنها اگر برای هر دو مجموعهٔ متناهی مانند $X \supseteq \{x_1,\dots,x_n\}$ و $Y \supseteq \{y_1,\dots,y_m\}$ نقاط $x_\circ \in X$ و $y_\circ \in Y$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$f(x_\circ,y_k) \le f(x_i,y_\circ) \qquad (1 \le i \le n, 1 \le k \le m).$$

به‌ویژه اگر f نسبت به $x \in X$ محدب و نسبت به $y \in Y$ مقعر باشد، آن‌گاه تساوی برقرار است.

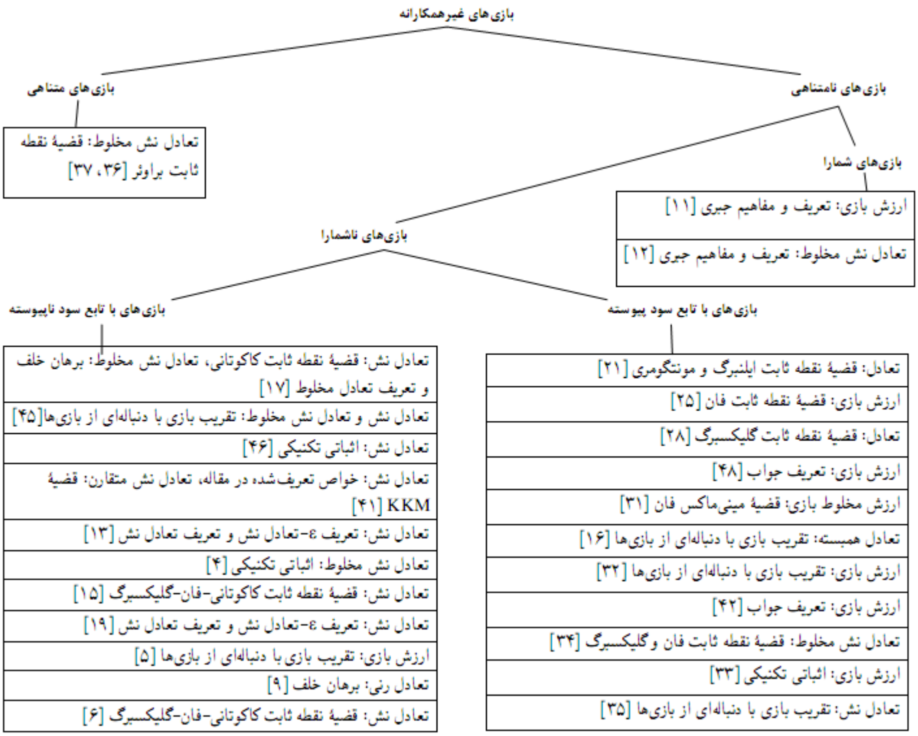
قضیه ۹.۲ (نقطهٔ ثابت گلیکسبرگ، [۲۸]). *هر نگاشت مجموعه-مقدار و محدب $\phi : S \to S$ که در آن، S زیرمجموعهٔ فشرده و محدب از یک فضای توپولوژیکی خطی هاسدورف و موضعاً محدب است، نقطهٔ ثابت دارد.*

قضیه ۱۰.۲ (نقطهٔ ثابت ایلنبرگ و مونتگومری، [۲۴]). *فرض کنیم Y یک درون‌بَر[1] همسایگی مطلق بی‌دور[2] و f یک نگاشت نیم‌پیوستهٔ بالایی باشد که به هر نقطهٔ $y \in Y$ یک زیرمجموعهٔ بی‌دور $f(y)$ از Y را نسبت می‌دهد. در این صورت f یک نقطهٔ ثابت دارد.*

۳. روش‌های جبری در اثبات وجود تعادل نش

همان‌طور که در بخش ۱ اشاره کردیم، یکی از چالش‌های اصلی در بازی‌های غیرهمکارانه (و نیز بازی‌های همکارانه)، اثبات وجود راهکار پاسخ است. روش‌های بیان شده در بخش قبل نشان می‌دهند که

[1] retract [2] acyclic absolute neighborhood



شکل ۳. راهکار پاسخ ارائه‌شده و تدبیر اثبات وجود آنها در بازی‌های غیرهمکارانه

تمرکز همهٔ این تلاش‌ها بر استفاده از قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر و تعمیم‌های آن استوار است. در این بخش، می‌خواهیم به روشی بپردازیم که با روش‌های قبلی متفاوت است و در آن، از ابزارهای جبری استفاده می‌شود. البته استفاده از ساختارهای جبری در حل مسائل در دیگر شاخه‌های ریاضی، از سابقه‌ای دیرینه برخوردار است. اصولاً این رویکرد به‌ابتکار گالوا[1] در پاسخ به سؤالی دربارهٔ حل معادله‌های چندجمله‌ای‌ها توسط چهار عمل اصلی و رادیکال‌ها برمی‌گردد. او به هر چندجمله‌ای، گروهی از جایگشت‌ها را نظیر کرد و سپس نشان داد که اگر این گروه *حل‌پذیر* باشد، آن‌گاه آن معادلهٔ چندجمله‌ای را می‌توان توسط چهار عمل اصلی و رادیکال‌ها حل کرد (و به‌عکس). چنین رویکردی بعدها توسط لی[2] در مورد حل معادلات دیفرانسیل به‌کار رفت که او به هر معادلهٔ دیفرانسیل، یک گروه لی نسبت داد. همچنین برای شناخت توپولوژی خمینه‌ها از گروه‌های کوهمولوژی استفاده شد به این صورت که به هر خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر، یک گروه کوهمولوژی نظیر شد و نشان داده شد که دو خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر همسانریخت هستند اگر و تنها اگر گروه‌های کوهمولوژی آنها یکریخت باشند.

[1] Évariste Galois [2] Sophus Lie

استفاده از ابزارهای جبری در اثبات وجود تعادل نش (که طی مقالهٔ [۱۲] در سال ۲۰۱۳ توسط کاپرارو[۱] و اسکارسینی[۲] مطرح شد) گرچه دوران طفولیت خود را می‌گذرانَد، نویدبخش یک رویکرد گستردهٔ پژوهشی در آینده است. هر سلول از شکل ۳ بیانگر راهکار پاسخ ارائه‌شده و تدبیر اثبات وجود آن توسط شخص مذکور در سلول متناظر در شکل ۲ (در زمینهٔ اثبات وجود راهکار پاسخ در بازی‌های غیر همکارانه) است. در ابتدا به تعریف بازی‌های گروهیِ شمارا می‌پردازیم. *بازی‌های گروهی* به بازی‌هایی گفته می‌شود که در آنها راهبردهای همهٔ بازیکنان، گروهی یکسان باشد. یک بازی گروهیِ شمارا به‌صورت سه‌تایی $\varphi = \langle P, S, (u_i)_{i\in P}\rangle$ است که در آن، مؤلفهٔ اول نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ بازیکنان است که یک مجموعهٔ متناهی است؛ مؤلفهٔ دوم نشان‌دهنده مجموعهٔ راهبردهای بازیکنان است که دارای ساختار یک گروه شمارا است و سرانجام، مؤلفهٔ سوم نشان‌دهندهٔ تابع‌های سود بازیکنان است که تابع‌هایی کراندار هستند و به‌صورت $u_i : S^{|P|} \to [۰,۱]$ تعریف می‌شوند. در اینجا منظور از $|P|$، عدد اصلیِ مجموعهٔ متناهی P است.

حالت شمارای بازی والد را در نظر بگیرید که در آن، راهبرد هر بازیکن $\mathbb{Z}$ است. والد [۴۷] ثابت کرد که اگر راهبردهای هر دو بازیکن نامتناهی باشند، آنگاه این بازی فاقد تعادل نش مخلوط است. در واقع این بازی یک بازی گروهیِ شمارا است که تعادل نش مخلوط ندارد. حال برای اثبات وجود تعادل نش مخلوط در بازی‌های گروهیِ شمارا، به سراغ یک رویکرد جبری می‌رویم که بر سه فرض استوار است.

(الف) **راهبرد همهٔ بازیکنان، یک گروه شمارا باشد:** در بازی‌های شمارا، راهبردهای بازیکنان یک مجموعهٔ شمارا است. چون نام راهبردها در روند یافتن راهکار پاسخ مؤثر نیست، بنابراین می‌توان به‌سادگی یک گروه شمارا (مثلاً $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{Q}$) را به مجموعهٔ راهبردهای بازیکنان نظیر کرد.

(ب) **تابع‌های سود بر اساس عملگر گروه مجموعه راهبردهای بازیکنان باشند:** اگر عملگر به‌کار رفته در تعریف تابع سود، متفاوت با عملگر گروه مجموعهٔ راهبردهای بازیکنان بود، می‌توان از تابع‌های کمکی $\eta = (\eta_۱, \ldots, \eta_{|P|})$ برای تبدیل آن عملگر به عملگر گروه استفاده کرد. فرض کنیم $(G, *)$ یک گروه شمارا باشد. تعریف می‌کنیم

$$\eta_۱, \ldots, \eta_{|P|} : G \to G.$$

همچنین داریم $\phi_i : G \to [۰,۱]$ و $\phi = (\phi_۱, \ldots, \phi_{|P|})$ که در آن، ϕ_iها تابع‌هایی هستند که بر اساس عملگر گروه مجموعهٔ راهبردهای بازیکنان تعریف می‌شوند. قرار می‌دهیم

$$(u_i)^\eta(x_۱, \ldots, x_{|P|}) = \phi_i(\eta_۱(x_۱) * \cdots * \eta_{|P|}(x_{|P|}))_{i\in P}. \qquad (۱.۳)$$

[۱] Albert Capraro [۲] Marco Scarsini

در این صورت برای $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_{|P|})$ سود بازی از طریق رابطهٔ (۱.۳) محاسبه می‌شود.

(پ) راهبردهای مخلوط بازیکنان، متناهی‌جمعی باشند: راهبرد مخلوط بازیکنان، اندازه‌های احتمال روی مجموعهٔ توانی S است که در اینجا اندازهٔ احتمال متناهی‌جمعی مورد نظر است. فرض کنیم $\rho(S)$ فضای همهٔ اندازه‌های احتمال متناهی‌جمعی روی مجموعهٔ توانی S باشد که فضای *راهبردهای مخلوط* نام دارد. برای $\mu_1,\ldots,\mu_{|P|}\in\rho(S)$ اندازهٔ حاصل‌ضربی $\otimes_{i=1}^{|P|}\mu_i$ را می‌توان به‌طور غیریکتا به مجموعهٔ توانی $S\times\cdots\times S$ توسعه داد. از سوی دیگر، سود انتظاریِ بازی در فضای مخلوط به‌صورت $\int_{S\times\cdots\times S} ud\otimes_{i=1}^{|P|}\mu_i$ است. بنابراین روشن است که توسیع‌های مختلف اندازهٔ حاصل‌ضربی، باعث ایجاد سودهای انتظاری مختلفی در بازی می‌شود. در اینجا یک نمونه توسیع اندازهٔ حاصل‌ضربی را به مجموعهٔ توانی $S\times\cdots\times S$ در نظر می‌گیریم که به‌لحاظ محاسباتی، بسیار ساده است. فرض کنیم $\sum(P)$ فضای جایگشت‌های P باشد، $\nu\in\rho(\sum(P))$، $\mu_1,\ldots,\mu_{|P|}\in\rho(S)$ و برای هر $i\in P$، $u_i:S^{|P|}\to[0,1]$. توسیع مورد نظر برای هر $A\subseteq S\times\cdots\times S$ به‌صورت زیر است:

$$\mu_1\boxtimes_\nu\cdots\boxtimes_\nu\mu_{|P|}(A)=$$
$$\sum_{\pi\in\sum(P)}\nu(\pi)\int_S\cdots\int_S 1_A(x_1,\ldots,x_{|P|})d\mu_{\pi(1)}(x_{\pi(1)})\ldots d\mu_{\pi(|P|)}(x_{\pi(|P|)}).$$

چون هر تابع کراندار روی یک مجموعهٔ شمارا، نسبت به هر اندازه احتمالِ متناهی‌جمعی انتگرال‌پذیر است، پس انتگرال بالا موجود است. برای مطالعهٔ بیشتر در زمینهٔ انتگرال‌گیری نسبت به اندازه‌های احتمال متناهی‌جمعی، به [۸، ۲۰، ۲۳، ۲۹] رجوع کنید. توسیع مخلوط بازی گروهیِ شمارا را با $\varphi(P,S,\phi,\nu)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. گروه شمارای $(G,*)$ یک FC-گروه است اگر برای هر $g\in G$، ردهٔ تزویج g، یعنی مجموعهٔ $\{h*g*h^{-1}:h\in G\}$ متناهی باشد.

یادآوری می‌کنیم که اگر $(G,*)$ یک گروه شمارا باشد، $A\subseteq G$ و $g\in G$، آن‌گاه

$$g*A:=\{g*a:a\in A\},\qquad A*g:=\{a*g:a\in A\}.$$

تعریف ۲.۳. اندازهٔ احتمال متناهی‌جمعی μ روی مجموعهٔ توانی گروه شمارای $(G,*)$

- *میانگینِ چپ-ناوردا* نام دارد اگر

$$\forall g\in G,\forall A\subseteq G:\qquad \mu(A)=\mu(g*A)$$

- *میانگینِ راست–ناوردا* نام دارد اگر

$$\forall g \in G, \forall A \subseteq G: \qquad \mu(A) = \mu(A * g)$$

- *میانگین–ناوردا* نام دارد اگر میانگینِ چپ–ناوردا و میانگینِ راست–ناوردا باشد.

ردهٔ میانگین‌های ناوردا روی G را با $\tau(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۳. گروه شمارای $(G, *)$ *میانگین‌پذیر*[1] خوانده می‌شود اگر یک میانگین چپ ناوردا داشته باشد.

از جمله FC–گروه‌های تابعی می‌توان به گروه‌های آبلی اشاره کرد. گروه‌های آبلی توسط بِیر[2] [۳] و نیومن[3] [۳۹] معرفی شدند.

حال به بیان قضیهٔ اصلی می‌پردازیم که در آن تحت شرایط کاملاً جبری، وجود تعادل نش مخلوط برای بازی‌های گروهیِ شمارا ثابت می‌شود.

قضیه ۴.۳ ([۱۲]). *اگر G یک FC–گروه تابعی شمارا باشد، آن‌گاه $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{|P|})$ یک تعادل نش بازی $\varphi(P, G, \phi, \nu)$ است که در آن، $\phi_i : G \to [0, 1]$ و*

$$\int \phi_i d\lambda_i = I(\phi_i)^+ = \max\Big\{ \int \phi_i(x) d\alpha(x) : \alpha \in \tau(G) \Big\}$$

به‌طوری که به‌ازای هر $i \in P$، $\lambda_i \in \tau(G)$.

برای تبدیل عملگر تابع‌های سود به عملگر گروه می‌توان از تابع‌های کمکی $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{|P|})$ بهره جست. در این صورت توسیع مخلوط بازی گروهیِ شمارا به‌صورت $\varphi(P, G, \phi, \eta, \nu)$ نشان داده می‌شود که در آن، سود بازیکنان از (۱.۳) محاسبه می‌شود. در این حالت همچنان قضیهٔ ۴.۳ برقرار خواهد بود:

قضیه ۵.۳ ([۱۲]). *اگر G یک FC–گروه تابعیِ شمارا باشد، آن‌گاه بازی $\varphi(P, G, \phi, \eta, \nu)$ یک تعادل نش دارد.*

در حالت شمارای بازی والد، راهبردهای بازیکنان، یعنی گروه $(\mathbb{Z}, +)$ یک گروه آبلی شمارا است و در نتیجه یک FC–گروه تابعیِ شمارا است. در این بازی می‌توان توسط تابع‌های کمکی، تابع سود را بر اساس عملگر گروه بازنویسی کرد و در نتیجه بنابر قضیهٔ ۵.۳، یک تعادل نش مخلوط برای این بازی موجود است. برای مشاهدهٔ مثال‌های بیشتر در این زمینه، به [۱۲] رجوع کنید.

---

[1] Amenable [2] Reinhold Baer [3] Bernard Hermann Neumann

در پایان، اشاره می‌کنیم که می‌توان قضیهٔ ۴.۳ را برای بازی‌های غیرهمکارانهٔ نامتناهی و ناشمارا تعمیم داد. در این صورت وجود تعادل در حالت ناشمارای بازی والد نیز به اثبات می‌رسد. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، [۱۲] را بخوانید.

مراجع

[1] Aliprantis, C. D., Border, K. C., *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

[2] Aumann, R. J., Maschler, M., The bargaining set for cooperative games, *Annals of Mathematics Studies*, **52** (1964), 443–476.

[3] Baer, R., Finiteness properties of groups, *Duke Math. J.*, **15** (1948),1021–1032.

[4] Balder, E. J., An equilibrium closure result for discontinuous games, *Economic Theory*, **48** (2010), 47–65.

[5] Barelli, P., Govindan, S., Wilson, R. B., *Competition for a Majority,* Technical Report 2104, Stanford School of Business, 2012.

[6] Barelli, P., Meneghel, I., A note on the equilibrium existence problem in discontinuous games, *Econometrica*, **81** (2013), 813–824.

[7] Başar, T., Olsder, G. J., *Dynamic Noncooperative Game Theory,* SIAM, 1998.

[8] Bhaskara Rao, K. P. S., Bhaskara Rao, M., *Theory of Charges,* Academic Press, New York, 1983.

[9] Bich, P., Laraki, R., *A unified approach to equilibrium existence in discontinuous strategic games,* Technical Report 12040, Université Panthéon Sorbonne (Paris1), Centre d'Economie de la Sorbonne, 2012.

[10] Brouwer, L. E. J., Über abbildung von mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **71** (1911), 97–115.

[11] Capraro, V., Morrison, K. E., Optimal strategies for a game on amenable semigroups, *Int. J. Game Theory*, **42** (2012), 917–929.

[12] Capraro, V., Scarsini, M., Existence of equilibriain countable games: An algebraic approach, *Games and Eonomic Behavior*, **79** (2013), 163–180.

[13] Carmona, G., On the existence of equilibriain discontinuous games: Three counterexamples, *Int. J. GameTheory*, **33** (2005), 181–187.

[14] Carmona, G., Symposium on: existence of Nash equilibria in discontinuous games, *Economic Theory*, **48** (2011), 1–4.

[15] Carmona, G., Understanding some recent existence results for discontinuous games, *Economic Theory*, **48** (2010), 31–45.

[16] Cotter, K. D., Correlated equilibrium in games with type-dependent strategies, *J. Econ. Theory*, **54** (1991), 48–68.

[17] Dasgupta, P., Maskin, E., The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory, *Rev. Econ. Stud.*, **53** (1986), 1–26.

[18] Davis, M., Maschler, M., The kernel of a cooperative game, *Naval Research Logistics Quarterly*, **12** (1965), 223–259.

[19] De Castro, L. I., Equilibrium existence and approximation of regular discontinuous games, *Economic Theory*, **48** (2010), 67–85.

[20] De Finetti, B., *Probability, Induction and Statistics:The Art of Guessing*, John Wiley & Sons, London, NewYork, Sidney, 1972.

[21] Debreu, G., A social equilibrium existence theorem, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **38** (1952), 886–893.

[22] Debreu, G., *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium,* New Haven and London, Yale University Press, 1959.

[23] Dunford, N., Schwartz, J. T., *Linear Operators: Part I.*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[24] Eilenberg, S., Montgomery, D., Fixed point theorems for multi-valued transformations, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 214–222.

[25] Fan, K., Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **38** (1952), 121–126.

[26] Fan, K., Minimax theorems, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 42–47.

[27] Gillies, D. B., Solutions to general non-zero-sum games, *Annals of Mathematics Studies*, **40** (1959), 47-85.

[28] Glicksberg, I. L., A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 170–174.

[29] Hildebrandt, T. H., On bounded linear functional operations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 868–875.

[30] Kakutani, S., A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 457–459.

[31] Kindler, J., A general solution concept for two-person zero-sum games, *J. Optim. Theory Appl.*, **40** (1983), 105–119.

[32] Maitra, A., Sudderth, W., Finitely additive and measurable stochastic games, *Int. J. Game Theory*, **22** (1993), 201–223.

[33] Maitra, A., Sudderth, W., Finitely additive stochastic games with Borel measurable payoffs, *Int. J. Game Theory*, **27** (1998), 257–267.

[34] Marinacci, M., Finitely additive and epsilon Nash equilibria, *Int. J. Game Theory*, **26** (1997), 315–333.

[35] Myerson, R., Reny, P. J., Sequential equilibria of multi-stage games with infinite sets of types and actions, Unpublished, 2012.

[36] Nash, J., Equilibrium points in n-person games, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **36** (1950) , 48–49.

[37] Nash, J., Non-cooperative games, *Annals of Mathematics Studies*, **54** (1951), 286-295.

[38] Nash, J., The bargaining problem, *Econometrica*, **18** (1950), 155–162.

[39] Neumann, B. H., Groups with finite classes of conjugate elements, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **1** (1951),178–187.

[40] Neumann, J. V., Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton university press, 1944.

[41] Reny, P. J., On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibriain discontinuous games, *Econometrica*, **67** (1999), 1029–1056.

[42] Schervish, M. J., Seidenfeld, T., *A fair minimax theorem for two-person (zero-sum) games involving finitely additive strategies.* In: Berry, D. A., Chaloner, K. M., Geweke, J. K. (eds.), Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics. John Wiley & Sons, New York, 557–568, 1996.

[43] Schmeidler, D., The nucleolus of a characteristic function game, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **17** (1969), 1163–1170.

[44] Shapley, L. S., A value for n-person games, *Annals of Mathematics Studies*, **28** (1953), 307–317.

[45] Simon, L. K., Games with discontinuous payoffs, *Rev. Econ. Stud.*, **54** (1987), 569–597.

[46] Simon, L. K., Zame, W. R., Discontinuous games and endogenous sharing rules, *Econometrica*, **58** (1990), 861–872.

[47] Wald, A., Generalization of a theorem by von Neumann concerning zero-sum two person games, *Annals of Math.*, **46** (1945), 281–286.

[48] Yanovskaya, E. B., The solution of infinite zero-sum two-person games with finitely additive strategies, *Theory Probab. Appl.*, **15** (1970), 153–158.

مهدی‌رضا درویش‌زاده: دانشگاه تهران، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
رایانامه: darvishzadeh@khayam.ut.ac.ir

بنفشه راستگو: دانشگاه تهران، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
رایانامه: b.rastgou@ut.ac.ir